

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
(МФТИ, Физтех)**

На правах рукописи



Сизых Григорий Борисович

**СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ
ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА**

Специальность: 1.1.9. – Механика жидкости, газа и плазмы

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2023

Оглавление

Введение	5
Глава 1 Задача Дородницына.....	20
1.1 История задачи	20
1.2 Решение задачи Дородницына	22
1.3 Заключение к главе 1	42
Глава 2 Течение за отошедшей ударной волной	43
2.1 Вихревая и скоростная альтернативы	43
2.2 Завихренность на линии торможения	46
2.3 Вихревые линии за отошедшей ударной волной.....	47
2.4 Векторные линии векторного произведения скорости и градиента энтропии за отошедшей ударной волной	50
2.5 Завихренность на поверхности тела при осесимметричном обтекании с отошедшей ударной волной	57
2.6 О влиянии неоднородности сверхзвукового набегающего потока на течение в окрестности передней точки торможения	63
2.7 Решение задачи Дородницына для течения с плоскостью симметрии	77
2.8 Заключение к главе 2	83
Глава 3 Лагранжев взгляд на эволюцию завихренности в однородных жидкостях	85
3.1 Скорость Фридмана	85
3.2 О существовании и гладкости решения вспомогательной задачи	89
3.3 Существование скорости Фридмана	98
3.4 Неоднозначность скорости Фридмана и эволюция завихренности в вязкой несжимаемой жидкости	104
3.5 Эволюция завихренности в закрученных осесимметричных течениях идеального газа	110

3.6	Новый лагранжев взгляд на эволюцию завихренности в закрученных осесимметричных течениях идеального газа	114
3.7	Условие существования замкнутых вихревых линий в течениях идеального газа	119
3.8	Метод добавления завихренности	125
3.9	Заключение к главе 3	130
	Глава 4 Интегральные инварианты	131
4.1	Универсальный интегральный инвариант уравнений движения однородной жидкости	131
4.2	Обобщение инварианта Крокко для пространственных течений за отошедшей ударной волной	147
4.3	Второе интегральное обобщение инварианта Крокко для пространственных течений за отошедшей ударной волной	149
4.4	Интегральный инвариант течений идеального газа за отошедшей ударной волной	154
4.5	Сравнение трех интегральных инвариантов течений идеального газа за отошедшей ударной волной	158
4.6	Инвариант линий тока стационарных закрученных осесимметричных течений	159
4.7	Критерий существования решения уравнений движения идеального газа для заданной винтовой скорости	164
4.8	Заключение к главе 4	171
	Глава 5 Принципы максимума давления в вихревых течениях идеального газа	173
5.1	Принципы максимума в аэрогидромеханике	173
5.2	Q -параметр и визуализация расчетов	180
5.3	Вариант теоремы Хопфа	182
5.4	Принцип максимума окружной циркуляции	194
5.5	Принцип максимума завихренности, отнесенной к расстоянию до оси симметрии	196

5.6	Принцип максимума давления в плоских течениях идеальной несжимаемой жидкости	199
5.7	Принцип максимума давления в осесимметричном течении идеальной жидкости	201
5.8	Признак наличия точки торможения в плоском безвихревом течении идеального газа	208
5.9	Принцип максимума Никольского	212
5.10	Дозвуковой принцип максимума давления в осесимметричных течениях	216
5.11	Дозвуковой принцип максимума давления в общем пространственном случае (ДПМД)	221
5.12	Применение ДПМД для верификации численных расчетов	224
5.13	Небаротропный принцип максимума Трусделла	225
5.14	Общий принцип максимума давления (ОПМД)	229
5.15	О применении ОПМД для верификации расчетов	232
5.16	О значении Q -параметра в точке минимума давления на плоскости симметрии течения	233
5.17	О выборе принципа максимума для верификации расчетов	238
5.18	Заключение к главе 5	240
	Заключение	242
	Список сокращений и условных обозначений	246
	Список терминов	247
	Список литературы	249
	Приложение А Примеры применения выносимых на защиту положений в вычислительной аэрогидромеханике	270

Введение

В работе устанавливаются свойства вихревых течений, математически строго вытекающие из системы уравнений классической модели идеального газа. Под идеальным газом в диссертации понимается газ, в котором отсутствуют вязкость и теплопроводность, а его состояние подчиняется закону Менделеева – Клапейрона. Рассматриваемая в работе система уравнений состоит из уравнения Эйлера $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{\nabla p}{\rho}$, уравнения неразрывности $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0$ и уравнения сохранения энтропийной функции в частицах газа $\frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \sigma = 0$ (здесь и далее используются следующие обозначения для параметров течения: \mathbf{V} – скорость, p – давление, ρ – плотность, $\sigma = p\rho^{-k}$ – энтропийная функция, $k = \text{const}$ – показатель адиабаты). Наиболее важные результаты относятся к общему пространственному случаю. Особое внимание уделено стационарным течениям газа за отошедшей ударной волной, образующейся при сверхзвуковом обтекании тела с гладкой выпуклой носовой частью. Течения за ударной волной при однородном набегающем сверхзвуковом потоке газа являются изоэнергетическими (полная энтальпия $i_0 = (k/(k-1))(p/\rho) + \mathbf{V}^2/2 = \text{const}$), что выделяет их из общего случая вихревых течений.

Актуальность и степень разработанности темы. Выявление неизвестных ранее свойств течений идеального газа, математически строго вытекающих из уравнений движения, относится к числу актуальных задач теоретической аэрогидромеханики, поскольку знание таких свойств позволяет глубже понять картину течения и помогает решить поставленную вычислительной аэрогидромеханикой задачу поиска методов верификации компьютерных программ. Проверка соответствия численных решений найденным общим свойствам решений уравнений газовой динамики является новым эффективным методом. Такая проверка может использоваться не только для верификации расчетных алгоритмов, но и для верификации каждого конкретного расчета.

До опубликования результатов диссертации были известны четыре типа свойств (закономерностей) вихревых течений, не распространенных на общий пространственный случай.

Первый тип свойств. К нему относятся свойства течений в области между отошедшей ударной волной и гладкой выпуклой носовой частью в незакрученных осесимметричных течениях. В первую очередь это свойства картины линий тока и картины вихревых линий. К таким известным свойствам незакрученных осесимметричных течений за отошедшей ударной волной относятся следующие.

C1. В некоторой окрестности линии торможения (критической линии тока) нет другой линии торможения, а все линии тока на поверхности тела в некоторой окрестности точки торможения (критической точки) начинаются в этой точке.

C2. Вихревые линии замкнуты. С этими линиями совпадают (и также замкнуты) векторные линии векторного произведения скорости и градиента энтропии.

C3. Завихренность на линии торможения равна нулю.

C4. Линия тока, пересекающая отошедшую ударную волну по нормали (лидирующая линия тока), совпадает с линией торможения (обе эти линии лежат на оси симметрии течения).

Следуя учебникам [1, 2] и монографиям [3, 4], соискатель исходит из того, что по крайней мере для тел с гладкой выпуклой носовой частью свойство C1 имеет место в общем пространственном случае. В диссертации это свойство используется в постановках задач сверхзвукового обтекания с отошедшей ударной волной.

Что касается свойств C2 и C3, то для общего пространственного случая не было известно, замкнуты ли вихревые линии и векторные линии векторного произведения скорости и градиента энтропии и равна ли нулю завихренность на линии торможения. В известной соискателю отечественной и зарубежной литературе отсутствовали даже какие-либо предположения по этому поводу.

По поводу свойства C4 необходимо сделать пояснение. Линия торможения растекается по поверхности тела, и поэтому энтропия на поверхности тела равна

энтропии на линии торможения. При этом, как следует из соотношений Рэнкина – Гюгонио, энтропия максимальна за прямым скачком. То есть за отошедшей ударной волной энтропия максимальна на лидирующей линии тока (только она одна пересекает ударную волну по нормали). Поэтому *вопрос о совпадении лидирующей линии тока и линии торможения равносильен вопросу о максимальной энтропии на поверхности обтекаемого тела.* М. Д. Ладыженский доказал существование некоторого ненулевого диапазона углов атаки, при которых энтропия на поверхности тела вращения максимальна (то есть лидирующая линия тока и линия торможения совпадают). Однако отсутствие не только точного значения, но и каких-либо приближенных оценок упомянутого диапазона углов атаки означало, что вопрос решен лишь частично и только для тел вращения. Академиком А. А. Дородницыным в предисловии к статье М. Д. Ладыженского [4, стр. 28–29], в которой приведено упомянутое выше доказательство, было указано на отсутствие строгого доказательства для тел вращения при произвольных углах атаки. Тем самым была поставлена задача строго доказать свойство С4 для тел вращения при произвольных углах атаки. В диссертации она называется задачей Дородницына и решается не только для тел вращения, но и для тел с гладкой выпуклой носовой частью, у которых отсутствует какая-либо симметрия.

К неизученным ранее закономерностям первого типа относится также вопрос о завихренности (равна ли она нулю) на поверхности тела в осесимметричном течении за отошедшей ударной волной при однородном сверхзвуковом набегающем потоке.

Второй тип свойств. К нему относится свойство решения уравнений движения классической модели идеального газа, заключающееся в возможности представить движение вихревых трубок (векторных трубок $\mathbf{\Omega} = \text{rot}\mathbf{V}$) как их перенос воображаемыми частицами, движущимися с некоторой скоростью \mathbf{U} так, что интенсивность переносимых векторных трубок сохраняется. Такой взгляд на эволюцию завихренности из-за аналогии с классическим лагранжевым взглядом также называется лагранжевым [5–8]. Для того, чтобы поле \mathbf{U} обладало

описанным выше свойством переноса вихревых трубок, необходимо и достаточно, чтобы во всей рассматриваемой пространственно-временной области течения выполнялось равенство (уравнение Фридмана) [9]

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \text{rot}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}) = 0.$$

Соискатель в [10] предложил назвать поле \mathbf{U} , удовлетворяющее этому уравнению для заданного поля завихренности $\boldsymbol{\Omega}$, скоростью Фридмана. В настоящее время термин «скорость Фридмана» используется другими исследователями [7, 8, 11].

Согласно теоремам Гельмгольца о вихрях, в течениях идеальной несжимаемой жидкости и в баротропных течениях сжимаемой жидкости уравнению Фридмана удовлетворяет скорость жидкости, то есть $\mathbf{U} = \mathbf{V}$. Возможность вычислять скорость \mathbf{U} через параметры течения (то есть наличие формулы $\mathbf{U} = \mathbf{V}$) позволила создать бессеточный метод расчета течений такой жидкости, получивший название метода дискретных вихрей [12–15]. Позже выражение для скорости Фридмана \mathbf{U} было найдено для плоскопараллельных и незакрученных осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости [16, 17].

В обоих случаях формула для \mathbf{U} имеет вид $\mathbf{U} = \mathbf{V} - \nu \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \text{rot } \boldsymbol{\Omega}}{\Omega^2}$, где ν – кинематический коэффициент вязкости. Наличие этой формулы позволило распространить численный метод дискретных вихрей на плоскопараллельные и незакрученные осесимметричные течения вязкой несжимаемой жидкости. Новый метод получил название метода вязких вихревых доменов [18, 19]. В этом методе понятие скорости Фридмана \mathbf{U} не используется. Вместо этого вводится понятие «диффузионной скорости» $\mathbf{d} = \mathbf{U} - \mathbf{V}$. Эти два примера (метод дискретных вихрей и метод вязких вихревых доменов) показывают, как абстрактное понятие «скорость Фридмана» позволило создать бессеточные численные методы исследования течений. Естественно, что для разработки численного метода недостаточно иметь одну только формулу для скорости Фридмана. Требуется решить много других проблем, например проблему восстановления поля давления

по полю скорости в вихревых течениях (для несжимаемой жидкости эта проблема решена в [20]) и проблему перераспределения доменов (дискретных вихрей) и их интенсивности с целью ограничения общего количества доменов, находящихся в области течения [21–23]. Для решения некоторых практически важных задач бессеточные методы требуют значительно меньше вычислительных ресурсов по сравнению с сеточными методами [24, 25]. Этим также объясняется актуальность поиска формул для скорости Фридмана в течениях жидкостей и газов в общем пространственном случае.

Формулы для скорости Фридмана могут быть локальными и нелокальными. Локальная формула позволяет вычислять скорость Фридмана в точке течения через параметры течения и их производные в этой же точке. Нелокальная формула может содержать, например, криволинейные интегралы по вихревым линиям.

Практическое значение (возможность использования в вихревых методах и возможность использования для верификации расчетов) имеют локальные формулы. Нелокальные формулы имеют, как правило, только теоретическое значение: их наличие для какого-либо течения означает существование скорости Фридмана для этого течения.

Что касается плоскопараллельных и незакрученных осесимметричных течений, то в работе [26] было замечено, что способ получения локальных выражений для скорости Фридмана в [16, 17] основан на присущем таким течениям свойстве ортогональности завихренности всем векторам, входящим в уравнения движения. В [26] отмечено, что таким способом, который в [26] назван методом ортогональных векторных преобразований, можно получать локальные формулы скорости Фридмана для плоскопараллельных и незакрученных осесимметричных течений любых *однородных жидкостей* (см. «Список терминов»). Например, в работе [27] этим методом было получено локальное выражение для скорости Фридмана в магнитогидродинамических течениях вязкой несжимаемой жидкости.

Для общего пространственного случая вопрос существования скорости Фридмана оставался открытым.

В работах [28, 29] в общем пространственном случае были получены выражения для скоростей переноса некоторых векторных полей, которые не совпадали с полем завихренности, и поэтому по определению они не были скоростями Фридмана.

Заметим, что в упомянутых выше работах [16, 17, 26, 27] термин «скорость Фридмана» не использовался. Однако в этих работах векторные поля удовлетворяют приведенному выше уравнению Фридмана, и поэтому по определению они являются векторными полями скорости Фридмана.

Таким образом, если для плоскопараллельных и незакрученных осесимметричных течений формула скорости Фридмана была известна, то для *общего пространственного случая до опубликования результатов диссертации формула скорости Фридмана была известна только для баротропных течений идеальной жидкости (в таких течениях она равна скорости жидкости), и было неизвестно, существует ли эта скорость для других течений, в частности для течений идеального газа. Стояла задача доказать, что в общем пространственном случае для дважды непрерывно дифференцируемого поля завихренности Ω течения идеального газа существует гладкое решение U уравнения Фридмана.*

Третий тип свойств. Интегральные инварианты – это криволинейные интегралы от функций параметров течения и их производных по замкнутым линиям, имеющие одинаковые значения на некотором семействе замкнутых линий. Классическим интегральным инвариантом является циркуляция скорости идеальной жидкости по любому замкнутому жидкому (состоящему из частиц жидкости) контуру. Согласно теореме Томсона (Кельвина) [30], при движении жидкого контура эта циркуляция сохраняется. К числу менее известных интегральных инвариантов относится обобщенная циркуляция скорости [31]. Это циркуляция скорости, равной произведению скорости газа на некоторую функцию

энтропии, по любому замкнутому контуру, состоящему из частиц, которые движутся со скоростью, равной произведению скорости газа на ту же функцию энтропии. *Этот интегральный инвариант до опубликования результатов диссертации был единственным известным интегральным инвариантом для вихревых течений идеального газа в общем пространственном случае.*

Четвертый тип свойств. Принципы максимума (ПМ) – это утверждения об условиях возможности или невозможности достижения экстремума той или иной функции во внутренних точках рассматриваемой области. В середине XX века стали известны несколько ПМ для течений газа, главные из которых – это ПМ Шиффмана о максимуме скорости в дозвуковых течениях [32], теорема Гилбарга – Шиффмана о первых звуковых точках [33], принцип максимума давления (ПМ) Трусделла [34] для пространственных течений и ПМ Никольского [3] для плоскопараллельных течений. (О принципах максимума для вязкой и невязкой несжимаемых жидкостей можно прочесть в разделе 5.1.) Первые два из упомянутых ПМ справедливы для безвихревых течений. ПМ Трусделла справедлив для вихревых течений, но с точки зрения его использования для верификации расчетов он имеет два недостатка: требование баротропности и необходимость вычислять, кроме первых, еще и вторые производные компонент скорости.

Единственным известным принципом максимума, лишенным этих недостатков, был ПМ Никольского для плоскопараллельных течений (формулировка приведена ниже в разделе 5.1). Некоторые места в доказательстве были недостаточно обоснованы (что отмечено самим А. А. Никольским), и поэтому стояла задача дать строгое доказательство.

Принципы максимума, применимые к пространственным вихревым течениям идеального газа, в условия которых входят только параметры течения и их первые производные и не входит требование баротропности, отсутствовали до опубликования результатов диссертации. Такие ПМ отсутствовали не только для общего пространственного случая, но и для таких

частных случаев пространственных течений, как осесимметричные течения и течения с плоскостью симметрии.

Цель диссертационной работы состоит в обнаружении неизвестных ранее свойств (закономерностей) вихревых решений уравнений движения идеального газа, в решении задачи Дородницына и в устранении неточности в известном доказательстве принципа максимума Никольского.

Для достижения цели диссертационной работы решались следующие задачи.

1. Строго доказать совпадение лидирующей линии тока и линии торможения для течений за отошедшей ударной волной (УВ) при сверхзвуковом обтекании однородным потоком идеального газа тела с *гладкой выпуклой* носовой частью в общем пространственном случае (задача Дородницына).

2. Исследовать в общем пространственном случае вопрос о величине завихренности на линии торможения в течениях за отошедшей УВ.

3. Исследовать в общем пространственном случае вопрос о замкнутости вихревых линий в течениях за отошедшей УВ.

4. Исследовать в общем пространственном случае вопрос о замкнутости векторных линий векторного произведения скорости и градиента энтропийной функции в течениях за отошедшей УВ.

5. Доказать существование скорости Фридмана в общем пространственном случае для вихревых течений идеального газа (не только для течений за отошедшей УВ).

6. Найти локальные выражения для скорости Фридмана в закрученных осесимметричных течениях.

7. Найти новые интегральные инварианты для вихревых течений идеального газа.

8. Строго доказать принцип максимума Никольского.

9. Найти такой принцип максимума давления для течений идеального газа, в условия которого входят только параметры течения и их первые производные и не входит требование баротропности.

Научная новизна содержится в решениях всех девяти задач диссертации.

1. Впервые доказано [35], что в общем пространственном случае в течении за отошедшей УВ лидирующая линия тока и линия торможения совпадают (решена задача Дородницына).

2. Впервые установлено [35, 63], что в общем пространственном случае в течении за отошедшей УВ завихренность равна нулю на всей линии торможения.

3. Впервые установлен факт замкнутости в течениях за отошедшей УВ вихревых линий γ_{Ω} (то есть линий вектора Ω).

4. Впервые установлен факт замкнутости в течениях за отошедшей УВ векторных линий $\gamma_{\mathbf{a}}$ вектора $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla \sigma$, где $\sigma = p\rho^{-k}$ – энтропийная функция.

5. Впервые для общего пространственного случая доказано, что скорость Фридмана существует (предложена нелокальная формула для ее вычисления) в вихревых течениях *однородных жидкостей* (см. «Список терминов»).

6. Для закрученных осесимметричных течений впервые получены *локальные* формулы скоростей Фридмана для меридиональной и окружной составляющих завихренности (раздел 3.5).

7. С использованием установленного в диссертации факта замкнутости в течении за отошедшей УВ линий γ_{Ω} и $\gamma_{\mathbf{a}}$ получены три неизвестных ранее интегральных инварианта, которые представляют собой криволинейные интегралы от функций, зависящих от параметров течения и от их пространственных производных, по этим замкнутым линиям (в отличие от осесимметричного случая, в общем пространственном случае векторы Ω и \mathbf{a} могут быть неколлинеарными, и линии γ_{Ω} и $\gamma_{\mathbf{a}}$ могут не совпадать): $\int_{\gamma_{\Omega}} \frac{p}{|\Omega|} dl$,

$\int_{\gamma_{\mathbf{a}}} \frac{p}{|\Omega_{\mathbf{a}}|} dl$ и $\int_{\gamma_{\mathbf{a}}} \frac{T \operatorname{ctg} \alpha}{|\mathbf{V}|} dl = 0$, где $\Omega_{\mathbf{a}}$ – проекция вектора Ω на вектор \mathbf{a} , T –

температура, α – угол между векторами скорости \mathbf{V} и завихренности Ω . Первые два из этих инвариантов сохраняются на изоэнтропийных поверхностях тока и обобщают *инвариант Крокко* (см. «Список терминов») на общий

пространственный случай. Третий инвариант равен нулю на всех замкнутых линиях вектора \mathbf{a} .

8. Впервые строго доказан принцип максимума Никольского.

9. Впервые в общем пространственном случае получен дозвуковой принцип максимума давления (ДПМД), справедливый для дозвуковых стационарных течений идеального газа, в условия которого входит только знак Q -параметра ($Q = 0.5 \left[\Omega^2 - (\nabla u)^2 - (\nabla v)^2 - (\nabla w)^2 \right]$, где u , v и w – компоненты вектора скорости \mathbf{V} в прямоугольной декартовой системе координат, $\Omega = \text{rot} \mathbf{V}$). Если давление не постоянно на замыкании \bar{G} ограниченной области течения G и во всех точках G выполняется

1) $Q \leq 0$, то давление достигает минимума на \bar{G} на границе и только на границе области G ;

2) $Q \geq 0$, то давление достигает максимума на \bar{G} на границе и только на границе области G ;

3) $Q = 0$, то давление достигает минимума и максимума на \bar{G} на границе и только на границе области G .

В условия ДПМД входят только первые производные компонент скорости (Q -параметр), а требование баротропности отсутствует.

Кроме того, новизну содержат некоторые промежуточные результаты и результаты, которые не являются промежуточными, но представляют собой решения задач, естественным образом возникших в процессе работы над диссертацией (например, «вихревая альтернатива», отличие от нуля завихренности на поверхности тела при осесимметричном обтекании с отошедшей ударной волной и несовпадение лидирующей линии тока и линии торможения при неоднородном набегающим потоке). Эти новые результаты (результаты разделов 2.1, 2.5, 2.6, 5.3, 5.10 и 5.16) имеют самостоятельные теоретическое и практическое значения.

Теоретическая значимость состоит в строгом обосновании совпадения лидирующей линии тока и линии торможения (решение задачи Дородницына) и в

обнаружении таких неизвестных ранее свойств, как замкнутость вихревых линий, замкнутость линий векторного произведения скорости и градиента энтропии и равенство нулю завихренности на линии торможения, а также в обнаружении трех неизвестных ранее интегральных инвариантов. Все это проясняет картину течения за отошедшей УВ в общем пространственном случае. Некоторые из обнаруженных закономерностей, например дозвуковой принцип максимума давления, выполняются в значительно более широком классе течений идеального газа, чем течения за отошедшей УВ, а именно в течениях, в которых не только поле энтропии, но и поле полной энтальпии могут быть неоднородными. Также важным теоретическим результатом является доказательство существования скорости Фридмана в вихревом течении любой однородной жидкости (от идеальной несжимаемой жидкости до вязкого газа). В частности, это относится и к пространственным вихревым течениям идеального газа, которые изучаются в диссертации.

Практическая значимость результатов диссертации состоит в возможности проводить верификацию программного обеспечения компьютерной модели и конкретного расчета (см. «Список терминов») путем проверки выполнения обнаруженных закономерностей. А результаты, связанные со скоростью Фридмана (п. 5 и п. 6 в перечне «Научная новизна»), могут быть использованы при создании новых бессеточных методов. Некоторые результаты в настоящее время уже используются другими исследователями. Например, решение задачи Дородницына (п. 1 в перечне «Научная новизна») использовано в [36] для получения количественной оценки точности кода расчета аэромеханических задач путем сравнения расчетного и теоретического значений давления в точке торможения. Дозвуковой принцип максимума давления (п. 9 в перечне «Научная новизна») в настоящее время применяется для верификации численных расчетов, например, в работах [37–44]. Практическое значение приобрела нелокальная формула для скорости Фридмана (п. 5 в перечне «Научная новизна»). Для течений вязкой несжимаемой жидкости ее упрощенный локальный вид, полученный в результате пренебрежения некоторыми

слагаемыми, был использован в [7] при создании бессеточного метода расчета течений вязкой несжимаемой жидкости в общем пространственном случае. Более подробно упомянутые примеры практического использования положений, выносимых на защиту, описаны в приложении А.

Методы исследования. В диссертации используются только точные математические методы исследования. Один из основных методов состоит в представлении о движении воображаемой жидкости, состоящей из воображаемых частиц, «переносящих» те или иные векторные линии реального течения. При этом, в отличие от скорости Фридмана, отсутствует требование сохранения интенсивности векторных трубок. Такой метод выявления свойств течения используется впервые. Задача Дородницына и некоторые другие задачи диссертационной работы решены именно этим методом. Поле скорости воображаемых частиц определяется критерием Зоравского [45, 46], который позволяет найти скорости «переноса» различных векторных линий. Метод получения принципов максимума состоит в преобразовании уравнений движения идеального газа к виду, позволяющему применить теорему Хопфа [47] или вариант этой теоремы для случая неограниченных коэффициентов [48].

Положения, выносимые на защиту

При упоминании течений за отошедшей ударной волной (УВ) подразумевается, что речь идет о сверхзвуковом обтекании тела с гладкой выпуклой носовой частью.

1. Строгое доказательство совпадения лидирующей линии тока и линии торможения в течении за отошедшей УВ в общем пространственном случае (решение задачи Дородницына).

2. Равенство нулю завихренности на линии торможения в течениях за отошедшей УВ.

3. Замкнутость вихревых линий в течениях за отошедшей УВ волной.

4. Замкнутость векторных линий $\gamma_{\mathbf{a}}$ вектора $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla \sigma$, где $\sigma = p \rho^{-k}$ – энтропийная функция, в течениях за отошедшей УВ.

5. Существование в общем пространственном случае скорости Фридмана в вихревом течении любой однородной жидкости.

6. Локальные формулы скоростей Фридмана для меридиональной и окружной составляющих завихренности в закрученных осесимметричных течениях.

7. Три неизвестных ранее интегральных инварианта течений за отошедшей УВ в общем пространственном случае.

8. Строгое доказательство принципа максимума Никольского.

9. Принцип максимума давления, в условие которого входит только знак Q -параметра и который справедлив для стационарных дозвуковых течений в общем пространственном случае.

Из этих положений самыми важными являются 1, 5 и 9, поскольку они представляют собой решения проблем, стоявших перед теоретической аэрогидромеханикой в течение многих десятилетий.

Достоверность результатов обеспечивается использованием строгих математических методов исследования свойств решений полных (без каких-либо упрощений) систем уравнений моделей однородных жидкостей и подтверждена:

- обсуждением результатов исследования на международных и всероссийских научных конференциях и семинарах высокого уровня;
- публикациями результатов исследования в рецензируемых научных изданиях.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах.

XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 2015 г.

III международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования», МИ РАН им. В. А. Стеклова, Москва, 2016 г.

XXIX научно-техническая конференция ЦАГИ по аэродинамике, пос. Володарского Моск. обл., 2018 г.

Восемнадцатая международная школа-семинар РАН – ЦАГИ «Модели и методы аэродинамики», Евпатория, 2018 г.

International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, Rhodes, Greece, 2014 (ICNAAM – 2014 г.) [49].

Международная конференция «50 лет развития сеточно-характеристического метода», Долгопрудный, 2018 г [50].

Двадцатая международная школа-семинар РАН – ЦАГИ «Модели и методы аэродинамики», Евпатория, 2020 г [51].

Семинар кафедры гидродинамики НИИ механики МГУ «Механика сплошной среды» под руководством академика РАН А. Г. Куликовского, профессора В. П. Карликова и члена-корреспондента РАН О. Э. Мельник, Москва, 2014 г.

Семинар отдела механики МИ РАН им. В. А. Стеклова под руководством д.ф.-м.н. профессора А. Т. Ильичева и д.ф.-м.н. В. В. Маркова, Москва, 2015 г.

Научно-методический семинар кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н. Э. Баумана под руководством д.т.н. профессоров В. И. Ванько и В. В. Феоктистова, Москва, 2016 г.

Семинар механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Математическая физика, квантовая физика, квантовая теория информации, бесконечномерный анализ» под руководством профессора Е. Т. Шавгулидзе, Москва, 2022, 2023 гг.

Научный семинар С. М. Белоцерковского (ЦАГИ – Военно-воздушная академия) под руководством профессоров А. И. Желанникова и В. В. Вышинского, Москва, 2014, 2014, 2014, 2015, 2015, 2019, 2021, 2023, 2024 гг.

Научный семинар кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н. Э. Баумана под руководством д.т.н. А. Г. Леонова, Москва, 2022 г.

Видеосеминар по аэромеханике ЦАГИ – ИТПМ СО РАН – СПбПУ – НИИМ МГУ – ОИВТ РАН под руководством члена-корреспондента РАН И. В. Егорова, Москва, 2022, 2023 гг.

Семинар ЦАГИ под руководством члена-корреспондента РАН А. М. Гайфуллина и д.ф.-м.н. В. Г. Судакова, Жуковский, 2023 г.

Семинар лаборатории радиационной газовой динамики ИПМех РАН под руководством академика РАН С. Т. Суржикова, Москва, 2024 г.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы получены в 33 научных статьях (journal article) [10, 16, 35, 48, 52–80] в журналах, включенных в перечень ВАК РФ. Из них 19 статей – в изданиях, индексируемых в библиографических базах Scopus и WoS.

Соответствие Паспорту Специальности. Материалы диссертации полностью соответствует паспорту специальности 1.1.9. «Механика жидкости, газа и плазмы» в направлениях исследований «Течения сжимаемых сред и ударные волны» и «Точные, асимптотические, приближенные аналитические, численные и комбинированные методы исследования уравнений континуальных и кинетических моделей однородных и многофазных сред».

Личный вклад соискателя. Все результаты диссертации получены лично соискателем. Из совместных публикаций в результаты (и в положения, выносимые на защиту) включен лишь тот материал, который полностью принадлежит соискателю. В приложении А, где приведены примеры использования в вычислительной аэрогидромеханике положений, выносимых на защиту, представлены материалы работ, выполненных без участия соискателя, о чем прямо указывается в тексте приложения, и результаты этих работ не включены в результаты диссертации.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка терминов, списка литературы и одного приложения. Диссертационная работа изложена на 291 странице, содержит 40 рисунков и 5 таблиц. Библиография включает 223 наименования.

Глава 1 Задача Дородницына

1.1 История задачи

В области гладких параметров течения энтропия сохраняется на линиях тока. Линия торможения растекается по поверхности тела, и поэтому энтропия на поверхности тела (точнее, в некоторой окрестности точки торможения на поверхности носовой части) равна энтропии на линии торможения. При этом, как следует из соотношений Ренкина – Гюгонио, энтропия сразу за (искривленной) отошедшей ударной волной (УВ) максимальна там, где линия тока пересекает УВ по нормали, то есть на лидирующей линии тока (только она одна пересекает УВ по нормали). *Поэтому вопрос о совпадении лидирующей линии тока и линии торможения равносильен вопросу о максимальной энтропии на поверхности обтекаемого тела.*

В сборнике статей, посвященном гиперзвуковым течениям газа, помещено сообщение, в котором академик А. А. Дородницын пишет: «При нулевом угле атаки на поверхности тела вращения энтропия принимает максимальное значение. Многие расчеты и эксперименты показывают, что и при углах атаки, отличных от нуля, с точностью, которая получена в этих расчетах или эксперименте, энтропия сохраняет свое максимальное значение. Однако никакого строгого доказательства этого факта нет» [4]. Тем самым была поставлена задача строго доказать факт совпадения лидирующей линии тока и линии торможения за отошедшей ударной волной при сверхзвуковом обтекании тел вращения при произвольных углах атаки. В настоящей работе она называется задачей Дородницына и решается не только для тел вращения, но и для тел с гладкой выпуклой носовой частью, у которых отсутствует какая-либо симметрия. Затем А. А. Дородницын приводит одно доказательство, которое в разговоре ему сообщил М. Д. Ладыженский. Доказательство основано на двух предположениях. Первое – завихренность на поверхности тела непрерывно зависит от угла атаки. Второе – завихренность на

поверхности тела вращения под нулевым углом атаки отлична от нуля (кроме точки торможения). С использованием этих двух предположений выкладки М. Д. Ладыженского приводят к выводу о существовании некоторого ненулевого диапазона углов атаки, при которых энтропия на поверхности тела вращения будет оставаться максимальной (лидирующая линия будет совпадать с линией торможения). Предположение о непрерывной зависимости завихренности на поверхности тела вращения от угла атаки и отсутствие не только точного значения, но и каких-либо оценок упомянутого диапазона углов атаки, означали, что вопрос решен лишь частично и только для тел вращения. Кроме того, ниже в разделе 2.5 будет показано, что в случае нулевой кривизны УВ в лидирующей точке завихренность на поверхности тела вращения под нулевым углом атаки равна нулю. Поэтому второе предположение Ладыженского и, следовательно, доказательство Ладыженского исключают из рассмотрения случай нулевой кривизны УВ в лидирующей точке (в литературе, известной соискателю, отсутствуют утверждения, из которых следовало бы, что кривизна УВ в лидирующей точке обязательно отлична от нуля).

Интересно отметить, что (не доказанный) факт максимальной энтропии на поверхности тела использовался даже в теоретических исследованиях [81, 82].

В. В. Сычев в предисловии к [4] замечает, что «проблема величины энтропии на поверхности тела вращения под углом атаки... вызывала в последние годы оживленные дискуссии». Несмотря на это, в известной соискателю отечественной и зарубежной литературе кроме упомянутых доказательства М. Д. Ладыженского [4] и статей [81, 82] удалось найти только еще одну статью [83], имеющую отношение к задаче Дородницына. В ней приведено доказательство важного для рассматриваемого вопроса промежуточного результата, состоящего в том, что градиент энтропии на линии торможения равен нулю. Как будет показано ниже, это утверждение действительно верно для течений с постоянной полной энтальпией. Однако предложенное в [83] доказательство не опирается на факт постоянства полной энтальпии во всем потоке. Согласно [83], градиент энтропии на линии торможения должен быть

равен нулю даже в течениях с переменной полной энтальпией. Но это неверно (соответствующий пример приведен в подразделе «О постоянстве полной энтальпии»). Поэтому в доказательстве [83] содержится ошибка, и проблема величины энтропии на поверхности тела в общем пространственном случае оставалась открытой.

1.2 Решение задачи Дородницына

При сверхзвуковом (число Маха $M > 0$) обтекании тел с гладкой выпуклой носовой частью возникает отошедшая УВ. Если (осесимметричное) тело вращения расположено так, что ось симметрии параллельна скорости набегающего потока (нулевой угол атаки), то линия торможения AB , лежащая на этой оси (рис. 1.1, *a*), заканчивается на теле в точке торможения B (линию AB и точку B также называют критической линией и критической точкой соответственно). При этом точка A расположена на УВ там, где касательная к УВ плоскость перпендикулярна скорости набегающего потока. Такая точка называется лидирующей точкой УВ, а проходящая через нее линия тока – лидирующей линией тока. Также можно определить лидирующую линию как линию тока, пересекающую УВ по нормали. Поэтому параметры течения в точке B можно рассчитывать по параметрам набегающего потока. Для этого достаточно использовать условия Ренкина – Гюгонио на прямом скачке [84] в точке A и условие сохранения энтропии на линии торможения. Очевидно, что в этом случае (осесимметричное тело под нулевым углом атаки) энтропия принимает максимальное значение на линии торможения и на поверхности тела.

В данном разделе рассмотрен общий пространственный случай. В частности, если есть угол атаки или тело не является телом вращения. Доказывается, что, как и в осесимметричном случае, точка A расположена на отошедшей УВ там, где касательная к УВ плоскость перпендикулярна направлению набегающего потока (рис. 1.1, *б*). Другими словами, в данном

разделе доказывается, что в общем пространственном случае линия торможения совпадает с лидирующей линией тока, то есть с линией тока, пересекающей UB по нормали. Как следствие, энтропия принимает максимальное значение на линии торможения и на поверхности тела.

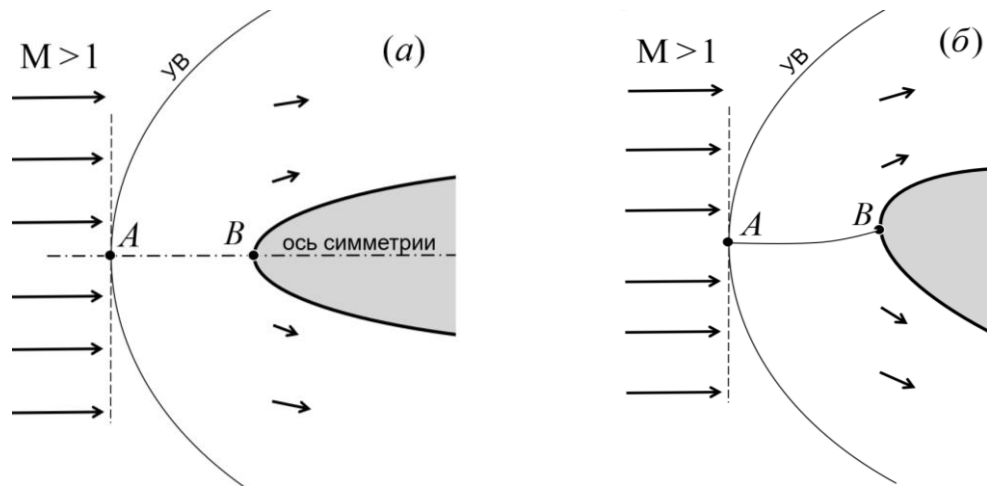


Рисунок 1.1 – Гладкая выпуклая носовая часть в сверхзвуковом потоке:

(а) – осесимметричное обтекание тела вращения; (б) – общий пространственный случай

Обозначения и уравнения движения. Рассмотрим стационарное обтекание тела с гладкой выпуклой носовой частью однородным сверхзвуковым потоком идеального газа без предположения о какой-либо симметрии. Поскольку носовая часть гладкая и выпуклая, отошедшая UB вблизи носовой части также будет иметь гладкую выпуклую форму.

Будем считать, что в некоторой ограниченной области G , замыкание \bar{G} которой расположено между отошедшей UB и носовой частью, имеют место следующие свойства.

Линия торможения AB , за исключением точки A – ее начала на UB , и точки торможения B на теле, лежит внутри замкнутой области \bar{G} , как показано на рисунке 1.2. На данном этапе исследования еще не установлено, что точка A есть лидирующая точка. Поэтому на рисунке 1.2 точка A расположена в

произвольной точке $УВ$. При этом часть границы \bar{G} , лежащая на поверхности тела, представляет собой замыкание двумерной окрестности точки B , а часть границы, лежащая на $УВ$, представляет собой замыкание двумерной окрестности точки A , в которой, кроме, может быть, точки A , обе главные кривизны отличны от нуля. Оставшаяся же часть границы вместе с внутренними точками \bar{G} находится внутри зоны течения, в которой отсутствуют скачки, разрывы и другие точки торможения (кроме точки B).

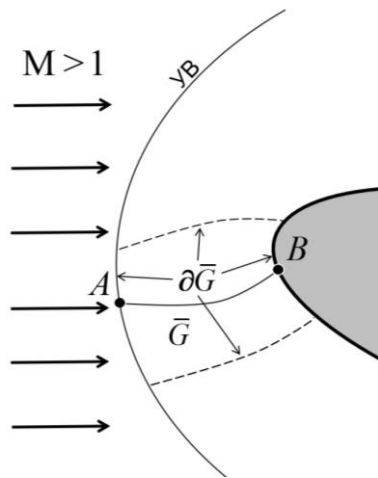


Рисунок 1.2 – Замкнутая область \bar{G} и ее граница $\partial\bar{G}$. Линия торможения, за исключением точек A и B , лежит внутри \bar{G}

Пусть прямоугольная декартова система координат $Bxuz$ с началом в точке B сориентирована так, что ось z нормальна к поверхности тела в точке B и направлена внутрь тела.

Будем считать, что поверхность тела в некоторой окрестности точки B представляется в виде

$$H_2 = \{x, y, z : z = \varphi(x, y), (x, y) \in S\},$$

где $\varphi(x, y)$ – функция, дважды непрерывно дифференцируемая на замыкании \bar{S} некоторой ограниченной области S переменных (x, y) . И при этом существует такое число $\Delta z > 0$, что область (слой)

$$H_3 = \{x, y, z : \varphi(x, y) < z < \varphi(x, y) + \Delta z, (x, y) \in S\}$$

лежит внутри обтекаемого тела. Нижние индексы 2 и 3 подчеркивают, что H_2 – поверхность, а H_3 – трехмерная область. Очевидно, что H_2 есть часть границы пространственной области H_3 , лежащая на поверхности обтекаемого тела в окрестности точки B .

Точка торможения B является точкой растекания, и в ней начинаются линии тока, растекающиеся во всех направлениях по поверхности тела. При этом по крайней мере в некоторой окрестности точки B только линия торможения имеет точки внутри течения и (одну) точку на поверхности тела (точку B). Остальные линии тока в этой окрестности, как схематично показано на рисунке 1.3, либо не контактируют с поверхностью тела (линии тока, проходящие над поверхностью), либо целиком лежат на поверхности тела (линии тока, начинающиеся в точке B).

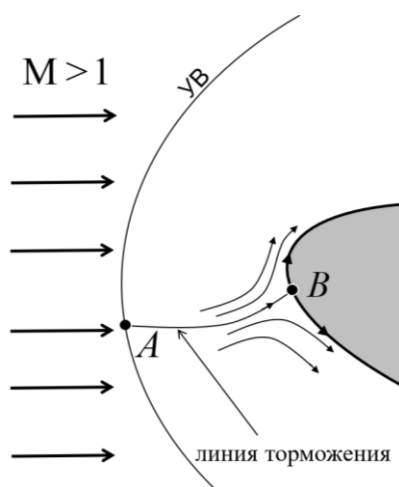


Рисунок 1.3 – Только линия торможения AB имеет точки внутри течения и точку на поверхности тела (точку B)

Дальнейшее исследование будет существенным образом опираться на сформулированное выше предположение о единственности линии торможения (которая имеет точки внутри течения и только одну точку на поверхности тела). Как сказано во введении к диссертации, это предположение общепринято. Для

различных типов жидкости оно подтверждается расчетами (например, [85–88]) и известными точными решениями (например, безвихревое обтекание сферы несжимаемой жидкостью), экспериментальными данными [89], а в учебниках и в теоретических исследованиях [1–4, 90, 91] это предположение даже не обсуждается, и при описании картины обтекания используется как нечто само собой разумеющееся (при стационарном обтекании гладкого выпуклого тела).

Обозначим: \mathbf{V} – вектор скорости, p – давление, ρ – плотность, $\mathbf{\Omega} = \text{rot}\mathbf{V}$ – вектор завихренности. Давление p и плотность ρ в замкнутой области \bar{G} связаны соотношением $p\rho^{-k} = \sigma$, где k – показатель адиабаты, σ – энтропийная функция, которая может быть различной на различных линиях тока.

Поскольку точки замкнутой области \bar{G} , за исключением граничных точек на отошедшей УВ и на теле, являются внутренними точками зоны течения, в которой отсутствуют скачки и разрывы, то будем считать, что в этих точках параметры течения (компоненты скорости, p и ρ) являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями пространственных координат. Кроме того, поскольку поверхности отошедшей УВ и тела являются гладкими, будем считать, что параметры течения и их первые и вторые производные допускают непрерывное продолжение из внутренних точек замкнутой области \bar{G} как на поверхность УВ, так и на поверхность тела. Под значениями производных на упомянутых поверхностях будем понимать их непрерывные продолжения из внутренних точек \bar{G} . (Таким образом, предполагается непрерывность первых и вторых производных во всех точках замкнутой области \bar{G} .)

Замечание. Предположение о непрерывности первых и вторых производных во всех точках \bar{G} не противоречит тому, что кривизна линий тока не ограничена в окрестности точки торможения, а поле единичного вектора, касательного к линиям тока, имеет разрыв в точке торможения. Подобная картина имеет место, например, в точных решениях уравнений для задач обтекания сферы и цилиндра идеальной несжимаемой жидкостью [1] или в точном решении, приведенном Бэтчелором в [92, § 2.7]. В этих точных решениях компоненты скорости и их

первые и вторые производные ограничены и допускают непрерывное продолжение на поверхность тела в окрестности точки торможения. А максимальная кривизна линий тока неограниченно возрастает по мере их приближения к точке торможения, и поле единичного вектора, касательного к линиям тока, имеет разрыв в точке торможения. При этом точные решения с разрывами вторых производных параметров течения в окрестности точки торможения неизвестны. Однако во всех перечисленных точных решениях (в которых вторые производные компонент скорости непрерывны в окрестности точки торможения) завихренность в точке торможения равна нулю. А именно этот факт ниже будет установлен как свойство решения рассматриваемой задачи и будет ключевым моментом, на которое опирается доказательство. Поэтому возникал следующий вопрос, вызывавший сомнение в верности результата данного раздела: «Может быть, нулевое значение завихренности есть следствие предположения о непрерывности вторых производных компонент скорости в точке торможения?» Этот вопрос снят в подразделе «О непрерывности вторых производных компонент скорости в точке торможения», где приведен пример точного решения с непрерывными вторыми производными компонент скорости, в котором завихренность в точке торможения отлична от нуля.

