УДК 532.5

Закон подобия в развитом турбулентном пограничном слое

Ле Ван Ха

Московский физико-технический институт, ул. Гагарина, 16, Московская обл., Жуковский, 140180, Россия

e-mail: halevan@mail.ru

Аннотация

Рассмотрен слабонелинейный вариант волновой модели развитого турбулентного пограничного слоя. Определены дисперсионные характеристики волн наименее затухающей моды, на неравномерной сетке решена спектральная задача для уравнения Орра-Зоммерфельда на турбулентном профиле продольной скорости для определения связи между толщиной потери импульса и мнимой частью собственной частоты наименее затухающей моды волн Толлмина-Шлихтинга как функции от числа Рейнольдса. Приведено сравнение с имеющимися экспериментальными данными.

Ключевые слова: несжимаемая вязкая жидкость, турбулентный пограничный слой, уравнение Орра-Зоммерфельда, волны наименее затухающей моды, неравномерная сетка.

Введение

Развитый турбулентный пограничный слой содержит организованные вихревые структуры [1], которые определяют многие физические свойства этого течения. Последние экспериментальные [2] и численные исследования [3] подтверждают наличие когерентных структур. Течение в развитом турбулентном пограничном слое хорошо описывается с помощью системы уравнений Навье-Стокса. Однако решение этих нелинейных уравнений сопряженно с большими трудностями. Одним из возможных альтернативных подходов решения этих уравнений для развитого турбулентного пограничного слоя является волноводная модель [4], [5], [6], [7], в которой сформулирована гипотеза о равенстве по порядку величины касательных напряжений на стенке и максимального значения декремента наименее затухающей моды волн Толлмина-Шлихтинга. Эта гипотеза выражается соотношением $d\delta^{**}/dx = \tau_w/2 = a\left|\max\limits_{\mathbf{k}} \operatorname{Im}\omega(\mathbf{k}, \mathrm{Re}_\delta)\right|$, которое определяет изменение толщины пограничного слоя вниз по течению. Здесь δ^{**} – толщина потери импульса, $\omega_k(k, \mathrm{Re}_\delta)$ – собственное число наименее затухающей моды спектральной задачи для уравнения Орра-Зоммерфельда на турбулентном профиле средней продольной скорости в пограничном слое, τ_w – величина касательных напряжений на стенке, a – постоянная, определяемая из сравнения с экспериментальными данными. Эта гипотеза позволяет выделить когерентную структуру и замкнуть систему моментных уравнений, определяющих среднее поле скорости, динамику когерентных пульсаций и спектральную плотность стохастической составляющей. Работа направлена на проверку этой гипотезы.

1. Для согласования рядов теории возмущений (с физической точки зрения это означает, что учитываются процессы диссипации)согласно с работами [5], [6], [7], в турбулентном пограничном слое (ТПС) должно выполняться следующее соотношение:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_w}{2} = a\left|\max_{\mathbf{k}} \operatorname{Im}\omega(\mathbf{k}, \mathrm{Re}_\delta)\right|, \quad a = O(1)., \tag{1}$$

Здесь δ^{**} - толщина потери импульса, x -продольная координата , τ_w - безразмерное касательное напряжение на стенке, a - коэффициент, определяемый из сравнения с экспериментальными данными, $\omega(\mathbf{k}, \mathrm{Re}_\delta)$ - собственная частота наименее затухающей моды, $\mathbf{k}$ - волновой вектор, Re_δ - число Рейнольдса по толщине δ турбулентного пограничного слоя, определяемой соотношением $U(\delta) = 0.99U_\infty$, U_∞ - скорость набегающего потока. Эта гипотеза позволяет, наряду с другими предположениями [7], построить математическую теорию развитого турбулентного пограничного слоя. В работе делаются оценки, на основании которых можно судить о справедливости этой гипотезы.

