

**УДК 629.7.0187**

**Решение задачи оптимизации управления пространственным движением легкого самолета на основе принципа минимума**

**Понтрягина**

В.Н.Баранов, Зо Лин У

В статье рассматривается задача разработки и реализации алгоритма управления легким самолетом, который должен парировать случайные атмосферные возмущения, вызывающие отклонение траектории полета от полетного задания. Приведено численное решение двухточечной краевой задачи канонической системы принципа максимума Понтрягина

Ключевые слова: уравнений движения центра масс самолета, терминальный оптимизирующий функционал, гамильтониан, сопряженная переменная.

В настоящее время одной из актуальных научно-технических проблем является создание малогабаритных легких самолетов, предназначенных для мониторинга природных и техногенных катастроф. Для эффективного решения данной задачи осуществляется выбор и реализация оптимальных траекторий полета. Предлагается алгоритм решения задачи оптимального управления полетом легкого самолета с целью наиболее точной реализации выбранной программной траектории в условиях воздействия на самолет различных возмущений. Представлено решение указанной задачи с использованием принципа максимума Понтрягина.

## 1. Решение задачи оптимизации управления на основе принципа минимума Понтрягина.

При летных испытаниях возникает проблема оптимизации планирования экспериментальных исследований, включающая, в частности, задачу наиболее полной и точной реализации выбранных режимов и маршрутов полета самолета.

Отклонения от выбранной программы полета обусловлены в первую очередь воздействием различных возмущающих факторов. При этом основными из них являются атмосферные возмущения, а также отклонения начальных условий движения от расчетных значений. Для решения поставленной задачи могут быть использованы фундаментальные результаты теории оптимального управления [2], в частности, принцип оптимальности Понтрягина.

### Условные обозначения

$m, G$  – масса и вес самолета соответственно;

$V_K, V$  - земная и воздушная скорость;

$\Theta$  - угол наклона траектории к горизонту;

$\Psi$  - угол пути;

$\alpha, \beta$  - углы атаки и скольжения;

$\gamma_a$  - скоростной угол крена;

$P$  - тяга двигателя;

$\rho$  - плотность воздуха;

$L, z$  - продольная и боковая дальность полета;

$y$  - высота полета;

$C_{x_a}$  - коэффициент аэродинамической продольной силы;

$C_{y_a}, C_{z_a}$  - коэффициент аэродинамической подъемной и боковой силы;

$C_{y_a}^\alpha, C_{z_a}^\beta$  - частные производные коэффициентов аэродинамической нормальной и поперечной силы по углу атаки и скольжения соответственно;

$R$  – расстояние между центром масс самолета на возмущенной и номинальной траектории;

$J$  – оптимизирующий функционал;

$X$  – фазовый вектор;

$u$  – управление;

$H$  – гамильтониан;

$\lambda$  – сопряженная переменная.

Математическая модель движения самолета может быть представлена в следующей форме [4]:

$$\begin{aligned} \frac{dV_k}{dt} &= \frac{1}{m} (P \cos \alpha \cos \beta - C_{x_a} \frac{\rho V^2}{2} S - G \sin \theta); \\ mV_k \frac{d\theta}{dt} &= (P \sin \alpha + C_y \frac{\rho V^2}{2} S) \cos \gamma_a + (P \cos \alpha \sin \beta - C_z \frac{\rho V^2}{2} S) \sin \gamma_a - G \cos \theta; \\ -mV_k \cos \theta \frac{d\Psi}{dt} &= (P \sin \alpha + C_y \frac{\rho V^2}{2} S) \sin \gamma_a - (P \cos \alpha \sin \beta - C_z \frac{\rho V^2}{2} S) \cos \gamma_a; \\ (1) \\ \frac{dL}{dt} &= V_k \cos \theta \cos \Psi; \\ \frac{dy}{dt} &= V_k \sin \theta; \\ \frac{dz}{dt} &= -V_k \cos \theta \sin \Psi. \end{aligned}$$

При решении поставленной задачи ограничимся рассмотрением лишь уравнений движения центра масс самолета, т.е. будем считать, что система угловой стабилизации работает идеально. При таком допущении можно в качестве компонент вектора управления считать суммарный угол атаки и угол крена.