Течение газа в замкнутой области \bar{G} подчиняется уравнению неразрывности $\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0$. Набегающий поток однороден. Поскольку полная энтальпия $i_0 = (k/(k-1))(p/\rho) + \mathbf{V}^2/2$ не меняется при переходе через УВ, поле i_0 однородно во всех точках течения ($\nabla i_0 \equiv 0$). В этом случае стационарные уравнения Эйлера в форме Крокко [93, 94] записываются следующим образом:

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = (k-1)^{-1} p \rho^{-1} \nabla \ln \sigma. \quad (1.1)$$

Следствие критерия Зоравского. Первая теорема Гельмгольца о вихрях может быть сформулирована следующим образом. *Частицы жидкости, составляющие вихревую линию (векторную линию завихренности) в некоторый момент времени, составляют одну из вихревых линий в каждый последующий момент времени.* Критерий Зоравского [45, 46], который также называется

теоремой Фридмана [9, 95], обобщает теоремы Гельмгольца о вихрях и в некоторых случаях позволяет исследовать векторные линии других векторов (а не только вектора завихренности). В этом случае частицы, составляющие векторные линии, движутся со скоростью, вообще говоря, не совпадающей со скоростью жидкости. Поэтому обычно [16, 96] при использовании критерия Зоравского вводится понятие воображаемой жидкости, состоящей из таких частиц.

Сформулируем следствие критерия Зоравского [45, 46] для частного случая стационарного и соленоидального векторного поля \mathbf{c} (в области G).

Следствие критерия Зоравского. Если в области G стационарное векторное поле \mathbf{q} непрерывно дифференцируемо, а стационарное и соленоидальное поле \mathbf{c} ($\text{div}\mathbf{c}=0$) дважды непрерывно дифференцируемо и выполняется равенство

$$\mathbf{c} \times \text{rot}(\mathbf{c} \times \mathbf{q}) = 0, \quad (1.2)$$

то воображаемые частицы, составляющие в некоторый момент времени открытый сегмент (то есть не включающий свои крайние точки) векторной линии \mathbf{c} , лежащий в области G , двигаясь со скоростью \mathbf{q} , будут составлять открытый сегмент одной из векторных линий \mathbf{c} в каждый последующий момент времени (до тех пор, пока эти частицы находятся в области G). Такие воображаемые частицы будем называть q -частицами. В данном разделе в качестве вектора \mathbf{c} будет рассмотрен соленоидальный вектор $\rho\mathbf{V}$.

Используем следствие критерия Зоравского и понятие воображаемой жидкости для исследования векторных линий вектора $\rho\mathbf{V}$, совпадающих с линиями тока газа. Для этого в замкнутой области \bar{G} наряду с течением (реального) газа рассмотрим течение воображаемой жидкости, частицы которой (q -частицы) движутся со скоростью $\mathbf{q} = \alpha\mathbf{\Omega}/\rho$, где коэффициент $\alpha = 1 \text{ кг}/\text{с}^2$ обеспечивает для \mathbf{q} размерность скорости ($[\mathbf{q}] = \text{м}/\text{с}$). Эти q -частицы не взаимодействуют с газом и не влияют на течение газа, но их движение связано с линиями тока реального газа следующим образом.

Уравнение (1.1) может быть записано в виде $(\rho\mathbf{V})\times\mathbf{q}=-\alpha(k-1)^{-1}\nabla\ln\sigma$. Поэтому $\operatorname{rot}((\rho\mathbf{V})\times\mathbf{q})=0$, из чего следует равенство (1.2) для $\mathbf{c}=\rho\mathbf{V}$. Согласно следствию критерия Зоравского, равенство (1.2) есть достаточное условие для того, чтобы q -частицы, составляющие открытый сегмент линии тока газа (то есть открытый сегмент векторной линии $\rho\mathbf{V}$), лежащий в области G в некоторый момент времени, двигаясь со скоростью \mathbf{q} , составляли открытый сегмент одной из линий тока газа в каждый последующий момент времени (до тех пор, пока эти q -частицы находятся в области G).

Теоремы об автономных системах обыкновенных дифференциальных уравнений. Движение q -частиц рассматривается не только в области G , где выполняется следствие критерия Зоравского, но и на границе этой области, то есть во всей замкнутой области \bar{G} . Поэтому с использованием этого следствия будем рассматривать движение q -частиц *только* в области G , а движение во всей замкнутой области \bar{G} будем рассматривать с использованием известных теорем об автономных системах обыкновенных дифференциальных уравнений (в дальнейшем – ОДУ). Для этого заметим, что положение q -частицы в течение отрезка времени $[t_0, t_1]$ определяется как решение автономной системы ОДУ, правая часть которой равна \mathbf{q} , а начальным условием является положение q -частицы в момент времени t_0 (автономность системы следует из стационарности поля \mathbf{q}).

Если говорить кратко, исследование данного подраздела состоит в следующем. Широко известные теоремы об автономных системах ОДУ [97–101] доказаны для (открытых) областей. Ниже с использованием этих теорем будет рассмотрено движение q -частиц, лежащих в момент времени t_0 на полуоткрытом сегменте линии торможения, включающем точку торможения B (лежащую на границе). Поэтому в данном подразделе полуоткрытый сегмент будет погружен в некоторую область, в которой выполнены условия упомянутых теорем. При этом будут использованы два утверждения из теории автономных систем ОДУ. Первое

– о непрерывной зависимости от начальных условий. Из этого последует непрерывность в течение некоторого отрезка времени $[t_0, t_1]$ линии, состоящей из частиц, лежащих в момент времени t_0 на упомянутом выше полуоткрытом сегменте линии торможения. Второе – следствие теоремы существования и единственности о том, что в области, где \mathbf{q} не обращается в нуль, траектории q -частиц не пересекаются (не имеют общих точек). В конце подраздела будут получены утверждения, верные для q -частиц, расположенных в пересечении некоторой окрестности точки B с замкнутой областью \bar{G} .

Сначала заметим, что в условиях теорем [97–99], из которых следуют два упомянутых утверждения, к полю \mathbf{q} предъявляется требование гладкости. Однако в доказательствах используется только следствие гладкости – условие Липшица. А, например, в [100, 101] условие Липшица вводится в условия соответствующих теорем сразу (без требования гладкости). Воспользуемся возможностью ограничиться условием Липшица (вместо гладкости).

Используем обозначения третьего абзаца подраздела «Обозначения и уравнения движения», где были введены в рассмотрение поверхность $H_2 = \{x, y, z : z = \varphi(x, y), (x, y) \in S\}$ и область (слой) $H_3 = \{x, y, z : \varphi(x, y) < z < \varphi(x, y) + \Delta z, (x, y) \in S\}$. Без ограничения общности можно считать, что область S настолько мала, что поверхность H_2 находится внутри части границы \bar{G} , лежащей на поверхности тела. Поэтому на H_2 определен вектор $\mathbf{q}(x, y, z)$, и на поверхности H_2 его можно представить зависящим от двух переменных: $\mathbf{q}(x, y, z) = \mathbf{q}(x, y, \varphi(x, y))$, $(x, y) \in S$. Определим \mathbf{q} в слое H_3 по формуле $\mathbf{q}(x, y, z) = \mathbf{q}(x, y, \varphi(x, y))$ (в этом слое \mathbf{q} не зависит от z). Тогда поле \mathbf{q} окажется непрерывным и кусочно-гладким (возможен разрыв производных компонент \mathbf{q} на поверхности тела) в области Y , состоящей из внутренних точек объединения $\bar{G} \cup H_3$. Однако, поскольку функция $\varphi(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема на замыкании \bar{S} , будут ограничены производные компонент

вектора \mathbf{q} , и, следовательно, окажется выполненным условие Липшица (в области Y). Таким образом, часть границы \bar{G} , лежащей на теле (а именно H_2), окажется погруженной в область Y , для которой справедливы теоремы [97–99] о существовании и единственности решения и о непрерывной зависимости решения от начальных условий. Из чего следует непрерывность линии (по крайней мере в течение некоторого отрезка времени $[t_0, t_1]$), состоящей из q -частиц, лежащих в момент времени t_0 на полуоткрытом сегменте линии торможения, включающем точку торможения B .

Теперь, когда установлена возможность применять теоремы [97–101] к точкам, расположенным на поверхности H_2 , уточним картину течения q -частиц вблизи этой поверхности (которая есть окрестность точки торможения B , лежащая на поверхности тела). Точка B есть точка растекания газа. Поэтому энтропийная функция на поверхности тела равна своему значению в точке B , и, следовательно, вектор $\nabla \ln \sigma$ ортогонален поверхности тела. Вместе с уравнением (1.1) это означает, что в тех точках поверхности тела, где $\mathbf{V} \neq 0$, вектор \mathbf{q} лежит в касательной к поверхности тела (к поверхности H_2) плоскости. По сделанному во втором абзаце подраздела «Обозначения и уравнения движения» предположению $\mathbf{V} \neq 0$ всюду, кроме точки B . То есть \mathbf{q} лежит в касательной к поверхности H_2 плоскости всюду, кроме точки B . Из непрерывности \mathbf{q} следует, что и в точке B вектор \mathbf{q} также лежит в касательной к поверхности H_2 плоскости (нормальная к поверхности H_2 компонента \mathbf{q} равна нулю).

Допустим, что в некоторой точке $E \in H_2$ скорость \mathbf{q} равна нулю. Воображаемая q -частица, находящаяся в этой точке неподвижна. Теория автономных систем ОДУ допускает существование других q -частиц, приближающихся к точке E , но такое приближение (если оно имеет место для точки E) будет асимптотическим, и эти (другие) q -частицы не могут попасть в точку E за конечное время. Действительно, если одна из таких частиц, бывшая в

точке $E' \neq E$ в момент времени t_0 , окажется в точке E в (конечный) момент времени $t_1 > t_0$, то задача с начальным (в момент t_1) значением координат, равным координатам точки E , для автономной системы ОДУ, правая часть которой равна $-\mathbf{q}$, будет иметь два различных решения. Это противоречит теореме существования и единственности. Поэтому траектории q -частиц, движущихся конечное время, не могут проходить через точку E (кроме одной q -частицы, покоящейся в точке E). Таким образом, q -частицы не могут выйти из \bar{G} через точку $E \in H_2$, скорость \mathbf{q} в которой равна нулю.

Теперь допустим, что в некоторой точке $E \in H_2$ скорость \mathbf{q} отлична от нуля. Тогда в силу непрерывности скорость \mathbf{q} будет отлична от нуля в некоторой окрестности точки E . Поскольку нормальная составляющая \mathbf{q} к поверхности H_2 равна нулю, на поверхности H_2 будет лежать сегмент векторной линии \mathbf{q} , для которого точка E будет внутренней точкой. Такой сегмент есть часть фазовой траектории автономной системы ОДУ с правой частью, равной \mathbf{q} . В силу теоремы существования и единственности внутренняя точка (точка E) этой траектории не может принадлежать какой-либо другой фазовой траектории. Поскольку фазовые траектории рассматриваемой автономной системы ОДУ есть траектории q -частиц, приходим к выводу, что q -частицы также не могут выйти из \bar{G} и через точку $E \in H_2$, скорость \mathbf{q} в которой отлична от нуля.

Таким образом, q -частицы не могут покидать замкнутую область \bar{G} через поверхность H_2 . В частности, это относится к q -частице, лежащей в момент времени t_0 в точке B .

Итак, в данном подразделе установлено, во-первых, что в течение некоторого отрезка времени $[t_0, t_1]$ линия, состоящая из q -частиц, лежащих в момент времени t_0 на полуоткрытом сегменте линии торможения, содержащем точку B , будет оставаться непрерывной линией и находиться в

замкнутой области \bar{G} . Во-вторых, что если в некоторой окрестности точки B скорость $\mathbf{q} \neq 0$, то в этой окрестности траектории q -частиц не пересекаются (не имеют общих точек). Кроме того, в случае $\mathbf{q} \neq 0$, поскольку на поверхности тела вектор \mathbf{q} лежит в касательной к поверхности тела плоскости, траектории q -частиц, имеющие хотя бы одну точку на поверхности тела, целиком лежат на этой поверхности (в упомянутой окрестности).

Ниже будем ссылаться на эти (выделенные курсивом) утверждения как на следствия теорем [97–101].

Завихренность в точке торможения. Докажем, что завихренность Ω в точке торможения B равна нулю, то есть, что $\Omega(B) = 0$. Доказательство проведем методом «от противного». Допустим, что $\Omega(B) \neq 0$. Тогда $\mathbf{q}(B) \neq 0$.

Величина проекции скорости \mathbf{q} в произвольной точке замкнутой области \bar{G} на вектор $\mathbf{q}(B) \neq 0$ равна $(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}(B))/|\mathbf{q}(B)|$, где $(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}(B))$ – скалярное произведение векторов \mathbf{q} и $\mathbf{q}(B)$. В точке B эта величина равна $|\mathbf{q}(B)|$. В силу непрерывности \mathbf{q} существует такая (достаточно малая) шаровая окрестность G_B точки B , что часть этой окрестности $\tilde{G}_B = G_B \cap \bar{G}$, занятая течением газа, лежит в \bar{G} (рис. 1.4), а часть границы \tilde{G}_B , лежащая на теле, принадлежит H_2 и во всех точках \tilde{G}_B проекция скорости \mathbf{q} на вектор $\mathbf{q}(B) \neq 0$ не меньше $0.5|\mathbf{q}(B)| > 0$. (Множество \tilde{G}_B не является областью, так как ему принадлежит часть его границы, лежащая на теле.)

Пусть C – точка на линии торможения AB ; обозначим: (CB) – открытый сегмент линии торможения между точками C и B . Выберем точку C так, чтобы сегмент (CB) целиком лежал в \tilde{G}_B (рис. 1.4).

Обозначим: $Q(CB)$ – совокупность q -частиц, которые составляют открытый сегмент (CB) в момент времени t_0 ; $Q(CB]$ – совокупность q -частиц, которые составляют полуоткрытый (включающий точку B) сегмент $(CB]$ в

момент времени t_0 (в этот момент q -частицы $Q(CB)$ составляют непрерывную кривую); $Q(B) \in Q(CB)$ – q -частица, которая находится в точке B в момент времени t_0 . Частицы $Q(CB)$ движутся со скоростью \mathbf{q} . Согласно первому следствию теорем [97–101] (см. выделенное курсивом в конце предыдущего подраздела), эти q -частицы в течение некоторого времени будут составлять непрерывные кривые и находиться в \tilde{G}_B .

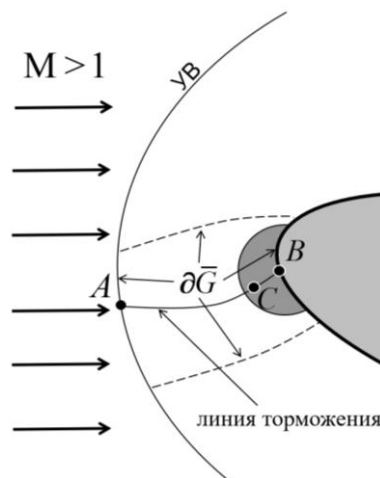


Рисунок 1.4 – Множество \tilde{G}_B обозначено темно-серым цветом

Все q -частицы, находящиеся в \tilde{G}_B , движутся с ненулевой скоростью, и их координата в направлении $\mathbf{q}(B)$ меняется со скоростью не менее $0.5|\mathbf{q}(B)|$. Согласно второму следствию теорем [97–101] (см. выделенное курсивом в конце предыдущего подраздела), поскольку скорость \mathbf{q} не равна нулю, траектории q -частиц, лежащие в \tilde{G}_B , не пересекаются (не имеют общих точек). Кроме того, поскольку на поверхности тела вектор $\mathbf{q} \neq 0$ лежит в касательной к поверхности тела плоскости, траектории q -частиц, имеющие хотя бы одну точку на поверхности тела, целиком лежат на этой поверхности (в \tilde{G}_B). Поэтому из предположения $\Omega(B) \neq 0$ вытекает, что в течение некоторого отрезка времени

$[t_0, t_1]$ частица $Q(B)$ будет двигаться по поверхности H_2 , лежащей на теле, а остальные частицы $Q(CB)$ будут при движении оставаться во внутренних точках течения. Кроме того, поскольку проекция скорости \mathbf{q} в \tilde{G}_B на вектор $\mathbf{q}(B) \neq 0$ не меньше $0.5|\mathbf{q}(B)| > 0$, для любого момента времени $t \in (t_0, t_1]$ частица $Q(B)$ будет находиться на поверхности тела в точке $D = D(t) \neq B$ на поверхности H_2 . Но, согласно критерию Зоравского, частицы $Q(CB)$ в момент времени $t \in (t_0, t_1]$ должны составлять открытый сегмент одной из линий тока газа. Поскольку $Q(CB) \subset Q(CB]$, в силу непрерывности линии, составленной из частиц $Q(CB]$, это означает, что в сколь угодно малой окрестности точки B должна существовать линия тока газа, лежащая во внутренних точках течения, не совпадающая с линией торможения и примыкающая к поверхности тела в точке $D \neq B$ на поверхности тела (рис. 1.5). Но это противоречит картине течения, описанной выше в четвертом абзаце подраздела «Обозначения и уравнения движения» и схематично изображенной на рисунке 1.3.

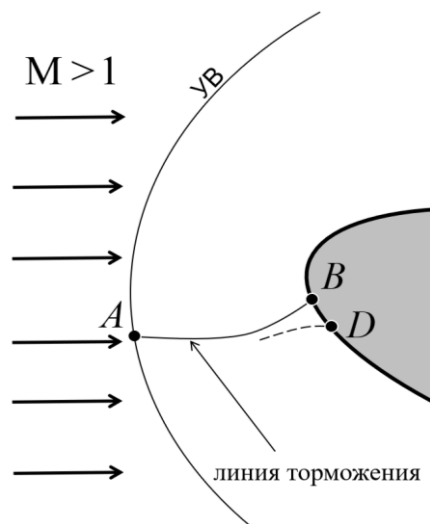


Рисунок 1.5 – Гипотетическая линия тока (изображена штрихами), существование которой вытекает из предположения о том, что завихренность в точке торможения отлична от нуля

К противоречию привело предположение о том, что $\Omega(B) \neq 0$. То есть $\Omega(B) = 0$. Этот факт ($\Omega(B) = 0$) есть один из основных результатов раздела и будет использован ниже.

Завихренность на линии торможения. Выше рассматривался сегмент $(CB]$ линии торможения, лежащий в \tilde{G}_B . Из-за ограниченности \tilde{G}_B возможна ситуация, при которой начало этого сегмента (точка C) не может быть выбрано сколь угодно близко к точке A на UB . Теперь рассмотрим сегмент $(CB]$, в котором точка C может находиться сколь угодно близко к точке A , но лежит внутри замкнутой области \bar{G} , то есть $C \in (AB)$. Используем введенные выше обозначения для B и $Q(B)$, (CB) и $Q(CB)$, $(CB]$ и $Q(CB]$. Согласно критерию Зоравского, q -частицы, составляющие (CB) в момент времени t_0 (то есть частицы $Q(CB)$), двигаясь со скоростью \mathbf{q} , в каждый последующий момент времени (пока они находятся в G) составляют открытый сегмент одной из линий тока газа. Согласно первому следствию теорем [97–101] (см. выделенное курсивом в конце подраздела «Теоремы об автономных системах обыкновенных дифференциальных уравнений»), частицы $Q(CB]$ в течение некоторого времени будут составлять непрерывные кривые и находиться в \bar{G} . При этом частица $Q(B)$ покоится (так как уже доказано, что $\Omega(B) = 0$, и, следовательно, $\mathbf{q}(B) = 0$).

Предположим, что в точке C выполнено неравенство $\Omega \times \mathbf{V} \neq 0$. Тогда в точке C скорость $\mathbf{q} = \alpha \Omega / p$ не равна нулю и имеет ненулевую нормальную к линии торможения компоненту. Поэтому если q -частица находится в точке C в момент времени t_0 , то существует такое $\Delta t > 0$, что, двигаясь со скоростью \mathbf{q} , эта q -частица покинет линию торможения и в момент времени $t_0 + \Delta t$ будет находиться в некоторой точке C' внутри замкнутой области \bar{G} вне линии торможения. Через точку C' проходит линия тока, не совпадающая с линией торможения. Расстояние от точки торможения B до линии тока, проходящей через точку C' , конечно и положительно (рис. 1.6).

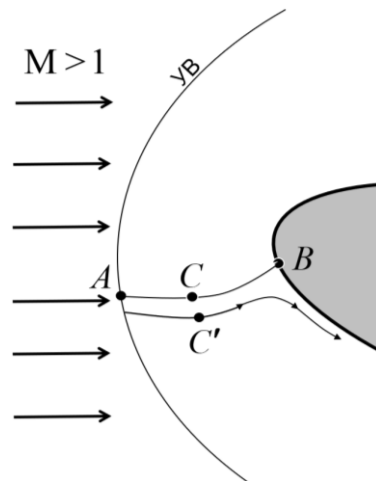


Рисунок 1.6 – Расстояние от точки торможения B до линии тока, проходящей через точку C' , конечно и положительно

Но это противоречит непрерывности линии, состоящей из частиц $Q(CB]$ в момент времени $t_0 + \Delta t$, поскольку частица $Q(B)$ покоится и находится в точке B . К этому противоречию привело предположение о том, что в точке C выполнено неравенство $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} \neq 0$. Поэтому (в силу произвольности выбора точки C на линии торможения и в силу непрерывности полей завихренности и скорости) на всей линии торможения, включая точки A и B , выполнено равенство $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} = 0$.

Замечание. Два результата: нулевая завихренность в точке торможения и равенство нулю вектора $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V}$ на линии торможения – верны для произвольного дозвукового стационарного изоэнергетического обтекания тела с гладкой выпуклой носовой частью, а не только для течений за отошедшей УВ. Специфические особенности течений за отошедшей УВ будут учтены ниже.

Вместе с уравнением (1.1) равенство $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} = 0$ означает, что во всех точках линии торможения AB градиент энтропийной функции равен нулю ($\nabla \sigma = 0$), в частности, $\nabla \sigma(A) = 0$.

Точка начала линии торможения на УВ (основной результат раздела). Обозначим: A' – точка на отошедшей УВ, в которой касательная к УВ плоскость перпендикулярна направлению набегающего потока (A' – начало лидирующей линии тока за УВ, лидирующая точка УВ). Параметры течения на разных

сторонах УВ связаны условиями на косом скачке уплотнения [93, 102]. Из этих условий и из того, что отошедшая УВ имеет искривленную выпуклую форму (обе главные кривизны отличны от нуля), следует, что проекция $\nabla\sigma$ на поверхность отошедшей УВ равна нулю только в точке A' . В точке A' отошедшая УВ перпендикулярна скорости $V(A')$. Поэтому, используя уравнение (1.1), получаем, что проекция $\nabla\sigma(A')$ на нормаль к УВ также равна нулю.

Итак, A' – единственная точка на УВ, где $\nabla\sigma = 0$, а энтропия максимальна на линии тока, начинающейся в этой точке. Выше было показано, что $\nabla\sigma(A) = 0$. Поэтому точка A совпадает с точкой A' . Таким образом, приходим к основному результату (решена задача Дородницына).

В течениях с отошедшей ударной волной при обтекании тел с гладкой выпуклой носовой частью линия торможения совпадает с лидирующей линией (то есть начинается там, где касательная к ударной волне плоскость перпендикулярна скорости набегающего потока (рис. 1.1, а и б)), а энтропия принимает максимальное значение на линии торможения и на поверхности тела. При этом завихренность в точке торможения равна нулю.

Этот результат был впервые опубликован в [35], где доказательство было изложено кратко. Подробное доказательство, которое изложено в данном разделе, опубликовано в [79].

Полученный результат, в частности, означает, что давление и плотность в передней точке торможения можно вычислять по параметрам набегающего потока с использованием условий Ренкина – Гюгонио на прямом скачке в точке начала линии торможения. Следовательно, при заданных параметрах набегающего потока давление и плотность в точке торможения и энтропийная функция на поверхности тела будут одинаковыми для различных тел, распложенных под различными углами атаки.

О постоянстве полной энтальпии. Рассмотрим стационарное обтекание тела с гладкой выпуклой носовой частью однородным сверхзвуковым потоком идеального газа. Как показано выше, градиент энтропии на линии торможения равен нулю, а сама энтропия принимает максимальное значение на поверхности

тела. (В таком течении всюду $\nabla i_0 = 0$.) Выберем произвольную точку E на линии торможения AB , не совпадающую с точками A и B (рис. 1.1, б). Существует бесконечное число функций m , постоянных на линиях тока и таких, что в точке E функция m имеет ненулевой градиент ($\nabla m(E) \neq 0$). Выберем одну из таких функций m . Применим к параметрам течения преобразование Мунка – Прима [103]. Согласно [103], новое стационарное течение с параметрами $\mathbf{V}_1 = m\mathbf{V}$, $\rho_1 = \rho m^{-2}$ и $p_1 = p$ удовлетворяет всем уравнениям движения идеального газа и имеет те же самые линии тока, что и старое (\mathbf{V}, ρ, p) течение. В частности, новая и старая линии торможения совпадают. Поэтому новая энтропийная функция $\sigma_1 = \sigma m^{2k}$ на поверхности тела равна своему значению в точке E , которое, в силу неравенства $\nabla m(E) \neq 0$, является промежуточным (не максимальным). Это не противоречит полученному выше результату о максимальной энтропии на поверхности тела, поскольку в новом течении полная энтальпия $i_{01} = i_0 m^2$ уже не будет постоянной во всем течении, и, следовательно, такое течение не будет описываться уравнением (1.1). Приведенный пример показывает, что постоянство полной энтальпии во всем потоке существенно для вывода о максимальной энтропии на поверхности тела и о совпадении линии торможения с лидирующей линией тока.

О непрерывности вторых производных компонент скорости в точке торможения. В данном подразделе получен ответ на вопрос, вызывавший сомнение в содержательности предположения, сделанного выше, о непрерывности вторых производных компонент скорости в точке торможения: «Может быть, нулевое значение завихренности (ключевой момент доказательства настоящего раздела) есть следствие предположения о непрерывности вторых производных компонент скорости в точке торможения?» Следующий пример (он опубликован в [78]) дает отрицательный ответ на этот вопрос.

Обозначим: u, v – компоненты вектора скорости \mathbf{V} в прямоугольной декартовой системе координат Oxy .

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что если

$$u = x - 2y, \quad v = -y, \quad (1.3)$$

то скорость \mathbf{V} будет удовлетворять стационарному уравнению Эйлера для идеальной несжимаемой жидкости $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = -\nabla p / \rho$, где $\rho = \rho_0 = \text{const}$ – плотность, $p = p_0 - \rho(x^2 + y^2)/2$ – давление (положительная константа p_0 обеспечивает положительность давления в некоторой окрестности точки торможения $(0,0)$), и уравнению неразрывности $\text{div}(\rho\mathbf{V}) = 0$. Картина такого течения в окрестности точки торможения изображена на рисунке 1.7, где стрелки указывают направление скорости (но не величину скорости). Несложно проверить, что завихренность $\mathbf{\Omega} = \text{rot}\mathbf{V}$ скорости (1.3) всюду равна 2. То есть в точке торможения завихренность не равна нулю, и при этом компоненты скорости (1.3) дважды непрерывно дифференцируемы.

Пример показывает, что из предположения о непрерывности вторых производных компонент скорости в точке торможения не следует, что завихренность в точке торможения равна нулю.

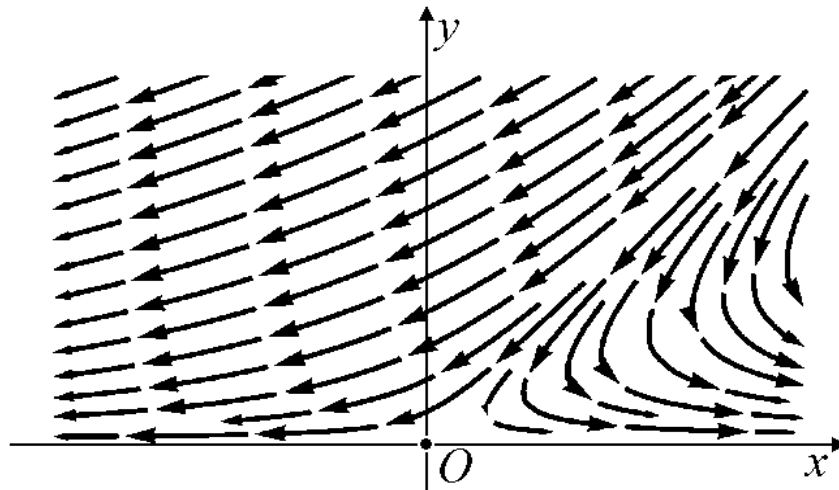


Рисунок 1.7 – Картина направлений скорости в точном решении (1.3) стационарного уравнения Эйлера для несжимаемой жидкости в окрестности точки торможения

Математическая постановка задачи Дородницына. В отличие от подраздела «Обозначения и уравнения движения» представим задачу Дородницына в «чистом» математическом виде (без физических обоснований того или иного условия, входящего в постановку задачи).

В прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ рассматривается область $G = \{x, y, z : \varphi_s(y, z) < x < \varphi_b(y, z) < 0, (y, z) \in Q = (0, a_1) \times (0, a_2)\}$, где $a_1, a_2 > 0$, $\varphi_s, \varphi_b \in C^2(\bar{Q})$. Поверхности $H_s = \{x, y, z : x = \varphi_s(y, z), (y, z) \in Q\}$ (поверхность отошедшей ударной волны) и $H_b = \{x, y, z : x = \varphi_b(y, z), (y, z) \in Q\}$ (поверхность тела) строго выпуклы в сторону убывания координаты x . Схематически область G изображена на рисунке 1.8. Точка, имеющая минимальную x -координату среди точек замкнутой поверхности $\bar{H}_s (= H_s \cup \partial H_s)$, единственна и принадлежит H_s . Обозначим эту точку буквой A (лидирующая точка). Во всех точках поверхности H_s , кроме, может быть, точки A , обе главные кривизны отличны от нуля.

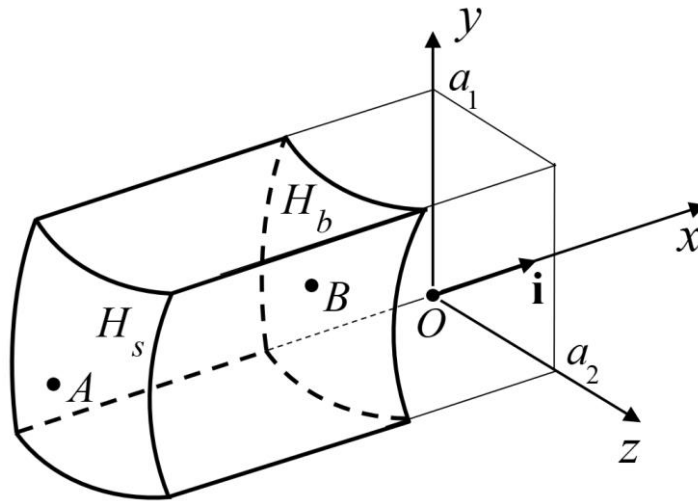


Рисунок 1.8 – Ребра границы области G изображены жирными (сплошными и штрихованными) линиями

Функции $p, \rho, \mathbf{V} \in C^2(\bar{G})$ удовлетворяют в G системе уравнений

$$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} = (k-1)^{-1} p \rho^{-1} \nabla \ln \sigma, \quad \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (\mathbf{V} \cdot \nabla) \sigma = 0,$$

где $\mathbf{\Omega} = \text{rot}\mathbf{V}$, $\sigma = p\rho^{-k}$, $k = \text{const} > 1$, $p > 0$, $\rho > 0$, и следующим условиям.

1. В \bar{G} существует и единственна точка B , в которой $\mathbf{V} = 0$. При этом $B \in H_b$.
2. В точках поверхности H_b функция $\sigma = p\rho^{-k}$ принимает одно и то же значение, а нормальная к H_b составляющая вектора \mathbf{V} равна нулю (условие непротекания).
3. Значения p, ρ, \mathbf{V} на H_s определяются (соотношениями Рэнкина – Гюгонио) через положительные константы p_0, ρ_0, V_0 , связанные условием $M_0 = V_0 \sqrt{\rho_0 / (k p_0)} > 1$, и через компоненты той единичной нормали $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ к поверхности H_s , которая направлена внутрь \bar{G} :

$$p = p_0 \left(1 + 2k \frac{n_x^2 M_0^2 - 1}{k + 1} \right), \quad \rho = \rho_0 \frac{(k + 1) n_x^2 M_0^2}{2 + (k - 1) n_x^2 M_0^2}, \quad \mathbf{V} = V_0 \left(\mathbf{i} + \mathbf{n} n_x \frac{\rho_0 - \rho}{\rho} \right),$$

где \mathbf{i} – единичный направляющий вектор оси x .

4. Среди линий тока (среди фазовых траекторий системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}$) в G существует и единственна линия тока (далее – критическая линия l_c), которая имеет одну точку на поверхности H_s (начальная точка линии), остальные ее точки лежат в G , а открытым концом она примыкает к точке $B (\in H_b)$. Другие линии тока не примыкают к H_b .

Требуется доказать, что A есть начальная точка критической линии l_c .

1.3 Заключение к главе 1

Доказано, что в течении за отошедшей УВ в общем пространственном случае лидирующая линия тока и линия торможения совпадают (решена задача Дородницына). Этот важный теоретический вывод позволяет оценивать точность компьютерных кодов, например, путем проверки выполнения равенства давления в точке торможения давлению торможения, вычисленному по параметрам набегающего потока с помощью соотношений Рэнкина – Гюгонио для прямого скачка. Пример такой оценки точности кода приведен в приложении А.

Глава 2 Течение за отошедшей ударной волной

2.1 Вихревая и скоростная альтернативы

В течении за отошедшей УВ выполняется уравнение (1.1). Представим его в виде $(p^{-1}\boldsymbol{\Omega}) \times (\rho \mathbf{V}) = (k-1)^{-1} \nabla \ln \sigma$. Применение операции ротора к этому уравнению с использованием двух известных векторных тождеств $\text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \equiv (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{a} \text{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \text{div} \mathbf{a}$ и $\text{rot}(\nabla \varphi) \equiv 0$ и уравнения неразрывности $\text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0$ дает

$$\rho(\mathbf{V} \cdot \nabla) \left(p^{-1} \boldsymbol{\Omega} \right) - \left(\left(p^{-1} \boldsymbol{\Omega} \right) \cdot \nabla \right) (\rho \mathbf{V}) - \rho \mathbf{V} \text{div} \left(p^{-1} \boldsymbol{\Omega} \right) = 0.$$

Поскольку $\text{div} \text{rot} \mathbf{a} \equiv 0$ и, следовательно, $\text{div} \boldsymbol{\Omega} = 0$, последнее слагаемое этого уравнения преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{V} \text{div} \left(p^{-1} \boldsymbol{\Omega} \right) &= \rho \mathbf{V} \left(p^{-1} \text{div} \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla p^{-1} \right) = -\rho p^{-2} \mathbf{V} (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla p) = \\ &= -\rho p^{-1} \mathbf{V} (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \ln p) = -\rho \mathbf{V} \left(\left(p^{-1} \boldsymbol{\Omega} \right) \cdot \nabla \ln p \right), \end{aligned}$$

а само уравнение – к виду

$$\rho(\mathbf{V} \cdot \nabla) \left(p^{-1} \boldsymbol{\Omega} \right) - \left(\left(p^{-1} \boldsymbol{\Omega} \right) \cdot \nabla \right) (\rho \mathbf{V}) + \rho \mathbf{V} \left(\left(p^{-1} \boldsymbol{\Omega} \right) \cdot \nabla \ln p \right) = 0. \quad (2.1)$$

Рассмотрим отрезок линии тока, во всех точках которого $V \geq V_0$, где $V_0 > 0$ – произвольная положительная величина. Представим скорость в виде $\mathbf{V} = V \mathbf{e}$, $|\mathbf{e}| = 1$. Тогда уравнение (2.1) (на рассматриваемом отрезке линии тока) равносильно следующему:

$$(\mathbf{e} \cdot \nabla) \left(p^{-1} \boldsymbol{\Omega} \right) - \left(\left(p^{-1} \boldsymbol{\Omega} \right) \cdot \nabla \right) \mathbf{e} - \mathbf{e} \left(\left(p^{-1} \boldsymbol{\Omega} \right) \cdot \nabla \ln(p^{-1} \rho V) \right) = 0. \quad (2.2)$$

Пусть l – переменная длина дуги на этом отрезке линии тока, отмеряемая так, что направление роста l в каждой точке линии тока совпадает с направлением вектора \mathbf{e} в этой точке. Тогда на рассматриваемом отрезке завихренность и давление можно рассматривать как функции от l : $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}(l)$,

$p = p(l)$. Кроме того, $(\mathbf{e} \cdot \nabla)(p^{-1}\mathbf{\Omega}) = \frac{d}{dl}(p^{-1}\mathbf{\Omega})$. Обозначим: e_x, e_y, e_z и $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ – компоненты единичного вектора \mathbf{e} и вектора завихренности $\mathbf{\Omega}$ в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$, $F = \ln(p^{-1}\rho V)$. С использованием этих обозначений и равенств векторное уравнение (2.2) на рассматриваемой линии тока можно записать в матричном виде

$$\frac{d}{dl} \begin{pmatrix} \frac{\Omega_x}{p} \\ \frac{\Omega_y}{p} \\ \frac{\Omega_z}{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} e_x + e_x \frac{\partial}{\partial x} F & \frac{\partial}{\partial y} e_x + e_x \frac{\partial}{\partial y} F & \frac{\partial}{\partial z} e_x + e_x \frac{\partial}{\partial z} F \\ \frac{\partial}{\partial x} e_y + e_y \frac{\partial}{\partial x} F & \frac{\partial}{\partial y} e_y + e_y \frac{\partial}{\partial y} F & \frac{\partial}{\partial z} e_y + e_y \frac{\partial}{\partial z} F \\ \frac{\partial}{\partial x} e_z + e_z \frac{\partial}{\partial x} F & \frac{\partial}{\partial y} e_z + e_z \frac{\partial}{\partial y} F & \frac{\partial}{\partial z} e_z + e_z \frac{\partial}{\partial z} F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\Omega_x}{p} \\ \frac{\Omega_y}{p} \\ \frac{\Omega_z}{p} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Коэффициенты матрицы зависят как от самих газодинамических функций, так и от их первых производных, и являются непрерывными (и ограниченными) функциями пространственных координат на любом отрезке линии тока, где модуль скорости отграничен от нуля: $V \geq V_0 > 0$. Если считать коэффициенты матрицы заданными функциями переменной l , то матричное уравнение (2.3) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений для компонент вектора $p^{-1}\mathbf{\Omega}$, рассматриваемых как функции переменной l . Эта система линейна, а ее коэффициенты зависят от l , непрерывны по l и ограничены в ограниченной области (поскольку они непрерывны и ограничены как функции пространственных координат, которые, в свою очередь, непрерывны и ограничены как функции переменной l). Теорема существования и единственности, подходящая для системы (2.3), сформулирована, например, в известном задачнике А. Ф. Филиппова [104, § 7], где в трехмерном случае под y_1, y_2, y_3 следует понимать компоненты вектора $p^{-1}\mathbf{\Omega}$, а под переменной x – переменную длину дуги l . Из этой теоремы существования и единственности (для систем ОДУ) следует, что на всем рассматриваемом отрезке линии тока либо

$p^{-1}\Omega \equiv 0$, либо $|p^{-1}\Omega| \neq 0$. Поскольку приведенные рассуждения верны для любого значения $V_0 > 0$, приходим к следующему выводу, названному в [63] вихревой альтернативой.

Вихревая альтернатива. *Если на некотором отрезке линии тока стационарного изоэнергетического течения идеального газа с дважды непрерывно дифференцируемыми параметрами скорость не обращается в нуль, то величина завихренности $|\Omega|$ либо тождественно равна нулю на этом отрезке линии тока, либо на всем отрезке $|\Omega| \neq 0$.*

Замечание. Требование, чтобы параметры течения были дважды непрерывно дифференцируемы, нужно для обоснованности известных векторных тождеств, использованных при доказательстве.

Завихренность на лидирующей линии. Лидирующая линия в течении за отошедшей УВ – это линия тока, которая начинается на УВ в лидирующей точке, в которой касательная к УВ плоскость перпендикулярна направлению набегающего потока. Хорошо известно [105–107], что в такой точке УВ завихренность равна нулю, а скорость отлична от нуля. Поэтому из вихревой альтернативы следует, что *в течении за отошедшей УВ завихренность на лидирующей линии равна нулю по крайней мере на том ее (открытом) интервале, который начинается в лидирующей точке и на котором отсутствуют точки торможения и точки разрыва параметров течения.*

После публикации в статье [63] вихревой альтернативы другими авторами (учениками соискателя) в работе [108] была использована идея доказательства вихревой альтернативы и было доказано утверждение, которое естественно назвать скоростной альтернативой.

Скоростная альтернатива. *Если на некотором отрезке вихревой линии стационарного изоэнергетического движения идеального газа завихренность не обращается в нуль, то либо весь отрезок вихревой линии состоит из точек торможения, либо во всех точках этого отрезка скорость газа отлична от нуля.*

Доказательство повторяет доказательство вихревой альтернативы. Для этого уравнение (2.1) записывается с использованием обозначения $\mathbf{\Omega} = \Omega \mathbf{e}$, где $|\mathbf{e}| = 1$, $\Omega > 0$. Получается векторное уравнение

$$(\mathbf{e} \cdot \nabla)(\rho \mathbf{V}) = \frac{p}{\Omega} \left[(\rho \mathbf{V} \cdot \nabla)(p^{-1} \mathbf{\Omega}) + \rho \mathbf{V} \left((p^{-1} \mathbf{\Omega}) \cdot \nabla \ln p \right) \right],$$

которое в матричном виде равносильно линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для компонент вектора $\rho \mathbf{V}$

$$\frac{d}{dl} \begin{pmatrix} \rho V_x \\ \rho V_y \\ \rho V_z \end{pmatrix} = \frac{p}{\Omega} \begin{pmatrix} f + \partial(p^{-1} \Omega_x) / \partial x & \partial(p^{-1} \Omega_x) / \partial y & \partial(p^{-1} \Omega_x) / \partial z \\ \partial(p^{-1} \Omega_y) / \partial x & f + \partial(p^{-1} \Omega_y) / \partial y & \partial(p^{-1} \Omega_y) / \partial z \\ \partial(p^{-1} \Omega_z) / \partial x & \partial(p^{-1} \Omega_z) / \partial y & f + \partial(p^{-1} \Omega_z) / \partial z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho V_x \\ \rho V_y \\ \rho V_z \end{pmatrix},$$

где $f = p^{-1}(\mathbf{\Omega} \cdot \nabla) \ln p$. Как и в (2.3), коэффициенты полученной системы оказываются непрерывными и ограниченными. Повторяя далее рассуждения, примененные при доказательстве *вихревой альтернативы* (изложенные выше в абзаце после системы (2.3)), получаем сформулированную выше скоростную альтернативу.

Вихревая альтернатива впервые была опубликована в [63], где постановка и решение задачи принадлежат соискателю. Научная роль соавтора в этой статье состоит в упрощении некоторых выкладок, изначально предложенных соискателем.

2.2 Завихренность на линии торможения

В момент опубликования результата предыдущего раздела (в статье [63]) задача Дородницына была еще нерешенной и нельзя было утверждать, что линия торможения совпадает с лидирующей линией. Но после решения задачи Дородницына (после опубликования статьи [35], содержание которой изложено в

разделе 1.2) стало ясно, что линия торможения совпадает с лидирующей линией. Отсюда получаем важный результат.

В течении за отошедшей УВ завихренность равна нулю на всей линии торможения.