Выделим в уравнении (1) форм параметр δ^{**}/δ, получим:

$$\frac{d(\frac{\delta^{**}}{\delta}\delta)}{dx} = aF(\mathrm{Re}_\delta) \quad , \tag{2}$$

где $F(\mathrm{Re}_\delta) = \left|\max_{\mathbf{k}} \mathrm{Im}\,\omega(\mathbf{k}, \mathrm{Re}_\delta)\right|$.

В свою очередь, величина δ^{**}/δ является функцией от Re_δ . Умножим и разделим на $\frac{U_\infty}{\nu}$, учитывая, что $\mathrm{Re}_\delta = \frac{U_\infty \delta}{\nu}$, $\mathrm{Re}_x = \frac{U_\infty x}{\nu}$, получим :

$$\frac{d(\frac{\delta^{**}}{\delta}\mathrm{Re}_\delta)}{d\,\mathrm{Re}_x} = aF(\mathrm{Re}_\delta) \tag{3}$$

Уравнение (3) – обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $\mathrm{Re}_\delta(\mathrm{Re}_x)$ с начальным условием $\mathrm{Re}_\delta\Big|_{\mathrm{Re}_{x_0}} = \mathrm{Re}_{\delta_0}$. Коэффициент *a* определяется из сравнения с экспериментальными данными.

Для того, чтобы решить уравнение (3) нам необходимо определить зависимость $\frac{\delta^{**}}{\delta}(\mathrm{Re}_\delta)$, а так же функцию $F(\mathrm{Re}_\delta) = \left|\max_{\mathbf{k}} \mathrm{Im}\,\omega(\mathbf{k}, \mathrm{Re}_\delta)\right|$.

По определению, толщина потери импульса определяется по формуле:

$$\frac{\delta^{**}}{\delta}(\mathrm{Re}_\delta) = \int_0^1 U(\mathrm{y}, \mathrm{Re}_\delta)\left[1 - U(\mathrm{y}, \mathrm{Re}_\delta)\right] dy \tag{4}$$

U – продольная скорость среднего течения в ТПС, в зависимости от поперечной координаты *y* и числа Рейнольдса, определяемого по толщине δ.

С очень хорошей точностью турбулентный профиль скорости был приведен в работе [9], но только при одном конкретном числе Рейнольса $\mathrm{Re}_{\delta^{**}} = 2450$.

Чтобы определить зависимость $\frac{\delta^{**}}{\delta}(\mathrm{Re}_\delta)$ нам нужен более универсальный профиль скорости, который описывает течение в зависимости от числа Рейнольдса Re_δ. Такой универсальный профиль скорости был получен в работе [10].

$$U\left[y,\mathrm{Re}_\delta\right]=0.99\sqrt{\frac{C_f\left[\mathrm{Re}_\delta\right]}{2}}*\left[\begin{array}{l}5.424\arctan\left[\frac{2y*\delta\delta\nu-8.15}{16.7}\right]+\lg\left[\frac{\left(y*\delta\delta\nu+10.6\right)^{9.6}}{\left(\left(y*\delta\delta\nu\right)^2-8.15y*\delta\delta\nu+86\right)^2}\right]\\-3.51132976630722515+2.44\left(0.14y\wedge2*\left(6-4y\right)+y\wedge2*\left(1-y\right)\right)\end{array}\right] \quad (5)$$

Где $C_f(\mathrm{Re}_\delta)$ - коэффициент трения на поверхности пластины :

$$C_f\left[\mathrm{Re}_\delta^{corr}\right]=\frac{2\kappa^2}{ProductLog\left[\kappa\,\mathrm{Re}_\delta^{corr}\exp(B\kappa+2p)\right]^2},\delta\delta\nu=\sqrt{\frac{Cf\left[\mathrm{Re}_\delta^{corr}\right]}{2}}*\mathrm{Re}_\delta^{corr}, \quad (6)$$

$$\mathrm{Re}_\delta^{corr}=k_0\,\mathrm{Re}_\delta,\ p=0.14,\kappa=0.41,B=5,k_0=0.83.$$

Здесь $ProductLog[x]=\mathrm{w}$ -это специальная функция, которая определяется из решения уравнения $x=we^w$ [15].

