УДК 536.212

Распределение температуры в теле эллиптического сечения с внутренними стационарными источниками теплоты при граничных условиях третьего рода

А.И. Канарейкин

Российский государственный геологоразведочный университет имени Серго Орджоникидзе (МГРИ), Москва, 117997, Россия
e-mail: kanareykins@mail.ru

DOI: 10.34759/tpt-2021-13-5-226-229

Поступила в редакцию 30.04.2021
После доработки 20.05.2021
Принята к публикации 21.05.2021

Проводится расчет температурного поля в теле эллиптического сечения с внутренними источниками теплоты. Граничные условия заданы температурой окружающей среды и законом теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Решение находиться при переходе к системе эллиптических координат. Получено решение распределения температурного поля в теле с эллиптическим поперечным сечением бесконечной длины. Достоверность полученного результата подтверждается тем, что частное решение совпадает с решением, полученным в одной из работ автора для случая распределения температурного поля в теле с эллиптическим поперечным сечением бесконечной длины при граничных условиях первого рода.

Ключевые слова: теплообмен, температурное поле, эллиптическое сечение, граничные условия третьего рода, эллиптический интеграл.

Введение

На данный момент известно, что для наилучшего охлаждения элементов необходима большая поверхность для теплоотдачи. Поверхность может быть увеличена либо оребрением, либо посредством замены стержней круглого сечения, которые имеют минимальную площадь, на другие стержни с увеличенным сечением, например с овальным или эллиптическим сечением.

Основные положения теории переноса тепла и массы разрабатывались в течение длительного времени. Основы теплопроводности и использования данного качества для описания состояний различных тел, в том числе эллиптической формы, а также особенности использования для технологических задач, направленных на перенос массы и тепла, были сформулированы в [1–4].

Вопросам расчета температурных полей в телах эллиптического сечения при наличии внутренних источников тепла при различных условиях посвящено несколько работ [5, 6]. Данная статья является продолжением работы [7].

Основной задачей данной работы является нахождение распределения температурного поля в теле с эллиптическим поперечным сечением бесконечной длины при граничных условиях третьего рода. При этом задача является стационарной.

Математическая постановка задачи

Будем искать распределение температуры в бесконечно длинном теле, сечение которого представляет собой эллипс с полуосями a и b. Рассматриваемое тело находится в среде с температурой T_0. Внутри тела действует одинаковый источник тепла удельной мощность q_v.

Что бы найти распределение температуры, необходимо решить уравнение Пуассона, которое является дифференциальным уравнением в частных производных:

$$\Delta T + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \qquad (1)$$

Граничное условия третьего рода задано температурой окружающей среды T_0 и законом теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой:

$$-\lambda \mathrm{grad} T = h(T - T_0). \qquad (2)$$

Построение решения задачи

Для получения формулы, описывающей температурное поле, перейдем к эллиптической системе координат. Уравнение Пуассона в эллиптических координатах имеет вид

$$\frac{1}{c^2(\mathrm{ch}^2\alpha + \cos^2\beta)}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial\beta^2}\right) = -\frac{q_v}{\lambda}, \qquad (3)$$

а граничное условие (2) примет вид

$$-\lambda \frac{1}{c\sqrt{\mathrm{ch}^2\alpha_0 - \cos^2\beta}} \frac{\partial T}{\partial\alpha} = h(T - T_0). \qquad (4)$$

Подстановка вида

$$T = U(\alpha,\beta) - \frac{q_v c^2}{4\lambda}\left(\mathrm{sh}^2\alpha + \cos^2\beta\right) \qquad (5)$$

преобразует уравнение (3) в уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\beta^2} = 0. \qquad (6)$$

Решение уравнения (6) дается зависимостью

$$U(\alpha,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n \mathrm{ch} n\alpha \cos n\beta + B_n \mathrm{sh} n\alpha \sin n\beta\right). \qquad (7)$$

