УДК 629.78

ПРОЕКТИРОВАНИЕ СЖАТЫХ ПАНЕЛЕЙ ЛЕГКИХ САМОЛЕТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРИТЕРИЯ ПОДОБИЯ

В.Е.Кичеев

Рассматривается клепаная панель при загружении постоянной погонной сжимающей силой. Сформирован критерий подобия. Из условия минимума веса при обеспечении статической прочности получены формулы оптимальных геометрических параметров панели.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

q – расчетная погонная сжимающая сила;

L – шаг нервюр или шпангоутов;

E – модуль упругости;

$K_q = q / (LE)$ – критерий подобия сжатой панели;

H – высота стрингера;

F – площадь поперечного сечения стрингера;

B – расстояние между заклепочными швами по стрингеру;

W – ширина присоединенной обшивки;

t – шаг стрингеров;

i – радиус инерции площади поперечного сечения стрингера;

i_p - радиус инерции площади поперечного сечения ребра;

$\chi = (i_p / i)^2$ - поправочный коэффициент;

δ – толщина обшивки;

$\delta_c = F / t$ – условная толщина обшивки, эквивалентная по объему стрингерам;

$\delta_П = \delta + \delta_c$ - приведенная толщина панели;

$C_i = (i / H)^2$ - добротность;

$C_F = F / H^2$ - полнота;

C_b = B / H – относительное расстояние между заклепочными швами по стрингеру;

C_δ = δ / H – относительная толщина обшивки;

C_t = t / δ – относительный шаг стрингеров;

C_w = W / δ – относительная ширина присоединенной обшивки;

c – коэффициент заделки;

σ - действующее напряжение;

$\sigma_П$ = предел пропорциональности;

$\sigma_{КР}$ = критическое напряжение общей потери устойчивости ребра.

На начальных стадиях проектирования тонкостенных каркасных агрегатов типа крыла, фюзеляжа и оперения приходится решать задачу выбора оптимальных параметров конструкции.

В технической литературе нет общепризнанной методики решения этой задачи. Имеющиеся рекомендации носят общий характер без указания границ применимости. Поэтому конструктору приходится использовать свой опыт и интуицию.

По-видимому, есть потребность в разработке метода проектировочного расчета сжатой панели, основанного на критериальном подходе.

Применительно к начальным этапам проектирования каркасных агрегатов самолета ставится задача выбора оптимальных геометрических параметров поперечного сечения сжатой панели, являющейся составной частью проектируемого агрегата тонкостенной конструкции. Закритерий оптимальности принимается вес панели. Из большого многообразия требований, предъявляемых к проектируемой конструкции, учитывается только требование статической прочности. Задача решается при следующих допущениях и ограничениях.

1. Расчетная схема панели (Рис.1) при работе на сжатие – это стержневая система, состоящая из ребер, опирающихся на нервюры или шпангоуты. Под ребром понимаем стрингер с присоединенной обшивкой.

2. Погонная сжимающая сила постоянна по длине и ширине панели. Погонная сдвигающая сила отсутствует или она пренебрежимо мала.

3. Критическое напряжение общей потери устойчивости ребра меньше:

а) предела пропорциональности материала конструкции;

б) критического напряжения местной потери устойчивости стрингера;

в) критического напряжения сжатой полоски обшивки шириной **B** (Рис.2);

г) критического напряжения потери устойчивости обшивки между заклепками в продольном заклепочном шве по стрингеру.

4. Ширина присоединенной обшивки **W** зависит только от толщины обшивки и не зависит от напряжения в стрингере.

5. Наружная поверхность панели цилиндрическая. Оси стрингеров параллельны образующей. В частном случае панель плоская.

6. Панель регулярной конструкции: все стрингеры одинаковые и расположены с постоянным шагом, толщина обшивки постоянная.

7. Дискретность толщин листов обшивки и сортамента профилей стрингеров не учитывается. Предполагается непрерывное изменение площади поперечного сечения стрингера с сохранением геометрического подобия.

8. Радиус инерции площади поперечного сечения ребра пропорционален радиусу инерции площади поперечного сечения стрингера.

9. Шаг нервюр или шпангоутов постоянный и фиксированный.

10. Все элементы конструкции выполнены из одного материала.

При решении поставленной задачи предлагается использовать критерий подобия

$$\mathbf{K}_q = \mathbf{q} / (\mathbf{LE}), \tag{1}$$

который учитывает загружение, характерный размер и материал конструкции.

