УДК 536.24

Определение элементов тензора теплопроводности анизотропных материалов из решения обратной задачи

О.М.Алифанов, В.А.Колесников

Аннотация: Излагается и обосновывается алгоритм определения температурных зависимостей объемной теплоемкости и элементов тензора теплопроводности анизотропных в отношении тепловой проводимости материалов, применяемых в авиационной и ракетно-космической технике. Эффективность разработанного алгоритма демонстрируется на примере решения задачи по данным вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: конструкционные материалы, авиационная и ракетно-космическая техника, теплофизические характеристики, тензор теплопроводности анизотропных материалов, обратные задачи теплообмена.

Для проведения тепловых, теплопрочностных расчетов, и вообще при решении различных научных и инженерных задач, в частности задач теплового проектирования объектов и систем новой техники, например ракетно-космической, необходимо иметь данные о теплофизических характеристиках используемых или предполагаемых к использованию материалов с учетом зависимости этих характеристик от температуры, направления и особенностей протекающих в материалах и конструкциях физических или физико-химических процессов. Под теплофизическими характеристиками здесь понимаются компоненты тензора теплопроводности материалов и их объемная теплоемкость.

Анализируя известные работы по вопросам определения теплофизических характеристик материалов методами, основанными на использовании математического аппарата решения обратных задач теплопроводности, можно сделать следующие выводы:

1) Задачу определения теплофизических характеристик материалов целесообразно решать в экстремальной постановке с применением одного из регуляризирующих алгоритмов, который дает минимизирующую последовательность для функционала невязки J, характеризующего среднеквадратичное уклонение вычисленных с помощью математической

модели температур в каких-то определенных n точках образца материала от измеряемых в эксперименте их значений $f(x_i, y_i, \tau)$.

2) Не существует обоснованных работоспособных алгоритмов решения задачи определения элементов тензора теплопроводности анизотропных материалов.

В связи этим в данной статье излагается методический подход и алгоритм решения задачи определения температурных зависимостей элементов тензора теплопроводности анизотропных материалов и их объемной теплоемкости и попутно доводится до логического завершения известное решение коэффициентной обратной задачи для одномерной тепловой проводимости. При этом реализуется известный принцип решения коэффициентных обратных задач, заключающийся в последовательном уточнении параметров искомых функций в направлении, обеспечивающем получение минимизирующей последовательности для функционала невязки J. Но реализация этого принципа базируется на новом подходе к определению градиента минимизируемого функционала и оценке оптимальной глубины спуска.

Рассмотрим процесс нестационарного теплообмена в прямоугольной области анизотропного в отношении теплопроводности материала. Если в условиях однозначности решения в качестве граничных условий рассматривать условия первого рода, то математическая модель этого процесса имеет вид следующей краевой задачи:

$$C(T)\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda_{11}(T)\frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda_{22}(T)\frac{\partial T}{\partial y}) + 2\frac{\partial}{\partial x}(\lambda_{12}(T)\frac{\partial T}{\partial y}) + S(x, y, \tau), \quad (1)$$

$$x \in [0; a];\ y \in [0; b]\ ;\ \tau \in [0; \tau_m]$$

$$T(x, y, 0) = \varphi_0(x, y), \quad (2)$$

$$T(x_Г, y_Г, \tau) = \varphi_Г(x_Г, y_Г, \tau),\ x_Г = \{0; a\},\ y_Г = \{0; b\}\ ,\ \tau \in [0, \tau_m], \quad (3)$$

где $\varphi_0(x, y)$ и $\varphi_Г(x_Г, y_Г, \tau)$ - известные функции.

Рассмотрим задачу восстановления функций $\lambda_{11}(T)$, $\lambda_{22}(T)$, $\lambda_{12}(T)$ и $C(T)$ на основании информации о мгновенных значениях температур в определенных n точках прямоугольной области $D = [0; a] \times [0; b]$ ($T(x_i, y_i, \tau) = f(x_i, y_i, \tau),\ i = 1,2,...n$ и известных функциях $S(x, y, \tau)$, $\varphi_0(x, y)$, $\varphi_Г(x_Г, y_Г, \tau)$.

Подлежащие определению функции $\lambda_{11}(T)$, $\lambda_{22}(T)$, $\lambda_{12}(T)$ и $C(T)$ будем искать в параметризованном виде : $\lambda_{11}(T) = \sum_{k=1}^{m+3} \lambda_{11}^{(k)} B_k(T)$, $\lambda_{22}(T) = \sum_{k=1}^{m+3} \lambda_{2}^{(k)} B_k(T)$, $\lambda_{12}(T) = \sum_{k=1}^{m+3} \lambda_{12}^{(k)} B_k(T)$,

$C(T)=\sum_{k=1}^{m+3} C^{(k)} B_k(T)$, где $B_k(T)$ - последовательность кубических B-сплайнов; $T\in[T_{\min},T_{\max}]$; $m-$число участков разбиения области определения искомых функций при осуществлении их сплайн-аппроксимации; $\vec{\lambda}_{11}=(\lambda_{11}^{(k)},k=1,2,..(m+3))$, $\vec{\lambda}_{22}=(\lambda_{22}^{(k)},k=1,2..(m+3))$, $\vec{\lambda}_{12}=(\lambda_{12}^{(k)},k=1,2,..(m+3))$, $\vec{C}=(C^{(k)},k=1,2,..(m+3))$ - векторы значений параметров сплайн-функций, аппроксимирующих искомые функции. Будем последовательно уточнять решение, определяя поправки к векторам параметров аппроксимирующих сплайн-функций из условия убывания функционала J, который имеет вид

$$J=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{\tau_m}(T(x_i,y_i,\tau)-f(x_i,y_i,\tau))^2 d\tau \qquad (4)$$