Замечание. Если рассматривать изоэнергетические (полная энтальпия $i_0 = (k/(k-1))(p/\rho) + \mathbf{V}^2/2$ одинакова во всех точках течения) обтекания гладкого выпуклого тела, которые не являются течением за отошедшей УВ, вывод о нулевой завихренности на линии торможения будет необоснован. В таких течениях на линии торможения выполняется менее сильное условие: *скорость и завихренность коллинеарны*. Это условие вытекает из равенства $\mathbf{q} \times \mathbf{V} = 0$, которое, согласно промежуточному результату раздела 1.2, выполнено на всей линии торможения.

2.3 Вихревые линии за отошедшей ударной волной

В данном разделе будет показано, что вихревые линии течения за отошедшей УВ замкнуты. Если в разделе 1.2 рассматривались воображаемые частицы, движущиеся со скоростью $\alpha \mathbf{\Omega}/\rho$, то теперь наряду с течением (реального) газа будем рассматривать течение другой воображаемой жидкости, частицы которой, как и раньше, будем называть q -частицами. Эти другие q -частицы движутся со скоростью $\mathbf{q} = (T_\infty/T)\mathbf{V}$, где T – температура газа, T_∞ – температура газа в набегающем потоке.

Перепишем уравнение (1.1) в виде

$$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{q} = (k-1)^{-1} R T_\infty \nabla \ln \sigma,$$

где R – отношение универсальной газовой постоянной к молярной массе, и применим к обеим частям операцию rot . Получим уравнение $\text{rot}(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{q}) = 0$, из чего следует (1.2) для $\mathbf{c} = \mathbf{\Omega}$. Поэтому, согласно следствию критерия Зоравского

(см. раздел 1.2), последнее равенство есть достаточное условие того, что q -частицы, составляющие векторную линию Ω (то есть вихревую линию) в некоторый момент времени и двигающиеся со скоростью \mathbf{q} , впоследствии также будут находиться на вихревой линии.

Отошедшая УВ имеет две стороны. На первой стороне параметры течения однородны (набегающий сверхзвуковой поток). На второй стороне параметры течения неоднородны, так как зависят от угла между нормалью к УВ и скоростью набегающего потока. При этом поле полной энтальпии однородно ($\nabla i_0 = 0$) по обе стороны от УВ. Учитывая условие непрерывности касательной составляющей скорости при переходе через УВ, несложно убедиться, что тем же свойством непрерывности обладает и нормальная к УВ компонента завихренности. Поскольку набегающий поток (то есть поток с первой стороны УВ) безвихревой, нормальная составляющая завихренности на второй стороне УВ также равна нулю, и, следовательно, вихревые линии, имеющие хотя бы одну точку на второй стороне УВ, лежат на ней (на второй стороне УВ).

В силу условий на косом скачке уплотнения [93, 102] вдоль линий уровня энтропийной функции σ на второй стороне нормаль к УВ, направленная в сторону невозмущенного набегающего сверхзвукового потока, составляет один и тот же угол с вектором скорости набегающего потока. Такие линии уровня энтропийной функции σ , лежащие на второй стороне УВ гладкой выпуклой формы, замкнуты и охватывают лидирующую точку, в которой нормаль к УВ параллельна скорости набегающего потока (рис. 2.1).

Поверхности тока, начинающиеся на упомянутых замкнутых линиях, представляют собой изоэнтропийные поверхности $\sigma = \text{const}$, на которых в силу уравнения (1.1) лежат вихревые линии в течении за УВ. Поэтому вихревые линии лежат и на второй стороне УВ, и на изоэнтропийной поверхности. Следовательно, на второй стороне УВ они совпадают с замкнутыми линиями уровня энтропийной функции σ .

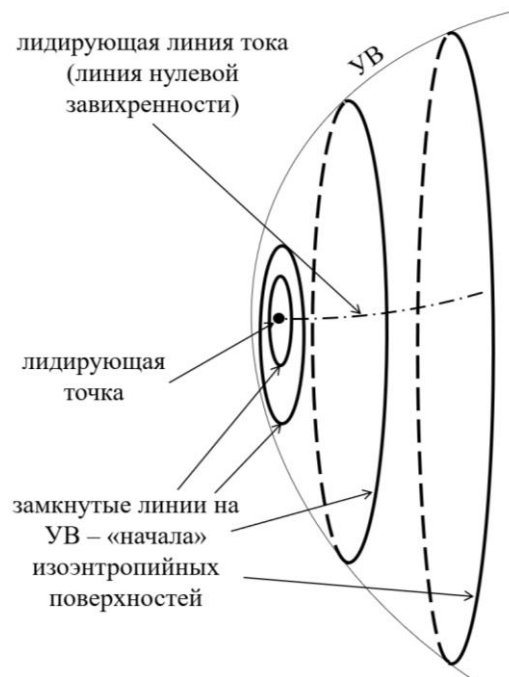


Рисунок 2.1 – Лидирующая точка и замкнутые линии уровня энтропийной функции на поверхности отошедшей UV (на второй стороне UV)

Полученный выше с привлечением воображаемых q -частиц результат (о переносе вихревых линий со скоростью $\mathbf{q} = (T_\infty / T)\mathbf{V}$) позволяет уточнить это представление о картине вихревых линий.

Действительно, скорость $\mathbf{q} = (T_\infty / T)\mathbf{V}$ на второй стороне UV направлена вниз по потоку (рис. 2.2).

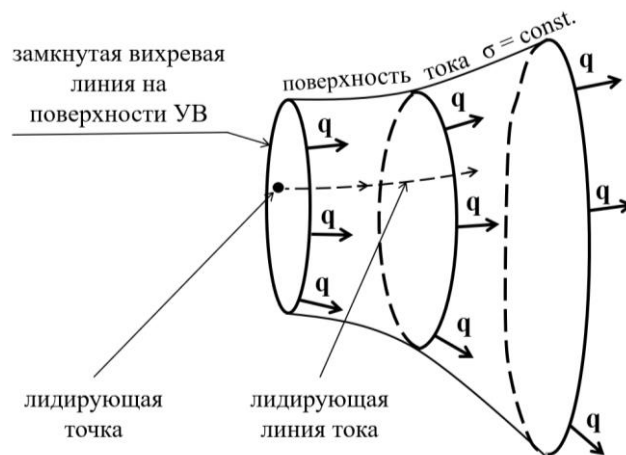


Рисунок 2.2 – Замкнутые вихревые линии на поверхности тока $\sigma = \text{const}$

Поэтому q -частицы, составляющие замкнутые вихревые линии, лежащие на второй стороне UV в некоторый момент времени, движутся вниз по потоку со скоростью $\mathbf{q} = (T_\infty / T) \mathbf{V}$ и продолжают составлять вихревые линии. В силу непрерывности скорости \mathbf{q} приходим к выводу, что за искривленной UV все вихревые линии замкнуты и один раз охватывают линию тока с нулевой завихренностью (лидирующую линию тока), как показано на рисунке 2.2.

Этот результат опубликован в [63] и принадлежит соискателю (о научном вкладе соавтора написано в конце раздела 2.1).

2.4 Векторные линии векторного произведения скорости и градиента энтропии за отошедшей ударной волной

В данном разделе продолжается поиск закономерностей течений за отошедшей UV в общем пространственном случае. Исследуются векторные линии векторного произведения скорости и градиента энтропии. Изначально интерес к форме этих линий был связан с вопросом существования (и возможности построения) таких систем ортогональных криволинейных координат на изоэнтропийных поверхностях за отошедшей UV , в которых линии тока есть координатные линии первого семейства. Для таких систем координат исследуемые в данном разделе линии представляют собой второе семейство координатных линий. Если хотя бы одна такая линия, начавшись в точке A на одной из линий тока и сделав один оборот по изоэнтропийной поверхности, окажется на той же линии тока в точке $B \neq A$, то существование системы координат окажется невозможным (поскольку координатные линии не должны иметь двух точек пересечения). Ниже будет показано, что если линия делает один оборот, то всегда $B = A$ (то есть рассматриваемые линии замкнуты), и построение системы координат возможно. Кроме того, факт замкнутости этих линий сам по себе представляется неожиданным и интересным. А в четвертой главе будут

найлены два интегральных инварианта, обнаружение которых стало возможным только после обнаружения замкнутости этих линий.

Рассмотрим течение газа за отошедшей ударной волной, образовавшейся при стационарном обтекании тела с гладкой выпуклой носовой частью однородным сверхзвуковым потоком. Далее, если слово «УВ» употребляется для обозначения поверхности УВ, то там, где это имеет значение, оно означает вторую сторону УВ (см. раздел 2.3). Кроме отошедшей УВ ниже по течению могут существовать другие скачки и тангенциальные разрывы. Пусть G_0 – такая область, расположенная за отошедшей ударной волной, в которой отсутствуют какие-либо разрывы и точки торможения. И пусть при этом часть границы этой области, лежащая на УВ (на второй стороне УВ), содержит лидирующую точку УВ. Будем использовать обозначения раздела 1.2 и уравнение (1.1).

Поскольку в области G_0 отсутствуют какие-либо разрывы, газодинамические параметры V , ρ и p в этой области предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми по пространственным координатам и допускающими вместе со своими производными до второго порядка включительно непрерывное продолжение на поверхность УВ (на вторую сторону УВ). Все дальнейшие рассуждения будут относиться к области G_0 и к той части УВ, которая является частью границы G_0 . На поверхности УВ под значением завихренности Ω и значением энтропийной функции σ будем понимать их непрерывные продолжения из области G_0 на эту поверхность (на вторую сторону УВ).

Завихренность на поверхности отошедшей УВ. Поскольку отошедшая УВ имеет искривленную форму, завихренность непосредственно за УВ принимает ненулевое значение. При этом, как показано в разделе 2.3, нормальная к поверхности УВ составляющая завихренности равна нулю, и поэтому вихревые линии лежат на УВ. Следовательно, поток вектора Ω через любую поверхность, лежащую на УВ, равен нулю.

Циркуляция скорости газа по контуру, лежащему на изоэнтропийной поверхности за отошедшей УВ. Как показано в разделе 2.3, линии уровня энтропийной функции σ , лежащие на УВ гладкой выпуклой формы, замкнуты, охватывают лидирующую точку и совпадают с вихревыми линиями (рис. 2.1 и 2.2). При этом поверхности тока, начинающиеся на упомянутых замкнутых линиях, охватывают лидирующую линию тока (линию тока, начинающуюся в лидирующей точке) и представляют собой изоэнтропийные поверхности $\sigma = \text{const}$. Теперь рассмотрим замкнутые линии общего вида (не только вихревые линии), лежащие на изоэнтропийных поверхностях и один раз охватывающих лидирующую линию тока.

***Лемма 1.** Пусть в течении за отошедшей ударной волной контур лежит на поверхности $\sigma = \text{const}$ и один раз охватывает линию нулевой завихренности (лидирующую линию тока). И пусть на части этой поверхности, расположенной между ударной волной и контуром, отсутствуют какие-либо разрывы. Тогда циркуляция скорости газа по такому контуру равна нулю.*

Доказательство. Пусть C_1 – произвольный контур, лежащий на одной из поверхностей $\sigma = \text{const}$ и один раз охватывающий линию нулевой завихренности. Контур, лежащий на УВ и представляющий собой начало этой поверхности, обозначим C_0 (рис. 2.3). Рассмотрим две поверхности. S_0 – лежащая на УВ поверхность, ограниченная контуром C_0 , и S_1 – часть поверхности $\sigma = \text{const}$, расположенная между контурами C_0 и C_1 . Объединение $S_0 \cup S_1$ представляет собой поверхность, ограниченную контуром C_1 . Поэтому, согласно теореме Стокса, циркуляция скорости \mathbf{V} по контуру C_1 есть поток вектора $\mathbf{\Omega}$ через поверхность $S_0 \cup S_1$.

В предыдущем подразделе показано, что поток вектора $\mathbf{\Omega}$ через поверхность S_0 равен нулю. Из уравнения (1.1) следует, что вихревые линии лежат на поверхностях вида $\sigma = \text{const}$. Поэтому поток вектора $\mathbf{\Omega}$ через поверхность S_1 также равен нулю. Следовательно, циркуляция скорости \mathbf{V} по контуру C_1 равна нулю. Лемма 1 доказана.

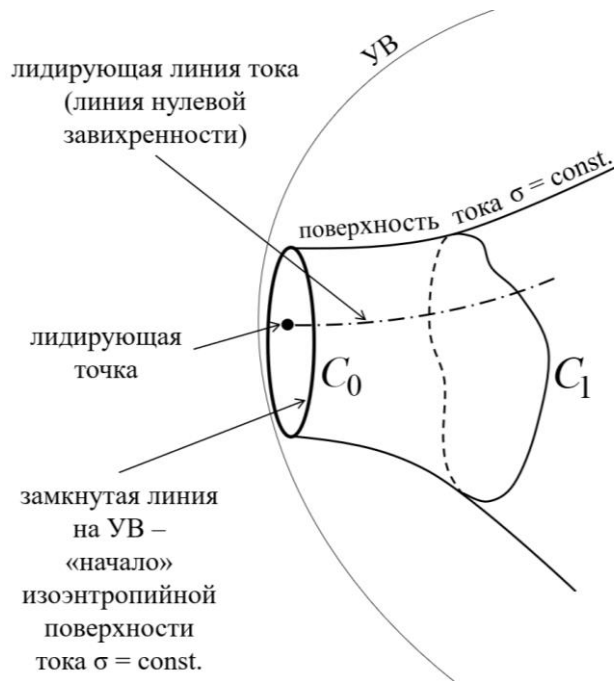


Рисунок 2.3 – Два контура, лежащие на одной изоэнтропийной поверхности

Замечание. Лемму 1 можно использовать для верификации численных расчетов, полученных не только схемами высокого, но и схемами первого порядка (поскольку при проверке отсутствует необходимость вычислять производные).

О нулевых значениях вектора $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla \sigma$. Покажем, что в области G_0 этот вектор равен нулю только на лидирующей линии тока.

Как было отмечено во введении к диссертации (см. описание закономерностей первого типа), скорость равна нулю только в (единственной) точке торможения, в которой, как показано в разделе 1.2, заканчивается лидирующая линия тока (совпадающая с линией торможения). Как было показано в разделе 2.1, из вихревой альтернативы и свойств завихренности за УВ искривленной формы (обе главные кривизны отличны от нуля) [105–107] следует, что завихренность равна нулю только на лидирующей линии тока.

Покажем теперь, что всюду за УВ перед носовой частью обтекаемого тела, кроме лидирующей линии тока (включающую в себя точку торможения), произведение $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}$ отлично от нуля. При отличных от нуля векторах \mathbf{V} и $\boldsymbol{\Omega}$ это

равносильно тому, что угол между скоростью \mathbf{V} и завихренностью $\mathbf{\Omega}$ отличен от нуля и от 180 градусов.

Допустим, что в некоторой точке A , не лежащей на лидирующей линии и не совпадающей с передней точкой торможения, угол между скоростью и завихренностью равен нулю или 180 градусам. Тогда существует такая константа $b_0 \neq 0$, что

$$\mathbf{V}(A) = b_0 \mathbf{\Omega}(A). \quad (2.4)$$

Обозначим через $\gamma_{\mathbf{\Omega}}$ – вихревую линию, проходящую через точку A . Эта вихревая линия замкнута и один раз охватывает лидирующую линию (см. раздел 2.3).

Рассмотрим воображаемую жидкость, частицы которой движутся со скоростью

$$\mathbf{q}_2 = (T_{\infty}/T)\mathbf{V} - b_0(T_{\infty}/T)\mathbf{\Omega}. \quad (2.5)$$

В разделе 2.3 было показано, что если $\mathbf{q} = (T_{\infty}/T)\mathbf{V}$, то $\text{rot}(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{q}) = 0$. Поскольку $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Omega} \equiv 0$, такое же равенство верно и для \mathbf{q}_2 : $\text{rot}(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{q}_2) = 0$. Согласно следствию критерия Зоравского (см. раздел 1.2), равенство $\text{rot}(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{q}_2) = 0$ есть достаточное условие того, что q_2 -частицы, составляющие вихревую линию $\gamma_{\mathbf{\Omega}}$ в некоторый момент времени, двигаясь со скоростью \mathbf{q}_2 , продолжают составлять одну из вихревых линий. Из равенств (2.4) и (2.5) следует, что $\mathbf{q}_2(A) = 0$, то есть q_2 -частица, находящаяся в точке A , неподвижна. Поэтому остальные q_2 -частицы, составляющие в начальный момент вихревую линию $\gamma_{\mathbf{\Omega}}$, двигаясь со скоростью \mathbf{q}_2 , продолжают составлять эту же линию. Это возможно, только если они покоятся или движутся вдоль $\gamma_{\mathbf{\Omega}}$. В любом случае на всей линии $\gamma_{\mathbf{\Omega}}$ выполнено равенство $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{q}_2 = 0$. Отсюда с использованием (2.5) получаем, что на всей линии $\gamma_{\mathbf{\Omega}}$ выполнено равенство $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} = 0$. Поскольку завихренность $\mathbf{\Omega}$ и скорость \mathbf{V} отличны от нуля, последнее равенство означает, что скалярное произведение

скорости \mathbf{V} на единичный касательный к вихревой линии γ_{Ω} вектор $\mathbf{e}_{\Omega} = \Omega/\Omega$ либо строго больше нуля, либо строго меньше нуля на всей линии γ_{Ω} . Следовательно, циркуляция скорости по (замкнутой) вихревой линии γ_{Ω} отлична от нуля. При этом (см. раздел 2.3) все вихревые линии лежат на изоэнтропийных поверхностях. Но это противоречит лемме 1. Из полученного противоречия вытекает, что всюду за УВ перед носовой частью обтекаемого тела, кроме лидирующей линии тока и передней точки торможения, угол между скоростью \mathbf{V} и завихренностью Ω отличен от нуля и от 180 градусов, и $\Omega \times \mathbf{V} \neq 0$.

Неравенство $\Omega \times \mathbf{V} \neq 0$ вместе с уравнением (1.1) означает, что $\nabla\sigma$ равен нулю только на лидирующей линии тока. Далее, из (1.1) следует, что векторы $\nabla\sigma$ и \mathbf{V} ортогональны, и поэтому вектор $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla\sigma$ также равен нулю только на лидирующей линии тока.

Замкнутость линий вектора \mathbf{a} . Поскольку, как только что было показано, вектор $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla\sigma$ равен нулю только на лидирующей линии тока, во всех остальных точках области G_0 определено семейство векторных линий этого вектора. Эти линии в каждой точке ортогональны линиям тока (поскольку \mathbf{a} и \mathbf{V} ортогональны). Согласно (1.1), каждая такая линия лежит на одной из поверхностей вида $\sigma = \text{const}$. Докажем следующее утверждение, представляющее основной результат данного раздела.

Пусть в течении за отошедшей ударной волной часть C_{AB} векторной линии вектора $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla\sigma$, лежащая на поверхности $\sigma = \text{const}$ (не вырожденной в линию нулевой завихренности), делает один оборот вокруг линии нулевой завихренности и при этом начинается и заканчивается на одной и той же линии тока l в точках A и B . И пусть на части поверхности $\sigma = \text{const}$, расположенной между УВ, линией C_{AB} и криволинейным отрезком линии тока l между точками A и B , отсутствуют какие-либо разрывы и точки торможения. Тогда точки A и B совпадают (и векторная линия вектора \mathbf{a} замкнута).

Доказательство проведем методом «от противного». Допустим, что $B \neq A$ (рис. 2.4).

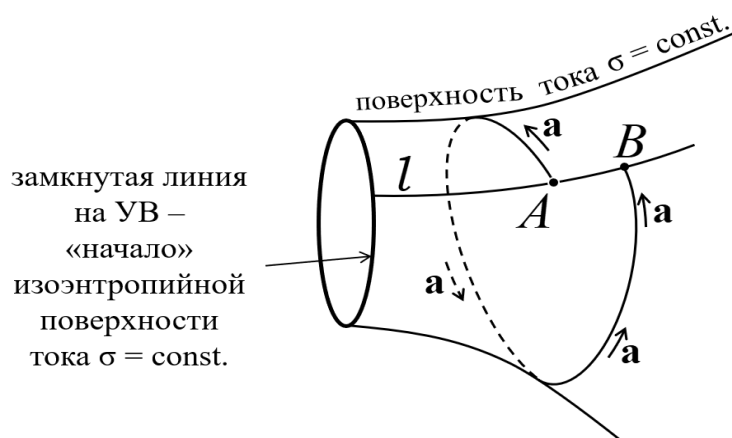


Рисунок 2.4 – Гипотетический случай $B \neq A$

Обозначим C_{BA} – часть линии тока l , заключенная между точками B и A . Вместе кривые C_{AB} и C_{BA} представляют собой контур, лежащий на поверхности $\sigma = \text{const}$ и один раз охватывающий линию нулевой завихренности. Выше было показано (лемма 1), что циркуляция скорости \mathbf{V} по такому контуру равна нулю. С другой стороны, на C_{AB} скорость \mathbf{V} ортогональна \mathbf{a} (и, следовательно, вклад в циркуляцию на этой части контура равен нулю), а на C_{BA} скорость \mathbf{V} не равна нулю и параллельна l , что означает ненулевой вклад в циркуляцию. Следовательно, циркуляция по контуру не равна нулю. Полученное противоречие означает, что предположение $B \neq A$ ошибочно. Поэтому $B = A$, и рассматриваемая векторная линия \mathbf{a} замкнута. Замкнутость линий вектора \mathbf{a} доказана.

Замечание. Векторная линия \mathbf{a} , начавшись в точке A , может заканчиваться или на УВ, или ниже по течению на границе области G_0 , не пересекая второй раз линию тока l . Существование такой линии не противоречит возможности построения системы ортогональных криволинейных координат на изоэнтропийной поверхности $\sigma = \text{const}$, в которой линии тока являются координатными линиями. Результат данного раздела опубликован в [67].

2.5 Завихренность на поверхности тела при осесимметричном обтекании с отошедшей ударной волной

В данном разделе продолжается рассмотрение течения с отошедшей УВ при однородном сверхзвуковом набегающем потоке. В таком течении выполняется уравнение (1.1). В отличие от предыдущих разделов, исследуется не общий пространственный случай, а осесимметричное обтекание тела вращения.

Свойства завихренности на дозвуковой стороне отошедшей УВ представляются достаточно изученными [105–107, 109–112]. Однако вопрос о завихренности на поверхности обтекаемого тела решен только для плоских симметричных течений. Л. Крокко в 1937 году получил инварианты линий тока для плоских и осесимметричных изоэнергетических (но, возможно, небаротропных) течений [113]. Эти инварианты сохраняются на таком участке линий тока, который не пересекается каким-либо скачком уплотнения. Для плоского течения инвариантом линии тока является отношение завихренности к давлению: $I_1 = \frac{\Omega}{p}$, а для осесимметричного – отношение завихренности к произведению давления на расстояние до оси симметрии: $I_2 = \frac{\Omega}{pr}$. Поэтому если в плоском изоэнергетическом течении завихренность равна нулю в какой-либо точке, то в силу инвариантности величины $I_1 = \frac{\Omega}{p}$ завихренность равна нулю на всей линии тока, проходящей через эту точку [114]. В случае плоского обтекания симметричного тела однородным сверхзвуковым потоком с отошедшей ударной волной (отошедшим скачком уплотнения) завихренность на поверхности тела равна нулю, поскольку на участке линии торможения, расположенном между УВ и передней точкой торможения, завихренность равна нулю в силу симметрии, и эта линия в точке торможения разделяется на две линии, проходящие по поверхности тела. На других линиях тока сохраняется величина I_1 . Поэтому завихренность отлична от нуля и изменяется пропорционально давлению. В

осесимметричном случае инвариант $I_2 = \frac{\Omega}{pr}$ не определен на оси симметрии, и поэтому приведенное выше рассуждение непригодно для получения информации о завихренности на обтекаемом теле. В данном разделе обнаруживается связь завихренности на обтекаемом теле с кривизной УВ в лидирующей точке.

Выражение для инварианта $I_2 = \frac{\Omega}{pr}$ в точках оси симметрии имеет неопределенность вида $0/0$. Раскроем эту неопределенность для осесимметричного обтекания тела вращения с отошедшей УВ однородным сверхзвуковым потоком газа, скорость которого параллельна оси симметрии. Линия торможения AB начинается в точке пересечения оси симметрии с УВ и заканчивается в передней точке торможения (рис. 2.5). Введем цилиндрическую систему координат r, φ и z с началом в точке A так, чтобы ось Az совпала с осью симметрии течения. Пусть $\alpha(r)$ – угол между осью симметрии и касательной плоскостью к УВ, p_∞, ρ_∞ и \mathbf{V}_∞ – параметры набегающего сверхзвукового ($M > 1$) течения, а $p_s(r), \rho_s(r), \sigma_s(r)$ и $\mathbf{V}_s(r)$ – параметры течения непосредственно за УВ в точках, удаленных от оси на расстояние r .

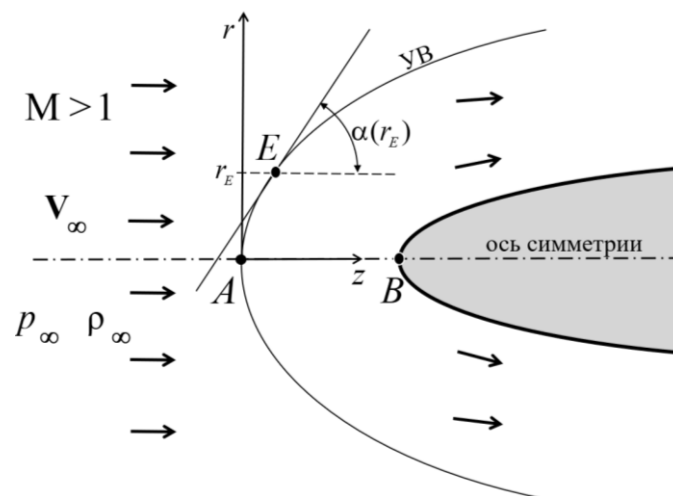


Рисунок 2.5 – Осесимметричное обтекание тела вращения с отошедшей ударной волной

Учитывая, что нормальная и касательная к УВ составляющие скорости набегающего потока равны соответственно $V_\infty \sin \alpha$ и $V_\infty \cos \alpha$, из закона сохранения массы и из неразрывности касательной составляющей скорости получим, что нормальная и касательная к УВ составляющие скорости за УВ равны $\frac{\rho_\infty V_\infty}{\rho_s} \sin \alpha$ и $V_\infty \cos \alpha$ соответственно. Поэтому закон сохранения нормальной к УВ составляющей импульса и закон сохранения энергии на УВ можно записать в виде

$$\sigma_s \rho_s^k + \rho_s \frac{\rho_\infty^2 V_\infty^2}{\rho_s^2} \sin^2 \alpha = p_\infty + \rho_\infty V_\infty^2 \sin^2 \alpha,$$

$$\frac{k}{k-1} \sigma_s \rho_s^{k-1} + \frac{V_\infty^2}{2} \cos^2 \alpha + \frac{\rho_\infty^2 V_\infty^2}{2 \rho_s^2} \sin^2 \alpha = \frac{k}{k-1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty} + \frac{V_\infty^2}{2}.$$

Продифференцируем эти уравнения по r (штрих обозначает производную по переменной r):

$$\sigma'_s \rho_s^k + k \sigma_s \rho_s^{k-1} \rho'_s - \frac{\rho_\infty^2 V_\infty^2}{\rho_s^2} \rho'_s \sin^2 \alpha + 2 \rho_\infty^2 V_\infty^2 \left(\frac{1}{\rho_s} - \frac{1}{\rho_\infty} \right) \alpha' \sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

$$\frac{k}{k-1} \sigma'_s \rho_s^{k-1} + k \sigma_s \rho_s^{k-2} \rho'_s + V_\infty^2 \left(\frac{\rho_\infty^2}{\rho_s^2} - 1 \right) \alpha' \sin \alpha \cos \alpha - \frac{\rho_\infty^2 V_\infty^2}{\rho_s^3} \rho'_s \sin^2 \alpha = 0.$$

Исключив из последних двух уравнений ρ'_s , получим выражение для σ'_s , которое после деления на r дает

$$\frac{\sigma'_s}{r} = \left\{ (k-1) \frac{(\rho_\infty - \rho_s)^2}{\rho_s^{k+1}} V_\infty^2 \sin \alpha \right\} \frac{\cos \alpha}{r} \alpha'. \quad (2.6)$$

В точке A касательная плоскость к отошедшей УВ перпендикулярна оси симметрии ($\alpha(0) = \pi/2$). Поэтому, применяя правило Лопиталья, получим, что стоящее в правой части уравнения (2.6) отношение $\frac{\cos \alpha}{r}$ стремится к $\alpha'(0) = 1/R_A$ при $r \rightarrow 0$, где R_A – радиус кривизны УВ в точке A . Следовательно,

$$\frac{\sigma'_s}{r} \rightarrow (1-k) \frac{(\rho_A - \rho_\infty)^2}{\rho_A^{k+1} R_A^2} V_\infty^2, \quad \text{при } r \rightarrow 0, \quad (2.7)$$

где ρ_A – плотность за УВ в точке A .

Градиент энтропийной функции $\nabla\sigma$ непосредственно за УВ $(\nabla\sigma)_s$ связан с производной σ'_s соотношением (точка означает скалярное произведение, штрих по-прежнему означает производную по переменной r)

$$(\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_z \operatorname{ctg} \alpha) \cdot (\nabla\sigma)_s = \sigma'_s, \quad (2.8)$$

где \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_z – единичные векторы в радиальном и осевом направлениях соответственно (рис. 2.6).

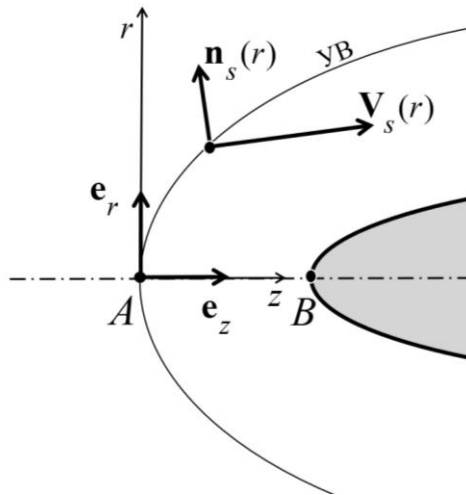


Рисунок 2.6

Пусть $\mathbf{n}_s(r)$ – единичный вектор, перпендикулярный вектору скорости \mathbf{V}_s (в точке на отошедшей ударной волне, удаленной от оси на расстояние r). Так как энтропия не меняется вдоль линии тока, и направление вектора $(\nabla\sigma)_s$ с точностью до знака совпадает с единичным вектором \mathbf{n}_s , то из равенства (2.8) следует, что

$$\left| (\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_z \operatorname{ctg} \alpha) \cdot \mathbf{n}_s \right| \left| (\nabla\sigma)_s \right| = \left| \sigma'_s \right|. \quad (2.9)$$

Учитывая гладкость и ортогональность поверхности УВ к оси симметрии в точке A , имеем $\text{ctg}\alpha \rightarrow 0$ и $\mathbf{n}_s \rightarrow \mathbf{e}_r$, при $r \rightarrow 0$. Откуда $\left| (\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_z \text{ctg}\alpha) \cdot \mathbf{n}_s \right| \rightarrow 1$, при $r \rightarrow 0$. Поэтому из (2.7) и (2.9) следует, что

$$\frac{|\nabla\sigma|_s}{r} \rightarrow (1-k) \frac{(\rho_A - \rho_\infty)^2}{\rho_A^{k+1} R_A^2} V_\infty^2, \quad \text{при } r \rightarrow 0. \quad (2.10)$$

Из уравнения (1.1) следует, что $\nabla\sigma = (k-1) \frac{\sigma\rho}{p} \mathbf{\Omega} \times \mathbf{V}$. Подставляя это выражение в (2.10) и учитывая ортогональность векторов $\mathbf{\Omega}$ и \mathbf{V} , получаем предельное значение инварианта I_2 на УВ в точке A :

$$(I_2)_s = \left(\frac{\mathbf{\Omega}}{pr} \right)_s \rightarrow \frac{V_\infty^2}{\rho_A \sigma_A V_A} \frac{(\rho_A - \rho_\infty)^2}{\rho_A^{k+1} R_A^2}, \quad \text{при } r \rightarrow 0, \quad (2.11)$$

где σ_A и V_A – энтропийная функция и скорость в точке A за УВ. Учитывая, что $\rho_A V_A = \rho_\infty V_\infty$ и используя выражение для давления в точке A за УВ $p_A = \sigma_A \rho_A^k$, представим (2.11) в виде

$$(I_2)_s = \left(\frac{\mathbf{\Omega}}{pr} \right)_s \rightarrow \frac{V_\infty}{p_A R_A^2} \frac{\rho_A}{\rho_\infty} \left(1 - \frac{\rho_\infty}{\rho_A} \right)^2, \quad \text{при } r \rightarrow 0.$$

Рассмотрим последовательность линий тока l_n , начала которых сразу за ударной волной стремятся к точке A (две такие линии l_n и l_{n+1} показаны на рисунке 2.7). С ростом n линии l_n проходят все ближе и ближе к линии тока на

поверхности тела. Как показано выше, значение инварианта $I_2 = \frac{\mathbf{\Omega}}{pr}$ на этих

линиях тока стремится к величине $\frac{V_\infty}{p_A R_A^2} \frac{\rho_A}{\rho_\infty} \left(1 - \frac{\rho_\infty}{\rho_A} \right)^2$. Поэтому в точках

поверхности тела ($r > 0$) выполнено равенство, которое представляет собой основной результат раздела:

$$\frac{\Omega}{pr} = \frac{V_\infty}{p_A R_A^2} \frac{\rho_A}{\rho_\infty} \left(1 - \frac{\rho_\infty}{\rho_A} \right)^2. \quad (2.12)$$

При использовании формулы (2.12) следует учитывать, что в точке A давление и плотность за УВ не зависят от формы тела, поскольку вычисляются через параметры набегающего потока из соотношений Ренкина – Гюгонио для прямого скачка [93]:

$$p_A = p_\infty \left(\frac{2k}{k+1} M_\infty^2 - \frac{k-1}{k+1} \right), \quad \rho_A = \rho_\infty \frac{(k+1)M_\infty^2}{2+(k-1)M_\infty^2}, \quad M_\infty^2 = k \frac{p_\infty}{\rho_\infty}. \quad (2.13)$$

Заметим, что приведенное доказательство существенно опирается на предположение о том, что участок линии тока AB имеет ненулевую длину (отошедшая ударная волна), а также на то, что УВ имеет гладкую симметричную форму.

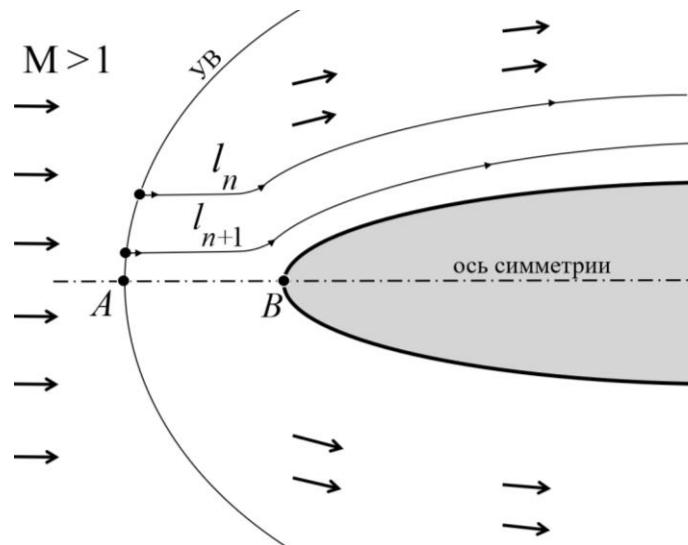


Рисунок 2.7 – Две линии l_n и l_{n+1} из последовательности линий тока, приближающихся к поверхности тела

Заключение к разделу. Показано, что отношение $\frac{\Omega}{pr}$ на поверхности тела можно вычислять по формулам (2.12) и (2.13) через параметры набегающего

потока и радиус кривизны УВ в лидирующей точке (в точке A на рисунках 2.5 и 2.7). И наоборот, радиус кривизны УВ в лидирующей точке можно вычислять через отношение $\frac{\Omega}{pr}$ в какой-либо точке на поверхности тела (кроме точки на оси симметрии) и параметры набегающего потока. Тем самым показано, что одного только факта равенства нулю завихренности в точке торможения недостаточно для вывода о нулевой завихренности на поверхности УВ.

Результат раздела опубликован в [61], где научная роль соавторов состоит в том, что они провели экспертизу новизны этого результата.

2.6 О влиянии неоднородности сверхзвукового набегающего потока на течение в окрестности передней точки торможения

Основой практически всех известных результатов теоретической аэромеханики (как и всех результатов предыдущих разделов) служит предположение о том, что набегающий на тело поток является однородным с постоянными значениями всех газодинамических параметров. Тем не менее, даже совершая полет в, казалось бы, «покоящейся» атмосфере, тело встречается с различного рода ветровыми и термодинамическими возмущениями. Еще более заметный фон возмущений характеризует поток в рабочей части аэродинамической трубы (АДТ). Даже с применением надлежащей профилировки контура, хонейкомбов, выравнивающих сеток и других «подавляющих» способов (см., например, [115, 116]) в специально разработанных малотурбулентных АДТ не удается получить поток со степенью турбулентности менее 0.05 % [115]. В большинстве же АДТ больших скоростей степень неравномерности потока в рабочей части заметно выше. Например, по числу M она составляет порядка 1 % в дозвуковом диапазоне и возрастает до $1.5 \div 2$ % при переходе к сверхзвуковым скоростям [115], когда возникшие на стенках трубы возмущения, вызванные их неровностью, выступающими элементами, перфорацией и т. п., распространяются

вниз по потоку вдоль наклонных характеристических линий (линий Маха). Они хорошо видны на рисунке 2.8 перед обтекаемой моделью при визуализации течения.

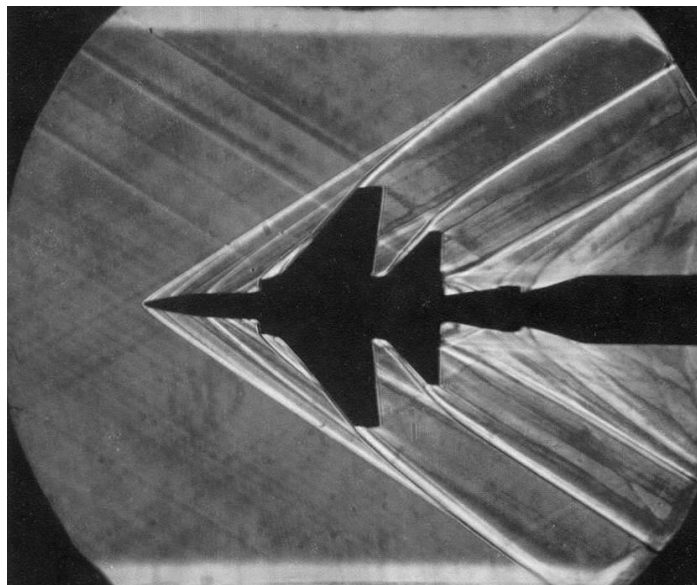


Рисунок 2.8 – Визуализация потока в сверхзвуковой АДТ [117]

Данный раздел посвящен исследованию экстремальных свойств энтропии и полного давления в существенно трехмерных течениях за отошедшей УВ перед телом произвольной формы с гладкой выпуклой носовой частью, установленным в неоднородном набегающем сверхзвуковом потоке. Даже при обтекании тела вращения под нулевым углом атаки из-за наличия возмущений набегающего потока осевая симметрия течения отсутствует. Поэтому вместо метода исследования экстремальных свойств осесимметричных течений, который использовался ранее (например, в [62]), предложен совершенно другой подход. Показывается, что малые возмущения набегающего сверхзвукового потока могут качественным образом изменить свойства течения в окрестности передней точки торможения на обтекаемом теле. В данном разделе устанавливается, что при наличии возмущений в набегающем потоке значения полного давления и энтропии в передней точке торможения могут отличаться от экстремальных. Также обнаруживаются инварианты вихревого течения вдоль линии торможения.

Исходные положения. Будем исходить из результатов, уже полученных в предыдущих разделах для случая однородного набегающего сверхзвукового потока. Будем считать установленным, что линия торможения начинается на отошедшей УВ там, где касательная плоскость к УВ перпендикулярна направлению набегающего потока, то есть совпадает с лидирующей линией (рис. 2.9). Как следствие, энтропия принимает максимальное значение на линии торможения и далее при ее разветвлении – на всей поверхности тела. Как уже отмечалось в начале данной главы, такой точки зрения придерживался академик А. А. Дородницын [4]. Профессоры В. В. Лунев [118] и Э. Г. Шифрин [83], напротив, склонялись к отрицательному ответу и допускали, что энтропия на теле не всегда максимальна.

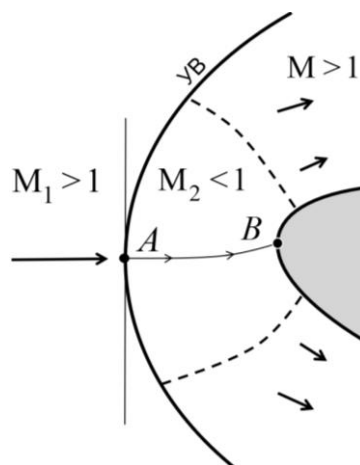


Рисунок 2.9 – Пространственное обтекание тела однородным сверхзвуковым потоком

Напомним, что обоснование максимальности энтропии на поверхности обтекаемого тела в разделе 1.2 состоит из трех этапов. На первом из них доказано, что завихренность течения обращается в нуль в точке торможения. Опираясь на это свойство, на втором этапе (подраздел «Завихренность на линии торможения» раздела 1.2) доказано, что градиент энтропии на всей линии торможения также равен нулю. На третьем этапе показано, что в дозвуковом течении за отошедшей УВ градиент энтропии может равняться нулю только на той линии тока, которая пересекает отошедшую УВ под прямым углом (на лидирующей линии тока).

Отсюда сделан вывод о совпадении линии торможения и лидирующей линий тока и, как следствие, о том, что энтропия на поверхности тела максимальна.

Однако в разделе 1.2 использовалось предположение об однородности набегающего сверхзвукового потока. Поэтому вопрос о значении энтропии и полного давления в точке торможения при неоднородном набегающем потоке требует дополнительного рассмотрения, что и будет сделано ниже в данном разделе.

Свойство параметров течения в начале линии тока с максимальной энтропией. Рассмотрим сверхзвуковое обтекание тела с гладкой выпуклой носовой частью (рис. 2.9) неоднородным потоком. Используем следующие обозначения параметров потока непосредственно перед отошедшей УВ: \mathbf{V}_1 , $V_{1n} > a_1$ – вектор скорости набегающего потока и его нормальная к УВ компонента, всегда превышающая скорость звука a_1 , $M_{1n} = V_{1n} / a_1 > 1$ – число Маха по нормальной компоненте скорости, p_1 – давление, ρ_1 – плотность. Поскольку набегающий поток неоднородный, все эти параметры вдоль УВ варьируются, включая энтропию и полную энтальпию i_0 . Как схематически показано на рисунке 2.9, за УВ с углом наклона, близким к прямому, формируется местная дозвуковая зона вихревого течения, ограниченная звуковыми поверхностями, которые ориентировочно нанесены штриховыми линиями (точные расчеты см., например, в [62]).

Давление и плотность дозвукового течения сразу за УВ обозначим через p_2 и ρ_2 соответственно. Известные соотношения Рэнкина – Гюгонио на скачке дают следующие связи:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(k+1)M_{1n}^2}{2+(k-1)M_{1n}^2}, \quad \frac{p_2}{p_1} = 1 + 2k \frac{M_{1n}^2 - 1}{k+1},$$

где k – (как и во всей диссертации) показатель адиабаты. Поэтому связаны и значения энтропийной функции $\sigma = p\rho^{-k}$ после и до УВ:

$$\sigma_2 = \sigma_1 [0.5(k+1)]^{-(k+1)} F(M_{1n}), \quad (2.14)$$

где $F(M_{1n}) = [1 + 0.5(k-1)M_{1n}^2]^k [kM_{1n}^2 - 0.5(k-1)]M_{1n}^{-2k}$.