При проектировании панели используются следующие геометрические параметры:

$$\mathbf{L, H, F, B, W, \delta, t, i, i}_p \tag{2}$$

Удобно перейти к следующим относительным параметрам:

$$\mathbf{C}_i = (\mathbf{i} / \mathbf{H})^2 \quad (3); \qquad \mathbf{C}_t = \mathbf{t} / \boldsymbol{\delta} \quad (7)$$

$$\mathbf{C}_F = \mathbf{F} / \mathbf{H}^2 \quad (4); \qquad \mathbf{C}_w = \mathbf{W} / \boldsymbol{\delta} \quad (8)$$

$$\mathbf{C}_b = \mathbf{B} / \mathbf{H} \quad (5); \qquad \boldsymbol{\chi} = (\mathbf{i}_p / \mathbf{i})^2 \quad (9)$$

$$\mathbf{C}_\delta = \boldsymbol{\delta} / \mathbf{H} \quad (6);$$

Выразим размерные параметры через безразмерные. Из (3) – (9) имеем

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{C}_i \mathbf{H}^2 \quad (10); \qquad \mathbf{t} = \mathbf{C}_t\ \mathbf{C}_\delta \mathbf{H} \quad (14)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{C}_F\ \mathbf{H}^2 \quad (11); \qquad \mathbf{W} = \mathbf{C}_w \mathbf{C}_\delta \mathbf{H} \quad (15)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}_b \mathbf{H} \quad (12); \qquad \mathbf{i}_p^2 = \boldsymbol{\chi}\, \mathbf{C}_i\ \mathbf{H}^2 \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{C}_\delta \mathbf{H} \quad (13);$$

«Размажем» стрингеры по обшивке, с учетом (11) и (14) получим

$$\boldsymbol{\delta}_c = \frac{F}{t} = \frac{HC_F}{C_t C_\delta} \tag{17}$$

За функцию цели принимаем приведенную толщину панели. Принимая во внимание (13) и (17), имеем

$$\boldsymbol{\delta}_П = \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\delta}_c = H\left[C_\delta + \frac{C_F}{C_t C_\delta}\right] \tag{18}$$

Высоту стрингера $\mathbf{H}$ определим из условия статической прочности

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{КР} \tag{19}$$

Действующее напряжение равно нагрузке на ребро, деленной на площадь поперечного сечения. Принимая во внимание Рис.1, а также (11) – (15), получаем

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{qt}{F + (W + B)\delta} = \frac{qC_t C_\delta}{H(C_F + C_W C_\delta^2 + C_B C_\delta)} \tag{20}$$

Для сжатой панели при принятых допущениях критичным будет общая потер устойчивости ребра. Формула Эйлера с учетом (16) принимает вид

$$\boldsymbol{\sigma}_{КР} = \frac{c\pi^2 E i_p^2}{L^2} = \frac{c\pi^2 E\chi C_i H^2}{L^2} \tag{21}$$

Подставим (20) и (21) в (19), решим полученное уравнение относительно $\mathbf{H}$. После простых преобразований с учетом (1) имеем

$$\mathbf{H} = \mathbf{L}\sqrt[3]{\frac{K_q C_t C_\delta}{\pi^2 c\chi C_i (C_F + C_W C_\delta^2 + C_b C_\delta)}} \tag{22}$$

Полученные выше зависимости (18), (22), позволяют решить задачу проектирования сжатой панели минимального веса.

Определим оптимальный параметр $\mathbf{C}_t$ при фиксированных остальных. Подставим (22) в (18). Из необходимого условия экстремума полученной функции

$$\frac{d\delta_п}{dC_t} = 0$$

имеем

$$\mathbf{C}_t = \frac{2C_F}{C_\delta^2} \tag{23}$$

Подставим (23) в (22).

$$\mathbf{H} = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi^2} K_q \frac{C_F}{c\chi C_i C_\delta (C_F + C_W C_\delta^2 + C_b C_\delta)}} \tag{24}$$

При подстановке (24) в (10) – (16) получим формулы геометрических параметров панели при оптимальном относительном шаге стрингеров $\mathbf{C}_t$. Ограничимся выражением для толщины обшивки. Подставим (24) в (13), после простых преобразований имеем

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{L}\sqrt[3]{\frac{2}{\pi^2}K_q/\varphi}\,, \tag{25}$$

где

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{c}\,\boldsymbol{\chi}\mathbf{C}_i\left(\frac{1}{C_\delta^2}+\frac{C_W}{C_F}+\frac{C_b}{C_F C_\delta}\right).$$

Получим выражение приведенной толщины панели

$$\boldsymbol{\delta}_П = \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\delta}_c = \boldsymbol{\delta}(1 + \boldsymbol{\delta}_c/\boldsymbol{\delta}) \tag{26}$$

при оптимальном параметре $\mathbf{C}_t$. Подставим (13), (17) в (27), и учитывая (23), получим

$$\boldsymbol{\delta}_П = \frac{3}{2}\boldsymbol{\delta} \tag{27}$$

Отсюда следует, что в оптимальной панели вес обшивки в два раза больше веса стрингеров.