В рассмотренной постановке, строго говоря, решение обратной задачи может быть неединственным. Выход из этой ситуации (если невозможно изменить эту постановку , например из-за трудностей экспериментального характера) видится в учете подходящей априорной информации об искомых величинах, в частности, о качественном характере их изменения на интересующем температурном интервале. В дальнейшем будем считать, что искомые величины являются достаточно регулярными функциями, не обладающими чрезмерно тонкой структурой. Тогда возможен переход к малопараметрическому представлению этих функций. В принятой выше сплайновой форме задания искомых величин мы будем ограничиваться малым числом m участков аппроксимации, в то же время число точек n, где заданы временные зависимости температур, будет достаточно большим. Но в любом случае, поскольку строгие условия однозначности нам не известны, целесообразно провести численную проверку на выполнение этих условий, отдавая себе отчет, конечно, в ограниченности такого подхода. Применительно к данной работе такая проверка будет выполнена при решении методических примеров.

В качестве численного метода минимизации функционала применим метод сопряженных градиентов, алгоритм реализации которого применительно, например, к обобщенному вектору $\vec{\lambda}=(\lambda_{11}^{(k)},\lambda_{22}^{(k)},\lambda_{12}^{(k)},C^{(k)},k=1,2,..(m+3))$ имеет вид [1]: $\vec{\lambda}^{j}=\vec{\lambda}^{j-1}+\Delta\vec{\lambda}^{j}$, $\Delta\vec{\lambda}^{j}=-\xi\cdot\vec{P}(\vec{\lambda}^{j})$, $\vec{P}(\vec{\lambda}^{j})=J'(\vec{\lambda}^{j})+\gamma_j\cdot\vec{P}(\vec{\lambda}^{j-1})$, где $j-$номер итерации, $\vec{\lambda}^{j}$- значение вектора $\vec{\lambda}$ на j- ой итерации, $J'(\vec{\lambda}^{j})$- значение градиента функционала на $j-$ой итерации, $j-1$ - индекс, относящийся к предыдущей итерации, $\vec{P}(\vec{\lambda}^{j}),\xi$ - соответственно направление и глубина спуска на $j-$ой итерации, $\gamma_j = \dfrac{J^{/}(\vec{\lambda}^j)\cdot(J^{/}(\vec{\lambda}^j) - J^{/}(\vec{\lambda}^{j-1}))}{(J^{/}(\vec{\lambda}^j))^2}$, $j \ge 1$, при $j=0$ $\gamma_j = 0$.

Учитывая возможное существенное отличие друг от друга модулей векторов $\vec{\lambda}_{11}, \vec{\lambda}_{22}, \vec{\lambda}_{12}$ и разительное отличие этих векторов от вектора $\vec{C}$ (в десятки-сотни тысяч раз), итерационный процесс по уточнению приближений этих векторов должен осуществляться для каждого вектора отдельно, например, поочередно.

При реализации градиентных методов минимизации целевого функционала самыми важными моментами в этой реализации является вычисление градиента функционала J перед каждым уточнением вектора параметров (на каждой итерации) и определение глубины (шага) спуска в направлении вектора $\vec{P}$, зависящем от значений градиента на данной и предыдущей итерациях.

Для получения формулы градиента функционала J будем решать задачу минимизации функционала невязки как задачу на условный экстремум методом множителей Лагранжа при ограничениях, определяемых условиями (1) - (3) [3].

Составим функционал $\varPhi$ Лагранжа.

$$\varPhi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\tau_m}(T(x_i,y_i,\tau) - f(x_i,y_i,\tau))^2 d\tau +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\tau_m}\psi(x_i,y_i,\tau)[\frac{\partial}{\partial x}(\lambda_{11}(T)\frac{\partial T}{\partial x})_{x=x_i,y=y_i} + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda_{22}(T)\frac{\partial T}{\partial y})_{x=x_i,y=y_i} + 2\frac{\partial}{\partial x}(\lambda_{12}(T)\frac{\partial T}{\partial y})_{x=x_i,y=y_i} +$$

$$+ S(x_i,y_i,\tau) - (C(T)\frac{\partial T}{\partial \tau})_{x=x_i,y=y_i}]d\tau + \sum_{i=1}^{n}\gamma(x_i,y_i)[T(x_i,y_i,0) - T_0(x_i,y_i)] \qquad (5)$$

Дадим векторам значений параметров искомых функций малые возмущения. Причем такие, чтобы относительные величины возмущений каждой координаты всех векторов были бы одинаковыми. То есть возмущения должны удовлетворять условию : $\Delta\overline{\lambda}_{11}^{(k)} = \Delta\overline{\lambda}_{22}^{(k)} = \Delta\overline{\lambda}_{12}^{(k)} = \Delta\overline{C}^{(k)}$, $k = 1,2,...m+3$. При выполнении этого условия удается, как показано ниже, получить явное выражение для множителя Лагранжа (функции $\psi(x_i,y_i,\tau)$).

Обозначим одинаковые относительные величины приращений параметров через $\overline{\Delta}$. Функции $\lambda_{11}(T)$, $\lambda_{22}(T)$, $\lambda_{12}(T)$, $C(T)$ получат некоторые вариации $\Delta\lambda_{11}$, $\Delta\lambda_{22}$, $\Delta\lambda_{12}$, ΔC соответственно. Тогда температурное поле $T(x,y,\tau)$ также получит возмущение и изменится на величину $\theta(x,y,\tau)$.