Обозначим точку начала линии тока с максимальной энтропией на УВ $\sigma_{2\max}$ буквой E . Отметим, что в силу неоднородности набегающего потока эта точка, вообще говоря, не является лидирующей (в отличие от результата раздела 1.2). Примем ее за начало отсчета переменной длины дуги s вдоль лежащей на УВ произвольной гладкой линии l . Поскольку σ_2 в точке E принимает максимальное значение, имеем в ней $d\sigma_2/ds = 0$ или, с учетом (2.14),

$$\frac{d}{ds} \ln \sigma_1 + \frac{1}{F} \frac{dF}{dM_{1n}} \frac{d}{ds} M_{1n} = 0, \quad (2.15)$$

где

$$\frac{dF}{dM_{1n}} = k(k-1) [1 + 0.5(k-1)M_{1n}^2]^{k-1} (M_{1n}^2 - 1)^2 M_{1n}^{-2k+1}. \quad (2.16)$$

Условие (2.15) связывает меру неоднородности энтропии σ_1 вдоль любой линии l (лежащей на УВ) с производной dM_{1n}/ds , что в общем случае не может выполняться в произвольной точке. Заметим, что поскольку всегда $M_{1n}^2 > 1$, то из (2.16) следует, что dF/dM_{1n} не обращается в нуль. Поэтому, согласно (2.15), в случае неоднородного набегающего потока, в котором $d\sigma_1/ds \neq 0$, в точке E величина M_{1n} принимает значение меньше максимального, так как производная $dM_{1n}/ds \neq 0$.

Ниже условие (2.15) будет сопоставлено с необходимым условием, выполняющимся в начале линии торможения. Эти два условия окажутся несовместными, из чего последует, что линия максимальной энтропии и линия торможения различаются.

Свойство параметров течения в начале линии торможения. Исследование влияния неоднородности набегающего потока на положение начала линии торможения начнем с использования промежуточного результата

раздела 1.2, который получен в подразделе «Завихренность на линии торможения» и опирается лишь на предположение об однородности поля полной энтальпии. То есть будем исходить из того факта, что в течении с однородным полем полной энтальпии градиент энтропии на всей линии торможения равен нулю. Чтобы воспользоваться этим результатом для рассматриваемого течения с неоднородным полем полной энтальпии i_0 , применим к параметрам течения преобразование Мунка – Прима [103] и поставим ему в соответствие изоэнергетическое течение (течение с однородным полем полной энтальпии). Впервые подобный прием применил профессор А. И. Голубинский [31], что позволило ему обобщить на неизоэнтропические (неизоэнергетические) течения теорему Томсона о циркуляции, справедливую в изоэнтропическом (баротропном) случае. Здесь же с помощью инвариантного преобразования [103] устанавливается связь между неизоэнергетическим и изоэнергетическим течениями. Параметры этого нового стационарного течения с той же картиной линий тока и одинаковым распределением давления обозначим штрихом: $\mathbf{V}' = \mathbf{V}i_0^{-1/2}$, $\rho' = \rho i_0$, $p' = p$, $\sigma' = \sigma i_0^{-k}$. Форма и расположение старой и новой отошедших ударных волн также совпадают. При этом новая полная энтальпия постоянна ($i_0' \equiv 1$), а значения числа Маха остаются прежними, поэтому $M'_{1n} = M_{1n}$. Новая энтропийная функция сразу за отошедшей УВ (σ'_2), согласно (2.14), равна

$$\sigma'_2 = \sigma_1 [0.5(k+1)]^{-(k+1)} F(M_{1n}) i_0^{-k}. \quad (2.17)$$

Новая и исходная линии торможения совпадают, как и все остальные линии тока. Обозначим точку начала линии торможения буквой A . Аналогично тому, как было сделано в предыдущем подразделе, примем ее за начало отсчета переменной длины дуги s , лежащей на отошедшей УВ произвольной гладкой линии l (в отличие от плоских течений, в трехмерных течениях такие линии, проходящие через точку A , можно выбрать бесконечным числом способов). Поскольку поле новой полной энтальпии однородно, градиент энтропийной

функции σ'_2 из (2.17) на линии торможения равен нулю (раздел 1.2), откуда следует

$$\frac{d}{ds} \ln \sigma_1 + \frac{1}{F} \frac{dF}{dM_{1n}} \frac{d}{ds} M_{1n} = k \frac{d}{ds} \ln i_0. \quad (2.18)$$

Если хотя бы на одной линии l выполнено неравенство $di_0/ds \neq 0$, то равенства (2.15) и (2.18) несовместны, то есть они не могут быть выполнены в одной и той же точке. Следовательно, точки E и A расположены на УВ в разных местах (рис. 2.10). В результате приходим к основному выводу данного раздела: неоднородность поля полной энтальпии приводит к тому, что линия максимальной энтропии и линия торможения начинаются на УВ в разных точках, и в дальнейшем течении в окрестности точки торможения это разные линии тока.

Если данный вывод, сделанный при более общих условиях, соотнести с основным результатом раздела 1.2, то можно признать, что все авторы [4, 83, 118] по-своему оказались правы. Все дело заключается в наличии или отсутствии неоднородности распределения полной энтальпии набегающего сверхзвукового потока.

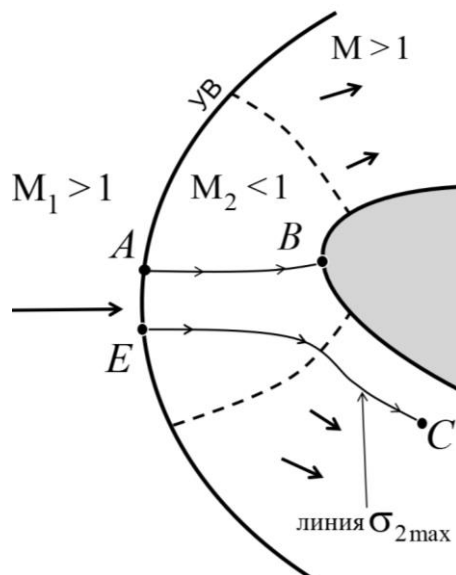


Рисунок 2.10 – Относительное расположение линии торможения AB и линии тока с максимальной энтропией EC при неоднородном набегающем потоке

Интересное следствие качественного характера состоит в существенном различии формы профилей энтропии поперек зарождающихся около точки торможения и следующих далее вдоль поверхности тела энтропийных слоев [118]. А именно при обтекании однородным потоком формируется энтропийный слой, в котором величина энтропии максимальна на стенке и монотонно убывает при удалении от нее (рис. 2.11, *a*). То же самое относится к течению около верхней поверхности тела, обтекаемого неоднородным потоком, согласно схеме, изображенной на рисунке 2.10, когда линия максимальной энтропии отклоняется вниз, а энтропия на теле меньше нее. При обтекании же неоднородным потоком профиль энтропии около нижней поверхности (рис. 2.10) немонотонный (рис. 2.11, *б*) и содержит максимум на линии максимальной энтропии, проходящей на некотором удалении от стенки, а также в некоторой ее пространственной окрестности. Вполне очевидным представляется то, что в этом случае (когда максимум находится на удалении от стенки) энтропийный слой будет иметь большую толщину, поэтому процесс его поглощения вязким пограничным слоем будет сдвинут дальше вниз по потоку по сравнению с энтропийным слоем, в котором энтропия монотонно убывает при удалении от стенки. А это, в свою очередь, повлияет на характер теплопередачи к поверхности и ее аэродинамическое нагревание, и могут появиться особенности при обтекании препятствий, расположенных на обтекаемом теле [119].

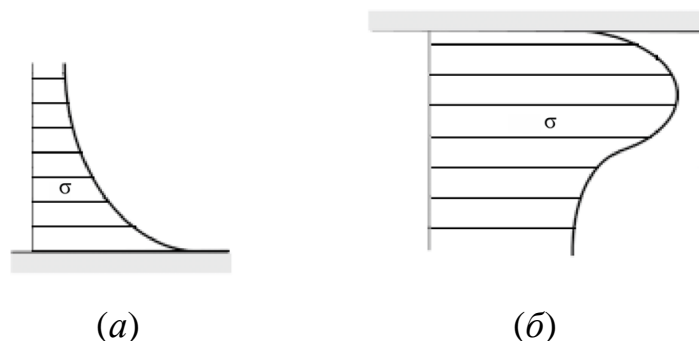


Рисунок 2.11 – Профили энтропийной функции поперек энтропийного слоя вблизи верхней (*a*) и нижней (*б*) поверхностей тела, обтекаемого неоднородным потоком по схеме рисунка 2.10. Поверхности тела обозначены серыми полосами

Свойство параметров течения в начале линии тока с минимальным полным давлением. Вернемся к исследованию исходного течения. На этот раз за начало отсчета переменной длины дуги s вдоль лежащей на УВ произвольной гладкой линии l примем точку P , в которой начинается линия тока с минимальным полным давлением p_{02} . В такой точке должно выполняться необходимое условие минимума

$$\frac{d}{ds} p_{02} = 0. \quad (2.19)$$

Как известно [1], отношение полных давлений по разные стороны УВ определяется числом M_{1n} , вычисленным по нормальной составляющей скорости и по скорости звука перед УВ:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = [0.5(k+1)]^{\frac{k+1}{k-1}} [1 + 0.5(k-1)M_{1n}^2]^{-\frac{k}{k-1}} [kM_{1n}^2 - 0.5(k-1)]^{-\frac{1}{k-1}} M_{1n}^{\frac{2k}{k-1}}.$$

С использованием введенной в (2.14) функции F это равенство переписывается следующим образом:

$$p_{02} = p_{01} [0.5(k+1)]^{\frac{k+1}{k-1}} F^{-\frac{1}{k-1}}.$$

Учитывая, что $p_{01} = [(k+1)/k]^{\frac{k}{k-1}} (i_0^k / \sigma_1)^{\frac{1}{k-1}}$, имеем

$$p_{02} = [(k+1)/k]^{\frac{k}{k-1}} (i_0^k / \sigma_1)^{\frac{1}{k-1}} [0.5(k+1)]^{\frac{k+1}{k-1}} F^{-\frac{1}{k-1}}.$$

Поэтому необходимое условие (2.19) равносильно равенству (2.18), которое несовместно с (2.15). Таким образом, неоднородность поля полной энтальпии, особенно характерная для течения в рабочей части высокоскоростных АДТ, приводит к тому, что линия максимальной энтропии и линия минимального полного давления начинаются на УВ в разных точках, и, следовательно, они представляют собой разные линии тока.

Вместе с тем, необходимые условия для линии минимального полного давления и для линии торможения совпадают. Эти условия состоят в выполнении

равенства (2.18) или эквивалентного ему равенства (2.19) для любой линии l (когда дифференцирование по s вдоль поверхности УВ проводится во всех направлениях). Поэтому если это условие выполнено в какой-то одной точке, то линия торможения и линия тока с минимальным полным давлением будут совпадать. Если УВ имеет гладкую выпуклую форму, а ее главные радиусы кривизны [120] ограничены, то при достаточной гладкости возмущенных параметров набегающего потока такая точка будет единственной, и указанные линии будут совпадать. Более подробное исследование вопроса единственности этой точки для различных вариантов возмущений набегающего потока представляет собой отдельную содержательную задачу, выходящую за рамки настоящего исследования.

Течения в рабочей части АДТ. Как отмечено выше, сверхзвуковой поток в рабочей части АДТ, набегающий на установленную в ней модель, характеризуется наличием легко заметных малых возмущений параметров течения полей скорости, плотности и давления. Вместе с тем можно считать, что поля полной энтальпии (энергии) и энтропии остаются однородными, несмотря на присутствие характеристических поверхностей (то есть предельно слабых скачков уплотнения). В этом случае равенства (2.15) и (2.18), которые должны быть выполнены в точке E начала линии тока с максимальной энтропией и в точке A начала линии торможения (а еще в точке P начала линии минимального полного давления) соответственно, становятся одинаковыми: $\frac{1}{F} \frac{dF}{dM_{1n}} \frac{d}{ds} M_{1n} = 0$. Как

замечено выше, производная $\frac{dF}{dM_{1n}}$ не обращается в нуль. Поэтому общим условием, которое должно быть выполнено в началах этих линий, будет

$$\frac{d}{ds} M_{1n} = 0. \quad (2.20)$$

Если условие (2.20) выполнено только в одной точке на отошедшей УВ (для различных линий l), то точки E , P и A совпадают, и, следовательно, на линии торможения энтропия принимает максимальное значение, а полное давление минимально. В частности, именно так обстоит дело в случае однородного

набегающего потока, когда равенство (2.20) выполнено только в лидирующей точке (где лидирующая линия тока пересекает УВ по нормали), и все три упомянутые линии совпадают с лидирующей линией тока. При сложном характере возмущений набегающего потока таких точек может быть несколько, и линия минимального полного давления, линия максимальной энтропии и линия торможения могут начинаться на УВ в разных местах и в дальнейшем различаться. Данная возможность экспериментально подтверждена испытаниями в сверхзвуковой АДТ со слабо неоднородным полем скорости набегающего потока [121]. Измерения разности полных давлений за прямым скачком и в точке торможения были проведены с высокой точностью, и дана оценка суммарной погрешности с учетом возможных источников погрешностей (которых авторами [121] выявлено девять (!)). (Отличие полного давления в передней точке торможения от его значения за прямым скачком не обнаруживалось в экспериментах, проводимых с точностью 0.5 % [122, 123].) В экспериментах [121], суммарная погрешность в которых не превышала 0.01 %, было установлено, что полное давление в передней точке торможения несколько больше, чем за прямым скачком. Этот экспериментальный факт не согласовывался с выводом раздела 1.2 о минимуме полного давления на линии торможения. Полученный в настоящем разделе теоретический результат свидетельствует о том, что в выводах работы [121] и раздела 1.2 противоречие отсутствует. Теперь можно утверждать, что точек, в которых выполнено условие (2.20), в эксперименте [121] было больше одной, что и привело к обнаруженному различию критической линии тока и линии тока с минимальным полным давлением.

Более того, можно указать на две неточности в выводах [121]. Во-первых, авторы считали, что линия максимальной энтропии и линия минимального полного давления совпадают. Во-вторых, считалось, что линия минимального полного давления совпадает с лидирующей линией. Как показано в данном разделе, оба эти утверждения носят ограниченный характер при наличии возмущений в набегающем потоке и, вообще говоря, неверны.

Инвариант линии торможения. Сначала рассмотрим обтекание тела изоэнергетическим вихревым сверхзвуковым потоком, в котором, однако, энтропийная функция σ_1 перед отошедшей УВ принимает различные значения на разных линиях тока. Течение за искривленной УВ останется изоэнергетическим, а энтропийная функция σ_2 в нем будет тем более переменной. Ниже для упрощения записи нижний индекс 2 у параметров течения за отошедшей УВ опущен. Воспользуемся еще раз выводом раздела 1.2 о том, что в изоэнергетическом течении градиент энтропии на всей линии торможения равен нулю ($\nabla\sigma=0$). Для изоэнергетического течения уравнение Эйлера в форме Крокко есть уравнение (1.1): $\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}=(k-1)^{-1}p\rho^{-1}\nabla\ln\sigma$. Из равенства $\nabla\sigma=0$ на линии торможения следует, что здесь вектор завихренности $\mathbf{\Omega}$ коллинеарен вектору скорости \mathbf{V} , и течение на линии торможения можно назвать винтовым [124–127].

Далее, вычисляя ротор обеих частей уравнения (1.1), записанного в виде $\mathbf{\Omega}\times(\rho\mathbf{V})=(k-1)^{-1}p\nabla\ln\sigma$, с учетом $\operatorname{div}\mathbf{\Omega}=\operatorname{div}(\rho\mathbf{V})=0$ на линии торможения (где $\nabla\sigma=0$) получим

$$(\rho\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{\Omega}-(\mathbf{\Omega}\cdot\nabla)(\rho\mathbf{V})=0. \quad (2.21)$$

(Левая часть (2.21) остается без изменений на всех линиях тока, а правая часть, вообще говоря, равна нулю только на линии торможения.)

В предыдущих подразделах символ s обозначал переменную длину дуги, лежащей на УВ. В настоящем подразделе s будет обозначать переменную длину дуги линии торможения, отсчитываемую от точки ее начала сразу за УВ (от точки A на рисунке 2.10). Представим скорость на линии торможения в виде $\mathbf{V}=V(s)\mathbf{e}(s)$, где $|\mathbf{e}|=1$. На всей линии торможения вектор завихренности $\mathbf{\Omega}$ коллинеарен вектору скорости \mathbf{V} , а величина скорости $V(s)$ отлична от нуля, за исключением точки торможения. Поэтому завихренность можно представить как $\mathbf{\Omega}=\Omega(s)\mathbf{e}(s)=\alpha(s)\rho(s)V(s)\mathbf{e}(s)$, где α – некоторая функция s . При этом направление возрастания длины дуги s выбрано так, что оно совпадает с

вектором \mathbf{e} . Поэтому оператор $(\mathbf{e} \cdot \nabla)$ на линии торможения будет означать дифференцирование по s , то есть $(\mathbf{e} \cdot \nabla) = \frac{d}{ds}$, и равенство (2.21) можно записать в форме

$$\rho V \frac{d}{ds}(\alpha \rho V \mathbf{e}) - \alpha \rho V \frac{d}{ds}(\rho V \mathbf{e}) = 0$$

или

$$\rho^2 V^2 \mathbf{e} \frac{d}{ds} \alpha = 0.$$

Так как на всей линии торможения, кроме точки торможения, скорость отлична от нуля, из последнего равенства имеем $\alpha = \text{const}$, то есть

$$\Omega / (\rho V) = \text{const}.$$

Это равенство дает следующий инвариант линии торможения для изоэнергетических течений.

При стационарном изоэнергетическом обтекании гладкой выпуклой носовой части на всей линии торможения завихренность коллинеарна скорости, а отношение величины завихренности к произведению скорости и плотности постоянно (кроме точки торможения, где оно не определено).

Замечание. Инвариант $\Omega / (\rho V) = \text{const}$ можно получить без использования уравнения (2.21). Поскольку для винтового течения на линии торможения величина завихренности совпадает с ее поточной составляющей (вдоль линии тока) $\Omega_V = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V}) / V$, то в левой части полученного выше равенства $\Omega / (\rho V) = \text{const}$ фактически стоит введенная в статье [128] обобщенная поточная составляющая завихренности, равная $\Omega_V / (\rho V)$. В [128] выведены соотношения, определяющие изменение обобщенной поточной составляющей завихренности вдоль произвольной линии тока изоэнтропических или изоэнергетических течений и содержащие в виде множителя тангенс угла между векторами скорости и завихренности. Второе из них, примененное на линии торможения, где угол обращается в нуль, также дает инвариант $\Omega / (\rho V) = \text{const}$.

Теперь рассмотрим общий случай, когда в набегающем сверхзвуковом потоке неоднородным может быть и поле полной энтальпии i_0 . Тогда формулы [128] уже неприменимы. Если, как и в начале раздела, к параметрам такого течения применить преобразование Мунка – Прима по формулам $\mathbf{V}' = \mathbf{V} i_0^{-1/2}$, $\rho' = \rho i_0 \sigma'$, $p' = p$, $\sigma' = \sigma i_0^{-k}$, то новое течение станет изоэнергетическим, а линии торможения нового и исходного течений будут совпадать. Учитывая, что новая завихренность равна $\boldsymbol{\Omega}' = i_0^{-1/2} \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{V} \times \nabla i_0^{-1/2}$, и используя полученный выше инвариант линии торможения для изоэнергетических течений, имеем

$$i_0^{-1/2} \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{V} \times \nabla i_0^{-1/2} = \alpha \rho \mathbf{V} i_0^{1/2}, \quad (2.22)$$

где $\alpha = \text{const}$. В данном случае течение вдоль линии торможения уже не будет винтовым. Умножая обе части уравнения (2.22) скалярно на \mathbf{V} , получим инвариант линии торможения $(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V}) = \alpha \rho \mathbf{V}^2 i_0$ для неоднородного набегающего потока: *при стационарном обтекании гладкой выпуклой носовой части неоднородным потоком на всей линии торможения отношение поточной составляющей завихренности к произведению скорости и плотности $(\boldsymbol{\Omega}_V / (\rho V) = ((\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V}) / V) / (\rho V))$ постоянно (кроме точки торможения, где это отношение не определено).*

Полученные выше инварианты представляют собой обобщение на случай неоднородного обтекания утверждения раздела 1.2 о том, что при однородном сверхзвуковом набегающем потоке завихренность на всей линии торможения равна нулю.

Завихренность в точке торможения. Как показано выше, возмущения набегающего потока приводят к качественным изменениям течения в окрестности линии торможения и точки торможения по сравнению с обтеканием однородным потоком. Однако есть одно свойство, которое остается неизменным при любых возмущениях, в том числе и при их отсутствии. Речь идет о величине завихренности в точке торможения.

Если продолжить рассмотрение нового течения (после преобразований Мунка – Прима), то, согласно разделу 1.2, в точке торможения завихренность нового течения $\Omega' = i_0^{-1/2} \Omega - \mathbf{V} \times \nabla i_0^{-1/2}$ равна нулю. Поэтому, учитывая, что в точке торможения $\mathbf{V} = 0$, имеем $\Omega = 0$. Таким образом, *при любых возмущениях набегающего сверхзвукового потока завихренность в точке торможения на поверхности тела с гладкой выпуклой носовой частью равна нулю.*

Уравнение неразрывности $\text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0$, записанное в виде $(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho) = -\text{div} \mathbf{V}$, приводит к выводу, что в точке торможения $\text{div} \mathbf{V} = 0$. Поэтому в малой окрестности точки торможения (в силу непрерывности) завихренность и $\text{div} \mathbf{V}$ малы по величине, и, следовательно, в малой окрестности точки торможения применима теория пространственных потенциальных течений несжимаемых жидкостей.

Результаты раздела опубликованы в [68] и принадлежат соискателю. Научный вклад соавтора состоит в том, что он обнаружил в научной литературе данные трубного эксперимента [121], в котором полное давление в точке торможения было выше минимального, и предложил объяснить это возмущенностью набегающего сверхзвукового потока в аэродинамической трубе (что и было сделано соискателем).

2.7 Решение задачи Дородницына для течения с плоскостью симметрии

Большинство летательных аппаратов имеют вертикальную плоскость симметрии. При нулевом угле скольжения плоскостью симметрии обладает и поле течения. В частном случае обтекания тел вращения (случай задачи Дородницына – Ладыженского) течение обладает плоскостью симметрии (не обязательно вертикальной) при любых углах атаки и скольжения. Таким образом, течения с плоскостью симметрии представляют собой важный практический

случай. Предложим решение задачи Дородницына для течения с плоскостью симметрии без представления о движении воображаемых частиц. Симметрия обеспечивает такие свойства параметров, которые облегчают исследование. Поэтому приведенное ниже доказательство представляет интерес как метод исследования небаротропных течений с плоскостью симметрии.

Воспользуемся скоростной альтернативой (раздел 2.1), полученной учениками соискателя в [108]. Для этого требуется непрерывность вторых производных параметров в области течения. Это предположение (как и в разделе 1.2) будем считать выполненным в некоторой окрестности точки торможения, включая точки этой окрестности на границе тела, в том числе и саму точку торможения.

Будем пользоваться обозначениями раздела 1.2. Точка B (рис. 1.1, a и b) есть точка растекания газа. Поэтому энтропийная функция на поверхности тела равна своему значению в точке B , и вектор $\nabla \ln \sigma$ ортогонален поверхности тела. Вместе с уравнением (1.1) это означает, что в точках поверхности тела, где $\mathbf{V} \neq 0$ (то есть всюду, кроме точки B), вектор $\mathbf{\Omega}$ лежит в касательной к поверхности тела плоскости. Из непрерывности $\mathbf{\Omega}$ следует, что в точке B вектор $\mathbf{\Omega}$ также лежит в касательной к поверхности тела плоскости. Поэтому если предположить, что $\mathbf{\Omega}(B) \neq 0$, то через точку B должен проходить отрезок вихревой линии (завихренность $\mathbf{\Omega}$ на этом отрезке отлична от нуля), лежащий на поверхности тела. Но на такой линии есть точка торможения и точки со скоростью, отличной от нуля (все остальные точки отрезка вихревой линии), что противоречит скоростной альтернативе (раздел 2.1).

Поэтому предположение $\mathbf{\Omega}(B) \neq 0$ приводит к противоречию. Следовательно, $\mathbf{\Omega}(B) = 0$. Этот вывод получен без использования свойств течения, вытекающих из наличия плоскости симметрии, и без представления о движении воображаемых частиц (то есть без использования критерия Зоравского, знакомого только узкому кругу специалистов).

Далее будем рассматривать течение, в котором обтекаемое тело симметрично относительно некоторой плоскости, которая параллельна скорости

однородного сверхзвукового набегающего потока \mathbf{V}_0 . Расположим прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ так, чтобы плоскость симметрии течения совпала с плоскостью Oxy , то есть с плоскостью $z=0$. Обозначим: u , v и w – компоненты скорости газа \mathbf{V} в системе $Oxyz$; \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} – единичные базисные векторы этой системы (\mathbf{k} направлен в положительном направлении оси z , а $\mathbf{V}_0 = u_0 \mathbf{i}$). В силу симметрии течение за отошедшей УВ будет симметричным:

$$p(x, y, -z) = p(x, y, z), \quad \rho(x, y, -z) = \rho(x, y, z), \quad (2.23)$$

$$u(x, y, -z) = u(x, y, z), \quad v(x, y, -z) = v(x, y, z), \quad (2.24)$$

$$w(x, y, -z) = -w(x, y, z) (\Rightarrow w(x, y, 0) = 0). \quad (2.25)$$

Завихренность на линии торможения. Как и в разделе 2.1, представим уравнение (1.1) в виде $(p^{-1}\mathbf{\Omega}) \times (\rho\mathbf{V}) = (k-1)^{-1} \nabla \ln \sigma$. Применение операции ротора к этому уравнению с учетом уравнения неразрывности и тождества $\text{div}\mathbf{\Omega} = 0$ дает

$$\rho(\mathbf{V} \cdot \nabla)(p^{-1}\mathbf{\Omega}) - \left((p^{-1}\mathbf{\Omega}) \cdot \nabla \right) (\rho\mathbf{V}) + \rho\mathbf{V} \left((p^{-1}\mathbf{\Omega}) \cdot \nabla \ln p \right) = 0. \quad (2.26)$$

В силу симметрии линия торможения и точка торможения лежат на плоскости симметрии ($z=0$). Упростим уравнение (2.26) для точек на плоскости симметрии (и для точек на линии торможения).

Из равенств (2.23) – (2.25) следует, что на плоскости симметрии выполняются шесть равенств

$$\partial\rho/\partial z = \partial p/\partial z = \partial u/\partial z = \partial v/\partial z = \partial w/\partial x = \partial w/\partial y = 0.$$

Поэтому на плоскости симметрии

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega}(x, y, 0) &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \\ &= (0 - 0) \mathbf{i} + (0 - 0) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Следовательно, на плоскости симметрии и на линии торможения $\mathbf{\Omega} = \Omega \mathbf{k}$, где $\Omega = |\mathbf{\Omega}|$, и $(\mathbf{\Omega} \cdot \nabla) = \Omega (\mathbf{k} \cdot \nabla) = \Omega \frac{\partial}{\partial z}$. Поэтому

$(p^{-1} \mathbf{\Omega}) \cdot \nabla \ln p = p^{-1} (\mathbf{\Omega} \cdot \nabla) \ln p = p^{-1} \Omega \frac{\partial}{\partial z} \ln p = 0$, что означает равенство нулю последнего слагаемого (2.26).

Учитывая, что $\partial \rho / \partial z = \partial p / \partial z = \partial u / \partial z = \partial v / \partial z = 0$, упростим второе слагаемое (2.26):

$$\begin{aligned} \left((p^{-1} \mathbf{\Omega}) \cdot \nabla \right) (\rho \mathbf{V}) &= p^{-1} (\mathbf{\Omega} \cdot \nabla) (\rho \mathbf{V}) = p^{-1} \Omega \frac{\partial}{\partial z} (\rho \mathbf{V}) = p^{-1} \rho \Omega \frac{\partial}{\partial z} (u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + w \mathbf{k}) = \\ &= (p^{-1} \rho \Omega \frac{\partial w}{\partial z}) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Поскольку на плоскости симметрии $w(x, y, 0) \equiv 0$, то оператор $(\mathbf{V} \cdot \nabla) = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$, примененный на плоскости симметрии (где $\mathbf{\Omega} = \Omega \mathbf{k}$) к вектору $p^{-1} \mathbf{\Omega}$, дает $\left(u \frac{\partial}{\partial x} (p^{-1} \Omega) + v \frac{\partial}{\partial y} (p^{-1} \Omega) \right) \mathbf{k}$. Следовательно, первое слагаемое (2.26) на плоскости симметрии имеет вид

$$\rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) (p^{-1} \mathbf{\Omega}) = \left[\rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) (p^{-1} \Omega) \right] \mathbf{k}.$$

В итоге получается, что векторное уравнение (2.26) на плоскости симметрии равносильно скалярному уравнению

$$\rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) (p^{-1} \Omega) - p^{-1} \rho \Omega \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

или

$$\rho p^{-1} (\mathbf{V} \cdot \nabla) \Omega - \Omega \rho p^{-2} (\mathbf{V} \cdot \nabla p) - \Omega \rho p^{-1} \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Во всех точках линии AB (рис. 1.1, a и b), кроме точки B , скорость \mathbf{V} отлична от нуля, и, следовательно, $\mathbf{V} = V \mathbf{e}$, где $\mathbf{e} = \mathbf{V} / |\mathbf{V}|$, $V = |\mathbf{V}|$, $|\mathbf{e}| = 1$. В этих точках последнее уравнение равносильно уравнению

$$(\mathbf{e} \cdot \nabla) \Omega = \Omega \left(p^{-1} (\mathbf{e} \cdot \nabla p) + V^{-1} \partial w / \partial z \right).$$

Если l – переменная длина дуги на линии AB (величина l отсчитывается от точки A), то последнее уравнение суть обыкновенное дифференциальное уравнение для величины завихренности Ω , рассматриваемой в качестве функции от l : $\frac{d}{dl}\Omega = \Omega(p^{-1}(\mathbf{e} \cdot \nabla p) + V^{-1}\partial w/\partial z)$, где множитель $(p^{-1}(\mathbf{e} \cdot \nabla p) + V^{-1}\partial w/\partial z)$ можно считать некоторой заданной функцией переменной l . Следовательно, для любой точки $C \neq B$, лежащей на линии AB ,

$$\Omega(C) = \Omega(A) \exp\{I(C)\}, \quad (2.27)$$

где $I(C) = \int_{AC} \left(p^{-1}(\mathbf{e} \cdot \nabla p) + V^{-1}\partial w/\partial z \right) dl$ – криволинейный интеграл вдоль линии

AB от точки A до точки C . Подынтегральная функция есть сумма двух слагаемых. Первое слагаемое $p^{-1}(\mathbf{e} \cdot \nabla p)$ ограничено, так как давление отграничено от нуля. При этом второе слагаемое $V^{-1}\partial w/\partial z$ может быть не ограничено в окрестности точки B , где $V = 0$. Передняя точка торможения B является точкой растекания. В некоторой пространственной окрестности точки B линии тока, проходящие рядом с линией торможения и находящиеся вне плоскости симметрии, также растекаются вблизи поверхности тела, удаляясь от плоскости симметрии. Поэтому из симметрии следует, что в некоторой пространственной окрестности точки B выполняются неравенства: $w \leq 0$ – при $z \leq 0$, и $w \geq 0$ – при $z \geq 0$. Таким образом, в этой окрестности на линии AB выполняется неравенство $V^{-1}\partial w/\partial z \geq 0$. Это значит, что несобственный интеграл

$$I(B) = \int_{AB} \left(p^{-1}(\mathbf{e} \cdot \nabla p) + V^{-1}\partial w/\partial z \right) dl \text{ или сходится, или расходится к } +\infty.$$

Если предположить, что $\Omega(A) \neq 0$, то, согласно (2.27), случаю $I(B) = +\infty$ соответствует бесконечная завихренность в точке B (уравнение (2.27) верно на всей линии торможения, за исключением точки B , но завихренность, как и остальные параметры течения, непрерывна на всей линии торможения без исключения). Это противоречит полученному выше выводу о нулевой завихренности в точке B . Поэтому или $\Omega(A) = 0$, или интеграл $I(B)$ сходится. В

первом случае из (2.27) следует, что завихренность $\Omega=0$ на всей линии торможения. Во втором случае $\Omega(B)=\lim_{C \rightarrow B} \Omega(C)$, где C приближается к B по линии торможения. То есть $\Omega(B)=\Omega(A)\exp\{I(B)\}$, где $0 < \exp\{I(B)\} < +\infty$. Учитывая, что $\Omega(B)=0$, снова приходим к выводу, что $\Omega(A)=0$, и, согласно (2.27), завихренность $\Omega=0$ на всей линии торможения. Таким образом, получен следующий результат.

Завихренность Ω и градиент энтропийной функции $\nabla\sigma$ в течении с плоскостью симметрии равны нулю во всех точках линии торможения, включая точку ее начала на отошедшей ударной волне.

В частности, это значит, что $\nabla\sigma(A)=0$. Дальнейшее доказательство повторяет финальную часть доказательства раздела 1.2. Обозначим: A' – точка на УВ, в которой касательная к УВ плоскость перпендикулярна направлению набегающего потока (A' – начало лидирующей линии тока за УВ, лидирующая точка отошедшей УВ). Параметры течения на разных сторонах УВ связаны условиями на косом скачке уплотнения [93, 102]. Из этих условий и из того, что УВ вблизи носовой части имеет искривленную выпуклую форму, следует, что $\nabla\sigma$ на поверхности УВ равен нулю только в точке A' . Итак, A' – единственная точка на УВ, где $\nabla\sigma=0$, а энтропия максимальна на линии тока, начинающейся в этой точке. Выше было показано, что $\nabla\sigma(A)=0$. Поэтому точка A совпадает с точкой A' . Таким образом, приходим к основному результату.

В течениях с отошедшей УВ при обтекании тел с гладкой выпуклой носовой частью при наличии плоскости симметрии течения линия торможения совпадает с лидирующей линией (то есть начинается там, где касательная к УВ плоскость перпендикулярна скорости набегающего потока (рис. 1.1, а и б)), а энтропия принимает максимальное значение на линии торможения и на поверхности тела. При этом завихренность на всей линии торможения равна нулю.

Приведенное доказательство опубликовано в [80].

Заметим, что, в отличие от общего пространственного случая, в течении с плоскостью симметрии завихренность равна нулю на всей линии торможения при любом изоэнергетическом обтекании (а не только в течении за отошедшей УВ).

2.8 Заключение к главе 2

Установлено, что завихренность равна нулю на всей линии торможения за отошедшей УВ. Приведены два доказательства этого факта.

Первое доказательство достаточно сложное. Кроме того, в нем используется критерий Зоравского, знакомый только узкому кругу специалистов. Второе, более простое доказательство построено для частного, но практически важного случая течения с плоскостью симметрии (такое течение имеет место, в частности, при обтекании тела вращения). Это доказательство можно использовать в курсах лекций по аэромеханике, поскольку оно достаточно простое и короткое.

Для качественного анализа вихревых течений представляется полезной полученная в главе вихревая альтернатива (верная не только для течений за отошедшей УВ).

Если на некотором отрезке линии тока стационарного изоэнергетического течения идеального газа с дважды непрерывно дифференцируемыми параметрами скорость не обращается в нуль, то величина завихренности $|\Omega|$ либо тождественно равна нулю на этом отрезке линии тока, либо на всем отрезке $|\Omega| \neq 0$.

В общем пространственном случае для течения за отошедшей УВ при однородном набегающем потоке решен вопрос о замкнутости вихревых линий и векторных линий векторного произведения скорости и градиента энтропийной функции. С использованием представления о движении воображаемых частиц доказано, что вихревые линии замкнуты и один раз охватывают линию торможения. Также доказано, что циркуляция скорости по любому контуру, лежащему на изоэнтропийной поверхности, равна нулю. Из чего, в свою очередь,

получено, что векторные линии векторного произведения скорости и градиента энтропийной функции либо начинаются и заканчиваются на УВ, либо замкнуты и один раз охватывают линию торможения.

Для осесимметричных течений за отошедшей УВ показано, что при фиксированных параметрах сверхзвукового набегающего потока величина инварианта Крокко на поверхности тела обратно пропорциональна квадрату радиуса кривизны УВ в лидирующей точке (формула (2.12)).

Также в главе показано, что по сравнению со случаем однородного набегающего потока наличие даже малой неоднородности в скорости и в полной энтальпии набегающего сверхзвукового потока приводит к качественной перестройке пространственного течения в окрестности передней точки торможения (в которую приходит линия торможения). В результате энтропия в точке торможения оказывается меньше, чем на линии тока с максимальной энтропией, проходящей вне поверхности тела. Профиль энтропии поперек зарождающегося энтропийного слоя оказывается немонотонным и содержит максимум на некотором удалении от стенки, в отличие от монотонно убывающей энтропии при однородном набегающем сверхзвуковом потоке. Экспериментальные наблюдения, в которых полное давление в точке торможения было больше минимального в течении за отошедшей УВ, получили теоретическое объяснение. Это становится возможным в течении за отошедшей УВ при неоднородном набегающем потоке благодаря «разделению» линии минимального полного давления и линии торможения. Полученные результаты следует принимать во внимание при переносе данных трубного эксперимента на условия полета в свободной атмосфере, где уровень неоднородности обычно ниже.

Установлено, что при любых возмущениях набегающего сверхзвукового потока завихренность в точке торможения равна нулю.

Глава 3 Лагранжев взгляд на эволюцию завихренности в однородных жидкостях

3.1 Скорость Фридмана

Настоящий раздел следует рассматривать как продолжение подраздела введения, посвященного закономерностям второго типа.

Движение идеальной баротропной жидкости или газа иногда удобнее рассматривать, исходя из понятия завихренности, а не скорости. Действительно, для таких течений справедливы теоремы Гельмгольца [95]. Следуя [95], под жидкостью будем понимать как жидкость, так и газ, имея в виду, что жидкость может быть сжимаемой.

А. «В потенциальном поле массовых сил частицы идеальной баротропной (в частности, несжимаемой) жидкости, составляющие вихревую линию в некоторый момент времени, во все время движения составляют вихревую линию».

Б. «В потенциальном поле массовых сил интенсивность любой вихревой трубки во все время движения идеальной баротропной жидкости остается постоянной».

Лагранжев взгляд на эволюцию завихренности в таких течениях состоит в том, что вихревые трубки можно считать «вмороженными» в жидкость (поскольку они переносятся со скоростью жидкости). Поэтому в области течения, в которой нет разрывов полей скорости \mathbf{V} и завихренности, поле завихренности меняется непрерывно по времени – эволюционирует.

В [92] замечено, что если поперечное сечение вихревой трубки стягивается в точку, то в пределе получается вихревая линия. Поэтому обе теоремы Гельмгольца можно сформулировать в виде одной теоремы, не упоминая в явном виде вихревые линии: течение невязкой баротропной жидкости в потенциальном поле массовых сил таково, что частицы жидкости, составляющие вихревую

трубку в некоторый момент времени, продолжают составлять вихревую трубку той же интенсивности во все время движения.

Для вязких или небаротропных течений в общем случае описанная выше картина неверна: вихревые трубки не переносятся вместе с частицами жидкости. Другой лагранжев взгляд на эволюцию завихренности таких течений был предложен в [16]. Он состоит в рассмотрении наряду с течением реальной жидкости другой воображаемой жидкости, частицы которой переносят вихревые трубки, сохраняя их интенсивность (в случае плоскопараллельных течений вязкой несжимаемой жидкости в [16] было получено выражение такой скорости). Все полученные в настоящей главе результаты берут свое начало в работе [16], в которой соискатель получил выражение для скорости воображаемых частиц, а соавтор привел примеры, показывающие, что эта скорость в общем случае не коллинеарна скорости жидкости.

Для описания эволюции завихренности в терминах течения воображаемой жидкости в [10] было введено понятие *скорости Фридмана*.

Непрерывно дифференцируемое векторное поле $\mathbf{U}_a = \mathbf{U}_a(x, y, z, t)$ называется *скоростью Фридмана* для дважды непрерывно дифференцируемого соленоидального поля $\mathbf{a} \neq 0$, если выполняется равенство (уравнение Фридмана [9, 10, 95])

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{U}_a \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{U}_a + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{U}_a = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{U}_a) = 0. \quad (3.1)$$

Данное определение оставляет открытым вопрос о существовании и единственности скорости Фридмана для соленоидального векторного поля \mathbf{a} . Уравнение Фридмана (3.1) отличается от известного уравнения Гельмгольца – Фридмана [1]

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{\Omega} - (\mathbf{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \mathbf{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \quad (3.2)$$

Отличие уравнений (3.1) и (3.2) состоит в том, что в уравнении Фридмана скорость \mathbf{U}_a может не совпадать со скоростью жидкости \mathbf{V} , а векторное поле \mathbf{a} может отличаться от завихренности $\mathbf{\Omega}$. Так, например, ниже в разделах 3.5 и 3.6 в

качестве вектора \mathbf{a} будут рассматриваться отдельно роторы окружной и меридиональной составляющих скорости \mathbf{V} в закрученных осесимметричных течениях.

Кинематический смысл \mathbf{U}_a вытекает из теоремы Фридмана, формулировку и доказательство которой можно найти в [9, 95]. Приведем эквивалентную формулировку с использованием понятия скорости Фридмана. Существование в пространственной области в течение некоторого времени скорости Фридмана $\mathbf{U}_a = \mathbf{U}_a(x, y, z, t)$ для поля \mathbf{a} равносильно возможности рассматривать эволюцию поля \mathbf{a} как перемещение его векторных трубок, при котором сохраняются их интенсивности, вместе с некоторой средой, движущейся со скоростью \mathbf{U}_a .

Замечание. По умолчанию, если не указано векторное поле \mathbf{a} , это поле \mathbf{a} считают совпадающим с полем завихренности. Это замечание согласовывает определения скорости Фридмана в этом разделе и во введении к диссертации (то есть $\mathbf{U} = \mathbf{U}_\Omega$).

Следует отличать скорость Фридмана от скорости распространения завихренности (СРЗ). Это скорость движения фронта – поверхности раздела между вихревой и безвихревой зонами течения. Заметим, что для ньютоновской жидкости с гладкими параметрами течения СРЗ равна бесконечности, что выглядит нефизично. Поэтому в некоторых задачах может потребоваться изменение реологической модели. В работе [129] показано, что для получения конечной СРЗ достаточно применения модели вязкоупругой жидкости Максвелла [1], и получено точное выражение СРЗ через параметры этой модели.

Также следует отличать скорость Фридмана \mathbf{U}_Ω от скорости переноса завихренности \mathbf{U}_T . Если последняя существует, то выполнено уравнение переноса $\frac{\partial \Omega}{\partial t} + (\mathbf{U}_T \cdot \nabla) \Omega = 0$, которое в общем случае не равносильно уравнению Фридмана. Хотя в частном случае плоскопараллельного движения идеальной несжимаемой жидкости ее скорость является одновременно и скоростью Фридмана для завихренности, и скоростью переноса завихренности.

Согласно теоремам Гельмгольца, в баротропных течениях идеальной жидкости существует по крайней мере одна скорость Фридмана для завихренности, а именно $\mathbf{U}_\Omega = \mathbf{V}$. А упомянутые во введении к диссертации скорости \mathbf{U}_Ω (во введении эти скорости обозначались символом \mathbf{U}) для плоскопараллельных и незакрученных осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости [16, 17] можно представить одной общей формулой

$$\mathbf{U}_\Omega = \mathbf{V} - \nu \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \text{rot } \boldsymbol{\Omega}}{\Omega^2},$$

где ν – кинематический коэффициент вязкости.

Поясним роль скорости Фридмана в бессеточных методах на примере метода вязких вихревых доменов (ВВД). Опишем в общих чертах суть метода ВВД на примере безграничного объема, не затрагивая важные проблемы учета граничных условий и поверхностей разрыва, а также не затрагивая проблему восстановления поля давления по полю скорости жидкости.