Из соображений симметрии следует положить $B_n = 0$, тогда

$$U(\alpha,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \mathrm{ch} n\alpha \cos n\beta, \qquad (8)$$

а граничное условие (4) примет вид

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}^2\alpha_0 - \cos^2\beta}}\left(\frac{\partial U}{\partial\alpha} - \frac{q_\upsilon}{4\lambda}c^2 \mathrm{sh} 2\alpha_0\right) = \mathrm{Bi}\left[\frac{q_\upsilon}{4\lambda}c^2(\mathrm{sh}^2\alpha_0 + \cos^2\beta) + T_0 - U\right], \qquad (9)$$

$$\mathrm{Bi} = \frac{hc}{\lambda},$$

где Bi – число Био; h – коэффициент теплоотдачи между средой и поверхностью тела.

Постоянные A_n найдём из граничного условия (9):

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}^2\alpha_0 - \cos^2\beta}}\sum_{n=0}^{\infty} nA_n \mathrm{sh} n\alpha_0 \cos n\beta = -\frac{q_\upsilon}{4\lambda}c^2 \mathrm{sh} 2\alpha_0 = \mathrm{Bi}\left[\frac{q_\upsilon}{4\lambda}c^2(\mathrm{sh}^2\alpha_0 + \cos^2\beta) + T_0 - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \mathrm{ch} n\alpha \cos n\beta\right]. \qquad (10)$$

Так как

$$\sqrt{\mathrm{ch}^2\alpha_0 - \cos^2\beta} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}\cos 2n\beta, \qquad (11)$$

то формула (10) примет вид

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} nA_n \mathrm{sh} n\alpha_0 \cos n\beta - \frac{q_\upsilon}{4\lambda}c^2 \mathrm{sh} 2\alpha_0 = \\
&= \mathrm{Bi}\frac{q_v}{4\lambda}c^2(\mathrm{sh}^2\alpha_0\sqrt{\mathrm{ch}^2\alpha_0 - \cos^2\beta} + \\
&+ \sqrt{\mathrm{ch}^2\alpha_0 - \cos^2\beta}\cos^2\beta) + \\
&+ \mathrm{Bi}T_0\sqrt{\mathrm{ch}^2\alpha_0 - \cos^2\beta} - \\
&- \mathrm{Bi}(\frac{a_0}{2}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \mathrm{ch} n\alpha_0 \cos n\beta + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}\cos 2n\beta \sum_{n=0}^{\infty} B_n \mathrm{sh} n\alpha_0 \cos n\beta),
\end{aligned} \qquad (12)$$

и интегрируя по β от 0 до π, получим

$$\begin{aligned}
&-\frac{q_u\pi}{4\lambda}c^2 \mathrm{sh} 2\alpha_0 = \mathrm{Bi}\frac{c^2 q_u}{4\lambda}\times \\
&\times(\mathrm{sh}^2\alpha_0\int_0^{\pi}\sqrt{\mathrm{ch}^2\alpha_0 - \cos^2\beta}\,d\beta + \\
&+ \int_0^{\pi}\sqrt{\mathrm{ch}^2\alpha_0 - \cos^2\beta}\cos^2\beta\,d\beta) + \\
&+ \mathrm{Bi}T_0\int_0^{\pi}\sqrt{\mathrm{ch}^2\alpha_0 - \cos^2\beta}\,d\beta - \\
&- \mathrm{Bi}\frac{\pi}{2}(a_0 A_0 + \mathrm{ch} 2n\alpha_0 a_{2n} A_{2n}).
\end{aligned} \qquad (13)$$

Для вычисления интеграла в последней формуле используются эллиптические интегралы

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha_0-\cos^2\beta}\,d\beta=2\operatorname{ch}\alpha_0 E\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha_0},\frac{\pi}{2}\right), \quad (14)$$

где E – полный эллиптический интеграл второго рода.