Критерий оптимальности представляется в виде следующего оптимизирующего функционала:

$$J = R = \left[ (L_* - L)^2 + (y_* - y)^2 + (z_* - z)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

где  $L_*, y_*, z_*$ , - координаты самолета, соответствующие заданной программной траектории полета.  $L, y, z$  - координаты самолета на возмущенной траектории реального полета.

Для решения поставленной задачи воспользуемся условиями оптимальности управления в форме принципа минимума. С этой целью составим гамильтониан системы [1],[3]:

$$H = \lambda^T f = \lambda_1 \frac{dV}{dt} + \lambda_2 \frac{d\Theta}{dt} + \lambda_3 \frac{d\Psi}{dt} + \lambda_4 \frac{dL}{dt} + \lambda_5 \frac{dy}{dt} + \lambda_6 \frac{dz}{dt}, \quad (3)$$

где  $\lambda^T = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$  - сопряженный вектор.

Учитывая, что величина угла атаки на практике не превышает величину порядка  $20^\circ$ , можно положить  $P \sin \alpha = P\alpha, P \cos \alpha = P$ . Кроме того, при формировании алгоритмов управления не будем рассматривать угол скольжения, который в дальнейшем будет учитываться при моделировании процесса управления самолетом с учетом атмосферных возмущений, в частности, ветра.

В качестве компонент вектора управления, как отмечалось, принимаются угол атаки и скоростной угол крена.

Выделим из выражении (3) слагаемые, содержащие управление

$$H(\alpha, \gamma_a) = \lambda_2 \frac{1}{mV_K} \left( P\alpha + C_{y_a}^\alpha \frac{\rho V^2}{2} S \right) \cos \gamma_a - \lambda_3 \frac{1}{mV_K \cos \Theta} \left( P\alpha + C_{y_a}^\alpha \frac{\rho V^2}{2} S \right) \sin \gamma_a \quad (4)$$

Структура оптимального определяется из условия минимума гамильтониана:

$$u = \arg \min_{\tilde{u}} H(X, \lambda, \tilde{u}), \quad (5)$$

где  $X$  – фазовый вектор размерности  $(6 \times 1)$ ,  $\tilde{u}$  - произвольное управление.

Нетрудно видеть, что угол атаки входит в выражение (4) линейно, причем  $\left( P + C_{y_a}^\alpha \frac{\rho V^2}{2} S \right) \neq 0$  т.е. особое управление отсутствует. Таким образом, оптимальное значение угла атаки оказывается равным его предельно допустимому значению.

Для определения оптимального значения угла крена рассмотрим часть гамильтониана, непосредственно используемую для нахождения оптимального значения угла  $\gamma_a$

$$\Delta H(\gamma_a) = \lambda_2 \cos \gamma_a - \frac{\lambda_3}{\cos \Theta} \sin \gamma_a. \quad (6)$$

Введем обозначения

$$A_1 = \lambda_2, B_1 = -\frac{\lambda_3}{\cos \Theta}. \quad (7)$$

Непосредственно из условия минимума выражения (6) по  $\gamma_a$   $\left(\frac{\partial \Delta H(\gamma_a)}{\partial \gamma_a} = 0\right)$  определяется структура оптимального управления  $\gamma_{a_{opt}}$ .

$$\gamma_{a_{opt}} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{sign}(B_1), & A_1 = 0; \\ \text{arctg}\left(\frac{B_1}{A_1}\right), & A_1 \neq 0. \end{cases} \quad (8)$$

Для окончательного определения оптимального управления необходимо знание сопряженного вектора. В этом случае приходится решать двухточечную краевую задачу в виде системы канонических уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda}, & X(t_0) &- \text{задано} \\ \dot{\lambda} &= -\frac{\partial H}{\partial X}, & \lambda(t_f) &= \frac{\partial J(t_f)}{\partial X} \end{aligned} \quad (9)$$

Известно, что решение двухточечной краевой задачи сопряжено с определенными вычислительными трудностями и требует реализации некоторого итерационного вычислительного процесса, что является нежелательным с технической точки зрения.

