УДК 62-40

Оптимальное по быстродействию управление движением аэростата

Ибрагимов Д. Н.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),

МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

rikk.dan@gmail.com

Аннотация

В статье приводится алгоритм формирования оптимального по быстродействию позиционного управления в задаче управления движением аэростата. Решение поставленной задачи осуществляется в общем виде для линейных дискретных систем с линейными ограничениями на управление. Алгоритм основывается на свойствах класса множеств 0-управляемости, представляющем собой совокупность многогранников. Решение задачи быстродействия сводится к применению общепринятых методов линейного программирования.

Ключевые слова: линейная дискретная система управления, оптимальное по быстродействию управление, многогранник, полиэдр, линейное программирование.

1. Введение

В данной статье рассматривается задача ориентации аэростата по заданному вектору направления. Исследуются различные подходы к построению оптимального по быстродействию допустимого управления движением дискретной линейной системы, описывающей соответствующую модель – твердое тело (гондола), подвешенная на струне и способная совершать вращательные движения. Предполагается, что тело подвержено вязкому трению воздуха, моменту, связанному с упругостью струны. Управление осуществляется при помощи двух противоположно направленных вентиляторных двигателей ограниченной мощности. Фактически задача состоит в наискорейшей ликвидации углового отклонения гондолы.

Проблемы и решения общих задач оптимального управления дискретными системами описаны в монографиях [2-5]. Специфика задачи быстродействия для линейных систем с ограниченным управлением и дискретным временем определяется трудностями использования общепринятых методов [6-10]. Данные особенности характерны отсутствием аналитичности при решении задачи динамического программирования и аналога уравнения Беллмана, неединственностью оптимального управления.

С другой стороны, задачи оптимального управления связаны с изучением свойств множеств управляемости [11-12]. Этот подход наиболее характерен для решения задачи быстродействия с дискретным временем [9,13-15]. В данной работе предложены обобщение и развитие идеи, заложенной в [1]. В частности жесткое ограничение на скалярный вид управляющего воздействия заменяется более общим – множество допустимых управлений должно иметь вид многогранника. Обсуждаемая задача управления основана на дуальности множеств, рассматриваемых с точки зрения выпуклых многогранников и полиэдров одновременно. Реализация численных процедур позволяет ограничиться только методами линейного программирования (ЛП) такими, как симплекс-метод и метод внутренней точки [16-17].

2. Постановка задачи

Уравнения, описывающие движение движение модели аэростата в пространстве, представляют собой систему обычных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} &\dot{\alpha} = \omega, \\ &\dot{\omega} = -\varepsilon_1 \omega - \beta \omega^2 + \varepsilon_2 \alpha + u(t). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Подробный вывод уравнений (2.1) можно найти в [18].

Здесь α и ω представляют собой угловое отклонение и угловую скорость исследуемого объекта соответственно; $u \in [-1;1]$ – скалярное управление, на практике осуществляемое за счёт изменения скорости вращения лопастей вентиляторных двигателей. Остальные параметры уравнения (2.1) определяются из соотношений

$$\beta = \frac{1}{2}\frac{\rho S R^3}{J},\ \varepsilon_1 = \frac{\delta R}{J V_{max}},\ \varepsilon_2 = \frac{\sigma R^2}{J V_{max}^2},$$

где S – площадь диска вентилятора, ρ – плотность воздуха, R – расстояние от оси вращения до вентилятора, V_{max} – скорость воздуха после выхода из вентилятора в случае работы вентилятора на максимально допустимой мощности, J – момент инерции тела относительно оси вращения, σ – коэффициент упругости струны, δ – коэффициент вязкого трения о воздух.

В результате линеаризации и дискретизации была получена следующая система управления:

$$
\begin{aligned}
&x(k+1) = \begin{pmatrix} \alpha(k+1) \\ \omega(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}1 \\ 1 & 1{,}9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(k) \\ \omega(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}24 \end{pmatrix} u(k), \\
&|u(k)| \le 1,\ k \in \mathrm{N}.
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

Параметры системы получены приближенно на основании модели, описанной в [18].

Система (2.2) представляет собой линейную дискретную систему управления с линейными ограничениями на множество допустимых управлений. Важным свойством данной системы является тот факт, что скалярное управление фактически является покоординатно независимым. Далее представим решение поставленной задачи быстродействия для системы (2.2) в общем виде, а так же предложим аналитический вид оптимального управления для случая покоординатно независимых управлений.

Рассматривается линейная дискретная система управления с линейными ограничениями на управление

$$
\begin{aligned}
&x(k+1) = Ax(k) + u(k), \\
&u(k) \in U = \bigcap_{j=1}^{J} U_j,\ U_j = \{u : (u, n_j) \le a_j\},\ k = 0,1,2,\ \ldots,\ J \in \mathrm{N} \\
&\operatorname{diam} U < \infty,\ \det A \ne 0, \\
&x(0) = x_0.
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

В (2.3) $x(k) \in \mathrm{R}^n$ – вектор состояния, $u(k) \in \mathrm{R}^n$ – вектор управления, на каждом шаге выбирающийся из множества допустимых управлений $U \subset \mathrm{R}^n$, которое имеет вид многогранника или же ограниченного полиэдра, ограниченного конечным числом гиперплоскостей U_j с векторами нормалей $n_j \in \mathrm{R}^n$, ориентированными вовне множества U. Управление и вектор состояния предполагаются элементами еклидового конечно-мерного пространства P^n со скалярным произведением стандартного вида

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Хотя матрица системы $A \in \mathsf{R}^{n\times n}$ предполагается невырожденной, на самом деле это требование не является обязательным. В [1] показано, что аналогичная задача быстродействия для случая с вырожденной матрицей сводится к рассматриваемому случаю $\det A \neq 0$ с помощью проектирования вектора состояния на линейную оболочку собственных векторов матрицы системы, соответствующих ненулевым собственным значениям. Начальное состояние системы $x_0 \in \mathsf{R}^n$ считается некоторым известным вектором.