В основе метода вязких вихревых доменов, как и в основе других вихревых методов, лежит интегральное представление поля скорости через поле завихренности – формула Био – Савара. А также точка зрения Лагранжа, основанная на возможности вычислять скорость Фридмана. При численной реализации в процессе вычисления «отслеживают» положение конечного числа «осей» вихревых трубок – вихревых нитей, которые имеют интенсивности своих трубок. Поле скорости, индуцированное соответствующими вихревыми нитями, приближенно совпадает с полем скорости течения \mathbf{V} . Предполагается, что чем мельче разбито пространство на вихревые трубки, тем лучше совпадение. На расчетном шаге по времени точки вихревых нитей сдвигают со скоростью Фридмана \mathbf{U} и считают, исходя из определения \mathbf{U} , что интенсивность каждой нити не изменилась. Отметим, что нити не только сдвигаются, но и, вообще говоря, меняют свою форму. В результате получают новое положение вихревых нитей известной интенсивности. Затем восстанавливают новое поле скорости \mathbf{V} с помощью численного интегрирования по формуле Био – Савара. После этого приступают к следующему расчетному шагу.

Из этого краткого описания видно, что метод применяется только для тех течений, для которых известны выражения скорости Фридмана. Для вязкой несжимаемой жидкости до начала работы над диссертацией такие выражения были известны только для плоскопараллельных и незакрученных осесимметричных течений.

Настоящая глава посвящена вопросам существования и единственности скорости Фридмана для завихренности в общем пространственном случае и поиску способов вычисления этой скорости; поиску новых лагранжевых взглядов на эволюцию завихренности.

3.2 О существовании и гладкости решения вспомогательной задачи

В следующем разделе при доказательстве существования скорости Фридмана будет использоваться факт существования и непрерывности вторых пространственных производных решения задачи с линейным неоднородным уравнением в частных производных (ЛНУ). В настоящем разделе эта вспомогательная задача названа задачей I и сформулирована без использования гидродинамических терминов. В частности, символ σ означает плоскую область, а не энтропийную функцию (как это имеет место в других местах диссертации). В известных соискателю учебниках и монографиях нет теорем, позволяющих утверждать, что из непрерывности вторых производных коэффициентов и правой части ЛНУ следует непрерывность вторых производных решения задачи. Наиболее близкими из известных утверждений можно считать теоремы существования и единственности, доказанные в [98, гл. VIII] для задачи с гладким решением. Однако утверждения [98] не дают ответа на вопрос о непрерывности вторых пространственных производных решения. Устранению этого пробела посвящен настоящий раздел. Там, где это возможно, используются «готовые» теоремы из различных курсов обыкновенных дифференциальных уравнений.

Постановка задачи I. Пусть $Ox_1x_2x_3$ – прямоугольная декартова система координат, G – ограниченная пространственная область, содержащая точку O , $\bar{\sigma} \subset G$ – замыкание плоской области σ , лежащее в плоскости $x_3 = 0$. Пусть далее в замыкании области G заданы дважды непрерывно дифференцируемые скалярное поле $F = F(x_1, x_2, x_3)$ и векторное поле $\mathbf{e} = \mathbf{e}(x_1, x_2, x_3) = ((e_1(x_1, x_2, x_3), e_2(x_1, x_2, x_3), e_3(x_1, x_2, x_3)))$ такое, что $|\mathbf{e}| = 1$ во всей области G и \mathbf{e} пересекает $\bar{\sigma}$ под ненулевым углом, то есть

$$e_3(x_1, x_2, 0) \neq 0 \text{ при } (x_1, x_2, 0) \in \bar{\sigma}. \quad (3.3)$$

Обозначим через $L = (\mathbf{e} \cdot \nabla) = e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$ линейный дифференциальный оператор и рассмотрим уравнение

$$Lu = F(x_1, x_2, x_3), \quad (3.4)$$

где $u = u(x_1, x_2, x_3)$. Задача I заключается в нахождении дважды непрерывно дифференцируемого хотя бы в какой-нибудь трехмерной области, содержащей σ , решения уравнения (3.4) такого, что

$$u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2) \text{ при } (x_1, x_2, 0) \in \sigma, \quad (3.5)$$

где u_0 – заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Цель настоящего раздела – доказать, что решение задачи I существует и единственно.

Вспомогательная задача II. Перед тем, как приступить к исследованию задачи I, установим некоторые свойства решения вспомогательной задачи II. Она состоит в поиске трехпараметрического семейства решений

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t - t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = \left((x_1(t - t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}), x_2(t - t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}), x_3(t - t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})) \right)$$

(t – время, $t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$ – параметры) нормальной автономной системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{e}(\mathbf{x}) \quad (3.6)$$

(точка обозначает дифференцирование по времени t), определенного в некотором (заранее не известном) интервале времени $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, где $\delta > 0$, и удовлетворяющего начальным условиям

$$\mathbf{x}(t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, 0) \in \sigma. \quad (3.7)$$

Замечание. Чтобы не вводить промежуточных обозначений, при формулировке задачи II было сразу учтено, что, поскольку ϵ не зависит от времени, само время t и параметр t_0 должны входить в решение в виде их разности $t - t_0$.

При каждом конкретном наборе параметров $(t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ для задачи II (то есть для задачи (3.6), (3.7)) выполняются условия теоремы существования и единственности [99, § 21]. Решение существует для $t \in (t_0 - \tilde{\delta}, t_0 + \tilde{\delta})$, где $\tilde{\delta} > 0$ зависит в общем случае от набора параметров $(t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$. По условию компоненты ϵ дважды непрерывно дифференцируемы в ограниченной замкнутой области \bar{G} . Поэтому они сами и их производные ограничены в \bar{G} . Следовательно, повторяя, например, доказательство [99, § 21], можно убедиться в существовании числа $\delta > 0$ такого, что $\tilde{\delta} > \delta$ для всех параметров $(t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$, где $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, 0) \in \sigma$. Другими словами, существует такое число $\delta > 0$, что для всех значений параметров из области $K_0 = \left\{ (t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) : t_0 \in \mathbb{R}, (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, 0) \in \sigma \right\}$ решение задачи II существует и единственно для всех $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Непрерывность вторых производных компонент решения задачи II по параметрам и по времени. В этом подразделе наряду с областью $K_0 \subset \mathbb{R}^3_{t_0 x_1^{(0)} x_2^{(0)}}$ для каждого фиксированного значения t_0 будем рассматривать область

$$K = \left\{ (t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) : t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta), (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, 0) \in \sigma \right\} \subset \mathbb{R}^3_{t x_1^{(0)} x_2^{(0)}}.$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. В области K вторые (в том числе и смешанные) производные компонент $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t - t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ по t и по параметрам $x_1^{(0)}$ и $x_2^{(0)}$ существуют и непрерывны.

Эта лемма вытекает из известных теорем [97, 99, 130]. Действительно, поскольку \mathbf{e} не зависит от времени, первые и вторые частные производные по времени, а также смешанные производные вида $\frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial t \partial x_i}$ и $\frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial x_i \partial t}$, $i = \overline{1, 3}$, равны нулю (следовательно, существуют и непрерывны). Вместе с непрерывностью вторых производных \mathbf{e} по координатам это позволяет применить в области K_0 теорему [130, гл. VII]. Приведем формулировку этой теоремы. В формулировке под f_i следует понимать компоненты \mathbf{e} (то есть e_i). Остальные оригинальные обозначения для удобства читателя изменены на используемые в настоящем разделе.

Теорема [130, гл. VII]. Если функции $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ допускают m непрерывных частных производных по совокупности переменных x_1, x_2, \dots, x_n , то решения задачи II имеют все частные производные m -го порядка по $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ и те производные m -го порядка по $t_0, x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$, где дифференцирование по t_0 входит один раз; если, кроме того, f_i допускают $p - 1$ непрерывных производных по t ($p \leq m$), то решения имеют все производные m -го порядка по $t_0, x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$, в которых дифференцирование по t_0 производится не более p раз.

Из этой теоремы следует, что в K_0 существуют всевозможные вторые производные компонент $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t - t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ по параметрам $(t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$. Поскольку для всех компонент решения существование производной по t_0 означает существование производной по t (и эти производные равны со знаком минус), то в K существуют всевозможные вторые производные компонент \mathbf{x} по

t и по параметрам $x_1^{(0)}$ и $x_2^{(0)}$. В курсе [97] доказано, что при этом всевозможные вторые производные по координатам $x_1^{(0)}$ и $x_2^{(0)}$ непрерывны в K (теорема 5.2.2 упомянутого курса). А в курсе [99] доказано, что смешанные производные $\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t \partial x_i^{(0)}}$ и $\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial x_i^{(0)} \partial t}$, $i=1,2$, непрерывны в K (теорема 17 в [99]). Таким образом,

осталось доказать непрерывность $\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2}$.

Зафиксируем t_0 и будем рассматривать $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t-t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ как функцию трех переменных t , $x_1^{(0)}$ и $x_2^{(0)}$. Тогда в уравнении (3.6) левая часть $\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$. При подстановке решения задачи II в уравнение (3.6) это уравнение превращается в тождество

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(t-t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = \mathbf{e}(\mathbf{x}(t-t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})). \quad (3.8)$$

Далее учтем, что по условию векторное поле $\mathbf{e} = \mathbf{e}(x_1, x_2, x_3)$ дважды непрерывно дифференцируемо по x_1, x_2, x_3 . Поскольку в области K компоненты решения задачи II непрерывны [99, теорема 14], правая часть (3.8) непрерывна. Следовательно, непрерывна и левая часть, то есть первые производные по t непрерывны в области K . Поэтому правая часть (3.6), в свою очередь, имеет непрерывные производные по t , из чего следует непрерывность $\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2}$. Лемма 1 доказана.

Взаимно однозначное отображение. Зафиксируем $t_0 = 0$ и рассмотрим отображение $\varphi: K \rightarrow G \subset \mathbb{R}^3_{x_1 x_2 x_3}$, задаваемое компонентами вектор-функции $\mathbf{x}(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$. Как показано выше это отображение дважды непрерывно дифференцируемо (по переменным $t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$ в области K). Матрица Якоби этого отображения есть

$$J(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t}(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) & \frac{\partial x_1}{\partial x_1^{(0)}}(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) & \frac{\partial x_1}{\partial x_2^{(0)}}(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \\ \frac{\partial x_2}{\partial t}(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) & \frac{\partial x_2}{\partial x_1^{(0)}}(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) & \frac{\partial x_2}{\partial x_2^{(0)}}(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \\ \frac{\partial x_3}{\partial t}(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) & \frac{\partial x_3}{\partial x_1^{(0)}}(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) & \frac{\partial x_3}{\partial x_2^{(0)}}(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \end{pmatrix}.$$

Первый столбец этой матрицы представляет собой вектор $\mathbf{e}(\mathbf{x}(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}))$ (см. (3.6)).

Далее будем считать $t_0 = 0$. В этом случае уравнение (3.7) принимает вид $\mathbf{x}(0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, 0) \in \sigma$. Это значит, что плоская область $\sigma_K = \left\{ (t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) : t=0, (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, 0) \in \sigma \right\} \subset K \subset \mathbb{R}^3_{t x_1^{(0)} x_2^{(0)}}$ взаимно однозначно отображается на плоскую область $\sigma \subset \mathbb{R}^3_{x_1 x_2 x_3}$.

Якобиан $\det J(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ непрерывен по всем своим аргументам как определитель матрицы, состоящей из непрерывных функций. При этом, как следует из (3.3),

$$\det J(0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = \begin{vmatrix} e_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, 0) & 1 & 0 \\ e_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, 0) & 0 & 1 \\ e_3(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, 0) & 0 & 0 \end{vmatrix} = e_3(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, 0) \neq 0.$$

Из условий задачи I следует существование константы $C_0 > 0$, ограничивающей снизу $|e_3(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, 0)|$ во всех точках $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, 0) \in \sigma$. Поэтому $|\det J(0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})| \geq C_0 > 0$, если только $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, 0) \in \sigma$ (то есть если $(0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \in \sigma_K$). В силу непрерывности $\det J(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ существует трехмерная область K' , содержащая плоскую область σ_K , и содержащаяся в K

($\sigma_K \subset K' \subset K$) такая, что при $(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \in K'$ якобиан $\det J(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ будет отличен от нуля. Поэтому $G' = \varphi(K') \subset G$ есть область (как образ области при непрерывном отображении с ненулевым якобианом). При этом, как замечено выше, σ_K взаимно однозначно отображается на σ . Следовательно, $\sigma \subset G'$ (то есть G' удовлетворяет требованиям к области, в которой ищется решение задачи I). Кроме того, в силу свойств решений нормальных автономных систем [98, 99], каковым является решение задачи II, это отображение взаимно однозначно: $G' \leftrightarrow K'$. Компоненты матрицы Якоби (непрерывно дифференцируемого на G') обратного отображения φ^{-1}

$$J'(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial t}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial t}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial x_1^{(0)}}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial x_1^{(0)}}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial x_1^{(0)}}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial x_2^{(0)}}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial x_2^{(0)}}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial x_2^{(0)}}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

определяются по формулам

$$\frac{\partial t}{\partial x_j}(x_1, x_2, x_3) = \frac{A \left(\frac{\partial x_j}{\partial t} \right)}{\det J(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial x_i^{(0)}}{\partial x_j}(x_1, x_2, x_3) = \frac{A \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i^{(0)}} \right)}{\det J(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})}, \quad i = 1, 2, \quad j = \overline{1, 3},$$

где $A \left(\frac{\partial x_j}{\partial t} \right)$ и $A \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i^{(0)}} \right)$ – алгебраические дополнения элементов $\frac{\partial x_j}{\partial t}$ и $\frac{\partial x_j}{\partial x_i^{(0)}}$,

$i = 1, 2, \quad j = \overline{1, 3}$, матрицы $J(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ соответственно. Эти алгебраические

дополнения являются полиномиальными функциями элементов матрицы $J(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$. Тогда правые части в (3.9) представляют собой отношения полиномов, состоящих из непрерывно дифференцируемых в K' функций (следствие леммы 1), причем полиномы, стоящие в знаменателях, отличны от нуля. Следовательно, эти правые части непрерывно дифференцируемы. Последнее означает непрерывность всех вторых производных вида $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$,

$j = \overline{1, 3}$, функций $t(x_1, x_2, x_3)$, $x_1^{(0)}(x_1, x_2, x_3)$ и $x_2^{(0)}(x_1, x_2, x_3)$.

Свойства решения задачи I. Как отмечено в подразделе «Взаимно однозначное отображение», первый столбец в $J(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ есть вектор e . Поэтому произведение первой, второй и третьей строк матрицы $J'(x_1, x_2, x_3)$ на первый столбец матрицы $J(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ есть $Lt(x_1, x_2, x_3)$, $Lx_1^{(0)}(x_1, x_2, x_3)$ и $Lx_2^{(0)}(x_1, x_2, x_3)$ соответственно. Это значит, что первый столбец произведения матриц $J'(x_1, x_2, x_3)J(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ есть $(Lt(x_1, x_2, x_3), Lx_1^{(0)}(x_1, x_2, x_3), Lx_2^{(0)}(x_1, x_2, x_3))^T$. С другой стороны, произведение матриц Якоби прямого J и обратного J' отображений равно единичной матрице. Отсюда

$$Lt(x_1, x_2, x_3) = 1, \quad Lx_i^{(0)}(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.10)$$

Цель настоящего раздела (см. конец постановки задачи I) будет достигнута, если доказать следующее утверждение.

Утверждение 1. Решение $u = u(x_1, x_2, x_3)$ задачи I в области G' существует, единственно и может быть представлено формулой

$$u(x_1, x_2, x_3) = u_0(x_1^{(0)}(x_1, x_2, x_3), x_2^{(0)}(x_1, x_2, x_3)) + \int_0^t(x_1, x_2, x_3) F(\hat{x}_1(\tau, x_1^{(0)}(x_1, x_2, x_3), x_2^{(0)}(x_1, x_2, x_3)), \hat{x}_2(\tau, x_1^{(0)}(x_1, x_2, x_3), x_2^{(0)}(x_1, x_2, x_3)), \hat{x}_3(\tau, x_1^{(0)}(x_1, x_2, x_3), x_2^{(0)}(x_1, x_2, x_3))) d\tau, \quad (3.11)$$

где $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ — решение задачи II для случая $t_0 = 0$.

Доказательство. Непрерывность вторых производных (3.11) следует из непрерывности вторых производных функции F и компонент решения задачи II, а также из непрерывности всех вторых производных вида $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, $j = \overline{1, 3}$, функций $t(x_1, x_2, x_3)$, $x_1^{(0)}(x_1, x_2, x_3)$ и $x_2^{(0)}(x_1, x_2, x_3)$.

Доказательство существования проведем непосредственной подстановкой (3.11) в (3.4) и проверкой начальных условий (3.5). Имеем

$$\begin{aligned} Lu = & \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u_0}{\partial x_i^{(0)}}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) Lx_i^{(0)}(x_1, x_2, x_3) + \\ & + F\left(\hat{x}_1\left(t(x_1, x_2, x_3), x_1^{(0)}(x_1, x_2, x_3), x_2^{(0)}(x_1, x_2, x_3)\right), \right. \\ & \left. \hat{x}_2\left(t(x_1, x_2, x_3), x_1^{(0)}(x_1, x_2, x_3), x_2^{(0)}(x_1, x_2, x_3)\right), \right. \\ & \left. \hat{x}_3\left(t(x_1, x_2, x_3), x_1^{(0)}(x_1, x_2, x_3), x_2^{(0)}(x_1, x_2, x_3)\right)\right) Lt(x_1, x_2, x_3) + \\ & + \sum_{j=1}^3 \int_0^{t(x_1, x_2, x_3)} \frac{\partial F}{\partial \hat{x}_j}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \hat{x}_j}{\partial x_i^{(0)}}(\tau, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) Lx_i^{(0)}(x_1, x_2, x_3) d\tau. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\hat{x}_j\left(t(x_1, x_2, x_3), x_1^{(0)}(x_1, x_2, x_3), x_2^{(0)}(x_1, x_2, x_3)\right) = \hat{x}_j$, $j = \overline{1, 3}$, а также принимая во внимание формулы (3.10), приходим к равенству (3.4). Далее, поскольку $t(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, 0) = 0$ и $x_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, 0) = x_i^{(0)}$, $i = 1, 2$, формула (3.11) дает $u(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, 0) = u_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$, то есть начальное условие (3.5) выполнено. Существование решения задачи I и возможность его представления в виде (3.11) доказаны.

Для доказательства единственности рассмотрим два решения $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2$, задачи I:

$$Lu_i = F(x_1, x_2, x_3), \quad u_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, 0) = u_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}), \quad i = 1, 2.$$

Их разность $v = u_1 - u_2$ удовлетворяет уравнениям $Lv = 0$ и $v(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, 0) = 0$. В силу взаимно однозначного соответствия областей G' и K' функция v может быть записана как сложная функция

$$v(x_1, x_2, x_3) = \tilde{v}\left(t(x_1, x_2, x_3), x_1^{(0)}(x_1, x_2, x_3), x_2^{(0)}(x_1, x_2, x_3)\right),$$

которая удовлетворяет уравнениям (равносильным уравнениям $Lv = 0$ и $v(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, 0) = 0$ соответственно)

$$Lv = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} Lt(x_1, x_2, x_3) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i^{(0)}} Lx_i^{(0)}(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \text{и} \quad \tilde{v}(0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = 0. \quad (3.12)$$

Применяя к первому равенству в (3.12) формулы (3.10), получаем, что $\dot{\tilde{v}} = 0$. Таким образом, значение \tilde{v} постоянно с течением времени t (зависит только от двух пространственных координат $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$) и равно своему значению при $t = 0$.

Поэтому

$$\begin{aligned} v(x_1, x_2, x_3) &= \tilde{v}\left(t(x_1, x_2, x_3), x_1^{(0)}(x_1, x_2, x_3), x_2^{(0)}(x_1, x_2, x_3)\right) = \\ &= \tilde{v}\left(0, x_1^{(0)}(x_1, x_2, x_3), x_2^{(0)}(x_1, x_2, x_3)\right) = 0. \end{aligned}$$

Последний переход в этой цепочке равенств следует из второго уравнения (3.12). Следовательно, $v \equiv 0$ или $u_1 \equiv u_2$. Утверждение 1 доказано. То есть решение задачи I не только существует, но и единственно. Этот факт будет использован в следующем разделе. Приведенное выше доказательство опубликовано в [73].

3.3 Существование скорости Фридмана

Ниже под любым вихревым течением понимается вихревое ($\mathbf{\Omega} = \text{rot } \mathbf{V} \neq 0$) движение жидкости (континуальной однородной среды), которое подчиняется уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{F}, \quad (3.13)$$

где \mathbf{F} – плотность распределения равнодействующей всех сил, приложенных к жидкости. Сюда относятся течения однофазных и однокомпонентных вязких (различных реологий) и невязких жидкостей и газов. Иногда для краткости такую континуальную однородную среду будем называть жидкостью или однородной жидкостью.

Перепишем уравнение (3.13) в форме Громеки – Ламба [1]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \nabla \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) = \mathbf{F}. \quad (3.14)$$

Все дальнейшие рассуждения и построения будем проводить в областях течения, в которых поля $\boldsymbol{\Omega}$ и \mathbf{F} – дважды непрерывно дифференцируемы (поле \mathbf{V} – трижды непрерывно дифференцируемо). Согласно теореме Фридмана [9, 95], для того, чтобы непрерывно дифференцируемое векторное поле \mathbf{U} было скоростью Фридмана для завихренности, необходимо и достаточно, чтобы в рассматриваемой области течения во все рассматриваемые моменты времени выполнялось уравнение

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{U} = 0.$$

В силу соленоидальности вектора $\boldsymbol{\Omega}$, это уравнение равносильно уравнению

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}) = 0. \quad (3.15)$$

Рассмотрим произвольную точку A в области вихревого ($\boldsymbol{\Omega} \neq 0$) течения жидкости (см. предложение после формулы (3.14)). В окрестности точки A существует неподвижная плоская поверхность σ , содержащая точку A , такая, что в течение ненулевого промежутка времени $[t_1, t_2]$ каждая вихревая линия пересекает замыкание $\bar{\sigma}$ этой поверхности под острым углом к нормали. Такой поверхностью может быть, например, круг некоторого радиуса с центром в точке A , лежащий на плоскости, нормальной к $\boldsymbol{\Omega}(A)$ в момент времени t_1 . Тогда в окрестности σ для каждого момента из промежутка $[t_1, t_2]$ существует

односвязный пространственный фрагмент G_σ , в точки которого можно попасть, если (при фиксированном времени) перемещаться в обе стороны от этой поверхности вдоль вихревых линий, начинающихся на поверхности σ . Будем называть его элементарным вихревым фрагментом. Хотя поверхность σ неподвижна, но из-за того, что вихревые линии, вообще говоря, могут деформироваться, форма фрагмента $G_\sigma = G_\sigma(t)$ может меняться со временем. Как следует из определения, G_σ является односвязной частью вихревой трубки, заданной поверхностью σ . В случае, если вихревая трубка замкнута, то она одним разрезом превращается в элементарный вихревой фрагмент. Реальные вихревые течения могут состоять из объединения элементарных вихревых фрагментов. Будем изучать эти фрагменты по отдельности, не рассматривая поведение завихренности на их границах.

Зададим через u_0 произвольную постоянную во времени дважды непрерывно дифференцируемую скалярную функцию на замыкании $\bar{\sigma}$ поверхности σ . В каждый момент времени t из промежутка $[t_1, t_2]$ зафиксируем картину течения. Воспользуемся результатом предыдущего раздела (о существовании решения задачи I). Для этого в качестве полей \mathbf{e} и F в формулировке задачи I рассмотрим поля $\mathbf{e} = \boldsymbol{\Omega}/|\boldsymbol{\Omega}|$ и $F = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{F})/|\boldsymbol{\Omega}|$, а искомую функцию (как и в формулировке задачи I) обозначим буквой u . Тогда, согласно выводу предыдущего раздела, для каждого момента времени t из промежутка $[t_1, t_2]$ существует трехмерная область $\tilde{G}_\sigma = \tilde{G}_\sigma(t) \subset G_\sigma(t)$, содержащая σ , в которой существует дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (в формулировке задачи I это уравнение (3.4))

$$(\mathbf{e} \cdot \nabla u) = F$$

или, что то же самое,

$$(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla u) = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{F}), \quad (3.16)$$

удовлетворяющее условию совпадения на σ функций u и u_0 . Другими словами,

функция u_0 с помощью интегрирования вдоль вихревых линий может быть продолжена функцией $u(x, y, z, t)$ в трехмерную область $\tilde{G}_\sigma = \tilde{G}_\sigma(t)$ так, что в этой области будет выполнено равенство (3.16). (Выражение для ∇u содержит криволинейные интегралы по вихревым линиям и поэтому является нелокальным.)

В силу гладкости (по времени и по пространству) поля Ω существуют ненулевой промежуток времени $[t_1, \tilde{t}_2] \subset [t_1, t_2]$ и непустая трехмерная область \tilde{G}_0 , содержащая точку A , такие, что $\tilde{G}_0 \subset \tilde{G}_\sigma(t)$ при всех $t \in [t_1, \tilde{t}_2]$. Как доказано в предыдущем разделе, в области \tilde{G}_0 функция $u(x, y, z, t)$ будет дважды непрерывно дифференцируемой функцией (только) пространственных координат.

О производных $u(x, y, z, t)$ по всем аргументам. Можно доказать, что функция $u(x, y, z, t)$ будет дважды непрерывно дифференцируемой функцией всех своих аргументов на множестве $\tilde{G}_0 \times [t_1, \tilde{t}_2]$. Изложим кратко схему такого доказательства. Для этого рассмотрим задачу Ia, которая отличается от задачи I раздела 3.2.

Задача Ia. Пусть $Ax_1x_2x_3$ – прямоугольная декартова система координат, G – ограниченная пространственная (трехмерная) область, содержащая точку A , $\bar{\sigma} \subset G$ – замыкание плоской области σ , лежащее в плоскости $x_3 = 0$. Пусть, далее, на $\bar{G} \times [t_1, t_2]$ заданы дважды непрерывно дифференцируемые по x_1, x_2, x_3, x_4 скалярное поле $F = F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и векторное поле $\mathbf{e} = \mathbf{e}(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((e_1(x_1, x_2, x_3, x_4), e_2(x_1, x_2, x_3, x_4), e_3(x_1, x_2, x_3, x_4)))$ такое, что $|\mathbf{e}| = 1$ во всей области G и \mathbf{e} пересекает $\bar{\sigma}$ под ненулевым углом при всех значениях параметра $x_4 \in [t_1, t_2]$, то есть

$$e_3(x_1, x_2, 0, x_4) \neq 0 \text{ при } (x_1, x_2, 0) \in \bar{\sigma} \text{ и } x_4 \in [t_1, t_2].$$

Обозначим через $L = (\mathbf{e} \cdot \nabla) = e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$ линейный

дифференциальный оператор и рассмотрим уравнение

$$Lu = F(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

где $u = u(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Задача Ia заключается в нахождении такого решения $u = u(x_1, x_2, x_3, x_4)$ последнего уравнения, которое дважды непрерывно дифференцируемо (по всем аргументам) в декартовом произведении какой-нибудь трехмерной области \tilde{G}_0 изменения переменных x_1, x_2, x_3 , содержащей начало координат A , и какого-нибудь ненулевого отрезка $[t_1, \tilde{t}_2] \subset [t_1, t_2]$ изменений параметра x_4 . При этом должно выполняться условие

$$u(x_1, x_2, 0, x_4) = u_0(x_1, x_2) \text{ при } (x_1, x_2, 0) \in \sigma \cap \tilde{G}_0, x_4 \in [t_1, \tilde{t}_2],$$

где u_0 – заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция на множестве $\{x_1, x_2 : (x_1, x_2, 0) \in \bar{\sigma}\}$.

(В постановке этой задачи G , σ и u_0 не зависят от параметра x_4 .)

Доказательство существования решения задачи Ia повторяет доказательство предыдущего раздела. При этом во вспомогательной задаче II должны рассматриваться не три, а четыре параметра $(t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_4^{(0)})$, и взаимно однозначное соответствие $G' \leftrightarrow K'$ будет устанавливаться между множествами

$$G' = \varphi(K') \subset G \subset \mathbb{R}^3_{x_1 x_2 x_3}$$

и

$$K' = \left\{ (t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) : t \in (-\delta', \delta'), (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, 0) \in \sigma \right\} \subset \mathbb{R}^3_{t x_1^{(0)} x_2^{(0)}}$$

с тем отличием от раздела 3.2, что множества G' и K' будут менять свою форму при изменении параметра x_4 . Также следует учесть, что символом t во вспомогательной задаче II раздела 3.2 согласно традициям теории ОДУ

обозначалось время, но в контексте настоящего раздела то, что обозначалось этим символом в разделе 3.2, играет роль промежуточного параметра и временем в физическом смысле не является. В итоге, повторяя доказательство раздела 3.2 и считая переменную x_4 физическим временем, можно доказать существование такой непустой области \tilde{G}_0 , содержащей точку A , и такого ненулевого отрезка $[t_1, \tilde{t}_2] \subset [t_1, t_2]$ изменений времени t , что $u(x, y, z, t)$ будет дважды непрерывно дифференцируема по всем своим аргументам в $\tilde{G}_0 \times [t_1, \tilde{t}_2]$. В частности, это означает непрерывную дифференцируемость градиента u .

Дальнейшее исследование проведем в области \tilde{G}_0 при $t \in [t_1, \tilde{t}_2]$ (см. предыдущий абзац).

Раскроем двойное векторное произведение

$$\boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{\Omega} \times \{\mathbf{F} - \nabla u\}] = \boldsymbol{\Omega} (\boldsymbol{\Omega} \cdot \{\mathbf{F} - \nabla u\}) - \{\mathbf{F} - \nabla u\} (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}).$$

Первое слагаемое правой части равно нулю в силу (3.16). Поэтому

$$\mathbf{F} = -\boldsymbol{\Omega} \times \frac{[\boldsymbol{\Omega} \times \{\mathbf{F} - \nabla u\}]}{\Omega^2} + \nabla u.$$

Подставим это выражение для вектора \mathbf{F} в уравнение (3.14):

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = -\boldsymbol{\Omega} \times \frac{[\boldsymbol{\Omega} \times \{\mathbf{F} - \nabla u\}]}{\Omega^2} - \nabla \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} - u \right)$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \left(\mathbf{V} + \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \{\mathbf{F} - \nabla u\}}{\Omega^2} \right) = -\nabla \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} - u \right).$$

Применение оператора rot к обеим частям последнего уравнения приводит к уравнению (3.15), в котором

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} + \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \{\mathbf{F} - \nabla u\}}{\Omega^2}. \quad (3.17)$$

По построению, поле \mathbf{U} непрерывно дифференцируемо. Это означает, что в области \tilde{G}_0 в течение промежутка времени $t \in [t_1, \tilde{t}_2]$ скорость Фридмана

существует и может быть вычислена по формуле (3.17). Точка A в области вихревого ($\Omega \neq 0$) течения жидкости была выбрана произвольно. Поэтому для каждой точки области течения жидкости, которое в течение ненулевого промежутка времени $[t_1, t_2]$ есть вихревое ($\Omega \neq 0$) течение, подчиняющееся уравнению (3.13) с дважды непрерывно дифференцируемыми (по времени и по пространственным координатам) полями Ω и \mathbf{F} , существует пространственная окрестность этой точки, в которой в течение некоторого ненулевого промежутка времени $[t_1, \tilde{t}_2] \subset [t_1, t_2]$ существует скорость Фридмана.

Это основной результат настоящей главы. Впервые он опубликован в [53]. Этот результат принадлежит соискателю, на что соавтор прямо указывает в статье [131]. Результаты и идея этого доказательства уже неоднократно использовались, в том числе другими авторами [11, 131, 132].

Локальный и нелокальный способы вычисления скорости Фридмана. Предложенный способ вычисления \mathbf{U} не является локальным. То есть \mathbf{U} не выражается через компоненты скорости жидкости и их пространственные производные различных порядков. Для вычисления \mathbf{U} в общем пространственном случае требуется еще и интегрирование вдоль вихревых линий. В этой связи в [53] был поставлен вопрос, всегда ли существует локальный способ вычисления \mathbf{U} . Ответ был получен в статье [133], где было показано (приведен пример точного решения уравнений Навье – Стокса для вязкой несжимаемой жидкости), что локальный способ может не существовать.

3.4 Неоднозначность скорости Фридмана и эволюция завихренности в вязкой несжимаемой жидкости

Рассмотрим установившееся вихревое течение, в котором выполнены условия теорем Гельмгольца. С одной точки зрения, можно рассматривать эволюцию завихренности как перемещение вихревых трубок вместе с жидкостью.

С другой точки зрения, эту же эволюцию можно рассматривать как перемещение вихревых трубок с нулевой скоростью, поскольку в силу стационарности картина завихренности не меняется. Обе точки зрения верны и равноправны. Обе точки зрения соответствуют различным скоростям Фридмана для одного и того же течения. Таким образом, приведен пример течения, в котором скорость Фридмана определяется неоднозначно. Рассмотрим вопрос о неоднозначности скорости Фридмана в общем случае (уравнение (3.13)).

Пусть \mathbf{U}_1 – скорость Фридмана. Рассмотрим поле скорости

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_1 + \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \nabla W}{\Omega^2} + \gamma \boldsymbol{\Omega}, \quad (3.18)$$

где $\gamma = \gamma(x, y, z, t)$ – произвольное непрерывно дифференцируемое скалярное поле, а $W = W(x, y, z, t)$ – произвольное дважды непрерывно дифференцируемое скалярное поле, постоянное вдоль вихревых линий, то есть $(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla W) = 0$. С использованием последнего равенства и правила раскрытия двойного векторного произведения имеем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}_1 &= \boldsymbol{\Omega} \times \left\{ \mathbf{U}_2 - \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \nabla W}{\Omega^2} - \gamma \boldsymbol{\Omega} \right\} = \\ &= \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}_2 - \frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla W) \boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \nabla W}{\Omega^2} - \gamma \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} = \\ &= \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}_2 - \frac{0 \cdot \boldsymbol{\Omega}}{\Omega^2} + \frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \nabla W}{\Omega^2} - \gamma \cdot 0 = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}_2 + \nabla W. \end{aligned}$$

Поэтому $\text{rot}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}_1) = \text{rot}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}_2)$ и, следовательно, уравнение (3.15) выполняется для \mathbf{U}_2 . Это значит, что скорость \mathbf{U}_2 также является скоростью Фридмана. Итак, скорость Фридмана неоднозначна в течениях однородных жидкостей (см. стр. 6).

Покажем, что формула (3.18) исчерпывает эту неоднозначность. Пусть \mathbf{U}_1 и \mathbf{U}_2 – две разных скорости Фридмана в односвязной области. Поэтому верность уравнения (3.15) для скоростей \mathbf{U}_1 и \mathbf{U}_2 означает существование скалярных полей $Q_1 = Q_1(x, y, z, t)$ и $Q_2 = Q_2(x, y, z, t)$ таких, что справедливы уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}_1 = -\nabla Q_1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}_2 = -\nabla Q_2.$$

Разность этих уравнений дает

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1) = \nabla(Q_1 - Q_2). \quad (3.19)$$

Отсюда следует, что

$$(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla(Q_1 - Q_2)) = 0.$$

Таким образом, разность $W_1 = Q_2 - Q_1$ постоянна вдоль вихревых линий.

Векторное произведение $\boldsymbol{\Omega}$ и левой части уравнения (3.19)

$$\boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1)] = \boldsymbol{\Omega} (\boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1)) - (\mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1) \Omega^2$$

равно векторному произведению $\boldsymbol{\Omega}$ и правой части уравнения (3.19)

$$\boldsymbol{\Omega} \times \nabla(Q_1 - Q_2) = -\boldsymbol{\Omega} \times \nabla(Q_2 - Q_1) = -\boldsymbol{\Omega} \times \nabla W_1.$$

Запишем это равенство:

$$\boldsymbol{\Omega} (\boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1)) - (\mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1) \Omega^2 = -\boldsymbol{\Omega} \times \nabla W_1$$

или

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_1 + \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \nabla W_1}{\Omega^2} + \boldsymbol{\Omega} \frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1))}{\Omega^2}.$$

Вместе с (3.18) последнее равенство доказывает, что поле скорости Фридмана для любого вихревого течения (см. начало раздела 3.3) исчерпывающим образом определяется с точностью до векторного поля

$$\mathbf{S} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \nabla W}{\Omega^2} + \gamma \boldsymbol{\Omega},$$

где γ – произвольное скалярное поле, а W – любое скалярное поле, постоянное вдоль вихревых линий. Учитывая (3.17), получаем общую формулу для семейства скоростей Фридмана (при заданной на поверхности σ функции u_0):

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} + \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \{\mathbf{F} - \nabla u + \nabla W\}}{\Omega^2} + \gamma \boldsymbol{\Omega}, \quad (3.20)$$

где поле $u(x, y, z, t)$ такое, что $(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla u) = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{F})$; $\gamma = \gamma(x, y, z, t)$ – произвольное скалярное поле, а $W = W(x, y, z, t)$ – произвольное скалярное поле, постоянное

вдоль вихревых линий (подразумевается, что эти поля обладают необходимой гладкостью).

Нетрудно убедиться, что изменение функции u на поверхности σ (то есть функции u_0) оставляет \mathbf{U} в семействе скоростей Фридмана (3.20), поскольку это изменение сводится к изменению члена ∇W в формуле (3.20).

Разным полям γ и W соответствуют разные скорости Фридмана и разные лагранжевы точки зрения на эволюцию завихренности. Член $\gamma\boldsymbol{\Omega}$, входящий в формулу (3.20), соответствует «скольжению» вихревой трубки вдоль самой себя. Член $\frac{\boldsymbol{\Omega} \times \nabla W}{\Omega^2}$ обеспечивает неоднозначность в поперечном к $\boldsymbol{\Omega}$ направлении.

Задавая разные значения W на поверхности σ , можно получать разные пространственные поля W . Поэтому для одной выбранной точки (x, y, z, t) можно получить любое значение вектора \mathbf{U} .

Вопрос неоднозначности был поставлен соискателем, но решен совместно с соавтором в статье [53], и поэтому неоднозначность не входит в результаты, выносимые на защиту.

Покажем, что в стационарных течениях в семействе скоростей Фридмана (3.20) есть нулевая скорость.

Стационарное движение в общем случае описывается формулой

$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \nabla \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) = \mathbf{F}$. После скалярного умножения на $\boldsymbol{\Omega}$ получаем

$(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{F})$, и уравнение (3.16) принимает вид

$$(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) u = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right).$$

Следовательно, заданием на замыкании $\bar{\sigma}$ функции $u_0(x, y, z) = \frac{\mathbf{V}^2}{2}(x, y, z)$ (см. абзац перед формулой (3.16)) можно получить в качестве решения последнего дифференциального уравнения в некоторой пространственной

окрестности σ функцию $u(x, y, z) = \frac{\mathbf{V}^2}{2}(x, y, z)$. Тогда векторное произведение $\boldsymbol{\Omega}$ на стационарное уравнение движения, записанное в виде $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = \mathbf{F} - \nabla \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right)$,

после раскрытия двойного векторного произведения дает векторное равенство

$$\boldsymbol{\Omega} (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V}) - \mathbf{V} \Omega^2 = \boldsymbol{\Omega} \times \left\{ \mathbf{F} - \nabla \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) \right\} \quad \text{или} \quad 0 = \mathbf{V} + \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \left\{ \mathbf{F} - \nabla \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) \right\}}{\Omega^2} - \frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V})}{\Omega^2} \boldsymbol{\Omega}.$$

В силу $u = \frac{\mathbf{V}^2}{2}$ последнее равенство равносильно

$$0 = \mathbf{V} + \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \{ \mathbf{F} - \nabla u \}}{\Omega^2} - \frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V})}{\Omega^2} \boldsymbol{\Omega},$$

что показывает наличие нулевой скорости \mathbf{U} в семействе (3.20).

Эволюция завихренности в вязкой несжимаемой жидкости. Рассмотрим в качестве примера течение ньютоновской вязкой несжимаемой жидкости в потенциальном поле массовых сил. Обозначим: \mathbf{V} – вектор скорости, p – давление, $\rho = \rho_0 = \text{const}$ – плотность, Π – потенциал массовых сил, $\nu \neq 0$ – кинематический коэффициент вязкости. Движение жидкости описывается уравнениями Навье – Стокса [95]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \nu \Delta \mathbf{V} - \nabla \left[\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \Pi \right], \quad \text{div} \mathbf{V} = 0. \quad (3.21)$$

Для скорости несжимаемой жидкости справедливо тождество $\Delta \mathbf{V} \equiv -\text{rot} \boldsymbol{\Omega}$. Используя его, перепишем первое уравнение Навье – Стокса в форме Громеки – Ламба [1]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = -\nu \text{rot} \boldsymbol{\Omega} - \nabla \left[\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \Pi \right]. \quad (3.22)$$

Повторим доказательство существования скорости Фридмана, взяв в качестве функции \mathbf{F} не всю правую часть первого уравнения (3.21), а только первое слагаемое $\nu \Delta \mathbf{V} \equiv -\nu \text{rot} \boldsymbol{\Omega}$. Это нужно для того, чтобы исключить из

расчета давление и потенциал массовых сил. (В общем случае речь идет об исключении из рассмотрения любого потенциального векторного поля, входящего в правую часть (3.22)).

Как и раньше, рассмотрим течение внутри элементарного вихревого фрагмента G_σ . Зададим через u_0 произвольную постоянную во времени дважды непрерывно дифференцируемую скалярную функцию на замыкании $\bar{\sigma}$ плоской поверхности σ . В каждый момент времени из промежутка $[t_1, t_2]$ зафиксируем картину течения. Для каждого фиксированного момента времени функция u_0 с помощью интегрирования вдоль вихревых линий может быть продолжена функцией u в часть пространства элементарного вихревого фрагмента G_σ так, что будет выполнено равенство

$$(\mathbf{\Omega} \cdot \nabla u) = -v (\mathbf{\Omega} \cdot \text{rot } \mathbf{\Omega}). \quad (3.23)$$

Раскроем двойное векторное произведение

$$\mathbf{\Omega} \times [\mathbf{\Omega} \times \{-v \text{rot } \mathbf{\Omega} - \nabla u\}] = \mathbf{\Omega} (\mathbf{\Omega} \cdot \{-v \text{rot } \mathbf{\Omega} - \nabla u\}) - \{-v \text{rot } \mathbf{\Omega} - \nabla u\} (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}).$$

Первое слагаемое правой части равно нулю в силу (3.33). Поэтому

$$-v \text{rot } \mathbf{\Omega} = -\mathbf{\Omega} \times \frac{\mathbf{\Omega} \times \{-v \text{rot } \mathbf{\Omega} - \nabla u\}}{\Omega^2} + \nabla u.$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.22), имеем

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} = -\mathbf{\Omega} \times \frac{\mathbf{\Omega} \times \{-v \text{rot } \mathbf{\Omega} - \nabla u\}}{\Omega^2} - \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \Pi - u \right)$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \times \left(\mathbf{V} + \frac{\mathbf{\Omega} \times \{-v \text{rot } \mathbf{\Omega} - \nabla u\}}{\Omega^2} \right) = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \Pi - u \right).$$

Применяя оператор rot к обеим частям последнего равенства, приходим к заключению, что одна из скоростей Фридмана равна

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} + \frac{\mathbf{\Omega} \times \{-v \text{rot } \mathbf{\Omega} - \nabla u\}}{\Omega^2}. \quad (3.24)$$

Все семейство скоростей Фридмана (при заданной на поверхности σ функции u_0) задается формулой

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} + \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \{-v \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega} - \nabla u + \nabla W\}}{\Omega^2} + \gamma \boldsymbol{\Omega},$$

где поле $u = u(x, y, z, t)$ таково, что $(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla u) = -v(\boldsymbol{\Omega} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega})$; $\gamma = \gamma(x, y, z, t)$ – произвольное скалярное поле, а $W = W(x, y, z, t)$ – скалярное поле, постоянное вдоль вихревых линий (подразумевается, что эти поля обладают необходимой гладкостью).

В общем случае для вычисления скорости Фридмана по формуле (3.24) требуется интегрирование вдоль вихревых линий, поскольку для получения поля u решается уравнение $(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla u) = -v(\boldsymbol{\Omega} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega})$. Но в некоторых случаях эта скорость вычисляется локально, то есть является только функцией компонент скорости жидкости и их пространственных производных. Например, если

$$v(\boldsymbol{\Omega} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega}) = 0, \quad (3.25)$$

то можно задать функцию u_0 на поверхности σ равной нулю, и, согласно (3.23), она будет продолжена нулем во все пространство элементарного вихревого фрагмента. Тогда скоростью Фридмана будет

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} - v \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega}}{\Omega^2}. \quad (3.26)$$

В частности, для плоскопараллельных и незакрученных осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости условие (3.25) выполнено. И формула (3.26) совпадает с известным выражением для таких течений [16, 17].