Обычно при проектировании сжатых панелей основное внимание уделяется подбору стрингеров.

Как видно из (27), основное внимание следует уделять подбору толщины обшивки. Из анализа формулы (25) следует, что относительную толщину обшивки $\mathbf{C}_\delta$ следует выбирать наименьшей.

При выборе формы поперечного сечения стрингера следует обеспечить максимально возможное значение коэффициента φ. Из (25) видно, что параметры $\mathbf{C}_i$ и $\mathbf{C}_b$ нужно выбирать наибольшими, а параметр $\mathbf{C}_F$ - наименьшим. Нетрудно убедиться в том, что наибольший коэффициент φ будет в случае поперечного сечения стрингера, представленного на Рис.2. При использовании стрингеров уголкового поперечного сечения вес панели будет больше. Следует заметить, что полученные результаты не противоречат известным рекомендациям по выбору рациональных геометрических параметров поперечного сечения стрингера.

Получим рабочую формулу приведенной толщины панели. Подставим (25) в (27).

$$\boldsymbol{\delta}_П = \frac{3}{2}\mathbf{L}\sqrt[3]{\frac{2}{\pi^2}K_q/\varphi} \tag{28}$$

Для последующей оптимизации тонкостенной конструкции, состоящей из рассматриваемых панелей, получим выражение шага стрингеров. Из (7) с учетом (23) и (24) имеем

$$\mathbf{t} = \mathbf{C}_t\ \boldsymbol{\delta} = \frac{2C_F}{C_\delta^2} L \sqrt[3]{\frac{2}{\pi^2} K_q / \varphi} \tag{29}$$

Представляет интерес зависимость критического напряжения ребра от критерия подобия. Подставим (24) в (21)

$$\boldsymbol{\sigma}_{KP} = \mathrm{E}\ \sqrt[3]{\psi K_q^2}\ , \tag{30}$$

где

$$\boldsymbol{\psi} = \frac{4\pi^2 c \chi C_i C_F^2}{\left[C_\delta \left(C_F + C_W C_\delta^2 + C_b C_\delta\right)\right]^2} \tag{31}$$

Определим верхнюю границу критерия подобия из условия применимости формулы Эйлера

$$\boldsymbol{\sigma}_{KP} \le \boldsymbol{\delta}_{\Pi} \tag{32}$$

Отсюда с учетом (30) имеем

$$\mathbf{K}_q \le \sqrt{\frac{1}{\psi}\left(\frac{\sigma_\Pi}{E}\right)^3} \tag{33}$$

По нашему мнению, полученные результаты могут быть использованы при разработке метода проектирования сжатых панелей минимального веса.

Продолжим рассмотрение задачи численного решения канонических уравнений метода сил

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (\mathrm{I} = 1,2,3,...,\mathrm{n}) \tag{34}$$

с использованием геометрического подхода, изложенного в [1].

Ставится задача нахождения удачного начального приближения вектора **X**.

В [1] получены следующие уравнения двух гиперплоскостей, которые будут использованы в дальнейшем

$$\sum_{j=1}^{n} A_j^b X_j = B^{(b)}; \qquad \sum_{j=1}^{n} A_j^{(d)} X_j = B^{(d)}, \tag{35}$$

где

$$A_j^b = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i; \qquad A_j^{(d)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} d_i \tag{36}$$

$$d_i = \sum a_{ij} A_j^{(b)}$$

(37)

Начальное приближение ищем в следующем виде

$$X_j^{(0)} = \mu a_{j,} \tag{38}$$

где

$$a_j = A_j^{(b)} + \nu A_j^{(d)} \tag{39}$$

Поставленная задача сводится к определению коэффициентов μ и ν.

Сначала находим направление вектора начального приближения. Эту задачу удобно решать в сферических координатах.

Вектор начального приближения (38) в сферических координатах можно представить в следующем виде

$$X_j^{(0)} = R\varphi_{j,} \tag{40}$$

где

$$\varphi_j = \frac{X_j^{(0)}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left[X_j^{(0)} \right]^2}} \tag{41}$$

Подставим (38) в (41)

$$\varphi_j = \frac{a_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}} \tag{42}$$

С целью упрощения записи последующих формул введем обозначение

$$r = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} \tag{43}$$

С учетом (42) и (43) формула (40) принимает вид

$$X_j^{(0)} = \frac{R}{r} a_j \tag{44}$$

Рассмотрим функцию, используемую в методе наискорейшего спуска

$$F = \sum_{i=1}^{n} f_i^2,$$

(45)