Для системы (2.3) изучается задача быстродействия, т.е. требуется построить такое управление (в дальнейшем будем называть его оптимальным), которое переводило бы систему (2.3) из некоторого заданного начального состояния x_0 в 0 за минимальное число шагов N_{min}:

$$N_{min} = \min\{N \in \mathrm{N} : \exists u(0),\ldots,u(N-1) \in U : x(N) = 0\}.(2.4)$$

3. Линейные преобразования многогранников

Исследование свойств управляемости линейных дискретных систем тесно связано с понятием многогранника и полиэдра. Для решения исходной задачи в данном разделе приведем некоторые свойства многогранников в конечномерном пространстве

R^n. Под многогранником будем понимать выпуклую оболочку любого конечного множества точек

$$X = conv\{v^1,\dots,v^M\}.$$

Множество крайних точек множества X обозначим

$$ExtX = \{x \in X : \nexists x_1, x_2 \in X, \alpha \in (0;1), x_1 \neq x_2, x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\}.$$

Вообще говоря, хотя выполнено равенство

$$X = convExtX = conv\{v^1,\dots,v^M\},$$

невсегда совпадают множества $ExtX$ и $\{v^1,\dots,v^M\}$. В общем случае верно только

$$ExtX \subset \{v^1,\dots,v^M\}.$$

Докажем ряд вспомогательных утверждений

Лемма 3.1.

Пусть $X, Y \subset \mathsf{R}^n$ *– многогранники,*

$$X = conv\{v^1,\dots,v^M\}, Y = conv\{w^1,\dots,w^N\}.$$

Тогда алгебраическая сумма Минковского $X+Y$ *тоже является многогранником, причем*

$$X+Y = conv\{v^1+w^1,\dots,v^1+w^N, v^2+w^1,\dots,v^2+w^N \dots, v^M+w^1,\dots,v^M+w^N\}.$$

Доказательство. Пусть $z \in X+Y$, тогда $\exists x \in X, y \in Y$ такие, что $z = x+y$. Тогда

$$\exists \alpha_1,\ldots,\alpha_M, \beta_1,\ldots,\beta_N \in [0;1] : \sum_{i=1}^{M}\alpha_i = \sum_{j=1}^{N}\beta_j = 1,$$

$$z = \sum_{i=1}^{M}\alpha_i v^i + \sum_{j=1}^{N}\beta_j w^j = \sum_{i=1}^{M}\alpha_i (\sum_{j=1}^{N}\beta_j) v^i + \sum_{j=1}^{N}\beta_j (\sum_{i=1}^{M}\alpha_i) w^j =$$

$$= \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\alpha_i\beta_j (v^i + w^j)$$

$$z \in conv\{v^1 + w^1,\ldots,v^1 + w^N, v^2 + w^1,\ldots,v^2 + w^N \ldots, v^M + w^1,\ldots,v^M + w^N\}.$$

То есть

$$X + Y \subset conv\{v^1 + w^1,\ldots,v^1 + w^N, v^2 + w^1,\ldots,v^2 + w^N \ldots, v^M + w^1,\ldots,v^M + w^N\}.$$

Пусть $z \in conv\{v^1 + w^1,\ldots,v^1 + w^N, v^2 + w^1,\ldots,v^2 + w^N \ldots, v^M + w^1,\ldots,v^M + w^N\}$. Тогда

$$\exists \gamma_{ij} \in [0;1], i = \overline{1,M}, j = \overline{1,N} : \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\gamma_{ij} = 1,$$

$$z = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\gamma_{ij}(v^i + w^j) = \sum_{i=1}^{M}(\sum_{j=1}^{N}\gamma_{ij})v^i + \sum_{j=1}^{N}(\sum_{i=1}^{M}\gamma_{ij})w^j.$$

$$z \in X + Y.$$

То есть

$$conv\{v^1 + w^1,\ldots,v^1 + w^N, v^2 + w^1,\ldots,v^2 + w^N \ldots, v^M + w^1,\ldots,v^M + w^N\} \subset X + Y.$$

Окончательно получим, что

$$X + Y = conv\{v^1 + w^1,\ldots,v^1 + w^N, v^2 + w^1,\ldots,v^2 + w^N \ldots, v^M + w^1,\ldots,v^M + w^N\}.$$

Лемма 3.1 гарантирует, что класс многогранников в $\mathbb{R}^n$ замкнут относительно операции сложения, и позволяет достаточно просто построить верхнюю оценку множества крайних точек алгебраической суммы двух многогранников. Сформулируем этот факт в виде следующего следствия.

Следствие 3.1.

Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ *– многогранники,*

$$X = conv\{v^1, \ldots, v^M\}, Y = conv\{w^1, \ldots, w^N\}.$$

Тогда

$$Ext(X+Y) \subset \{v^1 + w^1, \ldots, v^1 + w^N, v^2 + w^1, \ldots, v^2 + w^N \ldots, v^M + w^1, \ldots, v^M + w^N\}.$$

Исследуем еще одно свойство многогранников – замкнутость класса многогранников относительно линейных преобразований.

Будем отождествлять матрицу $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, который она порождает по правилу

$$A(x) = A \cdot x.$$

Под линейным преобразованием множества $A : 2^{\mathbb{R}^n} \to 2^{\mathbb{R}^n}$, порожденного матрицей A, будем понимать

$$A(X) = \{y \in \mathrm{P}^n : \exists x \in X : y = A \cdot x\}.$$

Лемма 3.2.

Пусть $V = \{v^1, \ldots, v^M\} = Ext X$, X *– некоторый многогранник.*

Тогда $\forall A \in \mathrm{R}^{n\times n}, \det A \neq 0$

$$Ext A(X) = A(Ext X)$$

или же

$$A(convV) = convA(V).$$

Доказательство. Для любого $x \in X$ существуют числа $\beta_1, \ldots, \beta_M \in [0;1]$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{M} \beta_i = 1, \sum_{i=1}^{M} \beta_i v^i = x.$$

Тогда

$$Ax = \sum_{i=1}^{M} \beta_i v^i \in convA(V).$$

Кроме того,

$$A(V) \subset A(X).$$

Откуда следует, что

$$A(X) = convA(V) \Rightarrow ExtA(X) \subset A(V).$$

Предположим, что

$$\exists w \in A(V) : \exists \alpha \in (0;1), y^1, y^2 \in A(X) : w = \alpha y^1 + (1-\alpha) y^2.$$

Тогда

$$A^{-1} w = A^{-1}(\alpha y^1 + (1-\alpha) y^2) = \alpha A^{-1} y^1 + (1-\alpha) A^{-1} y^2,$$

где $A^{-1}y^1, A^{-1}y^2 \in X$, $A^{-1}y^1 = A^{-1}y^2 \Leftrightarrow y^1 = y^2$. То есть $A^{-1}w \notin ExtX$. Получаем противоречие.