В работе введен дополнительный коэффициент $k_0=0.83$ перед Re_δ для наилучшего совпадения профиля (5), (6) с экспериментальными данными, представленными в монографии [9].

Кроме того, существует и другая формулировка для турбулентного профиля скорости с использованием самоподобной аппроксимации и сращивания решений [11] [12], которая тоже хорошо аппроксимирует с экспериментальными данными .

2. Подставляя профиль (5) в формулу (4), мы получим зависимость $\frac{\delta^{**}}{\delta} = \mathrm{f}(\mathrm{Re}_\delta)$.

Аппроксимируем эту кривую степенной функцией $q / \mathrm{Re}_\delta^\theta$. Получим $q \cong 0.1664$ и $\theta \cong 0.05587$. Сравнение с численным результатом показанно на рисунке 1 (точки).

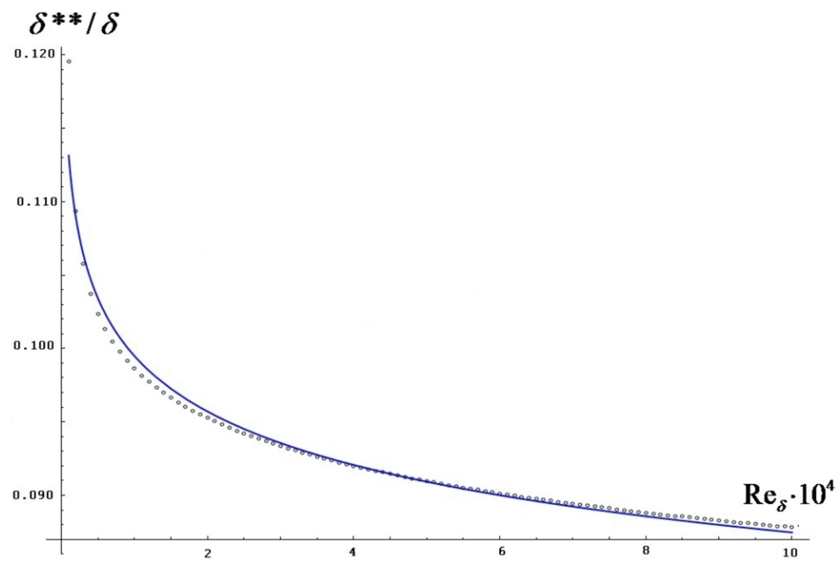

Рис.1: Зависимость $\frac{\delta^{**}}{\delta}(\mathrm{Re}_\delta)$, определенная по профилю (5), (6) (точки), и аппроксимирующая кривая.

Зависимость $F(\mathrm{Re}_\delta) = \left| \max_{\mathbf{k}} \mathrm{Im}\, \omega(\mathbf{k}, \mathrm{Re}_\delta) \right|$ определяется из решения спектральной задачи для уравнения Орра-Зоммерфельда. Спектральная задача определена уравнениями :

$$\left(U(\mathrm{y})-c\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-k^2\right)\varphi-U''(\mathrm{y})\varphi-\frac{1}{i\alpha\,\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-k^2\right)^2\varphi=0,\quad k=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \tag{7}$$

$$\varphi\big|_{y=0}=\varphi'\big|_{y=0}=0,\quad \varphi=\varphi'=0,\mathrm{y}\to\infty. \tag{8}$$

Здесь $U(\mathrm{y})$ средняя продольная скорость, $c=\omega/\alpha$ - фазовая скорость волны Толлмина-Шлихтинга, α,β - соответственно продольное и поперечное волновые числа, φ - вертикальный компонент скорости.

Эта задача решалась ранее в работе [7] методом, предложенным в работе [13], при этом сетка была равномерной. Однако уравнение Орра-Зоммерфельда содержит члены, связанные с скоростью $U(\mathrm{y})$ и её второй производной $U''(\mathrm{y})$. Из рисунка 2 видна особенность профиля скорости: он сильно меняется в очень узкой области вблизи границы. Поэтому для уточнения предлагается деформировать сетку с учетом градиентов.