где

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j - b_i \qquad (46)$$

Получим выражение функции **F** при начальном приближении вектора **X**. Принимаем

$$X_j = X_j^{(0)} \qquad (47)$$

Подставим (47) в (46), и учитывая (44), имеем

$$f_i = \frac{R}{r} D_i - b_i, \qquad (48)$$

где

$$D_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_j. \qquad (49)$$

Подставим (39) в (49)

$$D_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_j^{(b)} + \nu \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_j^{(d)} \qquad (50)$$

Введем обозначение

$$h_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_j^{(d)}$$

(51)

С учетом (37) и (51) формула (50) принимает вид

$$D_i = d_i + \nu h_i$$

(52)

При фиксированном коэффициенте ν, определяющем направление вектора начального приближения, имеем функцию одной переменной

$$F = F(R) \qquad (53)$$

Рассмотрим вторую производную этой функции, которую обозначим буквой **W**.

С учетом (45) и (49) получим

$$W = \frac{d^2 F}{dR^2} = 2\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{df_i}{dR}\right)^2 = \frac{2}{r^2} \sum_{i=1}^{n} D_i^2 \qquad (54)$$

Подставим (43), (52), и учитывая (39), имеем

$$W = 2 \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[d_i + \nu h_i \right]^2}{\sum_{j=1}^{n} \left[A_j^{(b)} + \nu A_j^{(d)} \right]^2} \qquad (55)$$

После простых преобразований получим

$$W = 2\frac{a\nu^2 + 2b\nu + c}{A\nu^2 + 2B\nu + C}, \tag{56}$$

где

$$a = \sum_{i=1}^{n} h_i^2; \qquad A = \sum_{j=1}^{n} [A_j^{(d)}]^2$$

$$b = \sum_{i=1}^{n} d_i h_i; \qquad B = \sum_{j=1}^{n} A_j^{(b)} A_j^{(d)} \tag{57}$$

$$c = \sum_{i=1}^{n} d_i^2; \qquad C = \sum_{j=1}^{n} \left[A_j^{(b)}\right]^2$$

Имеем функцию одной переменной

$$W = W(\nu) \tag{58}$$

При выборе наилучшего направления вектора начального приближения ограничимся теми направлениями, при которых функция **W** имеет экстремальные значения. Необходимое условие экстремума функции (56)

$$\frac{dW}{d\nu} = 0$$

(59)

после простых преобразований принимает вид

$$(aB - Ab)\nu^2 + (aC - Ac)\nu + (bC - Bc) = 0$$

(60)

Нетрудно убедиться в том, что одному корню уравнения (60) соответствует минимум функции **W**, второму корню – максимум. Вопрос выбора корня требует самостоятельного исследования и здесь не рассматривается.

Выбрав направление вектора начального приближения, переходим к нахождению его модуля. По нашему мнению, эту задачу удобно решать в декартовой прямоугольной системе координат.

Получим выражение функции **F** (45) при начальном приближении вектора **X**. Подставим (47) в (46) и учитывая (38), (49), имеем

$$f_i = \mu D_i - b_i \tag{61}$$

Считаем, что наилучшим начальным приближением будет то, при котором функция **F** достигнет минимума. Из необходимого условия экстремума

$$\frac{dF}{d\mu} = 0 \tag{62}$$

с учетом (45) и (61) получаем

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i D_i}{\sum_{i=1}^{n} D_i^2} \tag{63}$$

При найденных коэффициентах μ и ν по формуле (38) вычисляем начальное приближение вектора **X**.

Следует отметить, что решение поставленной задачи может потребовать нескольких приближений. Вопрос о рациональном числе приближений требует отдельного рассмотрения.

Можно предложить следующую стратегию нахождения удачного начального приближения вектора **X**: на нечетных шагах выбираем корень уравнения, обеспечивающий максимум функции **W**, а на четных шагах выбираем корень, обеспечивающий минимум функции **W**.

По-видимому, использование геометрического подхода, изложенного в [1], с предварительным нахождением начального приближения вектора **X** способом, представленным в данной статье, позволит разработать эффективный алгоритм численного решения канонических уравнений метода сил.

Список литературы

1. Кичеев В.Е.   Проектирование сжатых стержней силовых авиационных конструкций с использованием критерия подобия.
   //Электронный журнал «Труды МАИ», вып. 14 – http//www.mai.ru (26.12.2003)
2. Кичеев В.Е. Проектирование сжатых панелей легких самолетов с пользованием критерия подобия.
   //Электронный журнал «Труды МАИ», вып.27 – http//www.mai.ru (2007 г.)
3. Хертель Г.   Тонкостенные конструкции. – М.: Машиностроение, 1965. – 517с.

Сведения об авторе

Кичеев Валентин Ефимович – старший научный сотрудник ОСКБЭС Московского авиационного института (государственного технического университета), к.т.н..

Телефон: (495) 158-44-68, 158-49-09.