Окончательно получаем, что

$$A(V) = ExtA(X).$$

Лемма 3.3.

Пусть X *– полиэдр, то есть*

$$X = \bigcap_{k=1}^{K} B_k, \; B_k = \{x \in \mathrm{R}^n : (x, n_k) \le a_k\}.$$

Тогда $\forall A \in \mathrm{R}^{n \times n}, \det A \ne 0$

$$A(X) = \bigcap_{k=1}^{K} B_k, \; B_k = \{y \in \mathrm{R}^n : (x, (A^{-1})^T n_k) \le a_k\}.$$

Доказательство. Пусть $y \in \bigcap_{k=1}^{K} B_k$, тогда

$$\forall k = \overline{1, K} \;\; (y, (A^{-1})^T n_k) \le a_k \Rightarrow (A^{-1} y, n_k) \le a_k \Rightarrow A^{-1} y \in B_k.$$

То есть

$$A^{-1} y \in \bigcap_{k=1}^{K} B_k = X \Rightarrow y \in A(X).$$

$$\bigcap_{k=1}^{K} B_k \subset A(X).$$

Пусть $y \in A(X)$, тогда

$$A^{-1}y \in X = \bigcap_{k=1}^{K} B_k.$$

Тогда

$$\forall k = \overline{1,K} \;\; (A^{-1}y, n_k) \le a_k \Rightarrow (y, (A^{-1})^T n_k) \le a_k \Rightarrow y \in B_k.$$

То есть

$$y \in \bigcap_{k=1}^{K} B_k,$$

$$A(X) \subset \bigcap_{k=1}^{K} B_k.$$

Окончательно получаем

$$A(X) = \bigcap_{k=1}^{K} B_k.$$

Заметим, что хотя класс многогранников в $\mathbb{R}^n$ и замкнут относительно сложения и умножения на матрицу, не является линейным пространством.

4. Свойство множеств 0-управляемости линейных систем

Решение задачи быстроедействия системой (2.3) будем строить с помощью средств, связанных с классом множеств 0-управляемости за N шагов $X(N)$, то есть множеств, состоящих из тех начальных состояний, из которых можно перевести систему в 0 ровно за N шагов посредством допустимого управления.

$$X(N) = \{x_0 : \exists u(0), \dots, u(N-1) \in U : x(N) = 0\},$$

$$X(0)=\{0\}.$$

Построим описание следующее описание множества $X(N)$

$$x_0 \in X(N) \Leftrightarrow \exists u(0),\dots,u(N-1) \in U:$$

$$0 = x(N) = Ax(N-1)+u(N-1) = \dots =$$

$$= A^N x_0 + A^{N-1}u(0) + A^{N-2}u(1) + \dots + Au(N-2) + u(N-1).$$

$$x_0 = \sum_{i=1}^{N} A^{-i}u(i-1),\; u(i) \in U, i = \overline{1,N}.$$

$$X(N) = \sum_{i=1}^{N} A^{-i}U. \tag{4.1}$$

Лемма 4.1.

$\forall N \in \mathrm{N}$ *множество 0-управляемости* $X(N)$ *обладает следующими свойствами:*

1) $X(N)$ *– многогранник, то есть*

$$\exists V = \{v^1,\dots,v^M\} \subset \mathrm{R}^n : X(N) = convV;$$

2) $X(N)$ *– полиэдр, то есть*

$$X = \bigcap_{k=1}^{K} B_k,\; B_k = \{x \in \mathrm{R}^n : (x, n_k) \le a_k\};$$

Доказательство. Согласно лемме 3.2 множества $A^{-1}(U),\dots,A^{-N}(U)$ – многогранники. Тогда в силу леммы 3.1 алгебраическая сумма $A^{-1}(U)+\dots+A^{-N}(U)$ также является многогранником. Тогда в силу представления (4.1) $X(N)$ –

многогранник.

Так как в конечномерном пространстве любой многогранник является ограниченным полиэдром, то автоматически оказываются выполнены верными свойство 2).

Для дальнейшего исследования интерес представляют только те системы управления, для которых последовательность множеств $\{X(N)\}_{N=0}^{\infty}$ является вложенной, то есть

$$X(N) \subset X(N+1),\ N = 0,1,2,\ \ldots \qquad (4.2)$$

Такое предположение выглядит достаточно естественным, так как может быть истолковано следующим образом: если система может быть переведена из данного начального состояния в ноль за N шагов, то и за большее число шагов тоже может быть переведена.

Сформулируем условия, которые нужно наложить на систему управления (2.3), чтобы было выполнено (4.2).

Лемма 4.2.

$X(N) \subset X(N+1)$ *тогда и только тогда, когда* $0 \in U$.

Доказательство. Пусть $X(N) \subset X(N+1)$, $N = 0,1,2,\ldots$ Тогда

$$\{0\} = X(0) \subset X(1) = A^{-1}(U).$$

$$\exists u \in U : A^{-1}u = 0 \Rightarrow u = 0.$$

Пусть $0 \in U$, тогда

$$\forall x_0 \in X(N) = \sum_{i=1}^{N} A^{-i}(U),$$

$$x_0 = x_0 + A^{-(N+1)} \cdot 0 \in X(N+1) = \sum_{i=1}^{N+1} A^{-i}(U).$$

То есть

$$X(N) \subset X(N+1), N = 0,1,2,\ldots.$$

В дальнейшем будут рассматриваться только системы (2.3), удовлетворяющие условиям леммы 3.2, то есть те, для которых $0 \in U$.

Для вычисления множества 0-управляемости $X(N)$ за N шагов можно использовать следующий алгоритм.

Алгоритм 4.1.

1) Вычислить множество крайних точек многогранника $A^{-1}(U)$. *Положить* $k = 0$.

2) Если $k = N$, то завершить итерационный процесс. Если $k < N$, то вычислить согласно лемме 2.2 множество крайних точек многогранника $A^{-1}(X(k))$.

3) Построить согласно лемме 3.1 верхнюю оценку множества крайних точек многогранника

$$A^{-1}(U) + A^{-1}(X(k)) = \sum_{i=1}^{k+1} A^{-i}(U) = X(k+1).$$

4) Исключить из полученной в 3) верхней оценки множества крайних точек $X(k+1)$ некрайние точки согласно алгоритму описанному в [1].