Вариации искомых функций определяются одинаковыми по структуре соотношениями, которые для функции $\lambda_{11}(T)$ имеют вид $\Delta\lambda_{11} = \tilde{\lambda}_{11}(T+\theta) - \lambda_{11}(T)$, где $\tilde{\lambda}_{11}(T+\theta)$ - возмущенное значение функции $\lambda_{11}(T)$ в какой-то точке. Возмущение является следствием приращения параметров этой функции и приращения температуры в рассматриваемой точке. То есть $\tilde{\lambda}_{11}(T+\theta) = \sum_{k=1}^{m+3} (\lambda_{11}^{(k)} + \Delta\lambda_{11}^{(k)}) B_k(T+\theta)$. Характеризуя приращение функции $B_k(T)$ ее дифференциалом в точке T ($B_k(T+\theta) \approx B_k(T) + \dfrac{dB_k(T)}{dT}\theta$), получим следующее выражение для возмущенного значения функции $\lambda_{11}(T)$:

$$\tilde{\lambda}_{11}(T+\theta) = (1+\overline{\Delta}) \cdot \sum_{k=1}^{m+3} (\lambda_{11}^{(k)} B_k(T) + \lambda_{11}^{(k)} \frac{dB_k(T)}{dT}\theta) = (1+\overline{\Delta}) \cdot (\lambda_{11}(T) + \frac{d\lambda_{11}(T)}{dT}\theta)$$

Тогда первое слагаемое в правой части уравнения теплопроводности (1) при возмущенных значениях параметров искомых функций примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tilde{\lambda}_{11}(T+\theta)\frac{\partial(T+\theta)}{\partial x} = (1+\overline{\Delta}) \cdot [\frac{\partial}{\partial x}(\lambda_{11}(T)\frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x}(\lambda_{11}(T)\frac{\partial \theta}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{d\lambda_{11}(T)}{dT}\frac{\partial T}{\partial x}\theta) +$$

$$\frac{\partial}{dx}(\frac{d\lambda_{11}(T)}{dT}\frac{\partial \theta}{\partial x}\theta)\,].$$

Такой же вид примет второе слагаемое и почти такой же вид третье слагаемое правой части уравнения (1). Слагаемое, стоящее в левой части уравнения (1) при возмущенных параметрах запишется следующим образом:

$$\tilde{C}(T+\theta)\frac{\partial(T+\theta)}{\partial\tau} = \sum_{k=1}^{m+3}((C^{(k)} + \Delta C^{(k)})B_k(T+\theta)\frac{\partial(T+\theta)}{\partial\tau}) =$$

$$(1+\overline{\Delta}) \cdot [C(T)\frac{\partial T}{\partial\tau} + C(T)\frac{\partial\theta}{\partial\tau} + \frac{dC(T)}{dT}\frac{\partial T}{\partial\tau}\theta + \frac{dC(T)}{dT}\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\theta]$$

Вычтя из уравнения теплопроводности, записанного для возмущенных параметров искомых функций, невозмущенное уравнение теплопроводности, получим уравнение, определяющее совместно с уравнениями (1) - (3) поле приращений температур при возмущении параметров искомых функций на относительную величину $\overline{\Delta}$:

$$C(T)\frac{\partial\theta}{\partial\tau} + \frac{dC(T)}{dT}(\frac{\partial T}{\partial\tau} + \frac{\partial\theta}{\partial\tau})\theta = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda_{11}(T)\frac{\partial\theta}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x}(\theta\frac{d\lambda_{11}(T)}{dT}(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial x})) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}(\lambda_{22}(T)\frac{\partial\theta}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y}(\theta\frac{d\lambda_{22}(T)}{dT}(\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial\theta}{\partial y})) + 2\frac{\partial}{\partial x}(\lambda_{12}(T)\frac{\partial\theta}{\partial y}) + 2\frac{\partial}{\partial x}(\theta\frac{d\lambda_{12}(T)}{dT}(\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial\theta}{\partial y})) -$$

$$\frac{\overline{\Delta}}{1+\overline{\Delta}}S(x,y,\tau);$$

$$\theta(x,y,0)=0\,;\ \theta(x_\Gamma,y_\Gamma,\tau)=0,\ \text{где}\ x_\Gamma=\{0;a\},\ y_\Gamma=\{0;b\},\ \tau\in[0;\tau_m] \qquad (6)$$

При возмущении параметров искомых функций обобщенный функционал (функционал Лагранжа) получит вариацию $\Delta\Phi$. Ограничиваясь линейной частью приращения целевого функционала J, можно эту вариацию записать в виде

$$\Delta\Phi=\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\tau_m}(T(x_i,y_i,\tau)-f(x_i,y\ \ ,\tau))\cdot\theta(x_i,y_i,\tau)\cdot d\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\tau_m}\psi(x_i,y_i,\tau)\cdot\{\ [\frac{\partial}{\partial x}(\lambda_{11}(T)\frac{\partial T}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial x}(\theta\cdot\frac{d\lambda_{11}(T)}{dT}(\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial\theta}{\partial x}))+\frac{\partial}{\partial y}(\lambda_{22}(T)\frac{\partial T}{\partial y})+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}(\theta\cdot\frac{d\lambda_{22}(T)}{dT}(\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{\partial\theta}{\partial y}))+\ 2\frac{\partial}{\partial x}(\lambda_{12}(T)\frac{\partial T}{\partial y})+2\frac{\partial}{\partial x}(\theta\cdot\frac{d\lambda_{12}(T)}{dT}(\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{\partial\theta}{\partial y}))\ -$$

$$-(C(T)\frac{\partial\theta}{\partial\tau}+\frac{dC(T)}{d\tau}\cdot\theta\cdot(\frac{\partial T}{\partial\tau}+\frac{\partial\theta}{\partial\tau}))\ ]_{x=x_i,y=y_i}-\frac{\overline{\Delta}}{1+\overline{\Delta}}\cdot S(x_i,y_i,\tau)\ \ \}d\tau \qquad (7)$$

Заметим, что все входящие в выражение (7) переменные и их производные вычисляются в точках i =1,2,...n.