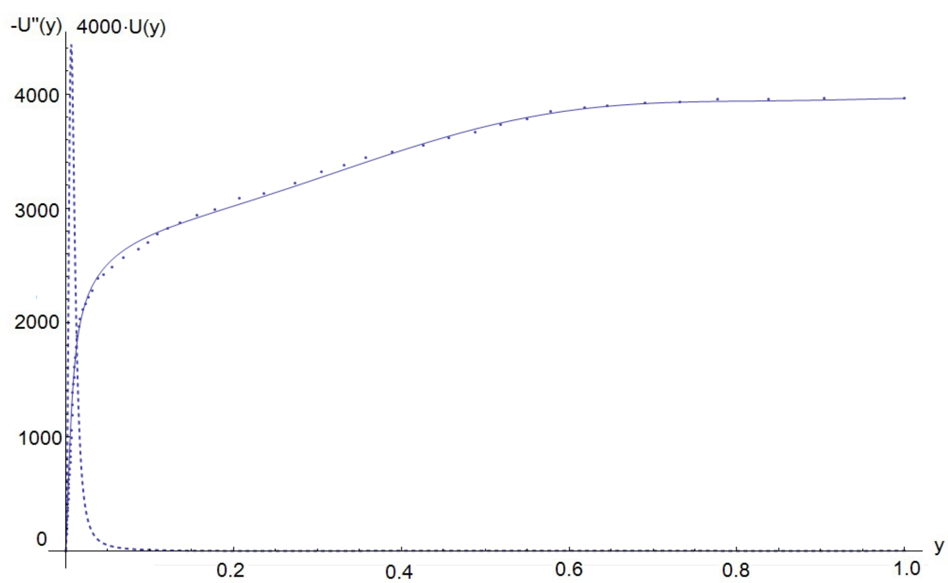

Рис.2: Профиль скорости и её вторая производная при $\mathrm{Re}_{\delta} = 2450$ [8].

—— $4000*U(y)$ - - - - $U''(y)$

● Экспериментальный профиль скорости из монографии [9].

Для решения уравнения (7) с граничными условиями (8) разобьём интервал [13] $y \in [0,1]$ на малые участки некоторым упорядоченным набором точек, проинтегрируем дифференциальное уравнение Орра-Зоммердельда в каждой ячейке от полуузла до полуузла. При вычислении интеграла надо учесть тот факт, что значения функций берутся в центрах ячеек, а значение интеграла вычисляется по формуле :

$$\int_{y_{i+\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} f\varphi dy = \frac{y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}}{2}\left(\left.(f\varphi)\right|_{y_{i+\frac{1}{2}}} + \left.(f\varphi)\right|_{y_{i+\frac{1}{2}}} \right) = \frac{y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}}{2}\left((f\varphi)_{i+\frac{1}{2}} + (f\varphi)_{i-\frac{1}{2}} \right)$$

$$\int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} f\varphi'' dy = \int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} f d\varphi' = \left.(f\varphi')\right|_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} - \int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} f'\varphi' dy$$

$$\varphi_{n+\frac{1}{2}} = \frac{\varphi_n + \varphi_{n+1}}{2}$$

$$\varphi^{(m)}\left[y_{i+\frac{1}{2}} \right] = \frac{1}{y_{i+1} - y_i}\left(\varphi^{(m-1)}[y_{i+1}] - \varphi^{(m-1)}[y_i] \right) = \frac{1}{y_{i+1} - y_i}\left((\varphi^{(m-1)})_{y_{i+1}} - (\varphi^{(m-1)})_{y_i} \right) \qquad (9)$$

$$\varphi'_{y_i} = \frac{(y_i - y_{i-1})\varphi_{y_{i+1}}}{(y_{i+1} - y_i)(y_{i+1} - y_{i-1})} - \frac{(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})\varphi_{y_i}}{(y_i - y_{i+1})(y_i - y_{i-1})} - \frac{(y_{i+1} - y_i)\varphi_{y_{i-1}}}{(y_{i-1} - y_i)(y_{i-1} - y_{i+1})}.$$