Откуда

$$A_{2n}=\left\{\frac{q_u}{2\lambda}c^2\operatorname{sh}2\alpha_0\pi+4T_0\mathrm{Bi}\operatorname{ch}\alpha_0 E\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha_0},\frac{\pi}{2}\right)+\right.$$
$$+\mathrm{Bi}\frac{q_u}{2\lambda}c^2\operatorname{ch}\alpha_0\left[\operatorname{sh}^2\alpha_0 E\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha_0},\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\operatorname{sh}^2\alpha_0}{3}\times\right. \quad (15)$$
$$\left.\left.\times F\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha_0},\frac{\pi}{2}\right)+E\left(\frac{2-\operatorname{ch}^2\alpha_0}{3}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha_0},\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}:$$
$$:\mathrm{Bi}\pi\operatorname{ch}2n\alpha_0 a_{2n},\ \ n=0,1,2...$$

Коэффициенты a_{2n} определяются по формуле

$$a_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha_0-\cos^2\beta}\cos 2n\beta\, d\beta=\frac{2\operatorname{ch}\alpha_0}{\pi}\times$$
$$\times\left[B\left(\frac{2n+1}{2},\frac{1}{2}\right)F_1\left(\frac{2n+1}{2},-\frac{1}{2},n+1,\frac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha_0}\right)-\right.$$
$$-C_{2n}^2 B\left(\frac{2n-1}{2},\frac{3}{2}\right)\times \quad (16)$$
$$\left.\times F_1\left(\frac{2n-1}{2},-\frac{1}{2},n+1,\frac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha_0}\right)+...\right],$$

где $B(y,z)$ – бэта-функция, $F_1(y,z,m;k)$ – гипергеометрическая функция.

Окончательно искомое распределение температуры описывается уравнением

$$T(\alpha,\beta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n}\operatorname{ch}2n\alpha\cos 2n\beta-$$
$$-\frac{q_v c^2}{4\lambda}\left(\operatorname{sh}^2\alpha+\cos^2\beta\right). \quad (17)$$

Проведем проверку полученного решения. Для этого устремим число Био к бесконечности, т.е. сведем задачу к задаче с граничным условием первого рода. По формуле (15) найдем нулевой коэффициент A_0:

$$A_0=T_0\,. \quad (18)$$

Остальные члены ряда (17) быстро убывают, поэтому распределение температурного поля примет вид

$$T(\alpha,\beta)=T_0-\frac{q_v c^2}{4\lambda}\left(\operatorname{sh}^2\alpha+\cos^2\beta\right). \quad (19)$$

При этом на поверхности тела температура равна T_0

$$T\big|_{\alpha=\alpha_0}=T_0\,, \quad (20)$$

откуда

$$T=T_0+\frac{q_v c^2}{4\lambda}\left(\operatorname{sh}^2\alpha_0-\operatorname{sh}^2\alpha\right). \quad (21)$$

Таким образом, частное решение совпадает с решением, полученным в работе автора [6] для случая распределения температурного поля в теле с эллиптическим поперечным сечением бесконечной длины при граничных условиях первого рода.