Необходимым условием достижения функционалом J минимума при ограничениях (1) - (3) является равенство 0 полной вариации функционала Φ ($\Delta\Phi=0$). Приравнивая правую часть соотношения (7) к 0 и разрешая полученное уравнение относительно $\psi(x_i,y_i,\tau)$, можно найти формулу для определения множителя Лагранжа. Эта формула имеет громоздкий вид, но ее можно преобразовать, если принять во внимание то, что в силу ожидаемой гладкости искомых функций, а также благодаря малости θ при малых $\overline{\Delta}$ выражение для $\psi(x_i,y_i,\tau)$ можно существенно упростить, если пренебречь в этом выражении членами, содержащими произведение θ на производные искомых функций по температуре. В итоге получим следующее выражение для множителя Лагранжа $\psi(x_i,y_i,\tau)$

$$\psi(x_i,y_i,\tau)=\frac{[f(x_i,y_i,\tau)-T(x_i,y_i,\tau)]\cdot\theta(x_i,y_i,\tau)}{[\frac{\partial}{\partial x}(\lambda_{11}(T)\frac{\partial\theta}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\lambda_{22}(T)\frac{\partial\theta}{\partial y})+2\frac{\partial}{\partial x}(\lambda_{12}(T)\frac{\partial\theta}{\partial y})-C(T)\frac{\partial\theta}{\partial\tau}-\overline{\Delta}\cdot S(x,y,\tau)]}, \qquad (8)$$

где $x=x_i$, $y=y_i$ (то есть все производные и функции $\lambda_{11},\lambda_{22},\lambda_{12},C$ и S вычисляются в точках (x_i,y_i,τ)).

Входящие в выражение (8) значения $\theta(x_i,y_i,\tau)$ и значения их производных определяются в процессе решения задачи о расчете поля приращений температур при возмущении параметров искомых функций.

Для получения формулы градиента целевой функции преобразуем выражение для $\Delta\Phi$. Линейную часть приращения целевого функционала, то есть выражение

$\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{\tau_i}(T(x_i,y_i,\tau)-f(x_i,y_i,\tau))\cdot\theta(x_i,y_i,\tau)\cdot d\tau$ представим в виде $\sum_{k=1}^{m+3}J^{/}(\lambda_{11}^{(k)})\cdot\Delta\lambda_{11}^{(k)}+\sum_{k=1}^{m+3}J^{/}(\lambda_{22}^{(k)})\cdot\Delta\lambda_{22}^{(k)}+\sum_{k=1}^{m+3}J^{/}(\lambda_{12}^{(k)})\cdot\Delta\lambda_{12}^{(k)}+\sum_{k=1}^{m+3}J^{/}(C^{(k)})\cdot\Delta C^{(k)}$, который соответствует трактовке градиента функционала в данном конкретном случае (в данной задаче).

Второе слагаемое в выражении для $\Delta\Phi$ представим несколько иначе, чем в соотношении (7). Для этого воспользуемся приведенными выше выражениями для возмущенных значений искомых функций, то есть выражениями для $\tilde{\lambda}_{11}(T+\theta)$, $\tilde{\lambda}_{22}(T+\theta)$, $\tilde{\lambda}_{12}(T+\theta)$, $\tilde{C}(T+\theta)$.

После несложных преобразований выражение для $\Delta\Phi$ примет вид:

$$\Delta\Phi=\sum_{k=1}^{m+3}(J^{/}(\lambda_{11}^{(k)})\cdot\Delta\lambda_{11}^{(k)}+J^{/}(\lambda_{22}^{(k)})\cdot\Delta\lambda_{22}^{(k)}+J^{/}(\lambda_{12}^{(k)})\cdot\Delta\lambda_{12}^{(k)}+J^{/}(C^{(k)})\cdot\Delta C^{(k)})\ +$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{\tau_m}\psi(x_i,y_i,\tau)\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\lambda_{11}(T)\frac{\partial\theta}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\lambda_{22}(T)\frac{\partial\theta}{\partial y})+2\frac{\partial}{\partial x}(\lambda_{12}(T)\frac{\partial\theta}{\partial y})\ +\right.$$

$$\theta\cdot[\frac{d\lambda_{11}}{dT}\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{d^2\lambda_{11}}{\partial T^2}(\frac{\partial T}{\partial x})^2+\frac{d\lambda_{22}}{dT}\frac{\partial^2T}{\partial y^2}+\frac{d^2\lambda_{22}}{dT^2}(\frac{\partial T}{\partial y})^2+2\frac{d\lambda_{12}}{dT}\frac{\partial^2T}{\partial x\partial y}+2\frac{d^2T}{dT^2}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}-$$

$$\left.\frac{dC}{dT}\frac{\partial\theta}{\partial\tau}]+\frac{d\lambda_{11}}{dT}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{d\lambda_{22}}{dT}\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial y}+2\frac{d\lambda_{12}}{dT}\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial x}-C(T)\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\ \right\}\cdot d\tau\ +$$

$$\sum_{k=1}^{m+3}\Delta\lambda_{11}^{(k)}\cdot(\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{\tau_m}\psi(x_i,y_i,\tau)\cdot[\frac{\partial^2T}{\partial x^2}B_k(T)+(\frac{\partial T}{\partial x})^2\frac{dB_k}{dT}]d\tau)\ +$$