## 2. Решение краевой задачи для канонической системы уравнений характеристик

Учитывая, что гамильтониан не зависит от дальности полета и бокового отклонения, а также пренебрегая зависимостью плотности атмосферы от высоты, можно считать что

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial L} = 0; \quad \frac{d\lambda_5}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0; \quad \frac{d\lambda_6}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0. \quad (10)$$

т.е.  $\lambda_4 = C_4, \lambda_5 = C_5, \lambda_6 = C_6$  (11)

где  $C_4, C_5, C_6$  – константы, подлежащие определению.

Кроме того, в рассматриваемой задаче время окончания процесса управления не фиксировано, поэтому гамильтониан равен нулю, что позволяет выразить одну из сопряженных переменных, например первую, через остальные сопряженные переменные:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\frac{dV_K}{dt}} \left( \lambda_2 \frac{d\Theta}{dt} + \lambda_3 \frac{d\Psi}{dt} + C_4 \frac{dL}{dt} + C_5 \frac{dy}{dt} + C_6 \frac{dz}{dt} \right) \quad (12)$$

Таким образом, полная система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dV_K}{dt} &= \frac{1}{m} \left( P \cos \alpha - C_{x_a} \frac{\rho V^2}{2} S - G \sin \Theta \right); \\ mV_K \frac{d\Theta}{dt} &= \left( P \sin \alpha + C_{y_a}^\alpha \alpha \frac{\rho V^2}{2} S \right) \cos \gamma_a - G \cos \Theta; \\ -mV_K \cos \Theta \frac{d\Psi}{dt} &= \left( P \sin \alpha + C_{y_a}^\alpha \alpha \frac{\rho V^2}{2} S \right) \sin \gamma_a; \\ \frac{dL}{dt} &= V_K \cos \Theta \cos \Psi; \\ \frac{dy}{dt} &= V_K \sin \Theta; \\ \frac{dz}{dt} &= -V_K \cos \Theta \sin \Psi; \\ \frac{d\lambda_2}{dt} &= -\lambda_1 \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \frac{dV_K}{dt} \right) - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \frac{d\Theta}{dt} \right) - \lambda_3 \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \frac{d\Psi}{dt} \right) - C_4 \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \frac{dL}{dt} \right) - C_5 \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \frac{dy}{dt} \right) - C_6 \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \frac{dz}{dt} \right); \\ \frac{d\lambda_3}{dt} &= -C_4 \frac{\partial}{\partial \Psi} \left( \frac{dL}{dt} \right) - C_6 \frac{\partial}{\partial \Psi} \left( \frac{dz}{dt} \right); \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \frac{dV_K}{dt} \right) &= V_{K,\Theta} = -\frac{G \cos \Theta}{m} \Big|_{\Theta}; \\ \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \frac{d\Theta}{dt} \right) &= \ddot{\Theta}_{t\Theta} = \frac{G \sin \Theta}{mV_K} \Big|_{\Theta}; \\ \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \frac{d\Psi}{dt} \right) &= \ddot{\Psi}_{t\Theta} = -\frac{\sin \Theta}{mV_K \cos^2 \Theta} \left( P \sin \alpha + C_{y_a}^\alpha \alpha \frac{\rho V^2}{2} S \right) \sin \gamma_a \Big|_{\Theta}; \\ \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \frac{dL}{dt} \right) &= \ddot{L}_{t\Theta} = -V_K \sin \Theta \cos \Psi \Big|_{\Theta}; \\ \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \frac{dy}{dt} \right) &= \ddot{y}_{t\Theta} = V_K \cos \Theta \Big|_{\Theta}; \\ \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \frac{dz}{dt} \right) &= \ddot{z}_{t\Theta} = V_K \sin \Theta \sin \Psi \Big|_{\Theta}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \Psi} \left( \frac{dL}{dt} \right) = \ddot{L}_{r\Psi} = -V_K \cos \Theta \sin \Psi \Big|_{\Psi};$$