5) Увеличить k на 1 и перейти к пункту 2).

Замечание 4.1. *Вообще говоря, выполнять пункт 4) необязательно, но тогда размер оценки множества крайних точек будет расти с экспоненциальной скоростью. С целью достижения оптимальной скорости работы алгоритма можно выполнять пункт 4) не на каждой итерации, а лишь тогда, когда размер оценки становится неприемлимо большим.*

5. Решение задачи быстродействия линейной дискретной системой при линейных ограничениях на управление

Теперь построим общий вид оптимального позиционного управления в задаче быстродействия системой (2.3). Метод, приведенный ниже, является обобщением метода заложенного в [1]. Существенным его отличием является возможность применения для поиска оптимального по быстродействию управления любой размерности. В то время, как в [1] необходимым условием использования метода является скаялрный вид управления.

Согласно лемме 4.1 множество $X(N)$ представляет собой многогранник, допускающий представление

$$X(N) = conv\{v^1,\ldots,v^M\},\ ExtX(N) = \{v^1,\ldots,v^M\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Кроме того, согласно [1] справедливо соотношение

$$x \in X(N) \Leftrightarrow \mu(x, X(N)) \le 1, (5.1)$$

где $\mu(x, X(N))$ – функционал Минковского, значение которого может быть вычислено в результате решения задачи линейного программирования, описанной в [1].

Теперь число N_{min} можно определить из соотношения

$$\mu(x_0, X(N_{min})) \le 1, \ \ \mu(x_0, X(N_{min}-1)) > 1, \ \ x_0 \ne 0,$$
$$N_{min} = 0, x_0 = 0. \tag{5.1}$$

Определим функционал

$$S_N(x) = arg\ min_{u \in U} \mu(x+u, X(N)).$$

Как показано в [1], вычисление значения функционала $S_N(x)$ в любой точке $x \in \mathrm{R}^n$ сводится к решению ЗЛП

$$\begin{aligned}
&\min_{\alpha,\beta,u} \alpha \\
&x + u = \sum_{k=1}^{M} v^k \beta_k, \\
&\sum_{k=1}^{M} \beta_k \le \alpha, \\
&0 \le \alpha \le 1, \\
&(u, n_j) \le a_j,\ j = \overline{1, J}, \\
&\beta_k \ge 0, k = \overline{1, M}.
\end{aligned}$$

Теперь сформулируем теорему, предлагающую вид оптимального позиционного управления в задаче быстродействия системой (2.3).

Теорема 5.1.

Пусть для некоторого заданного $x_0 \in \mathrm{R}^n$ *траектория системы (2.3) определяется соотношениями*

$$x(k+1) = Ax(k) + S_{N_{min}-k-1}(Ax(k)), k = \overline{0, N_{min}-1},$$

$$x(0) = x_0.$$

Тогда

1) $x(N_{min}) = 0$,

2) оптимальное позиционное управление на k *-м шаге имеет вид*

$$u^*(k) = S_{N_{min}-k-1}(Ax(k)).$$

Доказательство. Так как $x(0) \in X(N_{min})$, то $\exists \tilde{u} \in U$ такой, что

$$Ax(0) + \tilde{u} \in X(N_{min} - 1).$$

Тогда в силу (4.1)

$$\mu(Ax(0) + \tilde{u}, X(N_{min} - 1) \le 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(Ax(0) + S_{N_{min}-1}(Ax(0)), X(N_{min} - 1) \le 1.$$

$$x(1) = Ax(0) + S_{N_{min}-1}(Ax(0)) \in X(N_{min} - 1).$$

Продолжая рассуждения по индукции, получим

$$x(N_{min}) \in X(0) = \{0\}.$$

$$x(N_{min}) = 0.$$

6. Явный вид оптимального позиционного управления в частном случае покоординатно независимого управления

Рассмотрим частный случай системы (2.3), когда управления на каждом шаге независимы, то есть выбираются из некоторого прямоугольника. Не ограничивая общности, будем полагать, что этот прямоугольник симметричен относительно точки 0. В этом случае систему управления (2.3) можно представить в следующем виде

$$
\begin{aligned}
&x(k+1) = Ax(k) + b_1 u_1(k) + \ldots b_m u_m(k),\\
&A \in \mathrm{R}^{n\times n}, B = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathrm{R}^{n\times m},\\
&x(k) \in \mathrm{R}^n,\ u(k) = (u_1(k), \ldots, u_m(k))^T \in [-1;1]^m, k = 0,1,2, \ldots\\
&x(0) = x_0.
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

Построим описание множества $X(N)$ для системы (6.1)

$$x_0 \in X(N) \Leftrightarrow \exists u(0),\ldots,u(N-1) \in [-1;1]^m : x(N) = 0.$$

$$0 = x(N) = Ax(N-1) + Bu(N-1) = A^2 x(N-2) + ABu(N-2) + Bu(N-1) = \ldots =$$

$$= A^N x_0 + A^{N-1} Bu(0) + \ldots + ABu(N-2) + Bu(N-1),$$

$$A^N x_0 = -\sum_{i=1}^{N} A^{N-i} Bu(i-1),$$

$$x_0 = -\sum_{i=1}^{N} A^{-i} Bu(i-1) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m} A^{-i} b_j u_j(i-1).$$

Получаем следующее представление для множества 0-управляемости:

$$X(N) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m} conv\{A^{-i} b_j, -A^{-i} b_j\}. \tag{6.2}$$

Предложим еще один способ построения оптимального позиционного управления в задаче быстродействия системой (6.1), основанный на представлении множеств 0-управляемости в виде полиэдров. Для этого определим класс вспомогательных множеств $X(N,l)$, $N \in \mathrm{N}, l = \overline{1,m}$:

$$X(N,l) = \{x_0 \in \mathrm{R}^n : \exists u(0),\ldots,u(N-1) \in [-1;1]^m, u_1(0) = \ldots = u_{m-l}(0) = 0 : x(N) = 0\}.$$

То есть множество $X(N,l)$ состоит из тех начальных состояний, из которых можно перевести систему в ноль не более, чем за N шагов, используя на первом шаге только последние l управлений.