$$\varphi''_{y_i} = -\frac{2(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})\varphi_{y+2}}{(y_{i+2} - y_{i+1})(y_{i+2} - y_i)(y_{i+2} - y_{i-1})} - \frac{2(y_{i+2} - 2y_i + y_{i-1})\varphi_{y+1}}{(y_{i+1} - y_{i+2})(y_{i+1} - y_i)(y_{i+1} - y_{i-1})} -$$
$$\frac{2(y_{i+2} + y_{i+1} - 3y_i + y_{i-1})\varphi_{y_i}}{(y_i - y_{i+2})(y_i - y_{i+1})(y_i - y_{i-1})} - \frac{2(y_{i+2} + y_{i+1} - 2y_i)\varphi_{y_{i-1}}}{(y_{i-1} - y_{i+2})(y_{i-1} - y_{i+1})(y_{i-1} - y_i)}$$

Для того чтобы учесть большие градиенты вблизи границы, воспользуемся неравномерной сеткой. С помощью неравномерных сеток определим первые моды уравнения Орра-Зоммерфельда при разных α и Re_δ. Количество узлов $N = 201$. При этом, точки - узлы сеток определяются равномерно по скорости в соответствии с уравнением:

$$U(y_i) = \frac{U[0.05]}{100} i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, 100$$

остальные точки берутся равномерно по y.

В результате получаем систему однородных линейных уравнений, которые замыкаются [14] с помощью дискретизированных условий вида:

$$\begin{cases} \varphi(y_0) = 0, \\ \varphi'(y_0) = 0, \\ \varphi''(y_N) + \mathbf{k}\varphi'(y_N) = 0, \\ \varphi'(y_N) + \mathbf{k}\varphi(y_N) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

При этом полученная матрица (m) имеет вид: $m = m_1 + c.m_2$, спектральная задача для которой определяется соотношением: $m \cdot \mathbf{x} = 0$, $\mathbf{x}$ - собственный вектор задачи, которая далее приводится к стандартному виду

$$(A - \lambda E) \cdot \mathbf{x} = 0. \tag{11}$$

Спектральная задача (11) решается с помощью стандартной программы [13]. Определяя c при разных значениях α, получим закон дисперсии $\omega(\alpha)=\alpha c(\alpha), \omega(\alpha)=\omega_r(\alpha)+i\omega_i(\alpha),\ i^2=-1$. Функция $\omega_i(\alpha)$ изображена на рис. 3.