$$\frac{\partial}{\partial \Psi} \left( \frac{dz}{dt} \right) = \ddot{z}_{r\Psi} = -V_K \cos \Theta \cos \Psi \Big|_{\Psi}.$$

При моделировании строилась программа оптимального управления, обеспечивающая переход из точки с заданными координатами в другую заданную точку (построение маршрута полета либо попадающей траектории). Результаты моделирования приведены на рис. 1-4. На рис.1 показано изменение динамических параметров самолета на полученной оптимальной траектории. На рис.2 приведена проекция оптимальной траектории на местную горизонтальную плоскость. На рис.3 показано изменение сопряженных переменных при решении краевой задачи. На рис.4 приведена пространственная оптимальная траектория .

При расчетах использовались следующие граничные условия:

$$V_K(t_0) = 50(\text{м/с})$$

$$\Theta(t_0) = 1(\text{град})$$

$$\Psi(t_0) = -1(\text{град})$$

$$L(t_0) = 0(\text{м})$$

$$y(t_0) = 50(\text{м})$$

$$z(t_0) = 0(\text{м})$$

$$L(t_f) = 104(\text{м})$$

$$y(t_f) = 50(\text{м})$$

$$z(t_f) = 104(\text{м})$$

$t_0$  - начальный момент времени.

$t_f$  - конечный момент времени.