Построим другое описание множества $X(N,l)$.

$$x_0 \in X(N,l) \Leftrightarrow \exists u(0),\ldots,u(N-1) \in [-1;1]^m, u_1(0) = \ldots = u_{m-l}(0) = 0 : x(N) = 0.$$

$$0 = x(N) = Ax(N-1) + Bu(N-1) = A^2x(N-2) + ABu(N-2) + Bu(N-1) = \ldots =$$

$$= A^N x_0 + A^{N-1}Bu(0) + \ldots + ABu(N-2) + Bu(N-1),$$

$$A^N x_0 = -\sum_{i=1}^{N} A^{N-i} Bu(i-1),$$

$$x_0 = -\sum_{i=1}^{N} A^{-i} Bu(i-1) = -\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{m} A^{-i} b_j u_j(i-1) + \sum_{j=m-l+1}^{m} A^{-1} b_j u_j(0).$$

Получаем следующее представление для множества 0-управляемости:

$$X(N) = \sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{m} conv\{A^{-i}b_j, -A^{-i}b_j\} + \sum_{j=m-l+1}^{m} conv\{A^{-1}b_j; A^{-1}b_j\}. \qquad (6.3)$$

Полученное представление приводит к ряду свойств рассматриваемого множества. Сформулируемых их в виде следующей леммы.

Лемма 6.1.

1) $\forall x \in X(N,l) \Rightarrow -x \in X(N,l)$;

2) $0 \in \mathrm{ri} X(N,l)$;

3) $\exists \{v^1,\ldots,v^M\} \subset \mathrm{R}^n : X(N,l) = conv\{v^1,\ldots,v^M\}$;

4) $X(N,l)=\bigcap_{k=1}^{K} C_k(N,l)$,

$$C_k(N,l)=\{x\in\mathrm{P}^n : |(x,n_k)|\le\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{m}|(A^{-i}b_j,n_k)|+\sum_{j=m-l+1}^{m}|(A^{-1}b_j;n_k)|\};$$

5) $X(N,l)\subset X(N,l+1), l=\overline{0,m-1}, N\in\mathrm{N}$;

6) $X(N,l)\subset X(N+1,l), l=\overline{0,m}, N\in\mathrm{N}$;

7) $X(N,l)\subset X(N), X(N,m)=X(N), l=\overline{0,m-1}, N\in\mathrm{N}$;

8) $AX(N,0)=X(N-1), N\in\mathrm{N}$;

9) $X(1,0)=\{0\}$;

10) $X(N,l+1)=X(N,l)+conv\{-A^{-1}b_{m-l};A^{-1}b_{m-l}\}, l=\overline{0,m-1}, N\in\mathrm{N}$;

11) $\forall x\in X(N,l+1)\,\exists u\in[-1;1]:(x+A^{-1}b_{m-l}u)\in X(N,l), l=\overline{0,m-1}, N\in\mathrm{N}$;

12) $\forall x\in X(N+1,0)\Rightarrow Ax\in X(N,m), N\in\mathrm{N}$.

Доказательство. Доказательство свойств 1-4) для алгебарической суммы отрезков приведено в [1]. Свойства 5-12) вытекают непосредственно из представлений (6.1) и (6.3).

Теперь для произвольных чисел $N\in\mathrm{N}$ и $l=\overline{0,m}$ с помощью лемм 3.2 и 6.1 и алгоритмов, описанных в [1], можно рекуррентным образом построить описание множеств $X(N,l)$ в виде многогранника, а с помощью лемм 6.3 и 6.1 – в виде полиэдра.

Полагая, что для всех $N=\overline{1,N_{min}}$ и $l=\overline{0,m}$ описание множества $X(N,l)$ в виде полиэдра известно, построим оптимальное позиционное управление. Для этого определим следующий функционал

$$P_{N,l}(x) = \frac{1}{2}\left[\max_{k=\overline{1,K}:(A^{-1}b_{m-l},n_k)\neq 0} \left\{ \frac{-sign(A^{-1}b_{m-l},n_k)\cdot a_k(N,l)-(x,n_k)}{(A^{-1}b_{m-l},n_k)} \right\} + \right.$$

$$\left. + \min_{k=\overline{1,K}:(A^{-1}b_{m-l},n_k)\neq 0} \left\{ \frac{sign(A^{-1}b_{m-l},n_k)\cdot a_k(N,l)-(x,n_k)}{(A^{-1}b_{m-l},n_k)} \right\} \right], \qquad (6.4)$$

$$a_k(N,l) = \sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{m} |(A^{-i}b_j,n_k)| + \sum_{j=m-l+1}^{m} |(A^{-1}b_j;n_k)|.$$

Теорема 6.1.

Пусть набор чисел $\{y(k,l)\}_{k=\overline{0,N_{min}},\, l=\overline{0,m-1}}$ *определяется рекуррентными соотношениями*

$$y(k,l+1) = y(k,l) + A^{-1}b_{l+1}P_{N_{min}-k,m-l-1}(y(k,l)),$$
$$y(k+1,0) = A\cdot y(k,m),$$
$$y(0,0) = x_0.$$

Тогда

1) траектория, определяемая соотношением

$$x(k) = y(k,0), k = \overline{0,N_{min}},$$

является оптимальной в задаче быстродействия системой (5.1);

2) $x(N_{min}) = 0$*;*

3) Оптимальное позиционное управление на каждом шаге имеет вид

$$u^*(x(k)) = \begin{pmatrix} P_{N_{min}-k,m-1}(y(k,0)) \\ P_{N_{min}-k,m-2}(y(k,1)) \\ \vdots \\ P_{N_{min}-k,0}(y(k,m-1)) \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Поскольку

$$y(0,0) = x_0 \in X(N_{min}) = X(N_{min}, m),$$

то согласно лемме 5.1 найдется такое число $u \in [-1;1]$, что

$$(y(0,0) + uA^{-1}b_1) \in X(N_{min}, m-1).$$

То есть, основываясь на представлении множества $X(N_{min}, m-1)$ в виде полиэдра, это условие равносильно условию

$$\forall i = \overline{1,K} \ \ (y(0,0) + uA^{-1}b_1) \in C_i(N_{min}, m-1) \Leftrightarrow$$

$$\forall i = \overline{1,K} \ \ -a_i(N_{min}, m-1) \le (y(0,0) + uA^{-1}b_1, n_i) \le a_i(N_{min}, m-1) \Leftrightarrow$$