3.5 Эволюция завихренности в закрученных осесимметричных течениях идеального газа

Согласно результату раздела 3.3, скорость Фридмана для завихренности существует, в частности, в закрученных осесимметричных течениях идеального

газа. При этом локальное (см. последний абзац раздела 3.3) выражение скорости Фридмана для таких течений неизвестно. Однако можно предложить лагранжеву точку зрения на эволюцию компонент завихренности с локальными формулами для скорости Фридмана.

В закрученных осесимметричных течениях радиально-осевая (меридиональная) составляющая завихренности и окружная составляющая завихренности представляют собой роторы окружной и радиально-осевой (меридиональной) скоростей соответственно. При этом упомянутые составляющие ортогональны своим завихренностям (своим роторам). Этот факт позволяет рассматривать эволюцию каждой из составляющих завихренности по отдельности. Данный раздел посвящен поиску скоростей Фридмана для упомянутых составляющих завихренности. Предлагаемый ниже подход справедлив для закрученных осесимметричных течений любых однородных жидкостей, но будет продемонстрирован на примере идеального газа, вихревые течения которого исследуются в диссертации.

Рассмотрим осесимметричное течение идеального газа. Обозначим, как обычно: \mathbf{V} – вектор скорости, ρ – плотность, p – давление, $\mathbf{\Omega} = \text{rot } \mathbf{V}$ – вектор завихренности. В области течения, в которой отсутствуют скачки и разрывы, давление p и плотность ρ связаны соотношением $p\rho^{-k} = \sigma$, где k – показатель адиабаты, σ – энтропийная функция, которая может быть различной на различных линиях тока. Движение газа в такой области описывается следующей системой уравнений [134]:

$$\partial \mathbf{V} / \partial t - \mathbf{V} \times \text{rot } \mathbf{V} = -\rho^{-1} \nabla p - \nabla (\mathbf{V}^2 / 2), \quad (3.27)$$

$$\partial \rho / \partial t + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (3.28)$$

$$\partial (p\rho^{-k}) / \partial t + (\mathbf{V} \cdot \nabla)(p\rho^{-k}) = 0. \quad (3.29)$$

Уравнение (3.29) следует из отсутствия теплопроводности в идеальной жидкости и означает сохранение энтальпии в частицах жидкости.

Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z с началом в точке O так, чтобы течение оказалось осесимметричным относительно оси Oz $\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0\right)$.

Пусть $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ – правая тройка единичных векторов в радиальном, окружном и осевом направлениях соответственно; V_r, V_φ, V_z – соответствующие компоненты скорости $(\mathbf{V} = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_\varphi + \mathbf{V}_z = V_r \mathbf{e}_r + V_\varphi \mathbf{e}_\varphi + V_z \mathbf{e}_z)$.

Наряду с полем Ω рассмотрим поля двух завихренностей:

$$\Omega_{rz} = \text{rot } \mathbf{V}_\varphi \quad \text{и} \quad \Omega_\varphi = \text{rot}(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z).$$

Учитывая, что $\Omega_\varphi \times \mathbf{V}_\varphi = 0$, получим

$$\Omega \times \mathbf{V} = \Omega_{rz} \times (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) + \Omega_\varphi \times (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) + \Omega_{rz} \times \mathbf{V}_\varphi.$$

Первое слагаемое правой части направлено вдоль \mathbf{e}_φ , а последние два лежат в меридиональной полуплоскости (проходящей через ось симметрии). Поскольку градиенты, входящие в правую часть (3.27), лежат в той же меридиональной полуплоскости, уравнение (3.27) можно представить системой двух уравнений:

$$\frac{\partial(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)}{\partial t} + \Omega_\varphi \times (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) + \Omega_{rz} \times \mathbf{V}_\varphi = -\rho^{-1} \nabla p - \nabla(\mathbf{V}^2/2), \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_\varphi}{\partial t} + \Omega_{rz} \times (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) = 0. \quad (3.31)$$

Преобразуя последнее слагаемое левой части (3.30):

$$\Omega_{rz} \times \mathbf{V}_\varphi = -\nabla \left(\frac{V_\varphi^2}{2} \right) - \left(\frac{V_\varphi^2}{r} \right) \mathbf{e}_r,$$

представим (3.30) в виде

$$\frac{\partial(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)}{\partial t} + \Omega_\varphi \times (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) - \left(\frac{V_\varphi^2}{r} \right) \mathbf{e}_r + \rho^{-1} \nabla p = -\nabla \left(\frac{V_r^2}{2} + \frac{V_z^2}{2} \right). \quad (3.32)$$

Заметим, что векторы \mathbf{e}_r и $\rho^{-1} \nabla p$ ортогональны Ω_φ . Учитывая это, раскроем двойные векторные произведения:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}_\varphi \times [\boldsymbol{\Omega}_\varphi \times \mathbf{e}_r] &= -\mathbf{e}_r \Omega_\varphi^2, \\ \boldsymbol{\Omega}_\varphi \times [\boldsymbol{\Omega}_\varphi \times (-\rho^{-1} \nabla p)] &= (\rho^{-1} \nabla p) \Omega_\varphi^2.\end{aligned}$$

Поскольку $\boldsymbol{\Omega}_\varphi \times \mathbf{e}_r = -\Omega_\varphi \mathbf{e}_z$, для случая $\boldsymbol{\Omega}_\varphi \neq 0$ уравнение (3.32) представляется в виде

$$\frac{\partial(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega}_\varphi \times \left(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z - \rho^{-1} \Omega_\varphi^{-2} \boldsymbol{\Omega}_\varphi \times \nabla p - \left(\frac{V_\varphi^2}{r \Omega_\varphi} \right) \mathbf{e}_z \right) = -\nabla \left(\frac{V_r^2}{2} + \frac{V_z^2}{2} \right). \quad (3.33)$$

Применив оператор rot к уравнениям (3.33) и (3.31), имеем

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_\varphi}{\partial t} + \text{rot}(\boldsymbol{\Omega}_\varphi \times \mathbf{U}_1) = 0, \quad (3.34)$$

где $\mathbf{U}_1 = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z - \rho^{-1} \Omega_\varphi^{-2} \boldsymbol{\Omega}_\varphi \times \nabla p - \left(\frac{V_\varphi^2}{r \Omega_\varphi} \right) \mathbf{e}_z$,

и

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_{rz}}{\partial t} + \text{rot}(\boldsymbol{\Omega}_{rz} \times \mathbf{U}_2) = 0, \quad (3.35)$$

где $\mathbf{U}_2 = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z$. Поля $\boldsymbol{\Omega}_\varphi$ и $\boldsymbol{\Omega}_{rz}$ соленоидальны. Поэтому сравнение (3.34) и (3.35) со вторым уравнением (3.1) показывает, что \mathbf{U}_1 и \mathbf{U}_2 являются скоростями Фридмана для завихренностей $\boldsymbol{\Omega}_\varphi$ и $\boldsymbol{\Omega}_{rz}$ соответственно.

Таким образом, предложена новая точка зрения на эволюцию завихренности осесимметричных течений идеального газа, которая состоит в раздельном рассмотрении радиально-осевой составляющей завихренности $\boldsymbol{\Omega}_{rz}$ и окружной составляющей завихренности $\boldsymbol{\Omega}_\varphi$. Найдены локальные формулы скорости Фридмана для этих составляющих. Эти составляющие сами по себе являются завихренностями окружной и радиально-осевой скоростей жидкости соответственно. Поэтому окружная скорость жидкости индуцируется полем $\boldsymbol{\Omega}_{rz}$, а радиально-осевая – полем $\boldsymbol{\Omega}_\varphi$. Последнее обстоятельство позволяет расщепить

задачу восстановления поля скорости по полю завихренности и может оказаться полезным в численных расчетах.

Заметим, что выражение для скорости \mathbf{U}_1 отличается от скорости Фридмана для завихренности незакрученных осесимметричных течений (где $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_\varphi$) только

членом $-\left(\frac{V_\varphi^2}{r\Omega_\varphi}\right)\mathbf{e}_z$, который не имеет радиальной составляющей и обращается в

нуль в незакрученном течении ($\mathbf{V}_\varphi = 0$).

Напомним, что для стационарных изоэнергетических течений в разделе 2.3 было получено локальное выражение скорости Фридмана $\mathbf{q} = (T_\infty / T)\mathbf{V}$, которое верно в общем пространственном случае, а не только для осесимметричных течений.

Незакрученные течения. В незакрученных течениях $\mathbf{\Omega}_{rz} \equiv 0$, и $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_\varphi$. Поэтому скорость $\mathbf{U}_1 = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z - \rho^{-1}\Omega_\varphi^{-2}\mathbf{\Omega}_\varphi \times \nabla p$ есть скорость Фридмана для (полной) завихренности.

Предложенный здесь способ нахождения скоростей Фридмана \mathbf{U}_1 и \mathbf{U}_2 для закрученных осесимметричных течений *однородных жидкостей* (см. «Список терминов») был впервые предложен на примере вязкой несжимаемой жидкости в статье [10].

3.6 Новый лагранжев взгляд на эволюцию завихренности в закрученных осесимметричных течениях идеального газа

Одно из возможных направлений использования локальных формул для скорости Фридмана, полученных в предыдущем разделе, – разработка аналога бессеточного метода дискретных вихрей (кратко суть такого метода для вязкой несжимаемой жидкости изложена в разделе 3.1). При разработке метода

необходимо решить много проблем. Одна из трудностей, которая возникает при реализации метода, состоит в «зарождении» на каждом шаге по времени новых вихревых доменов, что приводит к необходимости применять различные подходы для перераспределения доменов и их интенсивности с целью ограничения общего количества доменов, находящихся в области течения (для плоскопараллельных течений суть этой проблемы изложена в [21–23]). Несложно заметить, что сохранение циркуляции скорости жидкости по контуру (сохранение интенсивности вихревого домена), движущемуся со скоростью \mathbf{U} , не обязательно для вихревого метода. Достаточно, чтобы был известен закон изменения этой циркуляции во времени. Поэтому, если найти такую скорость \mathbf{U} , что интенсивность домена будет достаточно быстро стремиться к нулю с ростом времени, наличием каждого домена можно будет пренебречь после некоторого конечного числа шагов по времени. В итоге количество учитываемых доменов будет ограничено «естественным образом». Цель данного раздела состоит в поиске выражений таких скоростей для компонент завихренности Ω_φ и Ω_{rz} в осесимметричных течениях идеального газа. При этом рассматриваются только области вихревого $\Omega \neq 0$ течения, в которых все гидродинамические параметры и скорость \mathbf{U} дважды непрерывно дифференцируемы по пространственным координатам и времени.

Эволюция Ω_φ . На отрезке времени $[t_1, t_2]$ зададим произвольную непрерывно дифференцируемую функцию $\alpha(t)$. Воспользуемся свойством ортогональности векторов меридиональной скорости $\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z$ и завихренности Ω_φ . Учитывая это свойство и используя правило раскрытия двойного векторного произведения, имеем

$$\Omega_\varphi \times [\Omega_\varphi \times (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)] = -(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) \Omega_\varphi^2.$$

Откуда

$$\Omega_\varphi \times [\Omega_\varphi \times (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)] \Omega_\varphi^{-2} \alpha(t) = -(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) \alpha(t).$$

Сложим это уравнение с уравнением (3.33). Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega}_\varphi \times \left(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z + \Omega_\varphi^{-2} \boldsymbol{\Omega}_\varphi \times \left\{ -\rho^{-1} \nabla p + (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) \alpha(t) \right\} - \left(\frac{V_\varphi^2}{r \Omega_\varphi} \right) \mathbf{e}_z \right) = \\ = -\nabla \left(\frac{V_r^2}{2} + \frac{V_z^2}{2} \right) - (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) \alpha(t). \end{aligned}$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega}_\varphi \times \mathbf{U}_{1\alpha} = -\nabla \left(\frac{V_r^2}{2} + \frac{V_z^2}{2} \right) - (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) \alpha(t), \quad (3.36)$$

где

$$\mathbf{U}_{1\alpha} = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z + \Omega_\varphi^{-2} \boldsymbol{\Omega}_\varphi \times \left\{ -\rho^{-1} \nabla p + (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) \alpha(t) \right\} - \left(\frac{V_\varphi^2}{r \Omega_\varphi} \right) \mathbf{e}_z. \quad (3.37)$$

В течение отрезка времени $[t_1, t_2]$ рассмотрим движение воображаемой жидкости, скорость (воображаемых) частиц которой равна

$$\tilde{\mathbf{V}}_r + \tilde{\mathbf{V}}_z = (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) \exp \left\{ \int_{t_1}^t \alpha(\tau) d\tau \right\}.$$

Завихренность $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_\varphi$ скорости $\tilde{\mathbf{V}}_r + \tilde{\mathbf{V}}_z$ равна $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_\varphi = \boldsymbol{\Omega}_\varphi \exp \left\{ \int_{t_1}^t \alpha(\tau) d\tau \right\}$. Подставим

выражения

$$\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z = (\tilde{\mathbf{V}}_r + \tilde{\mathbf{V}}_z) \exp \left\{ -\int_{t_1}^t \alpha(\tau) d\tau \right\} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\Omega}_\varphi = \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_\varphi \exp \left\{ -\int_{t_1}^t \alpha(\tau) d\tau \right\}$$

в левую часть уравнения (3.36):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left((\tilde{\mathbf{V}}_r + \tilde{\mathbf{V}}_z) \exp \left\{ -\int_{t_1}^t \alpha(\tau) d\tau \right\} \right) + \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_\varphi \times \mathbf{U}_{1\alpha} \cdot \exp \left\{ -\int_{t_1}^t \alpha(\tau) d\tau \right\} = \\ = -\nabla \left(\frac{V_r^2}{2} + \frac{V_z^2}{2} \right) - (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) \alpha(t). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Поскольку первое слагаемое левой части равно

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\tilde{\mathbf{V}}_r + \tilde{\mathbf{V}}_z)}{\partial t} \cdot \exp\left\{-\int_{t_1}^t \alpha(\tau) d\tau\right\} - (\tilde{\mathbf{V}}_r + \tilde{\mathbf{V}}_z) \exp\left\{-\int_{t_1}^t \alpha(\tau) d\tau\right\} \alpha(t) = \\ & = \frac{\partial(\tilde{\mathbf{V}}_r + \tilde{\mathbf{V}}_z)}{\partial t} \cdot \exp\left\{-\int_{t_1}^t \alpha(\tau) d\tau\right\} - (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) \alpha(t), \end{aligned}$$

то после сокращения в левой и в правой частях (3.38) слагаемых $-(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)\alpha(t)$ и после умножения на $\exp\left\{\int_{t_1}^t \alpha(\tau) d\tau\right\}$ получим

$$\frac{\partial(\tilde{\mathbf{V}}_r + \tilde{\mathbf{V}}_z)}{\partial t} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_\varphi \times \mathbf{U}_{1\alpha} = -\exp\left\{\int_{t_1}^t \alpha(\tau) d\tau\right\} \nabla \left(\frac{V_r^2}{2} + \frac{V_z^2}{2} \right). \quad (3.39)$$

Применение операции rot к (3.39) приводит к уравнению

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_\varphi}{\partial t} + \text{rot}(\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_\varphi \times \mathbf{U}_{1\alpha}) = 0,$$

которое (если положить $\mathbf{a} = \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_\varphi$) совпадает со вторым уравнением (3.1). То есть

$\mathbf{U}_{1\alpha}$ является скоростью Фридмана для $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_\varphi$. Это значит, что циркуляция $\tilde{\Gamma}$ скорости $\tilde{\mathbf{V}}_r + \tilde{\mathbf{V}}_z$ по контурам, перемещающимся вместе с частицами воображаемой жидкости со скоростью (3.37), сохраняется с течением времени. Поскольку скорость $\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z$ реального течения связана со скоростью $\tilde{\mathbf{V}}_r + \tilde{\mathbf{V}}_z$ соотношением $\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z = (\tilde{\mathbf{V}}_r + \tilde{\mathbf{V}}_z) \exp\left\{-\int_{t_1}^t \alpha(\tau) d\tau\right\}$, то циркуляция Γ скорости (реальной) жидкости $\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z$ по каждому контуру, перемещающемуся со скоростью (3.37), меняется с течением времени по закону

$$\Gamma(t) = \Gamma(t_1) \exp\left\{-\int_{t_1}^t \alpha(\tau) d\tau\right\}. \quad (3.40)$$

В частном случае $\alpha(t) \equiv 1$ имеем

$$\mathbf{U}_{1\alpha} = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z + \Omega_\varphi^{-2} \boldsymbol{\Omega}_\varphi \times \left\{ -\rho^{-1} \nabla p + (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) \right\} - \left(\frac{V_\varphi^2}{r \Omega_\varphi} \right) \mathbf{e}_z \quad (3.41)$$

и

$$\Gamma(t) = \Gamma(t_1) \exp\{-(t-t_1)\}. \quad (3.42)$$

Поэтому, если рассматривать эволюцию Ω_φ с лагранжевой точки зрения как движение вихревых трубок со скоростью (3.41), то интенсивность вихревой трубки будет экспоненциально убывать со временем, согласно (3.42). И интенсивность доменов в вихревом методе будет достаточно быстро стремиться к нулю с ростом времени («произвол» в выборе $\alpha(t)$ позволяет получить практически любую скорость убывания интенсивности доменов).

Эволюция Ω_{rz} . Как и выше, на отрезке времени $[t_1, t_2]$ зададим произвольную непрерывно дифференцируемую функцию $\alpha(t)$. Воспользуемся свойством ортогональности векторов окружной скорости \mathbf{V}_φ и завихренности Ω_{rz} . Учитывая это, раскроем двойное векторное произведение $\Omega_{rz} \times [\Omega_{rz} \times \mathbf{V}_\varphi] = -\mathbf{V}_\varphi \Omega_{rz}^2$. Откуда

$$\Omega_{rz} \times [\Omega_{rz} \times \mathbf{V}_\varphi] \Omega_{rz}^{-2} \alpha(t) = -\mathbf{V}_\varphi \alpha(t).$$

Повторяя далее выкладки подраздела «Эволюция Ω_φ », получим аналоги формул (3.37) и (3.40) для Ω_{rz} :

$$\mathbf{U}_{2\alpha} = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z + \Omega_{rz}^{-2} \alpha(t) \Omega_{rz} \times \mathbf{V}_\varphi \quad (3.43)$$

и

$$\Gamma(t) = \Gamma(t_1) \exp\left\{-\int_{t_1}^t \alpha(\tau) d\tau\right\}. \quad (3.44)$$

В частном случае $\alpha(t) \equiv 1$ имеем

$$\mathbf{U}_{2\alpha} = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z + \Omega_{rz}^{-2} \Omega_{rz} \times \mathbf{V}_\varphi \quad (3.45)$$

и

$$\Gamma(t) = \Gamma(t_1) \exp\{-(t-t_1)\}.$$

В отличие от (3.40), в последней формуле $\Gamma(t)$ – это циркуляция скорости \mathbf{V}_φ по каждому контуру, перемещающемуся со скоростью (3.45).

Поэтому если рассматривать эволюцию Ω_{rz} с лагранжевой точки зрения как движение вихревых трубок со скоростью (3.45), то интенсивность вихревой трубки Ω_{rz} будет экспоненциально убывать со временем.

Таким образом, предложена новая лагранжева точка зрения на эволюцию компонент завихренности в закрученных осесимметричных течениях идеального газа. Этот теоретический результат можно использовать в вычислительной гидродинамике для ограничения количества доменов при использовании бессеточного метода расчета вихревых течений. Он был впервые опубликован в [74] на примере вязкой несжимаемой жидкости. Просматривая выкладки и рассуждения данного раздела, можно убедиться в том, что все они основаны на свойстве ортогональности векторов скорости и завихренности. Поэтому новая лагранжева точка зрения может использоваться и для плоскопараллельных течений любых *однородных жидкостей* (см. «Список терминов»).

3.7 Условие существования замкнутых вихревых линий в течениях идеального газа

В настоящем разделе идея доказательства существования скорости Фридмана будет использована для получения условия существования во времени замкнутых вихревых линий. Исследуются течения с замкнутыми вихревыми трубками, состоящими из замкнутых вихревых линий. В некоторых случаях можно априори (до проведения расчетов) утверждать, что в течении будут замкнутые вихревые линии и трубки (например, в течении за отошедшей ударной волной [63]), и проверка замкнутости вихревых линий может служить для верификации расчетов.

Замкнутые вихревые линии наблюдаются на практике, например, при работе вихревых пушек [135]. Иногда замкнутые вихревые линии обнаруживаются в результате расчета (например, [136–140]), и проверка свойств замкнутых вихревых трубок позволила бы провести верификацию расчета. Ниже

будет получено одно из свойств вихревых трубок, которые остаются замкнутыми в течение некоторого (ненулевого) интервала времени.

Скорость \mathbf{q} в замкнутой вихревой трубке. Используем обозначения и уравнения движения из раздела 3.5. Рассмотрим область вихревого движения жидкости ($\mathbf{\Omega} \neq 0$), в которой существует неподвижная плоская область (поверхность) σ такая, что в течение ненулевого интервала времени (t_1, t_2) каждая вихревая линия пересекает эту поверхность под острым углом к нормали и только один раз.

Обозначим через G_σ фрагмент пространства, в точки которого можно попасть, если зафиксировать время и перемещаться от плоской области σ вдоль вихревых линий, начинающихся на σ (в силу замкнутости вихревых линий можно перемещаться в любую сторону от σ). Другими словами, фрагмент G_σ есть объединение всех вихревых линий, проходящих через σ .

Хотя поверхность σ неподвижна, но из-за изменения со временем формы вихревых линий форма фрагмента G_σ может меняться со временем, то есть $G_\sigma = G_\sigma(t)$. Состоящий только из замкнутых вихревых линий фрагмент $G_\sigma(t)$ в каждый момент времени находится внутри замкнутой вихревой трубки. При этом все вихревые линии делают только один оборот перед тем, как замкнуться на себя (это следует из того, что они пересекают поверхность σ под острым углом к нормали и только один раз). Для сокращения записи обозначим:

$$\mathbf{F} = -\rho^{-1} \nabla p. \quad (3.46)$$

Построим функцию $f(x, y, z, t)$ следующим образом. Сначала определим ее в точках поверхности σ . А именно, пусть для каждого момента времени $t \in (t_1, t_2)$ в точках поверхности σ функция f будет равна нулю. У поверхности σ есть две стороны. Одну из сторон назовем первой, другую – второй. Продолжим с первой стороны функцию f в остальную часть вихревой трубки $G_\sigma(t)$ с помощью интегрирования вдоль вихревых линий (от первой стороны до второй стороны σ) так, чтобы выполнялось равенство (точка означает скалярное произведение)

$$(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla f) = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{F}). \quad (3.47)$$

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений [99] и из результата раздела 3.2 следует, что построенное таким способом поле f будет однозначно определено для каждого момента времени $t \in (t_1, t_2)$ во всех точках вихревой трубки $G_\sigma(t)$. При этом в точках поверхности σ поле f будет непрерывно в одностороннем смысле с первой стороны σ (с которой началось интегрирование) и может оказаться разрывным со второй стороны σ .

Используем формулу для двойного векторного произведения

$$\boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{\Omega} \times \{\mathbf{F} - \nabla f\}] = \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \{\mathbf{F} - \nabla f\}) - \{\mathbf{F} - \nabla f\}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}).$$

Первое слагаемое правой части равно нулю в силу (3.47). Поэтому

$$\mathbf{F} = -\boldsymbol{\Omega} \times \frac{[\boldsymbol{\Omega} \times \{\mathbf{F} - \nabla f\}]}{\boldsymbol{\Omega}^2} + \nabla f.$$

Подставим это выражение для вектора \mathbf{F} в уравнение (3.27):

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \left(\mathbf{V} + \frac{[\boldsymbol{\Omega} \times \{\mathbf{F} - \nabla f\}]}{\boldsymbol{\Omega}^2} \right) = \nabla \left(f - \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right). \quad (3.48)$$

Обозначим: \mathbf{n}_σ – единичный вектор, нормальный к плоской поверхности σ с первой стороны; $(\nabla f)_1$ и $(\nabla f)_2$ – предельные значения градиента функции f с первой стороны σ и со второй стороны σ соответственно.

Поверхность σ выбрана так, что на этой поверхности всюду $(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}_\sigma) \neq 0$. Поэтому существует бесконечное количество функций $g(x, y, z, t)$, определенных (и гладких) во всех точках трубки $G_\sigma(t)$, кроме точек на поверхности σ таких, что предельные значения g_1 и g_2 на разных сторонах поверхности σ удовлетворяют условиям (точка означает скалярное произведение)

$$\left(\mathbf{V} + \frac{[\boldsymbol{\Omega} \times \{\mathbf{F} - (\nabla f)_1\}]}{\boldsymbol{\Omega}^2} + g_1 \boldsymbol{\Omega} \right) \cdot \mathbf{n}_\sigma = \left(\mathbf{V} + \frac{[\boldsymbol{\Omega} \times \{\mathbf{F} - (\nabla f)_2\}]}{\boldsymbol{\Omega}^2} + g_2 \boldsymbol{\Omega} \right) \cdot \mathbf{n}_\sigma = 0.$$

Эти условия означают, что векторы, записанные в скобках, лежат в плоскости поверхности σ . Пусть $g(x, y, z, t)$ – одна из таких функций. Эта функция определена в трубке $G'_\sigma(t) = G_\sigma(t) \setminus \sigma$ (трубка $G'_\sigma(t)$ получается, если из трубки $G_\sigma(t)$ вырезать поверхность σ). Внутри трубки $G'_\sigma(t)$ рассмотрим векторное поле

$$\mathbf{q} = \mathbf{V} + \frac{[\boldsymbol{\Omega} \times \{\mathbf{F} - \nabla f\}]}{\Omega^2} + g\boldsymbol{\Omega}.$$

Поскольку $\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} = 0$, уравнение (3.48) равносильно

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q} = \nabla \left(f - \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right).$$

Применение оператора rot к обеим частям последнего равенства приводит к уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \text{rot}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q}) = 0.$$

Сравнивая последнее уравнение с правым уравнением (3.1), получаем что это – уравнение Фридмана для завихренности, а скорость \mathbf{q} – скорость Фридмана (см. раздел 3.1). Поэтому приходим к следующему выводу.

Эволюцию завихренности в трубке $G'_\sigma(t)$ можно рассматривать как перемещение вихревых линий (и вихревых трубок с сохранением их интенсивности) вместе с частицами воображаемой среды (q -частицами), движущимися со скоростью \mathbf{q} .

Теорема о замкнутых вихревых трубках. В произвольный момент времени $t' \in (t_1, t_2)$ выберем любую замкнутую вихревую линию в трубке $G'_\sigma(t)$. Рассмотрим совокупность q -частиц, составляющих часть этой линии, лежащую в $G'_\sigma(t')$, то есть часть замкнутой линии без точки на поверхности σ (где скорость \mathbf{q} не определена и q -частицы отсутствуют). Функция g выбрана таким образом, что предельные значения скорости \mathbf{q} с обеих сторон поверхности σ параллельны этой поверхности. Поэтому q -частицы не могут «покидать» трубку $G'_\sigma(t)$ через

поверхность σ и не могут «поступать» новые q -частицы. Следовательно, рассматриваемая совокупность q -частиц будет составлять внутри $G_\sigma(t)$ непрерывную вихревую линию (кроме одной точки на поверхности σ) в течение некоторого ненулевого интервала времени $(t'_1, t'_2) \subset (t_1, t_2)$. Поскольку вихревые линии замкнуты, это значит, что в течение интервала времени $(t'_1, t'_2) \subset (t_1, t_2)$ предельные значения скорости \mathbf{q} на разных сторонах поверхности σ должны совпадать:

$$\mathbf{V} + \frac{[\boldsymbol{\Omega} \times \{\mathbf{F} - (\nabla f)_2\}]}{\Omega^2} + g_1 \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{V} + \frac{[\boldsymbol{\Omega} \times \{\mathbf{F} - (\nabla f)_2\}]}{\Omega^2} + g_2 \boldsymbol{\Omega}.$$

После сокращений и перегруппировки слагаемых получим

$$\boldsymbol{\Omega} \times \{(\nabla f)_2 - (\nabla f)_1\} = (g_2 - g_1) \boldsymbol{\Omega}. \quad (3.49)$$

В силу свойств векторного произведения левая и правая части векторного равенства (3.49) ортогональны друг другу. Это возможно только в случае, если обе части равны нулю. Следовательно, $\boldsymbol{\Omega} \times \{(\nabla f)_2 - (\nabla f)_1\} = 0$, то есть векторы $\{(\nabla f)_2 - (\nabla f)_1\}$ и $\boldsymbol{\Omega} \neq 0$ параллельны. С другой стороны, согласно (3.47), $\boldsymbol{\Omega} \cdot \{(\nabla f)_2 - (\nabla f)_1\} = 0$, то есть эти векторы ортогональны. Это возможно только, если $(\nabla f)_2 = (\nabla f)_1$.

По построению, проекция $(\nabla f)_1$ на поверхность σ равна нулю. Поэтому проекция $(\nabla f)_2$ на поверхность σ также равна нулю. Рассматриваемая линия и момент времени $t' \in (t_1, t_2)$ были выбраны произвольно (см. начало настоящего подраздела «Теорема о замкнутых вихревых трубках»). Следовательно, проекция $(\nabla f)_2$ на поверхность σ равна нулю во всех точках σ в течение всего интервала времени (t_1, t_2) . Это значит, что в каждый момент времени предельные значения f на концах всех линий равны одной константе. Эта константа может быть различной для разных моментов времени. Согласно обозначению (3.46) и

уравнению (3.47), упомянутая константа есть циркуляция вектора $\mathbf{F} = -\rho^{-1}\nabla p$ по замкнутой вихревой линии. Следовательно, циркуляция $\mathbf{F} = -\rho^{-1}\nabla p$ одинакова для разных вихревых линий, пересекающих поверхность σ . Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. (Необходимое условие существования во времени вихревых трубок, состоящих из замкнутых вихревых линий.)

Пусть вихревое ($\Omega \neq 0$) течение идеального газа подчиняется уравнению (3.27). И пусть в течение ненулевого промежутка времени (t_1, t_2) вся неподвижная плоская поверхность σ пересекается под острым углом к нормали замкнутыми вихревыми линиями этого течения и при этом каждая вихревая линия пересекается с σ только один раз. Тогда для любого фиксированного момента времени $t \in (t_1, t_2)$ циркуляция вектора $-\rho^{-1}\nabla p$ по замкнутой вихревой линии одинакова для разных вихревых линий, пересекающих поверхность σ .

Классическая теорема Томсона (Кельвина) [95] верна для всех типов жидкости. Она утверждает, что производная по времени циркуляции скорости по движущемуся вместе с частицами жидкости контуру равна циркуляции правой части (3.27). В этой теореме не упоминается о связи значений циркуляций на разных контурах. В доказанной выше теореме найдена такая связь (равенство циркуляций) для контуров особого вида (замкнутых вихревых линий). Эти контуры отличаются от контуров, упоминаемых в теореме Томсона, поскольку в общем случае нельзя утверждать, что вихревые линии движутся вместе с частицами жидкости. Поэтому доказанная выше теорема и теорема Томсона несопоставимы и дополняют друг друга.

Эквивалентная формулировка теоремы и некоторые частные случаи. Циркуляция второго слагаемого левой части (3.27) равна нулю, поскольку вектор $\Omega \times \mathbf{V}$ ортогонален вихревой линии. Циркуляция третьего слагаемого $\nabla \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right)$ равна нулю в силу потенциальности этого слагаемого. Поэтому циркуляция

$\mathbf{F} = -\rho^{-1}\nabla p$ совпадает с циркуляцией $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$. Следовательно, при соблюдении условий доказанной выше теоремы для любого фиксированного момента времени $t \in (t_1, t_2)$ циркуляция $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$ по замкнутой вихревой линии одинакова для разных вихревых линий, пересекающих поверхность σ .

Для нестационарного течения также можно указать ситуацию, когда циркуляция правой части уравнения $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \nabla \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) = \mathbf{F}$ по любой замкнутой вихревой линии равна нулю. Эта циркуляция будет равна нулю, в частности, если в замкнутой вихревой трубке есть последовательность замкнутых вихревых линий, длины которых стремятся к нулю.

Замечание. Поскольку в стационарных изоэнергетических течениях идеального газа вихревые линии лежат на поверхности уровня энтропии, а на таких поверхностях плотность есть функция давления, то циркуляция вектора $-\rho^{-1}\nabla p$ по замкнутой вихревой линии равна нулю. Поэтому полученная теорема содержательна только для нестационарных или для неизоэнергетических течений идеального газа.

Полученная теорема может быть использована как для качественного анализа, так и для верификации численных расчетов течений, в которых есть замкнутые вихревые трубки. Кроме того, разработанный здесь метод доказательства будет применен в разделе 4.4 при получении одного интегрального инварианта. Результат настоящего раздела был опубликован в [66].

3.8 Метод добавления завихренности

Предложенный в 3.3 аналог теорем Гельмгольца по сравнению с классическими теоремами Гельмгольца имеет следующий принципиальный

недостаток. С математической точки зрения этот недостаток состоит в том, что в разделе 3.3 уравнение эволюции завихренности (ротация динамического уравнения движения) приведено к уравнению Фридмана не для всех точек течения, а только для вихревых ($\Omega \neq 0$) точек. Проблема будет снята, если получить аналог уравнения Фридмана для всех точек течения. Получению такого уравнения в самом общем случае течения жидкости или газа посвящен данный раздел.

Метод добавления завихренности. Чтобы показать суть подхода к решению поставленной задачи, рассмотрим сначала относительно простой случай – плоское течение идеальной несжимаемой жидкости в непотенциальном поле массовых сил. Массовые силы (отнесенные к плотности), представим в виде суммы непотенциальной силы \mathbf{F}_1 и консервативной силы $-\nabla\Pi$, где Π – некоторый потенциал. Движение жидкости описывается уравнениями Эйлера и уравнением неразрывности:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \Omega \times \mathbf{V} = \mathbf{F}_1 - \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \Pi \right), \quad \text{div} \mathbf{V} = 0. \quad (3.50)$$

При этом в течении допускается существование безвихревых зон.

Пусть \mathbf{e} – единичный вектор, перпендикулярный плоскости течения. Добавим к правой и левой частям уравнения (3.50) вектор $C\mathbf{e} \times \mathbf{V}$, где C – произвольная константа. Используя формулу для двойного векторного произведения, получим

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\Omega + C\mathbf{e}) \times \left(\mathbf{V} + \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{F}_1}{(\Omega + C)} \right) = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \Pi \right) + C\mathbf{e} \times \mathbf{V}, \quad \Omega = \Omega \cdot \mathbf{e}. \quad (3.51)$$

В силу уравнения неразрывности для плоскопараллельного течения справедливо тождество $\text{rot}(\mathbf{e} \times \mathbf{V}) \equiv 0$. С его учетом применение оператора rot к обеим частям уравнения (3.51) приводит к уравнению Фридмана для поля $\Omega + C\mathbf{e}$

$$\frac{\partial (\Omega + C\mathbf{e})}{\partial t} + \text{rot} \left[(\Omega + C\mathbf{e}) \times \left(\mathbf{V} + \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{F}_1}{(\Omega + C)} \right) \right] = 0. \quad (3.52)$$

Следовательно, скорость

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} + \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{F}_1}{(\Omega + C)} \quad (3.53)$$

есть скорость Фридмана для соленоидального поля $\Omega + C\mathbf{e}$. Подбором константы C можно добиться того, чтобы формула (3.53) для скорости Фридмана \mathbf{U} была определена при всех значениях завихренности, имеющих место в рассматриваемой области течения.

Уравнение (3.52) и есть то искомое уравнение эволюции завихренности в виде уравнения Фридмана, которое подбором константы C можно сделать определенным во всех точках течения, если только величина завихренности ограничена. Поскольку связь полей Ω и $\Omega + C\mathbf{e}$ очень проста, можно считать, что предложен единый для всех точек течения не зависящий от величины завихренности лагранжев взгляд на эволюцию завихренности. Он заключается в сохранении интенсивности векторных трубок поля $\Omega + C\mathbf{e}$ при их движении со скоростью (3.53).

Итак, суть предложенного метода добавления завихренности состоит в следующем. К полю вектора завихренности Ω добавляется такое постоянное по пространству поле Ω_C , чтобы поле суммарной завихренности $\Omega_S = \Omega + \Omega_C$ ни в одной точке не обращалось в нуль. После этого уравнение эволюции суммарной завихренности во всех точках течения приводится к уравнению Фридмана для поля Ω_S .

Общий случай. Область применимости метода. Выше приведен пример добавления завихренности для плоских течений. Несложно распространить этот подход и для незакрученных осесимметричных течений. Однако для всех ли течений можно применить метод добавления завихренности? Другими словами, всегда ли ротация динамического уравнения движения жидкости приводится к уравнению Фридмана для суммарной завихренности? На этот вопрос можно дать положительный ответ и предложить конструктивное доказательство, методика

которого может быть использована для получения соответствующей скорости Фридмана.

Рассмотрим ламинарное движение однородной жидкости в самом общем случае. Такое движение описывается уравнением

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{F},$$

где \mathbf{F} – плотность распределения равнодействующей всех сил, приложенных к жидкости (или газу). Сюда относятся как течения идеальной несжимаемой жидкости, так и течения вязкого газа. Заметим, что в отличие от раздела 3.3, здесь не накладывається ограничение $\boldsymbol{\Omega} \neq 0$. Пусть \mathbf{F} можно представить суммой $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, где \mathbf{F}_2 – потенциальная составляющая. В выражение для \mathbf{F}_2 может входить градиент потенциала внешних потенциальных сил или (для несжимаемой жидкости) градиент давления, отнесенный к плотности жидкости. Такое выделение потенциальной составляющей позволит упростить итоговые формулы. Представим уравнение движения в равносильном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 - \nabla \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right).$$

Выберем постоянное по пространству векторное поле $\boldsymbol{\Omega}_C$ так, чтобы поле $\boldsymbol{\Omega}_S = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}_C$ ни в одной точке не обращалось в нуль. Это всегда можно сделать, если только величина завихренности ограничена в рассматриваемой области течения. Добавим слева и справа к уравнению движения вектор $\boldsymbol{\Omega}_C \times \mathbf{V}$:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega}_S \times \mathbf{V} = \mathbf{F}_1 + \boldsymbol{\Omega}_C \times \mathbf{V} + \mathbf{F}_2 - \nabla \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right).$$

Повторяя рассуждения и выкладки, которые использовались при доказательстве существования скорости Фридмана в разделе 3.3, приходим к уравнению Фридмана, равносильному уравнению эволюции завихренности во всех точках течения, в том числе и в точках нулевой завихренности $\boldsymbol{\Omega}$,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_S}{\partial t} + \text{rot} \left[\boldsymbol{\Omega}_S \times \mathbf{U} \right] = 0,$$

где скорость Фридмана

$$\mathbf{U}_S = \mathbf{V} + \frac{\boldsymbol{\Omega}_S \times \{\mathbf{F}_1 + \boldsymbol{\Omega}_C \times \mathbf{V} - \nabla f\}}{\boldsymbol{\Omega}_S^2} \quad (3.54)$$

выражается в том числе через градиент функции f , которая определяется из дифференциального уравнения

$$(\boldsymbol{\Omega}_S \cdot \nabla f) = (\boldsymbol{\Omega}_S \cdot (\mathbf{F}_1 + \boldsymbol{\Omega}_C \times \mathbf{V})). \quad (3.55)$$

Существование и непрерывность вторых производных такой функции по крайней мере в некоторой окрестности любой точки доказаны в разделах 3.2 и 3.3 (при этом функция f определяется уравнением (3.55) неоднозначно, что соответствует неоднозначности скорости Фридмана). Таким образом, метод добавления завихренности можно применить к любому вихревому течению.

Поскольку связь полей $\boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}_S = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}_C$ очень проста, можно считать, что предложен единый для всех точек течения лагранжев взгляд на эволюцию завихренности. Он заключается в сохранении интенсивности векторных трубок поля $\boldsymbol{\Omega}_S$ при их движении со скоростью (3.54).

Следует отметить, что для конкретных течений реализация метода добавления завихренности может оказаться более простой, чем предложено в настоящем разделе. Это продемонстрировано выше на примере плоских течений.

Заметим, что, как и в плоском случае, для восстановления скорости несжимаемой жидкости поле $\boldsymbol{\Omega}_C$ удобно представлять ротором некоторой соленоидальной скорости \mathbf{V}_C . Тогда соленоидальной будет и скорость $\mathbf{V} + \mathbf{V}_C$, ротация которой равна $\boldsymbol{\Omega}_S = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}_C$. А это позволит применять формулу Био – Савара для восстановления скорости $\mathbf{V} + \mathbf{V}_C$.

В общем пространственном случае для вычисления поля f требуется интегрирование вдоль вихревых линий $\boldsymbol{\Omega}_S$, что усложняет расчет по сравнению с со случаем плоских течений. Но самое большое усложнение для применения в

бессеточных вихревых методах заключается в том, что после добавления завихренности в потоке не остается зон нулевой завихренности. И необходимо отслеживать движение не только тех дискретных вихрей, которые зарождаются на границе, но и всех дискретных вихрей, которые «заполняли» внутренность потока в начальный момент времени. При расчете обтекания тел безграничным потоком потребовалось бы учитывать бесконечное количество дискретных вихрей конечной ненулевой интенсивности. Это ограничивает область применения метода добавления завихренности в бессеточных вихревых методах течениями в ограниченных областях.

Метод добавления завихренности был опубликован в [57].

3.9 Заключение к главе 3

Для течений сплошной текучей среды (от несжимаемой жидкости до вязкого газа) уравнение эволюции завихренности приведено к равносильному уравнению типа уравнения Фридмана. Уравнения равносильны во всех точках и при любых значениях параметров течения в областях, где завихренность отлична от нуля. Это позволяет рассматривать эволюцию завихренности с точки зрения перемещения вихревых трубок постоянной интенсивности с такой скоростью Фридмана, которая определена во всем поле течения. До сих пор в общем пространственном случае это можно было делать только для баротропных течений идеальной жидкости. Для областей, в которых завихренность может обращаться в нуль, предложен метод «добавления завихренности», предлагающий единый для всех точек течения лагранжев взгляд на эволюцию завихренности.

Полученный общетеоретический результат может использоваться в вычислительной гидродинамике для распространения метода дискретных вихрей на расчет ламинарных течений произвольной жидкости в ограниченных областях.

Глава 4 Интегральные инварианты

4.1 Универсальный интегральный инвариант уравнений движения однородной жидкости

Исследование данного раздела было связано с созданием виртуальной экспериментальной установки – программного комплекса для численного моделирования течений, исследуемых в реальных экспериментальных установках разного назначения [141–145]. Потребовались средства разностороннего тестирования математических моделей и проверки их соответствия реальным процессам. Считается, что эти процедуры должны проводиться на основе сравнения данных, полученных в реальных и численных экспериментах. В этой связи предъявляются повышенные требования, к точности измерений на реальных установках, к верификации и к валидации [146] численных схем. Обычно численный метод проверяется на известных точных решениях и путем сравнения с численными решениями другими надежными, хорошо зарекомендовавшими себя методами. Такая проверка оставляет сомнение в правильности расчета в случаях, для которых нет точных решений или решений надежными, хорошо зарекомендовавшими себя методами. Поэтому возникла идея дополнительной проверки каждого конкретного расчета, что можно сделать путем проверки законов сохранения, выполняющихся для выбранной математической модели исследуемого процесса. При этом необходимо использовать такие законы сохранения, которые не заложены в основу используемых численных схем.

В других главах диссертации и в других разделах настоящей главы обнаружены различные закономерности, которые не пригодны для проверки расчетов в самом общем случае. Например, свойства течений за отошедшей УВ в окрестности линии торможения (глава 1) выполняются только для изоэнергетических течений. Принципы максимума (глава 5) позволяют проверять

расчет только при наличии внутренних точек минимума или максимума. Некоторые свойства, обнаруженные в главах 2 и 5, имеют место только в осесимметричных течениях. И так далее. Поэтому требовалось найти универсальное свойство течений, пригодное для проверки течений в самом общем случае, то есть в случае, когда течение подчиняется уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{F}, \quad (4.1)$$

где \mathbf{V} – скорость жидкости, \mathbf{F} – плотность распределения равнодействующей всех сил, приложенных к жидкости. В общем случае здесь учитываются силы гидродинамического давления, вязкости и массовые силы.