$$\sum_{k=1}^{m+3}\Delta\lambda_{22}^{(k)}\cdot(\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{\tau_m}\psi(x_i,y_i,\tau)\cdot[\frac{\partial^2T}{\partial y^2}B_k(T)+(\frac{\partial T}{\partial y})^2\frac{dB_k}{dT}]d\tau)\ +$$

$$2\cdot\sum_{k=1}^{m+3}\Delta\lambda_{12}^{(k)}\cdot(\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{\tau_m}\psi(x_i,y_i,\tau)\cdot[\frac{\partial^2T}{\partial x\partial y}B_k(T)+\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}\frac{dB_k(T)}{dT}]d\tau)\ +$$

$$\sum_{k=1}^{m+3}\Delta C^{(k)}\cdot(\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{\tau_m}\psi(x_i,y_i,\tau)\cdot\frac{\partial T}{\partial\tau}B_k(T)\cdot d\tau)\ .$$

Группируя члены, содержащие одни и те же вариации, а затем приравнивая к 0 коэффициенты при них (то есть при вариациях $\Delta\lambda_{11}^{(k)}$, $\Delta\lambda_{22}^{(k)}$, $\Delta\lambda_{12}^{(k)}$, $\Delta C^{(k)}$,

$k=1,2,...(m+3)$), получим выражения для градиента функционала

, похожие по структуре на выражение градиента функционала в работах [1,2,4] для случая одномерной теплопроводности J :

$$J^{/}(\lambda_{11}^{(k)}) = \sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{\tau_m} \psi(x_i, y_i, \tau) \cdot (\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} B_k(T) + (\frac{\partial T}{\partial x})^2 \frac{dB_k(T)}{dT}) d\tau ,$$

$$J^{/}(\lambda_{22}^{(k)}) = \sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{\tau_m} \psi(x_i, y_i, \tau) \cdot (\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} B_k(T) + (\frac{\partial T}{\partial y})^2 \frac{dB_k(T)}{dT}) d\tau ,$$

$$J^{/}(\lambda_{12}^{(k)}) = \sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{\tau_m} \psi(x_i, y_i, \tau) \cdot (\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} B_k(T) + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dB_k(T)}{dT}) d\tau ,$$

$$J^{/}(C^{(k)}) = \sum_{i1}^{n} \int_{0}^{\tau_m} \psi(x_i, y_i, \tau) \frac{\partial T}{\partial \tau} B_k(T) d\tau \qquad (9)$$

Оценочную формулу для определения оптимальной глубины (шага) спуска в направлении, определяемом методом сопряженных градиентов, можно получить, если воспользоваться известным подходом, основанным на линеаризации зависимости целевой функции от шага спуска в направлении антиградиента, и нахождении минимума этой линеаризованной зависимости [1,2] . Для реализации такого подхода необходимо решить задачу о приращении поля температур, но в несколько другой постановке чем та постановка, которая рассматривалась выше в обеспечение определения множителей Лагранжа и получения формулы для градиента целевой функции. В данном случае каждому параметру искомых функций даются возмущения, пропорциональные соответствующим компонентам градиента функционала. Обозначим этот коэффициент пропорциональности через ξ_0. Тогда малые возмущения $\Delta\vec{\lambda}$, даваемые обобщенному вектору $\vec{\lambda}$ при решении задачи о приращении поля температур определяются следующим выражением:

$$\Delta\vec{\lambda} = \xi_0 J'(\vec{\lambda}) \qquad (10)$$

Важным является вопрос о выборе коэффициента ξ_0, обеспечивающего малость $\Delta\vec{\lambda}$. Пусть эта малость определяется числом δ, составляющим малую долю, например тысячную, от модуля вектора $\vec{\lambda}$. Тогда , учитывая соотношение (10) , получим

$$\xi_0 = \frac{\delta \cdot \left|\vec{\lambda}\right|}{\left|J'(\vec{\lambda})\right|} \qquad (11)$$

Чтобы получить оценочную формулу для ξ введем в рассмотрение скалярную функцию F аргумента ξ, характеризующую изменение величины целевого функционала $J(\vec{\lambda})$ в направлении антиградиента в точке $\vec{\lambda}$:

$$F(\xi) = J(\vec{\lambda} - \xi \cdot J'(\bar{\lambda}))$$

Будем считать ξ малой величиной, квадратом и высшими степенями которой можно пренебречь. Тогда используя разложение функции в ряд Тейлора по степеням $\xi \cdot J'(\vec{\lambda})$ и пренебрегая нелинейными членами в этом разложении, получим

$$F(\xi) \cong \sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{\tau_m} (T(x_i, y_i, \tau, \vec{\lambda}) - \frac{\partial T(\vec{\lambda})}{\partial \vec{\lambda}} \cdot \xi \cdot J'(\vec{\lambda}) - f(x_i, y_i, \tau))^2 d\tau$$

Величины частных производных $\dfrac{\partial T(\vec{\lambda})}{\partial \vec{\lambda}}$ в выражении для функции $F(\xi)$ заменим их конечно-разностными аналогами: $\dfrac{\partial T(\vec{\lambda})}{\partial \vec{\lambda}} \cong \dfrac{\theta(\vec{\lambda})}{\xi_0 \cdot J'(\vec{\lambda})}$.