$$\forall i = \overline{1,K} \ \ -a_i(N_{min}, m-1) \le (y(0,0), n_i) + u(A^{-1}b_1, n_i) \le a_i(N_{min}, m-1) \Leftrightarrow$$

$$\forall i = \overline{1,K} : (A^{-1}b_1, n_i) \ne 0$$

$$\frac{-sign(A^{-1}b_1, n_i) \cdot a_i(N_{min}, m-1) - (y(0,0), n_i)}{(A^{-1}b_1, n_i)} \le u \le$$

$$\le \frac{sign(A^{-1}b_1, n_i) \cdot a_i(N_{min}, m-1) - (y(0,0), n_i)}{(A^{-1}b_1, n_i)} \Leftrightarrow$$

$$u_1 = \max_{i=\overline{1,K}:(A^{-1}b_1, n_i) \ne 0} \left\{ \frac{-sign(A^{-1}b_1, n_i) \cdot a_i(N_{min}, m-1) - (y(0,0), n_i)}{(A^{-1}b_1, n_i)} \right\} \le u \le$$

$$\le \min_{i=\overline{1,K}:(A^{-1}b_1,n_i)\neq 0} \left\{ \frac{-sign(A^{-1}b_1,n_i)\cdot a_i(N_{min},m-1)-(y(0,0),n_i)}{(A^{-1}b_1,n_i)} \right\} = u_2.$$

Причем, согласно лемме 6.1 отрезок $[u_1;u_2]$ не может оказаться пустым, так как хотя бы одно u из этого отрезка должно существовать.

$$P_{N_{min},m-1}(y(0,0)) = \frac{u_1+u_2}{2} \in [u_1;u_2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(0,1) = y(0,0) + A^{-1}b_1 P_{N_{min},m-1}(y(0,0)) \in X(N_{min}, m-1).$$

Продолжая рассуждения по индукции для всех $l=\overline{0,m-1}$, получим, что $y(0,m)\in X(N_{min},0)$. Тогда согласно лемме 6.1

$$x(1) = y(1,0) = Ay(0,m) \in X(N_{min}-1,m) = X(N_{min}-1).$$

Причем,

$$Ax(0)+Bu^*(0) = A\left(y(0,0)+\sum_{j=1}^{m} A^{-1}b_j P_{N_{min},m-j}(y(0,j-1)) \right) =$$

$$= A\left(y(0,1)+\sum_{j=2}^{m} A^{-1}b_j P_{N_{min},m-j}(y(0,j-1)) \right) = \ldots =$$

$$= Ay(0,m) = y(1,0) = x(1).$$

Продолжая рассуждения по индукции для всех $k=\overline{0,N_{min}-1}$, получим, что

$$x(N_{min}) = 0,$$

а значит, траектория $\{x(k)\}_{k=0}^{N_{min}}$ и управление $\{u^*(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1}$ являются оптимальными в задаче быстродействия системой (6.1).

7. Примеры

Продемонстрируем эффективность предложенных в теореме 5.1 и теореме 6.1 методов построения оптимального позиционного управления, а также приведем решение задачи быстродействия для системы 2.1.

Рассмотрим метод, предложенный в разделе 4, на примере смесительного бака, наполняющегося с помощью двух потоков, имеющих переменные мгновенные расходы $F_1(t)$ и $F_2(t)$. Оба входных потока имеют растворимое вещество с постоянными величинами концентрации c_1 и c_2. Выходной поток имеет массовую скорость истечения $F(t)$. Предполагается, что содержимое бака перемешивается так, что концентрация выходного потока равна $c(t)$ в баке. Задача состоит в наискорейшем приведении концентрации выходного потока $c(t)$ к некоторому фиксированному известному значению.

Рассмотрим случай установившегося состояния, когда все величины являются постоянными: F_{10}, F_{20} и F_0 – расходы, V_0 – объем жидкости в баке, c_0 – концентрация растворимого вещества в баке. Предположим теперь, что возникли небольшие отклонения от установившегося состояния:

$$\begin{aligned}
&F_1(t) = F_{10} + \mu_1(t),\\
&F_2(t) = F_{20} + \mu_2(t),\\
&V(t) = V_0 + \xi_1(t),\\
&c(t) = c_0 + \xi_2(t).
\end{aligned}$$

Предположив, что μ_1, μ_2, ξ_1, ξ_2 являются малыми, получим линеаризованные уравнения состояния, вывод которых подробно описан в [2].

$$\dot{\xi}_1(t) = \mu_1(t) + \mu_2(t) - \frac{1}{2}\frac{F_0}{V_0}\xi_1(t),$$
$$\dot{\xi}_2(t) + c_0\xi_1(t) = c_1\mu_1(t) + c_1\mu_1(t) - c_0\frac{1}{2}\frac{F_0}{V_0}\xi_1(t) - F_0\xi_2(t).$$

Обозначим

$$x(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix},\ u(t) = \begin{pmatrix} \mu_1(t) \\ \mu_2(t) \end{pmatrix},\ \theta = \frac{V_0}{F_0}.$$

Получим окончательный вид дифференциальных уравнений состояния системы

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2\theta} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{c_1 - c_0}{V_0} & \dfrac{c_2 - c_0}{V_0} \end{pmatrix} u(t).$$

Примем следующие численные значения параметров

$$F_{10} = 0.015,$$
$$F_{20} = 0.005,$$
$$F_0 = 0.02,$$
$$c_1 = 1,$$
$$c_2 = 2,$$
$$c_0 = 1.25,$$
$$V_0 = 1,$$
$$\theta = 50.$$

В предположении, что процессом управляет смесительная машина, клапанная регулировка меняется только в дискретные моменты времени и остается постоянной между ними. Эти моменты разделены временным интервалам $\Delta = 5$. Получим следующее дискретное описание системы

$$x(k+1) = Ax(k) + b_1 u_1(k) + b_2 u_2(k), k = 0,1,2, \ldots$$
$$A = \begin{pmatrix} 0.9512 & 0 \\ 0 & 0.9048 \end{pmatrix}, \ b_1 = \begin{pmatrix} 4.877 \\ -1.1895 \end{pmatrix}, \ b_2 = \begin{pmatrix} 4.877 \\ 3.569 \end{pmatrix}. \qquad (7.1)$$

Наложим на управление ограничения, связанные с абсолютным изменением концентрации вещества в каждом из входных потоков и с ограничением на суммарное изменение концетрации в обоих потоках:

$$-0.1 \le u_1(k) \le 0.1,$$
$$-0.1 \le u_2(k) \le 0.1, \ \ k = 0,1,2,\ldots$$
$$u_2(k) + u_1(k) \le 0.1,$$

Пусть начальное состояние $x(0) = (-0.1, 0.14)^T$.