Найдя положение точек максимума наименее затухающей моды при различных

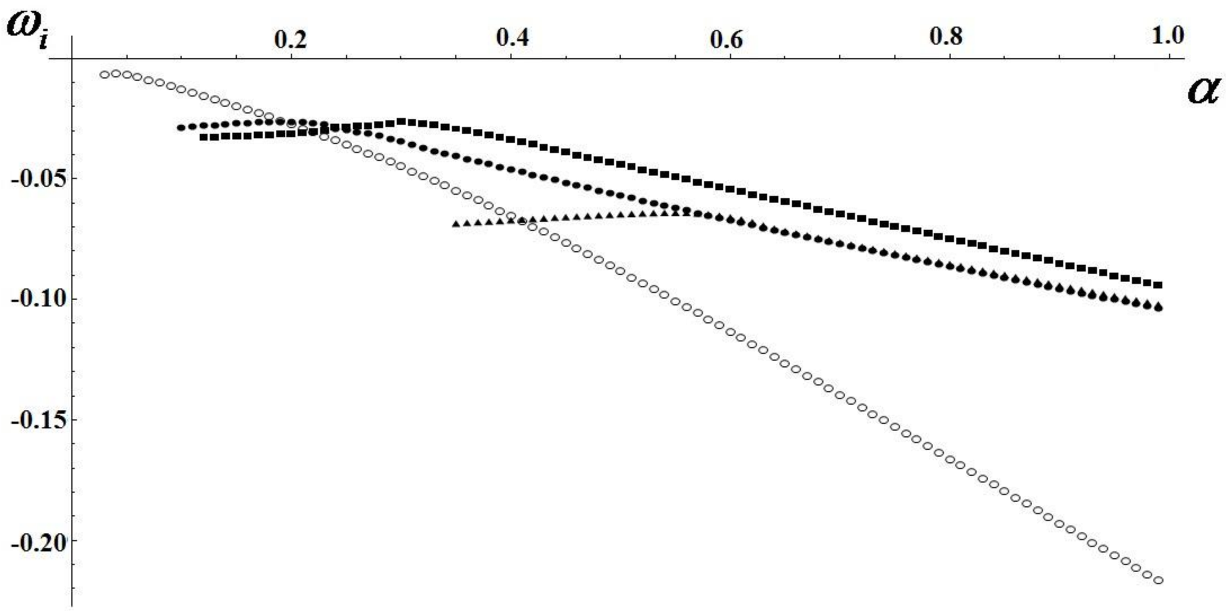

Рис.3: Дисперсионный закон для профиля Мускерапри $\mathrm{Re}_\delta = 25000$.

○ закон дисперсии для первой моды, ● закон дисперсии для второй моды, ■ закон дисперсии для третьей моды, ▲ закон дисперсии для четвертой моды.

значениях Re_δ, мы получим кривую, изображающую зависимость максимума мнимой части собственной частоты от Re_δ для первой моды. Аппроксимируем эту кривую степенной функцией $a_1/\mathrm{Re}_\delta^\mu$. Получим $a_1 \cong 69.42$ и $\mu \cong 0.983$. Сравнение с численным результатом показано на рисунке 4 (точки).