Уравнение (4.1) может быть записано в форме Громеки – Ламба [1]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = \mathbf{F} - \nabla \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right). \quad (4.2)$$

В соответствии с теоремой Томсона [95], если массовые силы допускают потенциал, а идеальная жидкость баротропна (в частности, это изоэнтропическое течение идеального газа), то циркуляция скорости по любому замкнутому «жидкому» контуру (который в каждый момент времени состоит из одних и тех же частиц жидкости) остается постоянной. При выполнении условий теоремы Томсона справедливы также теоремы Гельмгольца [95], согласно которым можно считать, что вихревые трубки переносятся со скоростью жидкости и сохраняют свою интенсивность.

Эти теоремы с использованием преобразований Мунка – Прима [103] были распространены на стационарное небаротропное адиабатическое течение идеального газа [29, 31] применительно к так называемой обобщенной циркуляции. А в [128] с использованием теоремы Эйлера – Эртеля [46] получен неинтегральный инвариант стационарных течений идеального газа. Однако для общего случая течений с уравнением (4.1), к которым относятся, в частности, нестационарные течения идеального газа, подобных теорем не было. Также не было аналогов теорем Гельмгольца для («обычной», не обобщенной) завихренности в небаротропных стационарных течениях идеального газа.

Как показано во третьей главе, всегда существует воображаемая среда, «частицы» которой движутся с некоторой скоростью \mathbf{U} и составляют контуры с сохраняющейся во времени циркуляцией скорости жидкости \mathbf{V} . Такая скорость в [10] названа скоростью Фридмана. Трудность использования представления о движении контуров (с сохранением циркуляции \mathbf{V}) со скоростью Фридмана \mathbf{U} для проверки расчетов состоит в следующем.

Дело в том, что скорость Фридмана в общем случае не может быть вычислена локально (то есть через значения параметров течения и их производные в точке, для которой вычисляется скорость \mathbf{U}). Для расчета поля скорости Фридмана \mathbf{U} в некоторой точке требуется интегрирование вдоль вихревых линий, то есть знание параметров течения на конечном удалении от рассматриваемой точки. Скорость Фридмана \mathbf{U} обладает еще одним свойством – это скорость переноса вихревых линий.

Поэтому возникла идея (реализованная ниже в настоящем разделе) найти скорость \mathbf{U} с локальным способом вычисления, которая не «обязана» переносить вихревые линии, но сохраняет на контурах, движущихся с этой скоростью, циркуляцию скорости (реальной) жидкости \mathbf{V} .

Скорость переноса контуров по неподвижной поверхности. В данном разделе рассматриваются контуры и поверхности, состоящие из материальных точек. А поскольку эти контуры и поверхности состоят из материальных точек, они могут быть как подвижными, так и неподвижными. Рассмотрим трехмерную область G вихревого движения жидкости, в которой существует неподвижная диффеоморфная открытому кругу поверхность σ , причем в течение промежутка времени $[t_1, t_2]$ каждая вихревая линия пересекает σ под острым углом к нормали.

Повторяя рассуждения раздела 3.3, получаем, что при достаточно гладкой поверхности σ и некоторых свойствах дифференцируемости полей сил \mathbf{F} и завихренности $\mathbf{\Omega} \neq 0$ для любой замкнутой подобласти $\sigma' \subset \sigma$, граница которой не совпадает, но как угодно близка к границе σ , можно указать (неподвижную)

область $G_{\sigma'} \in G$, содержащую σ' , такую, что в области $G_{\sigma'}$ для всех $t \in [t_1, t_2]$ будет существовать решение системы дифференциальных уравнений относительно функции f

$$(\mathbf{\Omega} \cdot \nabla f) = (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{F}), \quad (4.3)$$

обращающееся в нуль на поверхности σ . Пусть $f = f(x, y, z, t)$ – такое решение. Тогда в пространственно-временной области $G_{\sigma'} \times (t_1, t_2)$ в силу (4.3) векторы $\mathbf{\Omega}$ и $(\mathbf{F} - \nabla f)$ ортогональны, и, следовательно, уравнение (4.2) можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \times \left[\mathbf{V} + \frac{[\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{F} - \nabla f)]}{\Omega^2} + \lambda \mathbf{\Omega} \right] = \nabla f - \nabla \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right),$$

где $\lambda = \lambda(x, y, z, t)$ – произвольное скалярное поле. Равносильность этого уравнения уравнению (4.2) проверяется непосредственно с использованием формулы для раскрытия двойного векторного преобразования и равенства нулю скалярного произведения векторов $\mathbf{\Omega}$ и $(\mathbf{F} - \nabla f)$, вытекающего из равенства (4.3).

Применение оператора rot к последнему уравнению приводит к уравнению Фридмана

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{U}) = 0,$$

где

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} + \frac{[\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{F} - \nabla f)]}{\Omega^2} + \lambda \mathbf{\Omega}. \quad (4.4)$$

А это, согласно теореме Фридмана (см. раздел 3.1), означает, что скорость (4.4) будет скоростью Фридмана в области $G_{\sigma'}$ в течение открытого промежутка времени (t_1, t_2) .

В силу построения функции f ее градиент в точках поверхности σ' направлен по нормали \mathbf{n} к поверхности σ' :

$$\nabla f = \frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{F})}{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n})} \mathbf{n}. \quad (4.5)$$

Поскольку граница σ' может быть сколь угодно близка к границе σ , то во всех внутренних точках поверхности σ местная скорость Фридмана может быть вычислена по формуле

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} + \frac{[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{F}]}{\Omega^2} - \frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{F})}{\Omega^2 (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n})} [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}] + \lambda \boldsymbol{\Omega}. \quad (4.6)$$

Выберем λ так, чтобы скорость \mathbf{U} лежала в касательной плоскости к поверхности σ :

$$\lambda = -\frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})}{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n})} - \frac{([\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{F}] \cdot \mathbf{n})}{\Omega^2 (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n})}. \quad (4.7)$$

Тогда контуры, расположенные на поверхности σ , при перемещении со скоростью \mathbf{U} будут оставаться на этой поверхности. Но скорость Фридмана \mathbf{U} является и скоростью \mathbf{U} , переносящей контуры с сохранением циркуляции \mathbf{V} .

Таким образом, приходим к следующему заключению. Пусть контур γ лежит на диффеоморфной открытому кругу неподвижной поверхности σ , которая целиком лежит во внутренних точках течения, и на которой нормальная составляющая завихренности отлична от нуля: $(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}) \neq 0$. Тогда при его перемещении по поверхности σ со скоростью \mathbf{U} , определяемой согласно соотношениям (4.6) и (4.7), циркуляция скорости жидкости \mathbf{V} по этому контуру сохраняется.

Скорость переноса простого вихревого контура. Получим теперь формулу для скорости \mathbf{U} в случае простого вихревого контура без требования перемещаться по какой-либо заданной поверхности. Гладкую замкнутую кривую без самопересечений Γ назовем простым вихревым контуром (ПВК), если существует такая диффеоморфная кругу (замкнутая) поверхность σ_Γ , которая удовлетворяет следующим условиям:

- а) она лежит в трехмерной области вихревого течения;
- б) вихревые линии пересекают σ_Γ под острым углом к нормали;
- в) Γ есть край поверхности σ_Γ .

Поверхность σ_Γ , удовлетворяющую описанным выше требованиям, будем называть поверхностью, соответствующей ПВК Γ .

Пусть \mathbf{e} – единичный касательный вектор к некоторому ПВК Γ . Дальнейшее рассуждение в статье [55], в которой была получена ключевая формула всего исследования (она приведена ниже под номером (4.8)), было основано на следующем утверждении. Сначала было сделано очевидное замечание, что соответствующая контуру Γ поверхность σ_Γ не единственная, причем разные поверхности совпадают в точках контура, но в этих точках они могут иметь разные нормальные векторы. Затем утверждалось, что «поскольку вихревые линии пересекают σ_Γ под острым углом к нормали, существует такая соответствующая контуру Γ поверхность $\tilde{\sigma}_\Gamma$, что в точках контура нормаль к поверхности $\tilde{\sigma}_\Gamma$ находится в плоскости векторов \mathbf{e} и $\boldsymbol{\Omega}$ ». Отсюда легко следовала формула (4.8). Однако после опубликования статьи [55] выяснилось, что утверждение, приведенное выше в кавычках, очень трудно обосновать. Поэтому в диссертации далее приводится иной (строго обоснованный) вывод формулы (4.8).

По определению ПВК Γ вихревые линии пересекают σ_Γ под острым углом к нормали. Следовательно, во всех точках контура $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e} \neq 0$. Поэтому нормальный к поверхности σ_Γ вектор \mathbf{n} можно представить в виде

$$\mathbf{n} = \alpha \mathbf{e} + \gamma \boldsymbol{\Omega} + \beta \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e},$$

где коэффициенты α , γ и β в общем случае различны в разных точках контура. Используя это представление, имеем

$$(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}) = (\boldsymbol{\Omega} \cdot (\alpha \mathbf{e} + \gamma \boldsymbol{\Omega} + \beta \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e})) = \alpha (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}) + \gamma \Omega^2$$

и

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n} = \boldsymbol{\Omega} \times (\alpha \mathbf{e} + \gamma \boldsymbol{\Omega} + \beta \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}) = \alpha \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e} + \beta (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}) \boldsymbol{\Omega} - \beta \Omega^2 \mathbf{e}.$$

Подставим эти два выражения в (4.6):

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} + \frac{[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{F}]}{\Omega^2} - \frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{F})}{\Omega^2 (\alpha(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}) + \gamma \Omega^2)} (\alpha \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e} + \beta(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e})\boldsymbol{\Omega} - \beta \Omega^2 \mathbf{e}) + \lambda \boldsymbol{\Omega}.$$

Далее воспользуемся следующим свойством. Это свойство состоит в том, что если к скорости частиц, составляющих контур, прибавить произвольное поле скорости, направленное по касательной к контуру (в точке расположения каждой частицы), то картина движения контура как геометрического места точек не изменится. Поэтому если в сумме векторов $\alpha \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e} + \beta(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e})\boldsymbol{\Omega} - \beta \Omega^2 \mathbf{e}$, входящей в последнюю формулу, отбросить вектор $\beta \Omega^2 \mathbf{e}$, то скорость \mathbf{U} останется скоростью переноса контура с сохранением циркуляции скорости жидкости по нему. Вектор $\beta(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e})\boldsymbol{\Omega}$ также можно отбросить, так как такое отбрасывание равносильно изменению произвольного скалярного поля λ . Отбрасывание векторов $\beta \Omega^2 \mathbf{e}$ и $\beta(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e})\boldsymbol{\Omega}$ из выражения для \mathbf{U} приведет к изменению скорости \mathbf{U} , но эта скорость останется скоростью переноса контура с сохранением циркуляции скорости жидкости по нему. При этом выражение для \mathbf{U} упрощается:

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} + \frac{[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{F}]}{\Omega^2} - \frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{F})}{\Omega^2 (\alpha(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}) + \gamma \Omega^2)} \alpha [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}] + \lambda \boldsymbol{\Omega}.$$

Поскольку \mathbf{e} принадлежит σ_Γ , то $(\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}) = 0$. Отсюда

$$(\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}) = (\mathbf{e} \cdot (\alpha \mathbf{e} + \gamma \boldsymbol{\Omega} + \beta \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e})) = \alpha + \gamma(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}) = 0.$$

Используя эту связь, исключим α из выражения для \mathbf{U} :

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} + \frac{[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{F}]}{\Omega^2} + \frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{F})\gamma(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e})}{\Omega^2 \gamma (\Omega^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e})^2)} [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}] + \lambda \boldsymbol{\Omega}.$$

Замечание. Поскольку вихревые линии пересекают σ_Γ под острым углом к нормали, то $(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}) \neq 0$. Учитывая $\alpha + \gamma(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}) = 0$, имеем $(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}) = \alpha(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}) + \gamma \Omega^2 = \gamma (\Omega^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e})^2)$. Следовательно, $\gamma \neq 0$.

Сокращая в последнем выражении для \mathbf{U} числитель и знаменатель на $\gamma \neq 0$, получаем, что для произвольного ПВК и любого скалярного поля λ вектор-функция

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} + \frac{[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{F}]}{\Omega^2} + \frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{F})(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e})}{\Omega^2(\Omega^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e})^2)} [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}] + \lambda \boldsymbol{\Omega}. \quad (4.8)$$

будет скоростью движения точек этого контура с сохранением циркуляции скорости жидкости \mathbf{V} по нему.

Заметим, что в формулу (4.8) входят только параметры течения и касательный вектор ПВК, а параметры поверхности σ_Γ в ней не содержатся. В этом заключается основное преимущество формулы (4.8) по сравнению с (4.6). Этого преимущества удалось добиться в результате отказа от требования к перемещению контура по какой-либо заданной поверхности. Впервые эта формула была получена соискателем в [55].

Исключение потенциальной составляющей. Вязкая несжимаемая жидкость. Формула для скорости (4.4) получена в результате применения оператора rot , поэтому если правая часть равенства (4.2) представляется в виде

$$\mathbf{F}_1 + \nabla g - \nabla \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right),$$

где g – некоторая функция, то, повторив все приведенные выше рассуждения, можно заменить \mathbf{F} на \mathbf{F}_1 в формулах (4.5), (4.6) и (4.8). Это позволяет исключить потенциальную составляющую поля \mathbf{F} .

Поясним на примере, что получается в результате. Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости в потенциальном поле массовых сил. Динамическое уравнение системы уравнений Навье – Стокса запишем в форме Громеки – Ламба [1]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = -\nu \text{rot } \boldsymbol{\Omega} - \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \Pi + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right),$$

где p – давление, ρ – плотность, Π – потенциал массовых сил. Как только что было отмечено выше, в формулах (4.5), (4.6) и (4.8) в качестве \mathbf{F} можно взять первое слагаемое правой части последнего уравнения. Это позволяет исключить из расчета давление и потенциал массовых сил. В результате приходим к следующим выводам.

1. Для любого контура Γ , лежащего на односвязной неподвижной поверхности σ , которая целиком находится внутри поля течения и на которой нормальная составляющая завихренности не равна нулю, скорость

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} - v \frac{[\boldsymbol{\Omega} \times \text{rot } \boldsymbol{\Omega}]}{\Omega^2} + v \frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \text{rot } \boldsymbol{\Omega})}{\Omega^2 (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n})} [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}] + \lambda \boldsymbol{\Omega},$$

где $\lambda = -\frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})}{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n})} + v \frac{([\boldsymbol{\Omega} \times \text{rot } \boldsymbol{\Omega}] \cdot \mathbf{n})}{\Omega^2 (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n})}$, переносит контур Γ по поверхности σ с

сохранением циркуляции скорости \mathbf{V} по нему.

2. Для любого скалярного поля $\lambda = \lambda(x, y, z, t)$ при перемещении простого вихревого контура со скоростью

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} - v \frac{[\boldsymbol{\Omega} \times \text{rot } \boldsymbol{\Omega}]}{\Omega^2} - v \frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \text{rot } \boldsymbol{\Omega})(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e})}{\Omega^2 (\Omega^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e})^2)} [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}] + \lambda \boldsymbol{\Omega}$$

циркуляция скорости жидкости \mathbf{V} по этому контуру сохраняется.

Осесимметричное течение. Формула (4.8) значительно упрощается для контура Γ , представляющего собой окружность, образованную вращением (материальной) точки вокруг оси симметрии. Однако в осесимметричном течении такой контур зачастую не будет простым вихревым контуром (ПВК), так как, например, в течении вокруг вращающегося вала для любой содержащей контур Γ поверхности нарушается требование односвязности, и она не может быть диффеоморфной кругу. Также возможно существование особенностей на оси симметрии. Предложим подход к поиску скорости переноса \mathbf{U} таких контуров, требующий только существования производных гидродинамических функций в точках самого контура.

Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z с началом в точке O так, чтобы течение оказалось осесимметричным относительно оси Oz . Обозначим через $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ – правую тройку единичных векторов в радиальном, окружном и осевом направлениях соответственно. Вектор скорости имеет вид $\mathbf{V} = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_\varphi + \mathbf{V}_z = V_r \mathbf{e}_r + V_\varphi \mathbf{e}_\varphi + V_z \mathbf{e}_z$, где функции V_r, V_φ, V_z зависят только от r, z, t . В осесимметричном течении скорость переноса контура в виде окружности вращения (материальной) точки вокруг оси Oz представляет собой скорость переноса окружной циркуляции $2\pi r V_\varphi$.

Рассмотрим случай ненулевой радиально-осевой составляющей завихренности:

$$\Omega_{rz} \neq 0. \quad (4.9)$$

Тогда окружная составляющая уравнения (4.2) примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + [\mathbf{\Omega}_{rz} \times \mathbf{U}_2] = 0, \quad (4.10)$$

где

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_\varphi + \mathbf{V}_z + (\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\varphi) \frac{[\mathbf{\Omega}_{rz} \times \mathbf{e}_\varphi]}{\Omega_{rz}^2}. \quad (4.11)$$

Умножим уравнение (4.10) на $2\pi r \mathbf{e}_\varphi$, после чего преобразуем второе слагаемое, используя свойство цикличности смешанного произведения векторов и выражение для $\mathbf{\Omega}_{rz}$ в цилиндрической системе координат. Получим

$$\begin{aligned} (2\pi r \mathbf{e}_\varphi \cdot [\mathbf{\Omega}_{rz} \times \mathbf{U}_2]) &= \left(\mathbf{U}_2 \cdot \left[2\pi r \mathbf{e}_\varphi \times \left(-\frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial (r V_\varphi)}{\partial r} \mathbf{e}_z \right) \right] \right) = \\ &= (\mathbf{U}_2 \cdot \nabla) (2\pi r V_\varphi). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t} (2\pi r V_\varphi) + (\mathbf{U}_2 \cdot \nabla) (2\pi r V_\varphi) = 0.$$

Таким образом, при условии (4.9) скорость \mathbf{U}_2 , вычисленная по формуле (4.11), есть скорость переноса окружной циркуляции $2\pi r V_\varphi$.

Этот результат (скорость \mathbf{U}_2) получен в [55] одним из соавторов и не входит в список результатов соискателя. Другому соавтору принадлежит формула скорости переноса контура по плоской поверхности (подробнее см. [55], раздел 1), не вошедшая в текст диссертации.

Вариант формулы для скорости переноса простого вихревого контура.

Для дальнейшего упрощения формулы (4.8) еще раз воспользуемся тем, что если к скорости частиц, составляющих контур, прибавить произвольное поле скорости, направленное по касательной к контуру (в точке расположения каждой частицы), то картина движения контура как геометрического места точек не изменится.

Как уже отмечалось при выводе формулы (4.8), во всех точках простого вихревого контура векторы \mathbf{e} и $\mathbf{\Omega}$ неколлинеарны. Поэтому любой вектор можно представить линейной комбинацией векторов \mathbf{e} , $\mathbf{\Omega}$ и $[\mathbf{\Omega} \times \mathbf{e}]$. В частности,

$$\mathbf{F} = \alpha \mathbf{e} + \gamma \mathbf{\Omega} + \beta \mathbf{\Omega} \times \mathbf{e}, \quad (4.12)$$

где коэффициенты α , γ и β в общем случае различны в разных точках контура. Умножая скалярно это векторное равенство на \mathbf{e} и $\mathbf{\Omega}$, получим два скалярных уравнения, из которых выражаются коэффициенты α и γ :

$$\alpha = \frac{\Omega^2 (\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}) - (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{e})(\mathbf{F} \cdot \mathbf{\Omega})}{\Omega^2 - (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{e})^2}, \quad (4.13)$$

$$\gamma = \frac{(\mathbf{F} \cdot \mathbf{\Omega}) - (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{e})(\mathbf{F} \cdot \mathbf{e})}{\Omega^2 - (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{e})^2}. \quad (4.14)$$

Запишем выражение (4.8) для скорости \mathbf{U} с использованием формул (4.12) – (4.14). После несложных преобразований имеем

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} + \frac{(\mathbf{F} \cdot \mathbf{e})}{(\Omega^2 - (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{e})^2)} [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{e}] + \frac{\beta (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{\Omega} - \beta (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}) \mathbf{e}}{\Omega^2} + \lambda \mathbf{\Omega}.$$

Поскольку функция λ может быть выбрана произвольно, то слагаемые коллинеарные Ω можно отбросить, и выражение для \mathbf{U} принимает вид

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} + \frac{(\mathbf{F} \cdot \mathbf{e})}{\left(\Omega^2 - (\Omega \cdot \mathbf{e})^2\right)} [\Omega \times \mathbf{e}] - \beta(\Omega \cdot \Omega) \mathbf{e}.$$

А поскольку скорость переноса контура определяется с точностью до векторного поля, коллинеарного касательному вектору \mathbf{e} , каждая из скоростей

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{V} + \frac{(\mathbf{F} \cdot \mathbf{e})}{\left(\Omega^2 - (\Omega \cdot \mathbf{e})^2\right)} [\Omega \times \mathbf{e}] \quad (4.15)$$

и

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e} + \frac{(\mathbf{F} \cdot \mathbf{e})}{\left(\Omega^2 - (\Omega \cdot \mathbf{e})^2\right)} [\Omega \times \mathbf{e}] \quad (4.16)$$

будет скоростью движения точек контура Γ с сохранением циркуляции скорости жидкости \mathbf{V} по нему.

Формулы (4.15) и (4.16) менее громоздки по сравнению с формулой (4.8). Однако для проверки численных расчетов более полезной представляется (4.16) по следующей причине.

Формула (4.16) по сравнению с (4.15) не содержит составляющей, коллинеарной касательному вектору \mathbf{e} . В теории наличие или отсутствие такой составляющей не меняет картину движения контура как геометрического места точек. Но в практических вычислениях составляющая, коллинеарная вектору \mathbf{e} , приводит к дополнительным ошибкам, для уменьшения которых требуется уменьшать шаги пространственно-временной расчетной сетки. Поэтому формула (4.16) предпочтительнее, чем более простая на вид формула (4.15).

Из (4.16) следует необходимость «отслеживания» как минимум двух по-разному ориентированных контуров. Действительно, если обозначить через \mathbf{F}_e касательную к контуру составляющую вектора \mathbf{F} , а через Ω_\perp и \mathbf{V}_\perp – нормальные к вектору \mathbf{e} (в точках контура) составляющие векторов Ω и \mathbf{V} соответственно, то

формулу (4.16) можно представить в виде $\mathbf{U}_1 = \mathbf{V}_\perp + \frac{(\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{e})}{\Omega_\perp^2} [\boldsymbol{\Omega}_\perp \times \mathbf{e}]$. Поэтому

проверка закона сохранения циркуляции скорости \mathbf{V} по выбранному контуру позволяет «отфильтровать» лишь ошибки вычисления \mathbf{V}_\perp , \mathbf{F}_e и $\boldsymbol{\Omega}_\perp$. Для проверки других компонент \mathbf{V} , \mathbf{F} и $\boldsymbol{\Omega}$ требуется рассматривать движение другого контура, имеющего иную ориентацию в пространстве.

Скорость переноса простого вихревого контура по подвижной поверхности в пространстве. При проверке расчетов, полученных сеточными методами, естественно воспользоваться теми же сетками, которые используются в расчетах. Как правило, трехмерную пространственную сетку можно представить набором двумерных сеток, расположенных на, вообще говоря, подвижных поверхностях в пространстве. Поэтому было бы удобно при проверке расчета рассматривать движение контура, который все время остается на одной и той же поверхности. Однако скорость (4.16) не гарантирует, что контур, расположенный на одной из таких поверхностей, при движении со скоростью \mathbf{U}_1 останется лежать на этой поверхности. Для случая неподвижных сеток это следует из того, что вектор \mathbf{U}_1 может иметь ненулевую нормальную к поверхности составляющую. В этой связи представляется полезным получить формулу для скорости переноса контура, обеспечивающую расположение контура на поверхности во все время движения. Пусть \mathbf{n} – единичный нормальный вектор к одной из таких поверхностей σ . Рассмотрим контур, лежащий на неподвижной поверхности σ . Если вновь воспользоваться тем, что скорость переноса контура определена с точностью до линейной комбинации векторов \mathbf{e} и $\boldsymbol{\Omega}$, то после соответствующих преобразований формулы (4.16) получим

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{V}_\sigma - \frac{V_n}{\Omega_n} \boldsymbol{\Omega}_\sigma + \frac{F_e}{\Omega_n} [\mathbf{n} \times \mathbf{e}], \quad (4.17)$$

где векторы \mathbf{V}_σ и $\boldsymbol{\Omega}_\sigma$ – проекции векторов \mathbf{V} и $\boldsymbol{\Omega}$ на поверхность σ ; $V_n = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})$ и $\Omega_n = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n})$ – величины нормальных к поверхности σ составляющих векторов

\mathbf{V} и $\mathbf{\Omega}$; $F_e = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{e})$ – величина проекции правой части уравнения движения (4.1) на касательный к контуру вектор \mathbf{e} . Векторы \mathbf{V}_σ , $\mathbf{\Omega}_\sigma$ и $[\mathbf{n} \times \mathbf{e}]$, входящие в (4.17), параллельны поверхности σ . Поэтому, двигаясь со скоростью (4.17), контур будет оставаться на поверхности σ .

Рассмотрим случай подвижной поверхности σ . Движение поверхности можно описать движением частиц, составляющих эту поверхность с некоторой скоростью $\mathbf{W}(\sigma)$. Вообще говоря, эта скорость различна для разных частиц поверхности. Положение поверхности в различные моменты времени определяется нормальной к поверхности σ составляющей этой скорости $\mathbf{W}_n(\sigma) = (\mathbf{W}(\sigma) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = W_n \mathbf{n}$.

Скорость переноса контура определена с точностью до вектора, коллинеарного завихренности $\mathbf{\Omega}$. Поэтому после соответствующих преобразований формулы (4.17) получим

$$\mathbf{U}_3 = W_n \mathbf{n} + \mathbf{V}_\sigma + \frac{(W_n - V_n)}{\Omega_n} \mathbf{\Omega}_\sigma + \frac{F_e}{\Omega_n} [\mathbf{n} \times \mathbf{e}], \quad (4.18)$$

где обозначения имеют тот же смысл, что и для формулы (4.17). Двигаясь со скоростью \mathbf{U}_3 , контур будет оставаться на подвижной поверхности σ , если эта поверхность движется со скоростью $W_n \mathbf{n}$.

Формулы (4.17) и (4.18) впервые получены в статье [56].

Верификация конечно-разностных схем. Схемы третьего и более высокого порядков уже начали появляться и широко используются. Например, на основе работы [147] создана и используется программа с четвертым порядком точности [86, 148], а примеры использования схем еще большего порядка точности можно найти в статьях [149–151]. При этом многие известные и широко используемые программы (ANSYS, STAR-CCM+ и др.) имеют второй порядок аппроксимации, равный максимальному порядку производных, входящих в

уравнения движения жидкости или газа. Важным обстоятельством, обеспечивающим возможность применения полученных результатов к верификации конечно-разностных схем путем верификации расчетов, полученных этими схемами, является то, что выражения для скорости \mathbf{U} содержат производные скорости жидкости \mathbf{V} того же порядка, что и входящие в уравнение движения. Поясним роль этого обстоятельства на примере расчета течений вязкой несжимаемой жидкости в рамках уравнений Навье – Стокса.

Для простоты будем считать, что в схемах используется равномерная пространственно-временная сетка с общим безразмерным шагом h . Если схема имеет второй порядок аппроксимации, то вторые производные компонент скорости жидкости могут быть вычислены с точностью $o(1)$, $h \rightarrow 0$. Для схем четвертого порядка – с точностью $o(h^2)$, $h \rightarrow 0$, и так далее. При этом первые производные вычисляются с точностью на порядок выше, чем вторые производные. Поскольку для уравнений Навье – Стокса скорость \mathbf{U} выражается через производные первого и второго порядков, то она может быть вычислена с точностью $o(1)$, $h \rightarrow 0$. Поэтому измельчение сетки и повышение точности машинных операций позволит вычислить \mathbf{U} с любой заданной точностью, если только последовательность расчетов действительно сходится к точному решению. Это, в свою очередь, позволит с любой заданной точностью вычислить положение точек контура в разные моменты времени и, следовательно, циркуляцию (интеграл по контуру), которая необходима для проверки полученного выше закона сохранения этой циркуляции. Если расчетная схема верна, то при уменьшении шага h и повышении точности машинных операций можно будет убедиться в сохранении циркуляции по контуру, движущемуся со скоростью \mathbf{U} . Или если циркуляция не сохраняется, то можно сделать вывод об ошибке в проверяемых расчетах.

Аналогичная ситуация имеет место для конечно-разностных схем расчета течений вязкого газа: порядок аппроксимации таких схем совпадает или выше порядка старших производных, входящих в уравнение движения. Это позволяет с

достаточной точностью вычислять циркуляцию по движущемуся со скоростью U контуру.

Использование точных решений. Остановимся на одной проблеме применения полученных выше формул для проверки численных расчетов. Численные решения, как правило, получаются с некоторой ошибкой – с некоторым отклонением от точного решения. Поэтому точное сохранение численного значения циркуляции на численном решении невозможно. И для выбраковки неприемлемых решений необходимо решить вопрос о величине отклонения циркуляции от постоянного значения, превышение которой свидетельствует о "существенном" отличии между численным и точным решениями. Для этого представляется необходимым провести численные эксперименты для выяснения точности, с которой сохраняется циркуляция, когда численное решение имеет некоторую "приемлемую" точность. В таких численных экспериментах необходимо иметь возможность вычислять отклонение численного решения от точного решения. Это возможно, если известно точное решение. Причем в рассматриваемой области течения не должно быть точек с нулевой завихренностью. Последнее требование связано с тем, что полученные в данном разделе формулы верны только для вихревых ($\Omega \neq 0$) зон течения.

Для идеальной несжимаемой жидкости в качестве таких точных решений можно использовать винтовые решения Громеки – Бельтрами [152, 153], ABC-решения [154, 155], точные винтовые решения Богоявленского [156] и другие точные винтовые решения (например, [157, 158]). Винтовые решения обладают важным свойством. Из каждого стационарного винтового решения уравнений Эйлера для несжимаемой жидкости можно получить нестационарное решение уравнений Навье – Стокса для вязкой несжимаемой жидкости. Для этого используется метод Тркала [159, 160] (на русском языке метод Тркала описан в [161]).

Большое количество точных вихревых, но не винтовых решений для вязкой несжимаемой жидкости можно найти в монографии Беркера [162], в обзорах [163–165] и в статьях последнего десятилетия, например в [166–168]. Значительно

меньше известно точных вихревых решений для уравнений движения вязкого (сжимаемого) газа. Однако они есть, например в [169–175].

Иная ситуация имеет место в случае точных вихревых решений для уравнений движения идеального газа. Если не считать тривиальные течения, например течения с прямыми траекториями или движение по концентрическим окружностям, то примеры точных вихревых решений соискателю неизвестны. Как сказано выше, для проверки расчетов с помощью предложенного выше универсального интегрального инварианта нужно определить некоторую «приемлемую» точность. Для этого, в свою очередь, нужны точные решения. *Поэтому поиск точных вихревых решений для уравнений движения идеального газа есть практически важная задача будущих исследований.* Вопрос, связанный с поиском точных винтовых решений уравнений движения идеального газа, будет рассмотрен в конце главы в разделе 4.7. А в следующем разделе продолжается поиск интегральных инвариантов, но не для общего случая (как в настоящем разделе), а для частного случая течений за отошедшей УВ.

4.2 Обобщение инварианта Крокко для пространственных течений за отошедшей ударной волной

Как для качественного анализа, так и для целей верификации численных алгоритмов, большой интерес представляют инварианты линий и поверхностей тока (величины, сохраняющие свое значение на линиях и поверхностях тока), связывающие завихренность с другими параметрами течения. Такие инварианты до настоящего времени были известны только для плоских и осесимметричных течений за отошедшей УВ: в плоском случае в потоке за УВ вдоль линий тока сохраняется отношение завихренности к давлению (Ω/p), а в осесимметричном – $I_C = \Omega/(pr)$, где r – расстояние от оси симметрии [113]. Но для решения современных задач требуется проведение численных расчетов в общем

пространственном случае. Инварианты, пригодные для верификации таких расчетов, до сих пор отсутствовали.

После того, как в разделе 2.3 была обоснована замкнутость вихревых линий (они лежат на изоэнтропийных поверхностях тока) появилась возможность рассматривать циркуляции некоторых полей по этим замкнутым линиям. В настоящем разделе будет рассмотрено свойство циркуляции вектора $\Omega p / \Omega^2$ по вихревой линии.

Используем представление о фиктивных q -частицах, которые рассматривались в разделе 1.2. Они движутся по замкнутым вихревым линиям со скоростью $\mathbf{q} = \alpha \Omega / p$, где α – размерный коэффициент, обеспечивающий для \mathbf{q} размерность скорости.

Как показано в разделе 1.2, q -частицы, которые в некоторый момент времени составляют векторную линию поля $\rho \mathbf{V}$ (то есть линию тока течения газа) и движутся со скоростью $\mathbf{q} = \alpha \Omega / p$, будут и в последующем находиться на одной из линий тока течения газа.

Поскольку траектории q -частиц лежат на замкнутых вихревых линиях, они (как и вихревые линии) один раз опоясывают изоэнтропийные поверхности. Если l – переменная длина дуги на вихревой линии, то q -частица проходит расстояние dl за время $dl / |\mathbf{q}|$. Поэтому время, за которое q -частица сделает полный оборот по замкнутой вихревой линии γ , равно криволинейному интегралу $\int_{\gamma} |\mathbf{q}|^{-1} dl = \int_{\gamma} \alpha^{-1} (p / \Omega) dl$ (он представляет собой не что иное, как циркуляцию вектора $\Omega p / \Omega^2$ по вихревой линии γ). Если q -частицы находились в начальный момент времени на одной линии тока, то, сделав один оборот, они должны оказаться на этой же линии тока одновременно. Следовательно, время полного оборота у всех этих частиц одинаково, и величина $I_1 = \int_{\gamma} (p / \Omega) dl$ одинакова для всех вихревых линий γ , лежащих на одной изоэнтропийной поверхности (интегральный инвариант изоэнтропийных поверхностей тока). Следует отметить,

что обнаруженное свойство сохранения выполняется как в дозвуковой, так и в сверхзвуковой области течения за отошедшей ударной волной.

В незакрученных осесимметричных течениях вихревые линии суть окружности с центрами на оси, а подинтегральная функция (p/Ω) на окружности интегрирования постоянна, так что установленный инвариант $I_1 = \int_{\gamma} (p/\Omega) dl$ совпадает с известным инвариантом Крокко $I_C = \Omega/(pr)$. Таким образом, новый инвариант является обобщением инварианта Крокко на общий (несимметричный) пространственный случай. Этот инвариант был впервые опубликован в [65], где научная роль соавтора состоит в том, что он обнаружил факт «вырождения» I_1 в инвариант Крокко.

4.3 Второе интегральное обобщение инварианта Крокко для пространственных течений за отошедшей ударной волной

Для частного случая закрученных осесимметричных течений неинтегральный инвариант Крокко $I_C = \Omega/(pr)$ обобщен в [176]. Оказалось, что окружная составляющая завихренности Ω_{φ} представима в виде $\Omega_{\varphi} = r^{-1}\rho C_1 + rpC_2$, где C_1 и C_2 есть функции линий тока (ρ – плотность), причем в отсутствие закрутки $C_1 = 0$. В общем пространственном случае неинтегральный инвариант Л. Крокко был обобщен в предыдущем разделе интегральным инвариантом I_1 . Это был первый инвариант, пригодный для верификации расчетов течений за отошедшей УВ в общем пространственном случае.

Появлению инварианта I_1 предшествовало обнаружение факта замкнутости вихревых линий за отошедшей УВ. Если рассматривать векторные поля, связанные с течением (то есть такие, которые выражаются через скорость,

плотность и давление газа и через производные этих параметров), то в разделе 2.4 получено еще одно (кроме завихренности) векторное поле с замкнутыми векторными линиями. Речь идет о векторе $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla \sigma$, где $\sigma = p \rho^{-k}$ (\mathbf{V} , ρ и p – скорость, плотность и давление газа соответственно, k – показатель адиабаты). Данный раздел посвящен поиску интегрального инварианта, связанного с замкнутыми линиями вектора \mathbf{a} . (В отличие от осесимметричного случая, в общем пространственном случае эти линии могут не совпадать с вихревыми линиями).

Уравнения движения. Рассмотрим течение идеального (вязкость и теплопроводность отсутствуют) газа за отошедшей УВ при обтекании тела равномерным сверхзвуковым потоком. Течение за УВ вследствие однородности набегающего потока является изоэнергетическим, и уравнение Эйлера, записанное в форме Крокко [93, 94], имеет вид

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = (k-1)^{-1} p \rho^{-1} \sigma^{-1} \nabla \sigma, \quad \boldsymbol{\Omega} = \text{rot} \mathbf{V}. \quad (4.19)$$

Замыкает систему уравнение неразрывности и уравнение сохранения энтропийной функции вдоль линий тока:

$$\text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (\mathbf{V} \cdot \nabla) \sigma = 0. \quad (4.20)$$

Как обычно, все параметры течения (\mathbf{V} , ρ и p) будем считать дважды непрерывно дифференцируемыми функциями координат.

Воображаемые частицы. Следствие критерия Зоравского [45, 46] (уже использованное в разделе 1.2) применительно к стационарному и соленоидальному (см. первую формулу (4.20)) полю вектора $\rho \mathbf{V}$ можно сформулировать следующим образом.

Если в области G стационарное векторное поле \mathbf{q} непрерывно дифференцируемо, а стационарное и соленоидальное поле $\rho \mathbf{V}$ дважды непрерывно дифференцируемо и выполняется равенство

$$\rho \mathbf{V} \times \text{rot}(\mathbf{q} \times (\rho \mathbf{V})) = 0, \quad (4.21)$$

то воображаемые частицы, составляющие в некоторый момент времени открытый сегмент (то есть не включающий свои крайние точки) векторной линии $\rho\mathbf{V}$, лежащий в области G , двигаясь со скоростью \mathbf{q} , будут составлять открытый сегмент одной из векторных линий $\rho\mathbf{V}$ в каждый последующий момент времени (до тех пор, пока эти частицы находятся в области G). Как и выше, такие воображаемые частицы будем называть q -частицами. Очевидно, что векторные линии $\rho\mathbf{V}$ совпадают с линиями тока. Одна из таких скоростей $\mathbf{q} = \alpha\boldsymbol{\Omega}/\rho$ была найдена в разделе 1.2 и использовалась в предыдущем разделе. Эта скорость коллинеарна завихренности, соответствующие q -частицы движутся по замкнутым вихревым линиям. Получим такое выражение для \mathbf{q} , чтобы q -частицы двигались по замкнутым линиям вектора \mathbf{a} .

В течении газа за УВ будем искать \mathbf{q} в виде $\mathbf{q} = \lambda\mathbf{a}$, где λ – некоторое гладкое скалярное поле. Тогда выражение $\mathbf{q} \times (\rho\mathbf{V})$, стоящее под знаком ротора в (4.21), примет вид $\lambda\mathbf{a} \times (\rho\mathbf{V}) = \lambda\rho(\mathbf{V} \times \nabla\sigma) \times \mathbf{V}$. Раскроем двойное векторное произведение и учтем ортогональность скорости \mathbf{V} и градиента $\nabla\sigma$, вытекающую из (4.18). Получим $\mathbf{q} \times (\rho\mathbf{V}) = \lambda\rho\mathbf{V}^2\nabla\sigma$. Следовательно, если положить $\lambda = \lambda_0\rho^{-1}\mathbf{V}^{-2}$, где λ_0 – произвольная ненулевая константа, обеспечивающая для вектора $\mathbf{q} = \lambda\mathbf{a} = \lambda_0\rho^{-1}\mathbf{V}^{-2}\mathbf{a}$ размерность скорости, то уравнение (4.21) окажется выполненным (поскольку в этом случае под знаком ротора окажется градиент $\nabla\sigma$, умноженный на константу λ_0). Таким образом, можно считать, что линии тока переносятся q -частицами, движущимися со скоростью

$$\mathbf{q} = \lambda_0\rho^{-1}\mathbf{V}^{-2}\mathbf{a} = \lambda_0\rho^{-1}\mathbf{V}^{-2}(\mathbf{V} \times \nabla\sigma). \quad (4.22)$$

О ненулевом значении \mathbf{q} . В следующем подразделе будет интегрироваться величина, обратная к $|\mathbf{q}|$. Поэтому докажем, что всюду, за исключением лидирующей линии тока (линии торможения), величина \mathbf{q} отлична от нуля.

Будем исходить из общепринятого допущения о том, что по крайней мере в некоторой окрестности выпуклой носовой части скорость \mathbf{V} обращается в нуль только в передней точке торможения. Поэтому, исходя из (4.22) и из ортогональности \mathbf{V} и $\nabla\sigma$, приходим к выводу, что величина \mathbf{q} может обращаться в нуль только вместе с $\nabla\sigma$. Докажем, что всюду, за исключением лидирующей линии тока, величина $\nabla\sigma$, а следовательно, и величина \mathbf{q} , отличны от нуля. Поскольку $(\mathbf{V}\cdot\nabla\sigma)=0$, градиент этого скалярного произведения также будет равен нулю, то есть $\nabla(\mathbf{V}\cdot\nabla\sigma)=0$. Используя известное векторное тождество для градиента скалярного произведения и учитывая, что ротор градиента равен нулю, получим

$$(\mathbf{V}\cdot\nabla)(\nabla\sigma)+((\nabla\sigma)\cdot\nabla)\mathbf{V}+(\nabla\sigma)\times\text{rot}\mathbf{V}=0. \quad (4.23)$$

Это выражение замечательно тем, что компоненты $\nabla\sigma$ дифференцируются только в первом слагаемом $(\mathbf{V}\cdot\nabla)(\nabla\sigma)$, а в другие слагаемые (4.23) компоненты $\nabla\sigma$ входят линейно как коэффициенты при различных производных компонент скорости. Поэтому можно применить способ раздела 2.1. А именно представить (4.23) в виде $\frac{d}{dl}(\nabla\sigma)=\frac{1}{|\mathbf{V}|}A(\nabla\sigma)$, где l – переменная длина дуги вдоль линии тока, A – матрица, размером 3×3 , с коэффициентами, непрерывно зависящими от производных компонент скорости \mathbf{V} . При заданном поле скорости эту систему уравнений можно считать автономной относительно компонент $\nabla\sigma$. Поэтому, согласно известным свойствам систем обыкновенных дифференциальных уравнений [97–101], получаем следующее

утверждение 1. *В течении за отошедшей ударной волной на любой линии тока на всем ее участке, на котором $|\mathbf{V}|>0$, либо $|\nabla\sigma|\equiv 0$, либо $|\nabla\sigma|>0$.*

Сразу за отошедшей ударной волной искривленной формы завихренность равна нулю только в начале лидирующей линии [105, 106]. При этом завихренность на УВ с дозвуковой стороны лежит в касательной к УВ плоскости [63], а скорость на УВ с дозвуковой стороны имеет ненулевую нормальную к УВ составляющую. Поэтому всюду, кроме начала лидирующей линии (где

завихренность равна нулю), на дозвуковой стороне УВ вектор $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V}$ отличен от нуля. С учетом (4.19) это значит, что в начале всех линий тока на УВ, кроме начала лидирующей линии, $|\nabla\sigma| > 0$. Согласно утверждению 1, это значит, что во всем течении за УВ, кроме лидирующей линии тока, градиент энтропийной функции отличен от нуля ($|\nabla\sigma| > 0$). Как замечено в начале данного подраздела, величина \mathbf{q} может обращаться в нуль только вместе с $\nabla\sigma$. Поэтому во всем течении за УВ, кроме лидирующей линии тока, скорость \mathbf{q} , определяемая формулой (4.22), отлична от нуля. Этот факт был установлен в статье [70].