Построим $X(N_{min})$ и оптимальное управление $u(0),\ldots,u(N_{min})$. Результаты расчетов приведем в таблице.

k	$u_1^*(k)$	$u_1^*(k)$	$x_1(k)$	$x_2(k)$	N_{min}
0	0,0025	-0,099	0,5	0,7	
1	0,052	-0,052	0	0,2735	
2	–	–	0	0	2

Проиллюстрируем графически полученные результаты на плоскости.

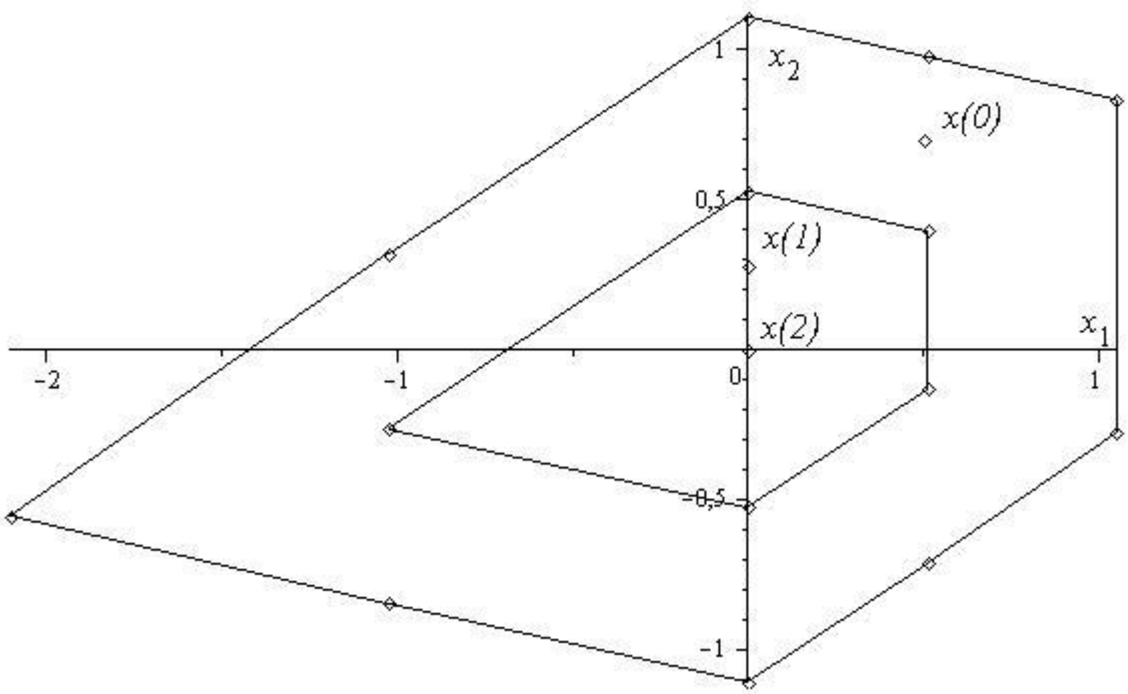

Рис. 1. Множества 0-управляемости за 2 и 1 шаг и оптимальная траектория системы.

Теперь приведем численное решение исходной задачи наискорейшей ликвидации углового отклонения гондолы. Поскольку система (2.1), описывающая движение гондолы, обладает покоординатно независимым управлением, то для расчетов воспользуемся методом описанным в теореме 6.1. В качестве начального состояния $x(0)$ выберем точку $x(0) = (0{,}1; 0)^T$. В [1] описано решение предложенной задачи быстродействия иным методом.

Определим наименьшее по включению $X(N_{min})$ такое, что $x(0) \in X(N_{min})$. Построим последовательность оптимальных управлений согласно теореме 2 и состояний системы, получаемых согласно соотношениям (2.2).

Результаты численных расчетов можно представить в виде таблицы

k	$u^*(k)$	$\alpha(k)$	$\omega(k)$	N_{min}
	-0,89	0,1	0	
1	-0,76	0,1	-0,11	
2	0,81	0,09	-0,29	
3	1,0	0,06	-0,27	
4	0,99	0,03	-0,21	
5	0,9	0,01	-0,12	
6	–	0	0	6

Отметим, что оптимальные управления на каждом шаге отличаются от оптимальных управлений в [1]. Этот факт приводит к иной траектории движения системы. Проиллюстрируем графически полученные результаты на плоскости.

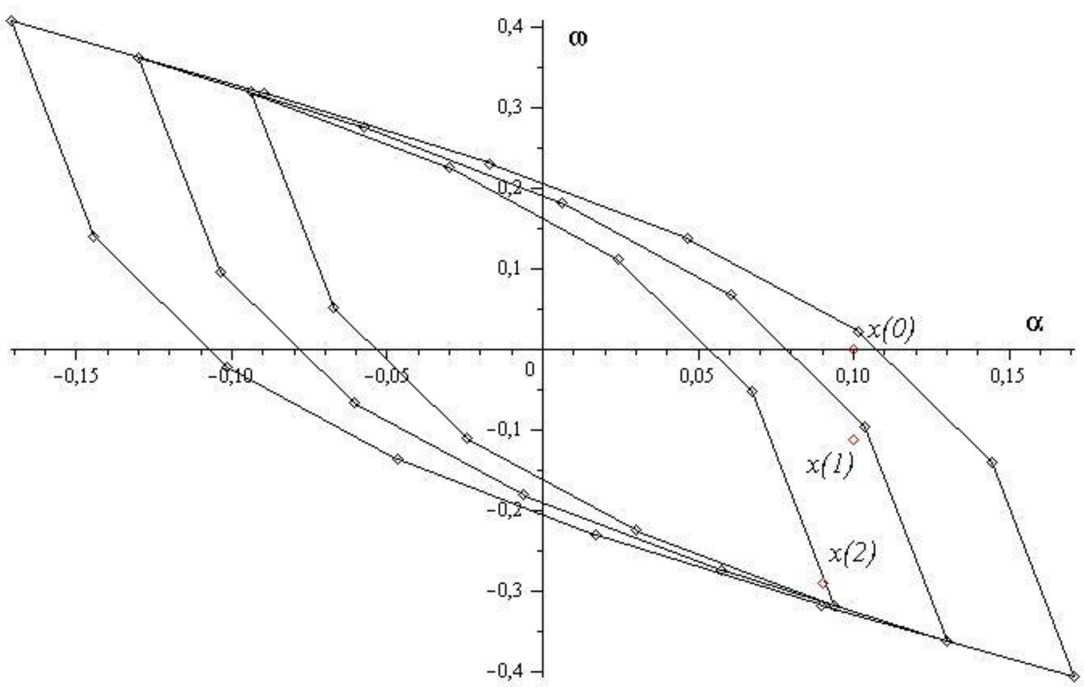

Рис. 2. Множества 0-управляемости за 6, 5, и 4 шага и первые три состояния оптимальной траектории.