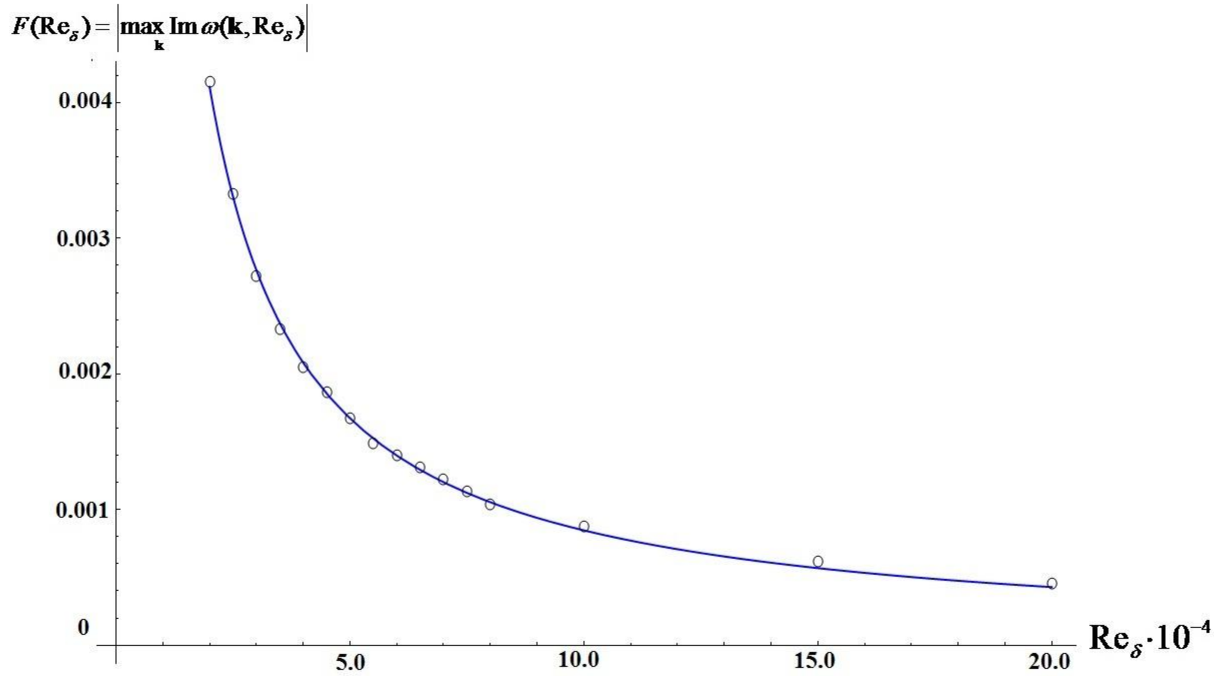

Рис.4: Зависимость $F(\mathrm{Re}_\delta) = \left|\max_{\mathbf{k}} \mathrm{Im}\,\omega(\mathbf{k}, \mathrm{Re}_\delta)\right|$ для первой моды .

3. Подставим зависимости $\dfrac{\delta^{**}}{\delta}(\mathrm{Re}_\delta)$ и $F(\mathrm{Re}_\delta) = \left|\max_{\mathbf{k}} \mathrm{Im}\,\omega(\mathbf{k}, \mathrm{Re}_\delta)\right|$ в ОДУ (3), решая его, при различных значениях a, мы получим разные кривые с различными наклонами. При а = 0.3, мы получим кривую, которая ближе всего к экспериментальным и теоретическим значениям данных, приведенных в монографии [8].

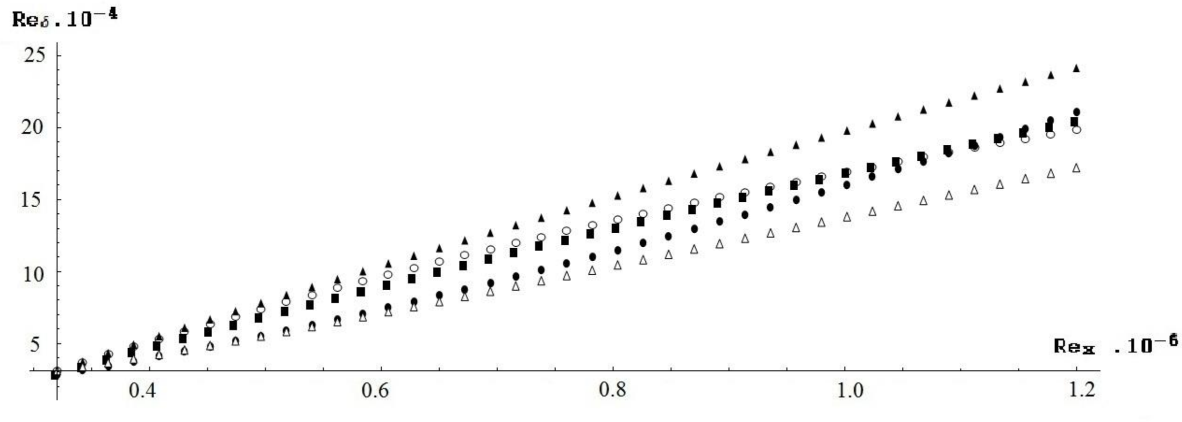

Рис.5: Зависимость $\mathrm{Re}_\delta(\mathrm{Re}_x)$.

○ численный результат, ● закон стенки 1/7, ■ по измерениям Ханзена, △ закон сопротивления для перехода от ламинарного течения к турбулентному, ▲ закон сопротивления Прандтля-Шлихтинга.

На рис.5 изображены кривые зависимости $\mathrm{Re}_\delta(\mathrm{Re}_x)$: Ханзен [8, стр.50], закон стенки 1/7 для пластины [8, стр.574], закон сопротивления Прандтля-Шлихтинга [8, стр.578], закон сопротивления для перехода от ламинарного течения к турбулентному [8, стр. 578] (обобщение закона Прандтля-Шлихтинга) и результаты настоящей работы. Сравнение показывает, что $a = 0.3$.