Дифференцируя полученное выражение для $F(\xi)$ по ξ, приравнивая производную к 0 и разрешая уравнение $\dfrac{dF}{d\xi} = 0$ относительно ξ, получим следующее выражение для оценки глубины спуска в направлении антиградиента целевого функционала:

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{\tau_m} (T(x_i, y_i, \tau, \vec{\lambda}\ ) - f(x_i, y_i, \tau)) \cdot \theta(x_i, y_i, \tau, \xi_0 \cdot J'(\ \vec{\lambda})) \cdot d\tau}{\sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{\tau_m} (\theta(x_i, y_i, \tau, \xi_0 \cdot J^{/}(\lambda))^2 \cdot d\tau} \cdot \xi_0, \qquad (12)$$

где коэффициент ξ_0 определяется выражением (11).

Проверка эффективности разработанного алгоритма решения задачи определения теплофизических характеристик анизотропных материалов осуществлялась в различных вычислительных экспериментах. Суть их заключается в следующем. При заданных начальных и граничных условиях, а также при заданной величине локальных объемных тепловыделений и при заданных функциях $\lambda_{11}(T), \lambda_{22}(T), \lambda_{12}(T)$ и $C(T)$ решается прямая задача теплопроводности с цель определения температур в некоторых определенных точках образца материала. Результаты решения призваны имитировать результаты экспериментальных замеров температур в выбранных точках при условии идентичности начальных, граничных условий и условий внутреннего теплоподвода, если таковой имеется. Задавая в параметризованном виде начальные значения отмеченных функций, существенно отличающихся от тех, которые использовались для вычисления температур, имитирующих экспериментальные, в процессе решения обратной задачи в итерационном процессе уточняются параметры искомых функций, аппроксимируемых сплайн-функциями. Вычислительные эксперименты проводились для схемы образца, способа подвода энергии к нему и граничных условиях, заимствованных из работы [6]. Рассматривался образец в форме параллелепипеда. На четырех его гранях задавались постоянная температура, равная начальной температуре во всех точках образца. Две противоположные грани образца теплоизолированы. Через их центральные точки проходит линейчатый электронагреватель (Рис. 1), к которому подводится изменяющаяся по времени мощность. Благодаря теплоизоляции торцов образца и отмеченному расположению источника внутренних тепловыделений в образце реализуется двумерное нестационарное температурное поле, поэтому точки, в которых имитируются замеряемые в эксперименте температуры, целесообразно выбирать в одной плоскости, параллельной теплоизолированным граням.

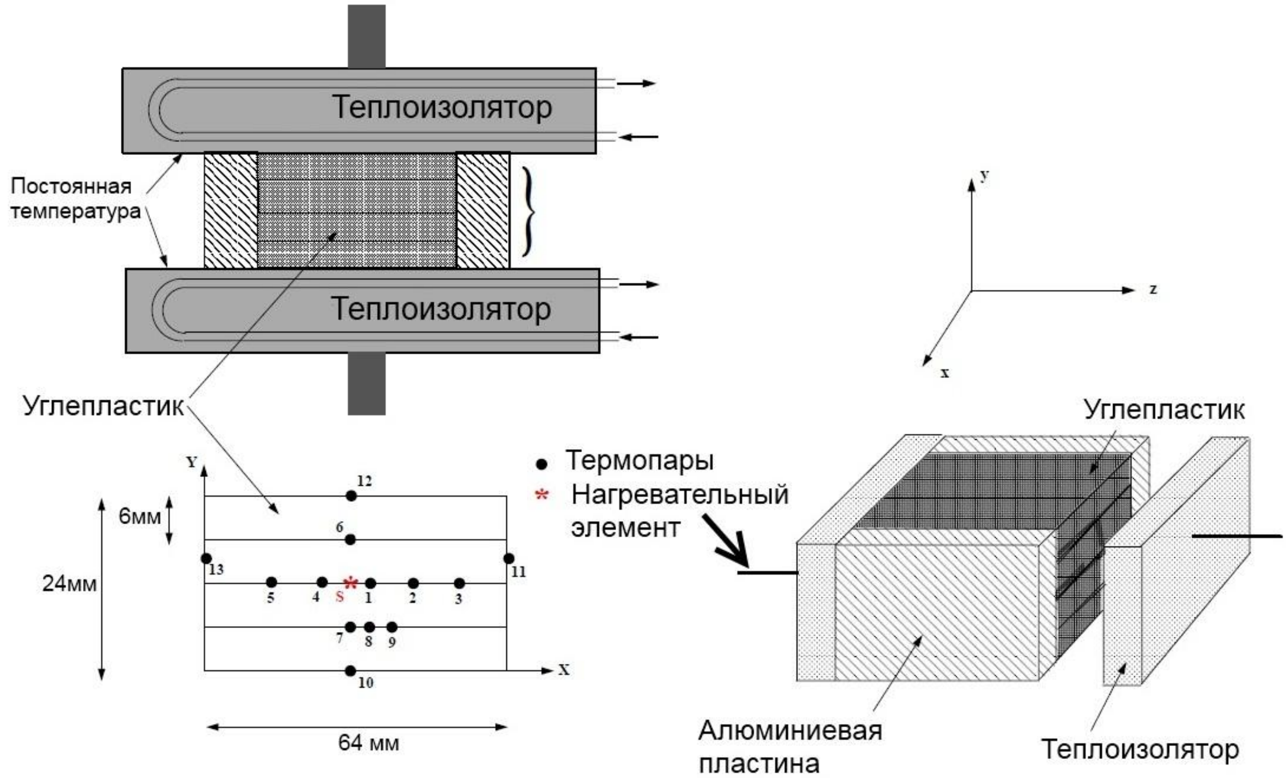

Рис.1. Схема образца, для которого проводились вычислительные эксперименты.