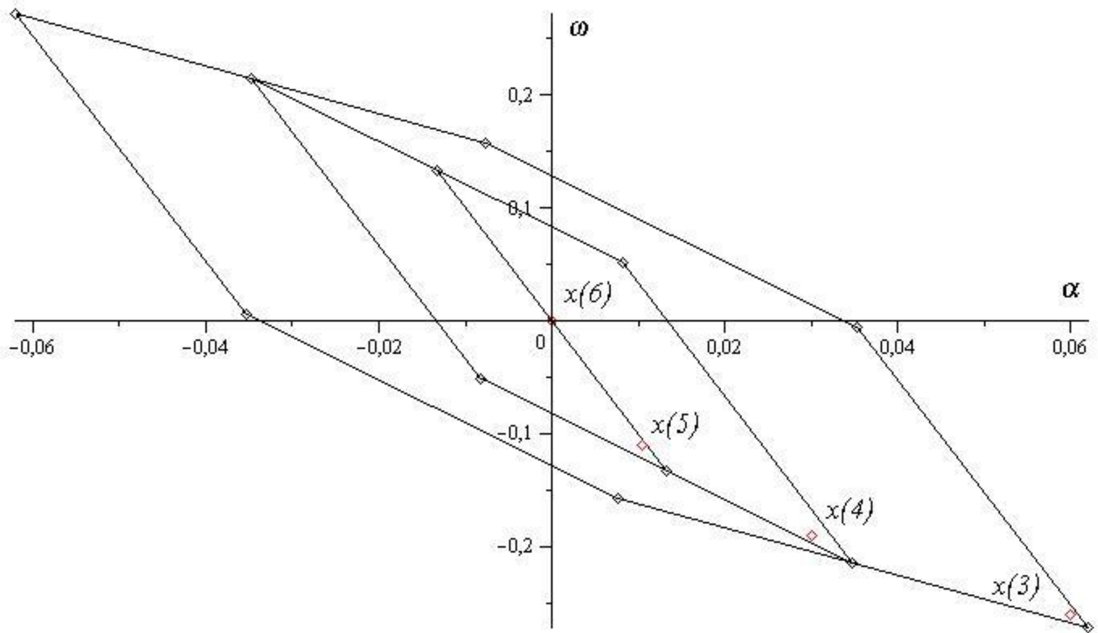

Рис. 3. Множества 0-управляемости за 3, 2, и 1 шаг и последние четыре состояния оптимальной траектории.

Библиографический список

1. Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н. О задаче оптимального быстродействия для линейной дискретной системы с ограниченным скалярным управлением на основе множеств 0-управляемости // Автоматика и телемеханика. 2015. №8. С. 100-121

2. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. - М.: Мир, 1977. – 653 с.

3. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. - М.: Наука, 1973. – 448 с.

4. Табак Д., Куо Б. Оптимальное управление и математическое программирование. - М.: Наука, 1975. – 280 с.

5. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. - М.: Наука, 1973. – 256 с.

6. Combastel C., Raka S.A. On Computing Envelopes for Discrete-time Linear Systems with Affine Parametric Uncertainties and Bounded Inputs / Preprints 18 IFAC World Congr. Milano (Italy) August 28 - September 2, 2011. P. 4525-4533.

7. Kurzhanskiy A.F., Varaiya P. Theory and computational techniques for analysis of discrete-time control systems with disturbancens // Optim. Method Software, 2011, V.26. No.4-5. P.719-746.

8. Keerthi S.S., Gilbert E.G. Computatuon of minimum-time feedback control laws for discrete-time cyctems with state-control // IEEE Transaction Automat. Control. 1987. V.32. No.5. P.432-434.

9. Lin W.-S. Time-optimal control strategy for saturating linear discrete systems // Int. J. Control. 1986. V.43. No.5. P.1343-1351.

10. Eldem V., Selbuz H. On the general solytion of the state deadbeat control problem // IEEE Transaction Automat. Control. 1994. V.39. No.5. P.1002-1006.

11. Benvenuti L., Farina L. The geometry of the reachability set for linear Discrete-time systems with positive controls // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2006. V.28. No.2. P.306–325.

12. de Leon-Canion P., Lunze J. Dependable control of uncertain linear systems based on set-theoretic methods// Int. J. Control. 2010. V.83. No.6. P.1248-1264.

13. Fisher M.E., Gayek J.E. Estimating Reachable Sets for Two-Dimensional Linear Discrete Systems // J. Optim. Theory Appl. 1988. V.56. No.1. P.67-88.

14. Костоусова Е.К. О внешнем полиэдральном оценивании множеств достижимости в «расширенном» пространстве для линейных многошаговых систем с интегральными ограничениями на управление // Вычислительные технологии. 2004. Т.9. №4. С.54-72.

15. Kostousova E. K. External Polyhedral Estimates For Reachable Sets Of Linear Discrete-Time Systems with Integral Bounds On Controls // Int. J. Pure Appl Math. 2009. V.50. No.2. P.187-194.

16. Ding M.-F., Liu Y., Gear J. A. A Modified Centered Climbing Algorithm for Linear Programming // Appl. Math. 2012. V.3. P.1423-1429.

17. Telgen J. Minimal representation of convex polyhedral sets // J. Optim. Theory Appl. 1982. V.38. No.1. P.1-24.

18. Иванов Д.С., Овчинников М.Ю., Ткачев С.С. Управление ориентацией твердого тела, подвешенного на струне с использованием вентиляторных двигателей // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2011. №1. С.107-119.