Заключение :

Из рис.5 видно, полученные численно результаты укладываются в имеющийся разброс экспериментальных данных. Следует заметить, что численный результат получен при использовании начального значения $\mathrm{Re}_\delta\big|_{\mathrm{Re}_{x_0}} = \mathrm{Re}_{\delta_0}$, которое , вообще говоря, выходит за область применения рассматриваемого закона подобия, полученного для чисел Рейнольдса существенно превышающее число Рейнольдса перехода.

Величина $\left|\max_{\mathbf{k}} \mathrm{Im}\,\omega(\mathbf{k}, \mathrm{Re}_\delta)\right|$ получена при $k = \alpha$. Можно предположить, что в плоскости (α, β) величина $\left|\max_{\mathbf{k}} \mathrm{Im}\,\omega(\mathbf{k}, \mathrm{Re}_\delta)\right|$ определяется другими максимумами при $\beta \neq 0$ что требует дополнительного исследования.

Так же не исключен вариант, когда коэффициент *a* слабо зависит от числа Рейнольдса по толщине турбулентного пограничного слоя Re_δ .

Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (грант № 14-08-00960).

Библиографический список

1. Белоцерковский О.М., Хлопков Ю.И., Жаров В.А., Горелов С.Л., Хлопков А.Ю. Организованные структуры в турбулентных течениях. Анализ экспериментальных работ по турбулентному пограничному слою. - М.: МФТИ, 2009. – 302 с.

2. Borodulin V.I. Experimental detection of deterministic turbulence. V.I. Borodulin, Y.S. Kachanov, A.P. Roschektayev. Journal of Turbulence. 2011. V. 12. N 23. C.1-34.

3. Khujadze G. Coherrentvorticity extraction in turbulent boundary layers using orthogonal wavelets / G. Khujadze. R. Nguyen van yen, K. Schneider, M. Oberlack, Farge M. 13^{th} European Turbulence Conference (ETC-13). Warsaw, Poland, 2011.

4. Landahl M.T. A wave-guide model for turbulent shear flow // J. Fluid Mech. 1967. V. 29.Pt.3. C.441-459.

5. Жаров В.А. О волновой теории развитого турбулентного пограничного слоя // Ученые записки ЦАГИ. 1986. Т.XVII. № 5. С. 28-38.

6. Боголепов В.В., Жаров В.А.,Липатов И.И., Хлопков Ю.И. Модель турбулентного пограничного слояс явным выделением когерентной генерационной структуры // Прикладная механика и техническая физика. 2002. Т. 43, №4, С. 65-74.

7. Vladimir Zharov .Waveguide model of coherent structures in the developed turbulent boundary layer.14th European turbulence conference, 1-4 september 2013, Lyon, France, Book of Abstracts.

8. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974.-711с.

9. Репик Е.У., Соседко Ю.П. Турбулентный пограничный слой. Методика и результаты экспериментальных исследований. - М.: Физматлит, 2007. – 312 с.

10. Musker A .J . Explicit expression for the smooth wall velocity distribution in a turbulent boundary layer // AIAA Journal. 1979. V.17, no 6, pp/. 655-657.

11. Тун Т. Определение поля средней скорости в переходной области пограничного слоя на пластине в несжимаемой жидкости маятника // Журнал «Труды МАИ», 2010, выпуск №39: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=14854 (дата публикации 16 августа 2010).

12. Горелов С.Л., Зея С., Падение тел на Землю из Дальнего космоса // Журнал «Труды МАИ», 2010, выпуск №39: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=14804 (дата публикации 16 августа 2010).

13. Jordinsson R. The flat plate boundary layer. Part 1. Numerical investigation of the Orr-Sommerfeld equation/ J. Fluid Mech. – 1970. –V 43, part 4. – P. 801-811.

14. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбентность. – Новосибирск: Наука, 1977. - 366 с.

15. Mathematica 5.0, Users Guid. Wolfram Research, –2003. URL: http://home.snafu.de/mathema/wolfram/mma_news.htm