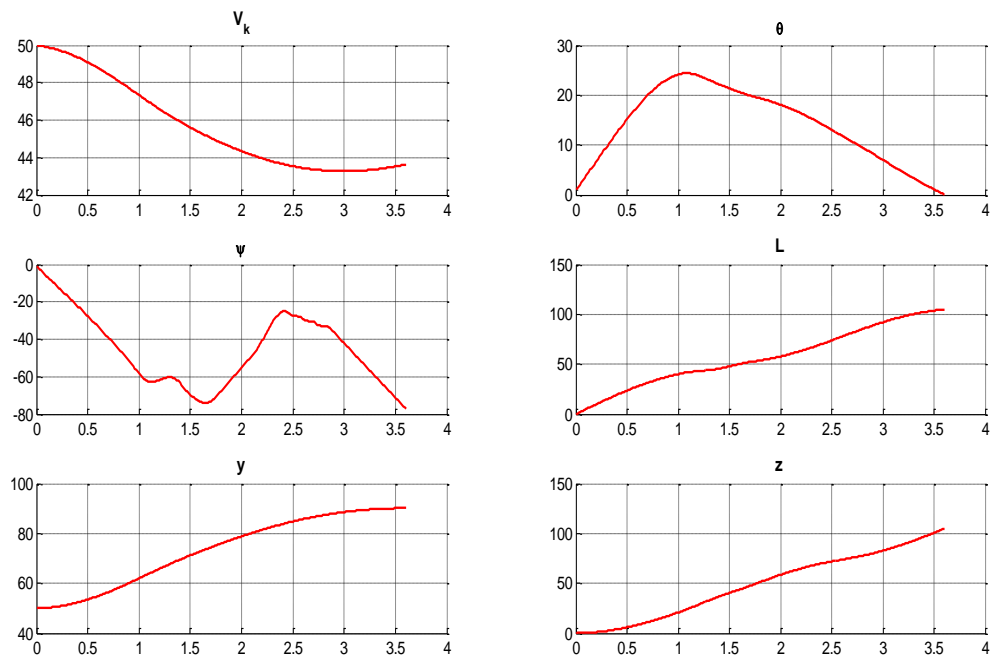


Рис.1

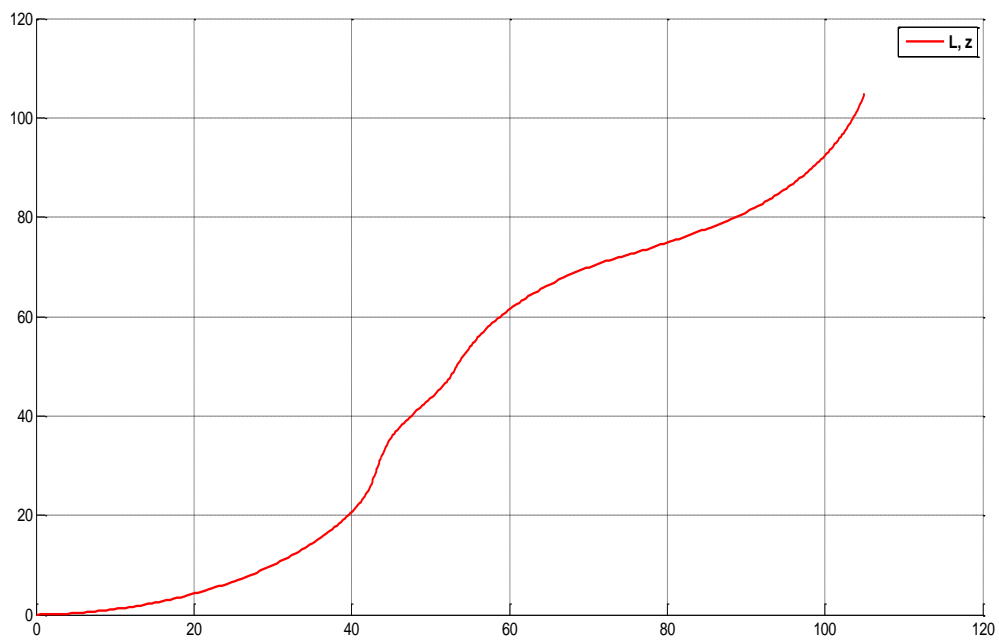


Рис.2



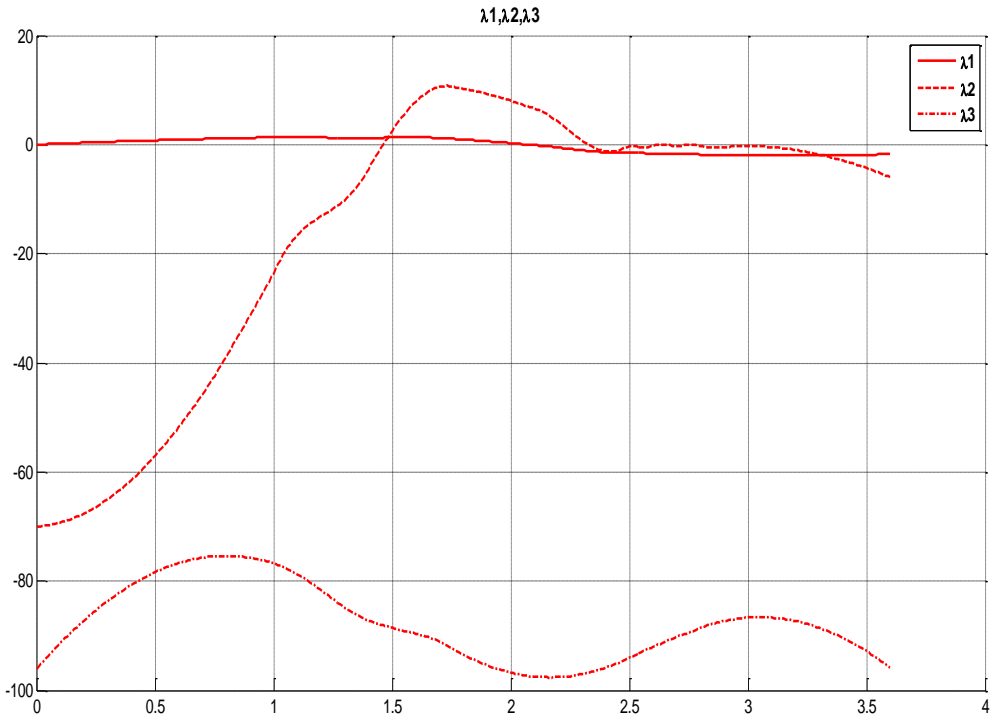


Рис.3

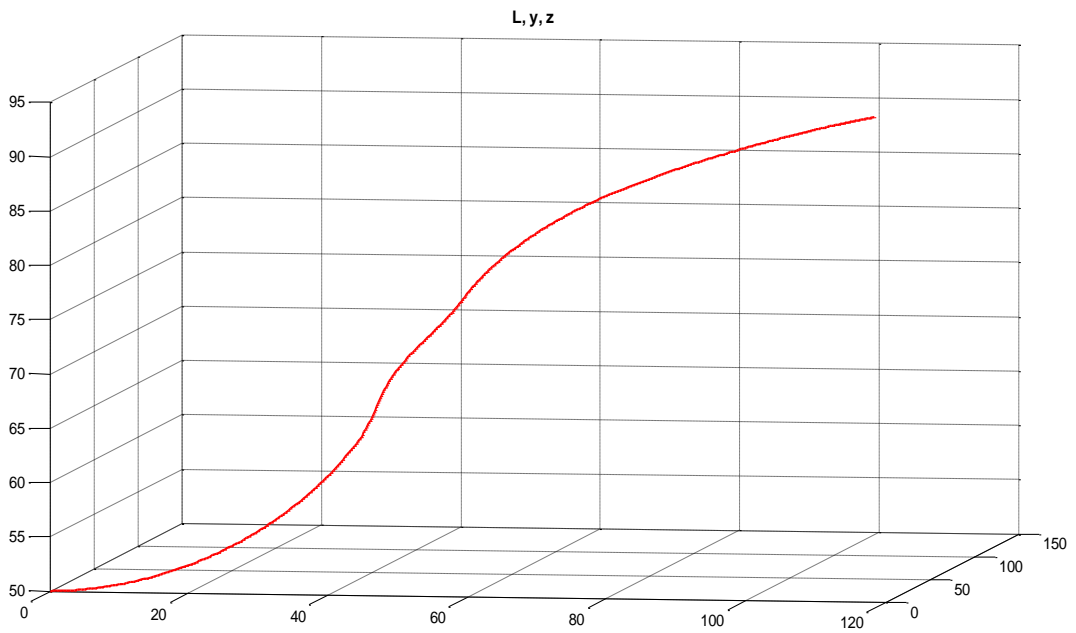


Рис.4

## Выводы

Разработан алгоритм оптимального управления самолетом при его летных испытаниях, основанный на решении краевой оптимизационной задачи. На основе проведенного математического моделирования установлено, что предложенный алгоритм оптимального управления позволяет обеспечить необходимые точностные характеристики реализации траектории полета самолета при летных испытаниях, а также может быть применен для отработки заданного маршрута полета самолета при мониторинге районов возможных природных и техногенных катастроф.

## Библиографический список

1. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.- Наука. 1967.
2. Берестов Л.М., Горин В.В. Моделирование динамики управляемого полета на летающих лабораториях. М.: Машиностроение, 1988. 110 с.
3. Лебедев А.А., Красильщиков М.Н., Малышев В.В.. Оптимальное управление движением космических летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1974, 199 с.
4. Остославский И.В., Стражева И.В.. Динамика полета (траектории летательных аппаратов). М.: Машиностроение, 1969, 499 с.

Сведения об авторах

**Баранов Вячеслав Николаевич**

*Зо Лин У*, аспирант Московского авиационного института (государственного технического университета), e-mail: [zaw.lin@mail.ru](mailto:zaw.lin@mail.ru)