В одном из вычислительных экспериментов результаты обработки которого иллюстрируются ниже, в качестве восстанавливаемых функций были взяты представленные в отмеченной статье [6] экспериментальные данные по температурным зависимостям коэффициентов λ_{11}, λ_{22} и C в диапазоне температур от $10C$ до $110C$ для одного из углепластиков. Эти данные, представленные в статье в виде графиков хорошо описываются следующими линейными функциями:

$$\lambda_{11}(T) = 1.82 + 0.0038 \cdot (T - 283)\,;\ \lambda_{22}(T) = 0.435 + 0.00087 \cdot (T - 283)\,;\ \lambda_{12}(T) = 0.\,;$$

$$C(T) = 1.15 + 0.0071 \cdot (T - 283)\text{, где } [T] = K\,.$$

Как и в отмеченной работе предполагалось, что к линейчатому электронагревателю в течение 2000с подводится изменяющаяся по времени мощность, величина которой в течение первых 800с растет от 0 до 230 $\frac{вт}{м}$, затем в течение 400с остается неизменной, а в последующие 800с уменьшается от 230 $\frac{вт}{м}$ до 0. В вычислительном эксперименте имитировалось измерение температур в 7 точках исследуемого образца. Схема расположения точек в основном соответствовала схеме, представленной в статье. Предполагалось, что на ограничивающих поверхностях образца поддерживается неизменная по времени температура равная $283K$. При реализации разработанного алгоритма решения задачи дифференциальные уравнения заменялись их конечно-разностными аналогами и решались методом итераций на пространственно-временной сетке размером $n_x \times n_y \times n_\tau = 32 \times 24 \times 1000$.

Область определения искомых функций разбивалась на два участка, поэтому число параметров у каждой искомой функции равнялось 5. Задавались различные начальные приближения параметров искомых функций. Точность решения и время решения (требуемое число итераций) зависят от исходных данных, но не кардинально. Представленные на графиках результаты были получены при следующих нулевых приближениях параметров восстанавливаемых функций:

$$\lambda_{11}^{(k)} = 2.5, \lambda_{22}^{(k)} = 0.7, \lambda_{12}^{(k)} = 0.2, C^{(k)} = 2.6E+6\ , k = 1,2..5.$$

Результаты решения обратной задачи в рамках вычислительного эксперимента иллюстрируются на графиках рисунков 2-3.

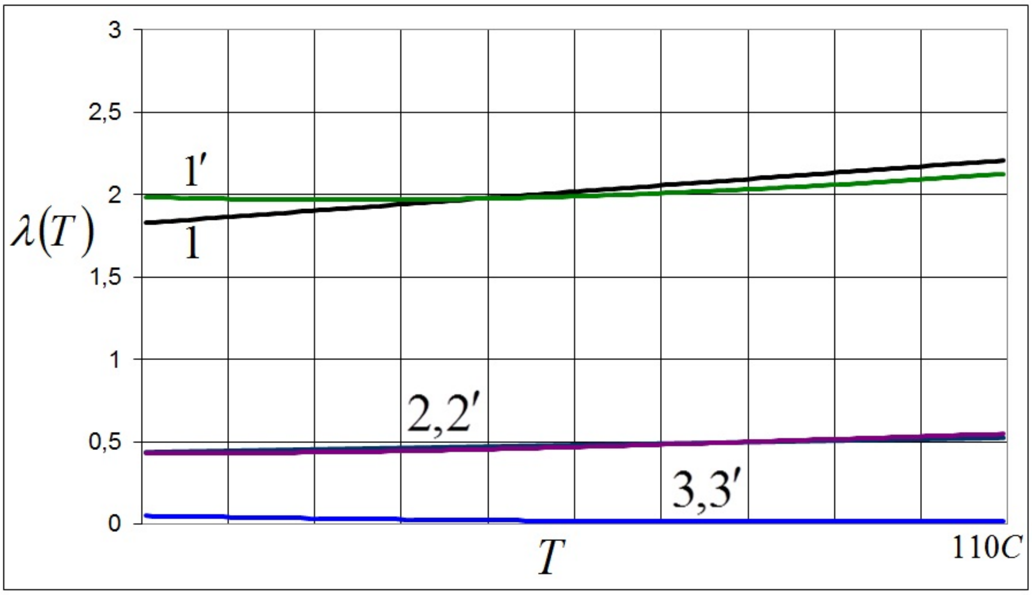

Рис.2. Зависимость от температуры T восстанавливаемых и восстановленных функций $\lambda_{11}(T), \lambda_{22}(T), \lambda_{12}(T)$ для углепластика.

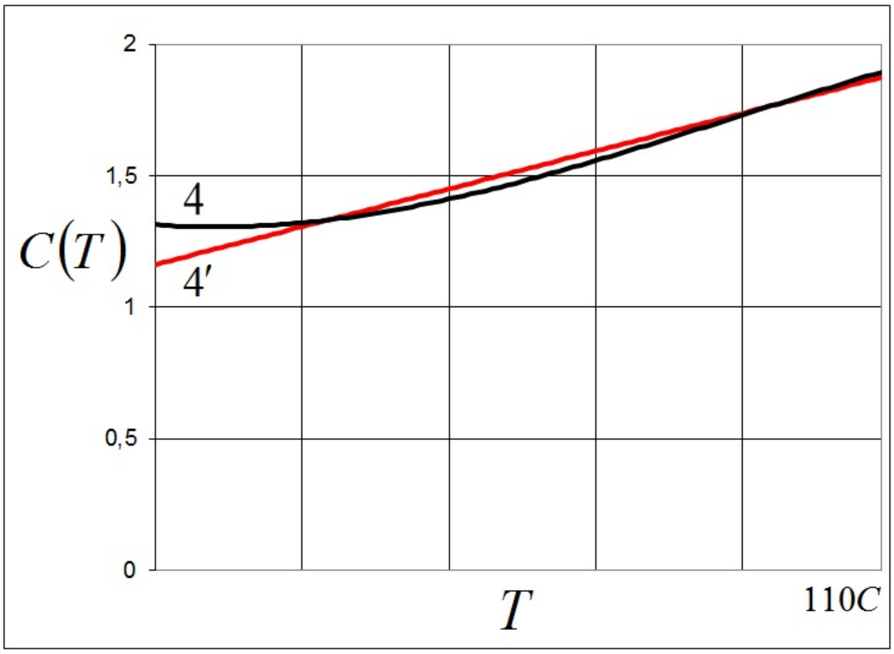

Рис.3. Зависимость от температуры T восстанавливаемой и восстановленной функций $C(T)$ для углепластика.