Заключение

В работе рассмотрено решение стационарной задачи о распределении температурного поля в теле с эллиптическим поперечным сечением при граничных условиях третьего рода. Решение получено для стационарного случая в системе эллиптических координат. Достоверность полученного результата подтверждается тем, что частное решение совпадает с решением, полученным в одной из работ автора для случая распределения температурного поля в теле с эллиптическим поперечным сечением бесконечной длины при граничных условиях первого рода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1957. 600 с.
2. **Лыков А. В.** Тепло- и массообмен при фазовых и химических превращениях. В кн. Тепло- и массообмен в процессах испарения / Отв. ред. А. В. Лыков. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 7–14.
3. **Борисов В.Т.** Теория двухфазной зоны металлического слитка. М.: Металлургия, 1987. 224 с.
4. **Журавлёв В.А., Колодкин В.М., Васькин В.В.** Динамика двухфазной зоны металлических сплавов с химическими реакциями // Изв. АН СССР. Сер. Металлы, 1983. Т. 4. № 4. С. 64–68.
5. **Иванов В.В.** Распределение температуры в теле эллиптического сечения с внутренними источниками тепла // Известия ТПУ. 1964. Т. 125. С. 17–20.
6. **Канарейкин А.И.** Распределение температуры в теле эллиптического сечения с внутренним источником тепла при граничных условиях первого рода // Вестник Калужского университета. Серия: естественные науки. 2020. № 2. С. 74–76.
7. **Kanareykin A.** Temperature distribution in an elliptical body with an internal heat source with partial adiabatic isolation // E3S Web of Conferences. 2021. V. 258. 09071. https://doi.org/10.1051/e3sconf/202125809071

Temperature distribution in a body of elliptical cross-section without internal heat sources under boundary conditions of the third kind

A.I. Kanareykin

Sergo Ordzhonikidze Russian State University for Geological Prospecting, Moscow, 117997, Russia
e-mail: kanareykins@mail.ru

The processes of heat transfer and the mass exchange resulting from it play today an important role in both technical sphere and nature. A formidable layer of works is devoted today to the heat exchange processes studying. Of particular scientific interest are the works describing modern heat exchange elements of heat exchange equipment with detailed description of their manufacturing methods, as well as the control of a heat exchanger with variable area of heat exchange surface. A new trend is being formed to date, which implies inclusion of material features and properties in the mathematical models being developed. Thus, functional dependencies are being increasingly included in the of heat and mass transfer processes modeling. It is known currently that a large surface for heat transfer is necessary for the best cooling of the elements. The surface can be enlarged by either finning or replacing the round bars, which have a minimum area, with other bars with an increased cross-section, such as oval or elliptical cross-section.

However, the temperature distribution in an elliptical body is not studied enough. This article deals with the problem of finding the temperature field in a body of elliptical cross-section without internal heat sources. The boundary conditions herewith are boundary conditions of the third kind. The article presents a solution for the temperature field distribution in a body with an elliptical cross-section at a given ambient temperature. The solution was obtained for the case in the system of elliptic coordinates. The obtained result is interesting since the temperature distribution does not depend on the boundary conditions, but is completely determined by the ambient temperature and the geometric size of the body.

Keywords: heat transfer, temperature field, elliptic cross section, boundary conditions of the third kind, elliptic integral.

REFERENCES

1. **Lykov A.V.** *Teoriya teploprovodnosti.* Moscow: Vysshaya shkola Publishing House, 1957. 600 p.
2. **Lykov A.V.** *Heat and mass transfer in phase and chemical transformations. Heat and mass transfer in the processes of evaporation* / ed. A.V. Lykov. Moscow: Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1958. P. 7–14.
3. **Borisov V.I.** *Theory of two-phase zone of the metal ingot.* Moscow: Metallurgiya, 1987. 224 p.
4. **Zhuravlev V.A., Kolodkin V.M., Vaskin V.V.** Dynamics of the two-phase zone of metal alloys with chemical reactions. *Izv. AN SSSR. Ser. Metallii*, 1983, vol. 4, no. 4, pp. 64–68.
5. **Ivanov V.V.** Temperature distribution in an elliptical cross-section body with internal heat sources. *Izvestiya TPU*, 1964, vol. 125, pp. 17–20.
6. **Kanareykin A.I.** Temperature distribution in an elliptical body with an internal heat source under boundary conditions of the first kind. *Bulletin of the Kaluga University, Series: natural sciences*, 2020, no. 2, pp. 74–76.
7. **Kanareykin A.** Temperature distribution in an elliptical body with an internal heat source with partial adiabatic isolation. *E3S Web of Conferences*, 2021, vol. 258, 09071. https://doi.org/10.1051/e3sconf/202125809071