Кривые 1,2,3,4 на рисунках 2,3 – восстанавливаемые функции $\lambda_{11}(T), \lambda_{22}(T), \lambda_{12}(T), C(T)$ соответственно; $1^/, 2^/, 3^/, 4^/$ - восстановленные функции.

$[T]=C$, $[\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{12}] = \dfrac{вт}{мK}$, $[C] = \dfrac{Мдж}{м^3K}$.

Большой интерес представляют погрешности восстановления теплофизических характеристик рассматриваемого материала. Эти погрешности иллюстрируются на графиках рис.4.

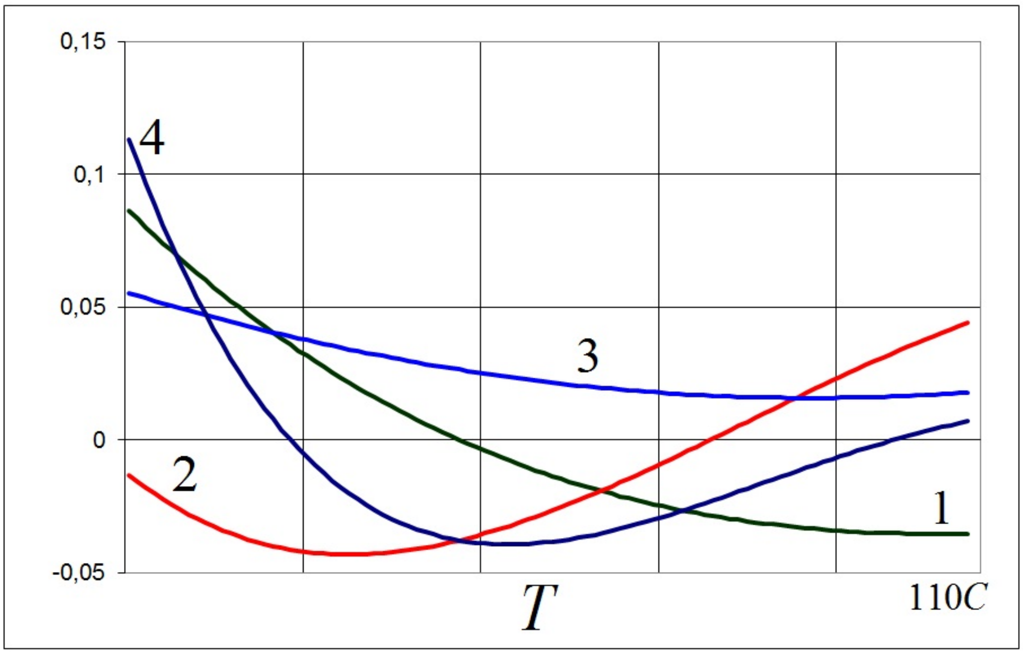

Рис.4. Относительные погрешности восстановления функций $\lambda_{11}(T), \lambda_{22}(T), C(T)$ (кривые соответственно 1,2,3) и абсолютные погрешности восстановления функции $\lambda_{12}(T)$ - кривая 4 $(\lambda_{12}(T) = 0)$.

Определялись также погрешности восстановления температурного поля в рассматриваемом образце материала. Локальные погрешности не превышали по модулю $0.5K$, а среднеквадратичные погрешности, оцениваемые по семи локальным температурам, не превысили $0.16K$.

Полученные результаты дают основания для предположения о возможном достаточно эффективном использовании разработанного алгоритма для решения задач определения теплофизических характеристик различных материалов, в том числе и материалов с ярко выраженной анизотропией их теплопроводящих свойств и с сильной зависимостью этих свойств от температуры.

Библиографический список

1. *Алифанов О.М.* Обратные задачи теплообмена.- М.: Машиностроение, 1988.- 280с
2. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач.- М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.,1988.-288с.
3. *Алифанов О.М., Михайлов В.В.* Решение нелинейной обратной задачи теплопроводности итерационным методом // ИФЖ, 1978, т. XXXV, N6, с. 1123-1128.
4. *Артюхин Е.А.* Восстановление температурной зависимости коэффициента теплопроводности из решения обратной задачи // ТВТ, 1981, т.19, N5, с. 963-967.
5. *Карслоу У., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М. : Наука. 1964. 487 с.
6. *R. Abou Khachfe , J. L. Bailleul , Y. Jarny* "The simultaneous determination of thermal conduktivity and heat capacity within an orthotropie medium by using conjugate gradient algorithm" // 16 th IMACS World Congress (2000 IMACS)

Сведения об авторах:

Алифанов Олег Михайлович , заведующий кафедрой Московского авиационного института (национального исследовательского университета), член-корреспондент РАН, д.т.н.,профессор; e-mail: alf@cosmos.com.ru

Колесников Василий Анатольевич, младший научный сотрудник Московского авиационного института (национального исследовательского университета); e-mail: v.kolesnikov@mail.ru