Интегральный инвариант. В разделе 2.4 показано, что по крайней мере вблизи передней точки торможения линии вектора $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla\sigma$ замкнуты и один раз охватывают лидирующую линию тока (линию тока, которая пересекает отошедшую УВ по нормали, и которая, как доказано в разделе 1.2, совпадает с линией торможения). Поскольку траектории q -частиц лежат на замкнутых линиях \mathbf{a} , эти траектории (как и линии \mathbf{a}) не только лежат на изоэнтропийных поверхностях, но и один раз опоясывают их. Применим теперь идею доказательства, предложенную в предыдущем разделе для замкнутых траекторий q -частиц, лежащих на изоэнтропийных поверхностях. Если γ – замкнутая линия вектора \mathbf{a} , l – переменная длина дуги на γ , то q -частица проходит по кривой γ расстояние dl за время $dl/|\mathbf{q}|$. Поэтому время, за которое q -частица сделает полный оборот по замкнутой линии γ , равно криволинейному интегралу $\int_{\gamma} |\mathbf{q}|^{-1} dl$. Если q -частицы составляли в начальный момент времени одну из линий тока, то, сделав один оборот, они должны составлять ту же самую линию тока. Поэтому время полного оборота у всех q -частиц, лежащих на одной изоэнтропийной поверхности, одинаково, и величина $I = \int_{\gamma} |\mathbf{q}|^{-1} dl$ есть новый (второй) интегральный инвариант изоэнтропийных поверхностей. Используя (4.22) и (4.19), получим

$$\mathbf{q} = \lambda_0 \rho^{-1} \mathbf{V}^{-2} \mathbf{V} \times \nabla\sigma = \lambda_0 (k-1) \sigma \frac{1}{p} (\mathbf{\Omega} - \mathbf{V}(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{V}) / V^2). \quad (4.24)$$

Легко проверить, что вектор $\mathbf{\Omega}_a = \mathbf{\Omega} - \mathbf{V}(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{V}) / V^2$, входящий в выражение (4.24), есть проекция завихренности на вектор \mathbf{a} , то есть, что $\mathbf{\Omega}_a = \mathbf{a}(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{a}) / \mathbf{a}^2$. Любая замкнутая линия γ , по которой производится интегрирование в новом инварианте, лежит на изоэнтропийной поверхности. Следовательно, множитель $\lambda_0(k-1)\sigma$ в (4.24) остается постоянным вдоль γ и одинаков для всех γ , лежащих на одной изоэнтропийной поверхности. Поэтому выражение для нового инварианта можно упростить:

$$I_2 = \int_{\gamma} \frac{P}{|\mathbf{\Omega}_a|} dl. \quad (4.25)$$

В незакрученном осесимметричном течении любая линия γ совпадает с вихревой линией, то есть $\mathbf{\Omega}_a = \mathbf{\Omega}$, а отношение $\frac{P}{|\mathbf{\Omega}|}$ не меняется вдоль γ , и интеграл (4.25) равен $\frac{2\pi r p}{|\mathbf{\Omega}|}$. Таким образом, в незакрученном осесимметричном случае инвариант (4.25) совпадает с неинтегральным инвариантом Крокко $I_C = \Omega / (pr)$, а в общем пространственном случае течений за отошедшей УВ – обобщает его.

Инвариант (4.25) получен в статье [71].

4.4 Интегральный инвариант течений идеального газа за отошедшей ударной волной

В настоящем разделе будет получен интегральный инвариант, связанный с семейством замкнутых линий вектора $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla \sigma$, который в осесимметричном случае вырождается в тождество типа $0 \equiv 0$.

Используем обозначения и уравнения движения из предыдущего раздела, в котором показано, что за отошедшей ударной волной модули $|\mathbf{a}|$ и $|\nabla \sigma|$ отличны

от нуля всюду, кроме лидирующей линии тока (где завихренность равна нулю, а, согласно (4.19), и $\nabla\sigma$ равен нулю). Пусть γ – одна из замкнутых линий вектора $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla\sigma$, не имеющая общих точек с УВ. Пусть, далее, A – произвольно выбранная точка на линии γ . Чтобы отличать эту линию от остальных линий γ , обозначим ее символом γ_A . Линия γ_A не имеет общих точек с УВ и, следовательно, отдалена от нее на ненулевое расстояние. Поэтому существует плоская окрестность $O(A)$ точки A , нормаль которой параллельна $\mathbf{a}(A)$, и такая, что все векторные линии \mathbf{a} пересекают эту окрестность под острым углом к нормали и замкнуты (в точке A окрестность $O(A)$ пересекается векторной линией \mathbf{a} по нормали). Гомеоморфную тору область, представляющую собой объединение всех векторных линий \mathbf{a} , проходящих через $O(A)$, обозначим через G (рис. 4.1). Удалим из области G точки окрестности $O(A)$, получим разрезанную область $G' = G \setminus O(A)$.

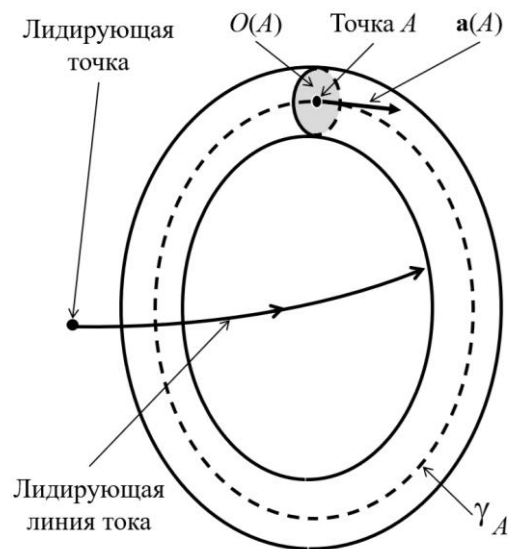


Рисунок 4.1 – Точка A лежит на замкнутой векторной линии γ_A . Область G состоит из векторных линий \mathbf{a} , проходящих через плоскую окрестность $O(A)$

Найдем скорость воображаемых q_a -частиц, переносящих векторные линии \mathbf{a} внутри разрезанной области G' . Из (4.19) следует, что $(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla\sigma) = 0$. Поэтому

$\operatorname{div}(\mathbf{a}) = \operatorname{div}(\mathbf{V} \times \nabla \sigma) = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \sigma - \mathbf{V} \cdot \operatorname{rot}(\nabla \sigma) = 0$, то есть поле \mathbf{a} соленоидально. Следовательно, для поиска скорости \mathbf{q}_a , с которой движутся q_a -частицы, переносящие векторные линии \mathbf{a} , можно использовать формулу $\mathbf{c} \times \operatorname{rot}(\mathbf{c} \times \mathbf{q}) = 0$ (критерий Зоравского для стационарного соленоидального поля \mathbf{c}). Запишем эту формулу, подставив в нее соленоидальное поле $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla \sigma$ – на место \mathbf{c} , и \mathbf{q}_a – на место \mathbf{q} :

$$(\mathbf{V} \times \nabla \sigma) \times \operatorname{rot}((\mathbf{V} \times \nabla \sigma) \times \mathbf{q}_a) = 0. \quad (4.26)$$

Будем искать скорость q_a -частиц в виде

$$\mathbf{q}_a = \lambda V^{-2} \mathbf{V} + |\nabla \sigma|^{-2} \nabla \sigma, \quad (4.27)$$

где λ – искомое гладкое скалярное поле. Заметим, что на данном этапе исследования еще не известно, существует ли поле λ , дающее решение (4.27) уравнения (4.26).

Непосредственной проверкой с использованием известных формул векторного анализа и с учетом равенств $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \sigma = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \sigma = 0$ можно убедиться, что уравнение (4.26) после подстановки в него (4.27) сначала приводится к виду $(\mathbf{V} \times \nabla \sigma) \times \operatorname{rot}(\lambda \nabla \sigma - \mathbf{V}) = 0$, а затем – к векторному равенству $((\mathbf{V} \times \nabla \sigma) \cdot \nabla \lambda) \nabla \sigma + (\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \nabla \sigma = 0$, которое равносильно (поскольку $\nabla \sigma \neq 0$) скалярному равенству

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla \lambda) + (\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Omega}) = 0.$$

Если обозначить единичный касательный вектор к векторной линии \mathbf{a} через $\mathbf{e}_a = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$, то последнее равенство можно записать следующим образом:

$$(\mathbf{e}_a \cdot \nabla \lambda) = -(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Omega})/|\mathbf{a}|. \quad (4.28)$$

Если скалярное поле λ будет удовлетворять (4.28) в G' , то скорость (4.27) будет удовлетворять (4.26) в G' . Такое поле λ существует (и не единственно). Действительно, на одной из сторон разреза области G окрестностью $O(A)$ зададим $\lambda = 0$. Назовем эту сторону разреза первой, а другую – второй стороной разреза. Продолжим функцию λ во внутренние точки области G'

интегрированием уравнения (4.28) вдоль векторных линий \mathbf{a} . В результате функция λ окажется заданной и удовлетворяющей (4.28) во всех точках области G' . При этом значение λ на второй стороне разреза вычисляется как криволинейный интеграл по замкнутой векторной линии γ (l – переменная длина дуги на линии γ):

$$\lambda_2 = -\int_{\gamma} (\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Omega}) / |\mathbf{a}| dl.$$

Теперь, когда существование функции λ доказано, воспользуемся методом раздела 3.7, предложенным в [66] (в отличие от [66], где рассматривались замкнутые вихревые линии, здесь рассматриваются замкнутые линии \mathbf{a}). Перейдем к рассмотрению движения q_a -частиц, лежащих в начальный момент времени на линии γ_A (проходящей через точку A) и движущихся со скоростью (4.27), где функция λ получена описанным выше способом. Предельное значение скорости \mathbf{q}_a на первой стороне разреза равно $|\nabla\sigma|^{-2} \nabla\sigma$, а на второй стороне $\mathbf{q}_a = \lambda_0 V^{-2} \mathbf{V} + |\nabla\sigma|^{-2} \nabla\sigma$, где $\lambda_0 = -\int_{\gamma_A} (\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Omega}) / |\mathbf{a}| dl$ (l – переменная длина дуги на линии γ_A). Но линия γ_A непрерывна и при переносе q_a -частицами переходит в непрерывные векторные линии \mathbf{a} . Поэтому предельные значения \mathbf{q}_a должны иметь одинаковые нормальные к γ_A составляющие. То есть разность предельных значений $(\lambda_0 V^{-2} \mathbf{V} + |\nabla\sigma|^{-2} \nabla\sigma) - |\nabla\sigma|^{-2} \nabla\sigma = \lambda_0 V^{-2} \mathbf{V}$ должна иметь нулевую нормальную к \mathbf{a} составляющую. Это возможно только, если $\lambda_0 = 0$ или

$$\int_{\gamma_A} (\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Omega}) / |\mathbf{a}| dl = 0. \quad (4.29)$$

Поскольку векторная линия γ_A была выбрана произвольно, равенство (4.29) представляет собой интегральный инвариант, верный для всех замкнутых векторных линий $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla\sigma$.

Исключим градиент энтропийной функции из выражения для модуля вектора \mathbf{a} . Учитывая ортогональность скорости и градиента энтропийной функции и используя (4.19), имеем

$$|\mathbf{a}| = (k-1)p^{-1}\rho\sigma|\mathbf{V}| \cdot |\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V}| = (k-1)p^{-1}\rho\sigma|\mathbf{V}|^2|\mathbf{\Omega}|\sin\alpha,$$

где α – угол между векторами скорости \mathbf{V} и завихренности $\mathbf{\Omega}$. Поэтому подынтегральная функция в (4.29) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{\Omega})/|\mathbf{a}| &= |\mathbf{V}||\mathbf{\Omega}|\cos\varphi \left((k-1)p^{-1}\rho\sigma|\mathbf{V}|^2|\mathbf{\Omega}|\sin\alpha \right)^{-1} = \\ &= \left((k-1)^{-1}p\rho^{-1}\sigma^{-1} \right) |\mathbf{V}|^{-1}|\mathbf{\Omega}|\operatorname{ctg}\alpha. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Все векторные линии $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla\sigma$ лежат на изоэнтропийных поверхностях. Это значит, что подынтегральная функция в (4.29) может быть умножена на $(k-1)\sigma$ и на константу, связывающую в законе Менделеева – Клапейрона величину $p\rho^{-1}$ с температурой T , и после этого интеграл (4.29) останется равным нулю. Вместе с (4.30) это позволяет утверждать, что *в стационарном течении за отошедшей ударной волной при однородном набегающем сверхзвуковом потоке для всех*

замкнутых линий γ вектора $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla\sigma$ выполняется равенство
$$\int_{\gamma} \frac{T \operatorname{ctg}\alpha}{|\mathbf{V}|} dl = 0,$$

где T – температура, α – угол между векторами скорости \mathbf{V} и завихренности $\mathbf{\Omega}$. Этот интегральный инвариант получен в [69].

4.5 Сравнение трех интегральных инвариантов течений идеального газа за отошедшей ударной волной

Для удобства сравнения интегральных инвариантов, полученных в настоящей главе для течений за отошедшей УВ, к символу контура γ добавим нижний индекс, показывающий по какой замкнутой векторной линии вычисляется циркуляция. Замкнутые вихревые линии будем обозначать символом $\gamma_{\mathbf{\Omega}}$, а замкнутые линии вектора \mathbf{a} – символом $\gamma_{\mathbf{a}}$. Тогда выражения для инвариантов, полученных в разделах 4.2, 4.3 и 4.4, примут вид

$$\int_{\gamma_{\Omega}} (p/\Omega)dl, \quad \int_{\gamma_a} (p/|\Omega_a|)dl \quad \text{и} \quad \int_{\gamma_a} \frac{T \operatorname{ctg} \alpha}{|\mathbf{V}|} dl = 0$$

соответственно.

В отличие от инвариантов $\int_{\gamma_{\Omega}} (p/\Omega)dl$ и $\int_{\gamma_a} (p/|\Omega_a|)dl$, инвариант $\int_{\gamma_a} \frac{T \operatorname{ctg} \alpha}{|\mathbf{V}|} dl = 0$ может использоваться только для анализа несимметричных течений. Действительно, в незакрученных осесимметричных течениях $\operatorname{ctg} \alpha = 0$, и поэтому инвариант $\int_{\gamma_a} \frac{T \operatorname{ctg} \alpha}{|\mathbf{V}|} dl = 0$ дает только тривиальную информацию типа $0 \equiv 0$. Однако в несимметричных течениях этот инвариант более удобен для верификации расчетов. Во-первых, в отличие от инвариантов $\int_{\gamma_{\Omega}} (p/\Omega)dl$ и $\int_{\gamma_a} (p/|\Omega_a|)dl$, его значение известно (оно равно нулю). Во-вторых, это нулевое значение интеграл $\int_{\gamma_a} \frac{T \operatorname{ctg} \alpha}{|\mathbf{V}|} dl = 0$ принимает на всех замкнутых линиях γ_a , а априори неизвестные значения $\int_{\gamma_{\Omega}} (p/\Omega)dl$ и $\int_{\gamma_a} (p/|\Omega_a|)dl$ сохраняются только на вихревых линиях γ_{Ω} , лежащих на одной изоэнтропийной поверхности.

4.6 Инвариант линий тока стационарных закрученных осесимметричных течений

Закрученные осесимметричные течения представляют собой важный частный случай пространственных течений, описываемых двухмерными уравнениями. С одной стороны, в них в полной мере проявляется сложная связь радиально-осевого и окружного движений. С другой стороны, осевая симметрия накладывает дополнительные связи на параметры движения, которые упрощают

исследование по сравнению с общим трехмерным случаем. Реальные конструкции редко бывают полностью осесимметричными. Но проверка закономерностей осесимметричных потоков может быть полезна для верификации численных методов расчета трехмерных схем, когда такие схемы используются в осесимметричном случае. Поэтому исследование закрученных осесимметричных течений представляет не только теоретический, но и практический интерес. Одно из важных свойств линии торможения в таких течениях (при обтекании тел вращения) есть совпадение линии торможения и оси симметрии.

В настоящем разделе все рассматриваемые функции считаются достаточно гладкими, насколько это требуется проводимыми математическими операциями и рассуждениями. Это относится либо к течению в целом, если в нем нет скачков уплотнения, тангенциальных или слабых разрывов, либо к зонам течения, не содержащим таких разрывов. Для краткости будем называть их *областями гладких параметров*.

Основные обозначения и уравнения движения. Рассмотрим осесимметричное течение идеального газа в области гладких параметров. Обозначим, как обычно: \mathbf{V} – вектор скорости, ρ – плотность, p – давление, $\mathbf{\Omega} = \text{rot}\mathbf{V}$ – завихренность. Движение газа подчиняется уравнениям Эйлера и уравнению неразрывности:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right), \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0. \quad (4.32)$$

Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z с началом в точке O и осью Oz , совпадающей с осью симметрии. Пусть $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ – правая тройка единичных векторов в радиальном, окружном и осевом направлениях соответственно. Вектор скорости имеет вид суммы $\mathbf{V} = V_r \mathbf{e}_r + V_\varphi \mathbf{e}_\varphi + V_z \mathbf{e}_z = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_\varphi + \mathbf{V}_z$, где V_r, V_φ и V_z , как и другие газодинамические функции, зависят только от координат r, z и от

времени t . Очевидно, что в этом случае градиенты в правой части уравнения (4.31) имеют нулевую φ -компоненту. Закрученное осесимметричное течение имеет отличную от нуля окружную скорость V_φ .

В силу осевой симметрии $\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\equiv 0\right)$ меридиональная составляющая завихренности $\mathbf{\Omega}_{rz}$, равная векторной сумме радиальной и осевой составляющих ($\mathbf{\Omega}_{rz} = \mathbf{\Omega}_r + \mathbf{\Omega}_z$), является ротором окружной скорости V_φ . Аналогично, окружная составляющая завихренности $\mathbf{\Omega}_\varphi$ является ротором меридиональной скорости $\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z$, то есть

$$\mathbf{\Omega}_{rz} = \text{rot } \mathbf{V}_\varphi, \quad \mathbf{\Omega}_\varphi = \text{rot}(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z).$$

Учитывая, что $\mathbf{\Omega}_\varphi \times \mathbf{V}_\varphi = 0$, и что $\mathbf{\Omega}_{rz} \times \mathbf{V}_\varphi = -\nabla\left(\frac{V_\varphi^2}{2}\right) - \left(\frac{V_\varphi^2}{r}\right)\mathbf{e}_r$ (последнее

равенство есть тождество для цилиндрической системы координат при условии $\frac{\partial}{\partial\varphi}\equiv 0$), получим

$$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} = \mathbf{\Omega}_{rz} \times (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) + \mathbf{\Omega}_\varphi \times (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) - \nabla\left(\frac{V_\varphi^2}{2}\right) - \left(\frac{V_\varphi^2}{r}\right)\mathbf{e}_r.$$

Первое слагаемое в правой части направлено вдоль \mathbf{e}_φ , а последние три лежат в меридиональной плоскости, проходящей через ось симметрии. Поэтому уравнение (4.31) равносильно системе двух уравнений

$$\frac{\partial(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)}{\partial t} + \mathbf{\Omega}_\varphi \times (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) = -\rho^{-1}\nabla p - \nabla\left(\frac{V_r^2}{2} + \frac{V_z^2}{2}\right) + \left(\frac{V_\varphi^2}{r}\right)\mathbf{e}_r, \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial\mathbf{V}_\varphi}{\partial t} + \mathbf{\Omega}_{rz} \times (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) = 0. \quad (4.34)$$

Уравнение неразрывности (4.32) в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho V_r) + \frac{\rho V_r}{r} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)) = 0. \quad (4.35)$$

Иногда течение считают потенциальным, то есть безвихревым $\mathbf{\Omega} = 0$. Иногда – баротропным $\rho = f(p)$. И так далее. Но некоторые общие свойства осесимметричных течений следуют из уравнений (4.33) – (4.35) без каких-либо дополнительных предположений. Поэтому ниже, если не оговорено иного, рассматривается самый общий случай, когда течение может быть небаротропным и завихренным.

Инвариант линий тока стационарных закрученных осесимметричных течений. При отсутствии радиально-осевого движения, когда все частицы вращаются вокруг оси Oz , инвариантом линии тока является любой параметр жидкой частицы. Поэтому содержательным является исследование инвариантов при наличии радиально-осевой скорости: $(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) \neq 0$.

Для стационарных течений баротропного газа справедлива теорема Эйлера – Эртеля [46], которая позволяет получить инвариант линий тока с использованием другого известного инварианта. Как уже упоминалось выше, в работе [128] с помощью теоремы Эйлера – Эртеля был получен новый инвариант течений газа. Но в рассматриваемом течении применение теоремы Эйлера – Эртеля к энтропии, к полной энтальпии и к окружной циркуляции дает тривиальный результат. В осесимметричных течениях место инвариантов, получаемых с помощью теоремы Эйлера – Эртеля, занимает другой, нетривиальный инвариант. При этом в отличие от инвариантов Эйлера – Эртеля не предполагается баротропность или адиабатичность течения.

В стационарном случае, при условии $(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) \neq 0$, из формулы (4.34) следует существование скалярного поля λ такого, что $\lambda(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) = \mathbf{\Omega}_{rz}$. Применение оператора дивергенции к этому уравнению, с учетом того, что $\mathbf{\Omega}_{rz} = \operatorname{rot} \mathbf{V}_\varphi$, дает

$$\lambda \operatorname{div}(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) + ((\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) \cdot \nabla) \lambda = 0.$$

С другой стороны, из уравнения неразрывности (4.35) следует, что

$$\rho \operatorname{div}(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) + ((\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) \cdot \nabla \rho) = 0$$

Следовательно,

$$((\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) \cdot \nabla (\lambda / \rho)) = 0$$

или

$$\left((\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) \cdot \nabla \frac{|\boldsymbol{\Omega}_{rz}|}{\rho |\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z|} \right) = 0. \quad (4.36)$$

Поэтому отношение

$$\frac{|\boldsymbol{\Omega}_{rz}|}{\rho |\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z|} \quad (4.37)$$

постоянно вдоль линий тока.

Подчеркнем, что формула (4.36) получена без предположений о баротропности или адиабатичности течения. Формула (4.36) верна для стационарных неизоэнтропийных и неизоэнергетических осесимметричных течений.

Заметим, что раньше этот инвариант был известен только для винтовых течений (в которых завихренность параллельна скорости) как следствие инвариантности для винтовых течений величины $\frac{|\boldsymbol{\Omega}|}{\rho |\mathbf{V}|}$ [46]. Действительно,

поскольку в винтовых течениях завихренность параллельна скорости, отношение длины вектора $\boldsymbol{\Omega}$ к длине вектора \mathbf{V} равно отношению длин проекций этих векторов на меридиональную плоскость, то есть отношению $|\boldsymbol{\Omega}_{rz}|$ к $|\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z|$.

Инвариант (4.37) был получен соискателем и впервые опубликован в [60], где соавтору принадлежит результат об эквивалентности двух типов течений (подробнее см. [60]).

4.7 Критерий существования решения уравнений движения идеального газа для заданной винтовой скорости

Исследование различных свойств течений с использованием точного решения системы уравнений, соответствующих той или иной модели движения жидкости, имеет смысл только тогда, когда это решение удовлетворяет основным физическим законам. Модель течения должна быть физичной, и потому даже в самом простом варианте она должна включать в себя законы сохранения массы, количества движения и энергии. К решениям полной системы уравнений физичной модели движения несжимаемой жидкости относятся, например, решения Громеки – Бельтрами [152, 153] и другие решения, ссылки на которые даны в подразделе «Использование точных решений» раздела 4.1. Примером решения иного свойства является полученное более двадцати лет назад авторами статьи [177] выражение для несоленоидального винтового векторного поля, которое неправомерно трактуется ими как поле скорости сжимаемого течения лишь на том основании, что решение удовлетворяет условию коллинеарности вектора поля и вектора вихря ($\mathbf{V} \times \text{rot} \mathbf{V} = 0$), а дивергенция вектора поля не равна нулю, в отличие от случая винтового поля скорости несжимаемой жидкости. В [177] не показано существование таких полей плотности и давления, которые вместе с их полем скорости удовлетворяют полной системе уравнений какой-либо известной модели течения сжимаемой жидкости. Поскольку во всех известных моделях (описание моделей движения различных жидкостей можно найти, например, в [102]) выполняются законы сохранения массы, энергии и трех компонент импульса, то соответствующие полные системы уравнений состоят, как минимум, из пяти уравнений для пяти неизвестных функций (например, плотность, давление и три компоненты скорости). Выяснение того, существует ли решение той или иной полной системы уравнений для заданного несоленоидального винтового поля скорости, представляет собой достаточно сложную задачу. Покажем сложность этой задачи для модели течения идеального

и совершенного газа с постоянными теплоемкостями. Именно такая модель идеальной сжимаемой жидкости изучается в первую очередь в классических учебниках (например, в [1, 102]) и является объектом исследования настоящей диссертации.

Стационарные винтовые течения идеальной несжимаемой жидкости. Прежде чем приступить к сжимаемому случаю, рассмотрим алгоритм построения винтовых точных решений системы уравнений для несжимаемой жидкости в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{V} &= -\rho^{-1} \nabla p - \nabla(\mathbf{V}^2 / 2) + \mathbf{F}, \\ \operatorname{div} \mathbf{V} &= 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \rho = 0, \quad \rho > 0, \quad p \geq 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Здесь \mathbf{F} – плотность распределения равнодействующей всех сил, приложенных к жидкости (часто полагают, что $\mathbf{F} = 0$ или $\mathbf{F} = \mathbf{g}$, где \mathbf{g} – ускорение свободного падения).

При заданном поле внешних массовых сил \mathbf{F} эта система замкнута (пять неизвестных и пять уравнений), но не является полной системой уравнений движения, поскольку в ней отсутствует уравнение баланса внутренней энергии. Однако, как известно, решение задачи о движении идеальной несжимаемой жидкости под действием внешней силы не зависит от решения задачи о распределении температуры, которое рассчитывается по полю скорости с использованием уравнения баланса тепловой энергии [102]. Это означает, что для любого решения (\mathbf{V}, ρ, p) системы (4.38) существует решение полной системы уравнений (включающей уравнение баланса тепловой энергии), и поэтому скорость \mathbf{V} может на законном основании считаться скоростью течения идеальной несжимаемой жидкости.

Один из известных методов получения поля скорости \mathbf{V} точных стационарных решений (4.37) состоит в поиске решения системы двух уравнений

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{V} = 0. \quad (4.39)$$

Этим условиям удовлетворяют, например, упомянутые выше АВС-решения и решения Громеки – Бельтрами. Для всякого решения (4.39) в произвольной ограниченной области G найдутся поля p и ρ , удовлетворяющие системе (4.39).

Например, если положить $\rho = \rho_0 = \text{const} > 0$ и $p = p_0 - \rho_0(\mathbf{V}^2/2)$, где константа p_0 обеспечивает неотрицательность давления p в области G , то легко проверить, что такое давление p вместе с плотностью $\rho = \rho_0$ и со скоростью \mathbf{V} удовлетворяют всем уравнениям системы (4.39) при $\mathbf{F} = 0$. Это дает основание считать любое решение системы (4.39) скоростью течения идеальной несжимаемой жидкости.

На первый взгляд может показаться, что если систему (4.39) заменить на систему двух уравнений $\text{div}\mathbf{V} \neq 0$ и $\mathbf{V} \times \text{rot}\mathbf{V} = 0$, то есть формально исключить условие несжимаемости жидкости и найти ее решение \mathbf{V} , то получится скорость некоторого сжимаемого течения жидкости. Но, как это будет показано ниже, не всякую такую скорость можно считать скоростью течения сжимаемой жидкости.

Стационарные винтовые течения идеального газа. Теперь рассмотрим простейшую и наиболее распространенную модель сжимаемой жидкости – модель идеального с постоянными теплоемкостями c_p и c_v [1, 102]. Соответствующая ей полная система уравнений, обеспечивающая выполнение законов сохранения массы, импульса и энергии, для непрерывных течений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \partial\mathbf{V}/\partial t - \mathbf{V} \times \text{rot}\mathbf{V} &= -\rho^{-1}\nabla p - \nabla(\mathbf{V}^2/2) + \mathbf{F}, \\ \partial\rho/\partial t + \text{div}(\rho\mathbf{V}) &= 0, \\ \partial(p\rho^{-k})/\partial t + (\mathbf{V} \cdot \nabla)(p\rho^{-k}) &= 0, \end{aligned} \quad (4.40)$$

где $\rho > 0$, $p > 0$, $k = c_p/c_v > 1$ – показатель адиабаты Пуассона. Уравнение (4.40) следует из закона сохранения энергии, выполнение которого в рамках рассматриваемой простейшей модели идеальной жидкости означает адиабатичность течения, что равносильно сохранению энтропийной функции $\sigma = p\rho^{-k}$ в частицах газа во время их движения.

Для стационарных винтовых ($\mathbf{V} \times \text{rot}\mathbf{V} = 0$) течений эта система упрощается:

$$0 = -\rho^{-1}\nabla p - \nabla(\mathbf{V}^2/2) + \mathbf{F}, \quad (4.41)$$

$$\operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0, \quad \rho > 0, \quad (4.42)$$

$$(\mathbf{V}\cdot\nabla)(p\rho^{-k}) = 0, \quad p > 0. \quad (4.43)$$

Заметим, что поскольку $\rho > 0$, уравнение неразрывности (4.42) равносильно уравнению

$$(\mathbf{V}\cdot\nabla)\ln\rho = -\operatorname{div}\mathbf{V}. \quad (4.44)$$

Переформулируем постановку задачи и будем считать \mathbf{F} не заданной, а искомой функцией координат, которая позволит получить решение системы (4.41) – (4.43) для несолоидальной винтовой скорости \mathbf{V} (например, для скорости [177]) в области G , где $\mathbf{V} \neq 0$.

На какой-либо поверхности S , лежащей в G и пересекающейся линиями тока (но не касающейся их), зададим произвольное распределение плотности $\rho > 0$. Интегрированием уравнения (4.44) вдоль линий тока в обе стороны от поверхности S можно получить поле плотности в некоторой области $G' \subset G$ (обоснование гладкости полученного поля дано в разделе 3.2). В силу того, что интегрируется логарифм, плотность останется положительной во всей области G' . Поскольку (4.44) равносильно (4.42), эта плотность ρ вместе со скоростью \mathbf{V} будут удовлетворять уравнению неразрывности (4.42). После этого на поверхности S можно задать произвольное распределение давления $p > 0$. Уравнение (4.43) можно представить в виде $(\mathbf{V}\cdot\nabla)\ln p = k(\mathbf{V}\cdot\nabla)\ln\rho$. Интегрированием этого уравнения вдоль линий тока в обе стороны от поверхности S можно получить в области G' поле $p > 0$, удовлетворяющее вместе с ρ и \mathbf{V} уравнению (4.43). Поэтому для заданной скорости $\mathbf{V} \neq 0$ в области G' существуют и не единственны пары полей плотности ρ и давления p , удовлетворяющие системе двух уравнений (4.42) и (4.43). Подстановка одной из этих пар ρ , p и скорости \mathbf{V} в уравнение (4.41) показывает существование такого поля $\mathbf{F} = \rho^{-1}\nabla p + \nabla(\mathbf{V}^2/2)$, что в итоге вся система уравнений (4.41) – (4.43) оказывается выполненной.

Но поле массовых сил должно быть физически реализуемым (физичным, например $\mathbf{F} = 0$ или $\mathbf{F} = \mathbf{g}$), а не просто полем, обеспечивающим выполнение равенства (4.41). Требование физичности поля массовых сил значительно усложняет предложенный способ решения проблемы, и практически его невозможно реализовать, поскольку требуется доказать, что хотя бы для одной пары ρ , p , удовлетворяющей (4.42) и (4.43), поле $\mathbf{F} = \rho^{-1}\nabla p + \nabla(\mathbf{V}^2/2)$ окажется физичным.

Возникает вопрос. Как выяснить, существует ли решение (4.41) – (4.43) для заданного поля несоленоидальной винтовой скорости? Ответ на этот вопрос дается в данном разделе.

Критерий существования решения. Поскольку речь идет о сжимаемых течениях, то всегда существуют области, во всех точках которых

$$\operatorname{div}\mathbf{V} \neq 0. \quad (4.45)$$

Дальнейшее исследование системы (4.41) – (4.43) будем проводить именно для таких областей. Кроме того, будем считать, что внешние массовые силы отсутствуют ($\mathbf{F} = 0$).

Пусть винтовая скорость \mathbf{V} вместе с плотностью ρ и давлением p удовлетворяют системе (4.41) – (4.43) при $\mathbf{F} = 0$. Представим давление в виде $p = \sigma\rho^k$. Тогда ротация уравнения (4.41) приводит к равенству $\nabla\sigma \times \nabla\rho = 0$, которое после применения известной формулы для двойного векторного произведения $\mathbf{V} \times (\nabla\sigma \times \nabla\rho)$ дает $(\mathbf{V} \cdot \nabla\rho)\nabla\sigma - (\mathbf{V} \cdot \nabla\sigma)\nabla\rho = 0$. Из (4.43) следует, что $(\mathbf{V} \cdot \nabla\sigma) = 0$, и последнее уравнение упрощается:

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla\rho)\nabla\sigma = 0. \quad (4.46)$$

Из (4.44) и (4.45) следует, что $(\mathbf{V} \cdot \nabla\rho) \neq 0$. С учетом (4.46) это означает, что $\nabla\sigma = 0$. Таким образом, в стационарном несоленоидальном (4.45) винтовом ($\mathbf{V} \times \operatorname{rot}\mathbf{V} = 0$) течении энтропийная функция $\sigma = p\rho^{-k}$ постоянна во всей области течения. Поэтому $\rho^{-1}\nabla p = \rho^{-1}\nabla(\sigma\rho^k) = k\sigma\rho^{k-1}\nabla\ln\rho$, и уравнение (4.41) при $\mathbf{F} = 0$ можно записать в виде

$$k\sigma\rho^{k-1}\nabla\ln\rho+\nabla(\mathbf{V}^2/2)=0. \quad (4.47)$$

Умножая скалярно обе части (4.47) на \mathbf{V} , получаем $k\sigma\rho^{k-1}(\mathbf{V}\cdot\nabla)\ln\rho+(\mathbf{V}\cdot\nabla)(\mathbf{V}^2/2)=0$. Заменяя в последнем уравнении $(\mathbf{V}\cdot\nabla)\ln\rho$ с использованием (4.44), имеем

$$k\sigma\rho^{k-1}\operatorname{div}\mathbf{V}=(\mathbf{V}\cdot\nabla)(\mathbf{V}^2/2) \quad (4.48)$$

или

$$\rho=\left(\frac{1}{k\sigma}\frac{(\mathbf{V}\cdot\nabla)(\mathbf{V}^2/2)}{\operatorname{div}\mathbf{V}}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (4.49)$$

Используя это выражение для плотности, получаем

$$\operatorname{div}(\rho\mathbf{V})=\operatorname{div}\left[\mathbf{V}\left(\frac{(\mathbf{V}\cdot\nabla)(\mathbf{V}^2/2)}{k\sigma\operatorname{div}\mathbf{V}}\right)^{\frac{1}{k-1}}\right]=\left(\frac{1}{k\sigma}\right)^{\frac{1}{k-1}}\cdot\operatorname{div}\left[\mathbf{V}\left(\frac{(\mathbf{V}\cdot\nabla)(\mathbf{V}^2/2)}{\operatorname{div}\mathbf{V}}\right)^{\frac{1}{k-1}}\right].$$

Поэтому из уравнения (4.42) следует, что

$$\operatorname{div}\left[\mathbf{V}\left(\frac{(\mathbf{V}\cdot\nabla)(\mathbf{V}^2/2)}{\operatorname{div}\mathbf{V}}\right)^{\frac{1}{k-1}}\right]=0. \quad (4.50)$$

Поскольку из (4.45) и (4.48) вытекает, что $(\mathbf{V}\cdot\nabla)(\mathbf{V}^2/2)\neq 0$, то уравнение (4.50)

равносильно уравнению $k-1=-\frac{(\mathbf{V}\cdot\nabla)\left(\frac{(\mathbf{V}\cdot\nabla)(\mathbf{V}^2)}{\operatorname{div}\mathbf{V}}\right)}{(\mathbf{V}\cdot\nabla)(\mathbf{V}^2)}$. Для идеального газа

показатель адиабаты k лежит в пределах $1 < k \leq 5/3$. Поэтому

$$1 < k = 1 - \frac{(\mathbf{V}\cdot\nabla)\left(\frac{(\mathbf{V}\cdot\nabla)(\mathbf{V}^2)}{\operatorname{div}\mathbf{V}}\right)}{(\mathbf{V}\cdot\nabla)(\mathbf{V}^2)} \leq 5/3, \quad k = \text{const}. \quad (4.51)$$

Теперь перепишем (4.47) в виде $\nabla\frac{k}{k-1}\sigma\rho^{k-1}+\nabla(\mathbf{V}^2/2)=0$ и, используя (4.49),

получим

$$\nabla\left(\frac{1}{k-1}\frac{(\mathbf{V}\cdot\nabla)(\mathbf{V}^2/2)}{\operatorname{div}\mathbf{V}}+\mathbf{V}^2/2\right)=0. \quad (4.52)$$

Условия (4.51) и (4.52) суть следствия системы (4.41) – (4.43). Поскольку плотность всегда положительна, то следствием системы (см. уравнение (4.48)) является и неравенство

$$\frac{(\mathbf{V} \cdot \nabla)(\mathbf{V}^2 / 2)}{\operatorname{div} \mathbf{V}} > 0. \quad (4.53)$$

Условия (4.51) – (4.53) должны быть выполнены для любого несоленоидального винтового поля скорости, если существуют такие поля плотности и давления, которые вместе с этой скоростью удовлетворяют системе (4.41) – (4.43). То есть условия (4.51) – (4.53) являются необходимыми условиями.

Оказывается, что выполнение этих условий достаточно для существования таких полей плотности и давления. Действительно. Пусть некоторое несоленоидальное винтовое поле \mathbf{V} удовлетворяет системе (4.51) – (4.53). Тогда, поскольку из (4.51) следует (4.50), для любой положительной константы σ и для показателя адиабаты k , полученного из (4.51), поле плотности (4.49) вместе со скоростью \mathbf{V} удовлетворяют уравнению неразрывности (4.42). Далее, давление $p = \sigma \rho^k$ вместе с плотностью (4.49) и скоростью \mathbf{V} будут удовлетворять уравнению (4.43). После этого, используя (4.49), перепишем (4.52) в виде

$$\nabla \left(\frac{k}{k-1} \sigma \rho^{k-1} + \mathbf{V}^2 / 2 \right) = 0. \text{ Преобразуем первое слагаемое под знаком градиента:}$$

$$\nabla \left(\frac{k}{k-1} \sigma \rho^{k-1} \right) = \rho^{-1} \nabla (\sigma \rho^k) = \rho^{-1} \nabla p, \quad \text{и окончательно получим, что}$$

$$\rho^{-1} \nabla p + \nabla (\mathbf{V}^2 / 2) = 0. \text{ Поэтому уравнение (4.41) также окажется выполненным.}$$

Таким образом, приходим к основному результату.

Критерий существования решения. Для того, чтобы при заданном винтовом ($\mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{V} = 0$) поле скорости \mathbf{V} в области, где $\operatorname{div} \mathbf{V} \neq 0$, существовало решение системы (4.41) – (4.43) при $\mathbf{F} = 0$, необходимо и достаточно выполнения условий (4.51) – (4.53).

Критерий получен соискателем и опубликован в [77].

Пример применения критерия. Рассмотрим поле скорости \mathbf{V} , компоненты которой в прямоугольной декартовой системе координат имеют вид

$$V_x = x \sin(z^2/2), \quad V_y = x \cos(z^2/2), \quad V_z = \frac{\cos(z^2/2)}{z}. \quad (4.54)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что, например, в области $G = \{x, y, z: 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0.5 < z < 1\}$ это поле является винтовым ($\mathbf{V} \times \text{rot } \mathbf{V} = 0$) и несоленоидальным ($\text{div } \mathbf{V} \neq 0$). Однако, как показывают расчеты с

использованием скорости (4.54), величина $1 - \frac{(\mathbf{V} \cdot \nabla) \left(\frac{(\mathbf{V} \cdot \nabla)(\mathbf{V}^2)}{\text{div } \mathbf{V}} \right)}{(\mathbf{V} \cdot \nabla)(\mathbf{V}^2)}$, входящая в (4.51), не постоянна и меняется в области G примерно от -6.9 до +0.2, что означает нарушение условия (4.51). Поэтому из полученного выше критерия следует, что скорость (4.54) не может быть скоростью точного решения системы (4.41) – (4.43). То есть не всякую несоленоидальную винтовую скорость можно считать скоростью течения газа, которое описывается системой уравнений (4.41) – (4.43).

Этот пример показывает сложность поиска точных решений уравнений движения идеального газа по сравнению с поиском точных решений для несжимаемой жидкости. Пример получен в [77] соавтором соискателя.

4.8 Заключение к главе 4

Для общего пространственного случая стационарных и нестационарных вязких и невязких сжимаемых и несжимаемых течений получены формулы скорости движения точек контура с сохранением циркуляции скорости газа (или жидкости) \mathbf{V} по нему. Скорость переноса простого вихревого контура, вычисленная по формуле (4.17), не имеет составляющей, коллинеарной касательному вектору \mathbf{e} . Поэтому для вычисления скорости по формуле (4.17) нет

необходимости находить касательную к \mathbf{e} составляющую завихренности и нормальную к \mathbf{e} составляющую правой части уравнения движения (4.1). Эти обстоятельства и простота полученной формулы делают ее удобной для верификации численных расчетов методом проверки сохранения циркуляции по контуру.

Показано, что при верификации необходимо рассматривать эволюцию как минимум двух по-разному ориентированных контуров.

Предложена формула (4.18), которая может быть использована для верификации полей течения, полученных конечно-разностными схемами, на тех же расчетных сетках, которые использовались в этих схемах.

Для течений за отошедшей УВ получено три интегральных инварианта, два из которых обобщают инвариант Крокко и вырождаются в него в осесимметричном случае. Третий инвариант в осесимметричном случае вырождается в тождество вида $0 \equiv 0$, а при отсутствии симметрии он более удобен для проверки расчетов, так как его значение на любой замкнутой линии вектора \mathbf{a} должно быть равно нулю.

Для закрученных осесимметричных течений идеального газа получен неинтегральный инвариант линий тока (4.37).

Показано, что не всякую несолоноидальную винтовую скорость можно считать скоростью течения идеального газа. То есть поиск точных решений уравнений движения идеального газа даже в «простом» классе винтовых течений оказывается значительно сложнее, чем в случае несжимаемой жидкости.

Глава 5 Принципы максимума давления в вихревых течениях идеального газа

5.1 Принципы максимума в аэрогидромеханике

Данный раздел представляет собой обзор принципов максимума (иногда, для краткости, будем писать «ПМ») в различных областях аэрогидромеханики и заканчивается постановкой задач для всей главы. Принципы максимума разделены на пять групп по типам *стационарных* течений, в которых эти принципы выполняются: безвихревые течения несжимаемой жидкости, вихревые течения несжимаемой жидкости, безвихревые течения сжимаемой жидкости (газа), баротропные вихревые течения газа и небаротропные вихревые течения газа (к которым относятся, например, течения идеального газа за отошедшей УВ). При этом рассматриваются экстремальные свойства не только давления, но и других параметров течения (скорости, завихренности и др.). Следует заметить, что под ПМ понимается теорема, в которой речь может идти не только о максимуме, но и о минимуме, или даже только о минимуме.

О гладкости функций. Ниже в формулировках принципов максимума (ПМ), иногда для краткости, не оговаривается, но подразумевается, что все аэрогидродинамические параметры течения в рассматриваемой области G принадлежат $C^2(G)$, и что те параметры, о возможности достижения экстремальных значений которых идет речь в ПМ, еще и непрерывны на замыкании \bar{G} (то есть принадлежат $C(\bar{G}) \cap C^2(G)$).

Безвихревые течения несжимаемой жидкости. Потенциал скорости безвихревого течения несжимаемой жидкости представляет собой гармоническую функцию, и компоненты скорости (как производные потенциала по координатам) – также гармонические функции. Из последнего следует (см., например,

[92, 178]), что величина скорости не может достигать максимального значения во внутренней точке течения. Это утверждение можно считать первым из известных ПМ, упоминание о котором можно найти в [179, § 37, § 44]. Из него, в частности, следует, что в стационарных безвихревых течениях несжимаемой жидкости (во всех точках которых интеграл Бернулли принимает одно и то же значение) давление может достигать минимального значения только на поверхностях обтекаемых тел или на поверхностях тангенциальных разрывов, и зарождение кавитации возможно только в точках, лежащих на таких поверхностях. Ситуация с минимумом величины скорости несколько сложнее. Для плоских безвихревых течений несжимаемой жидкости минимум может быть только нулевым. Это следует из принципа максимума аналитической функции комплексного переменного [180]. Пример плоского течения с нулевым минимумом приведен в [181]. Там же приведены примеры трехмерных безвихревых течений с ненулевыми строгим и нестрогим минимумами.

Вихревые течения несжимаемой жидкости. В условия принципов максимума для таких течений входит второй скалярный инвариант тензора скоростей деформаций (Q -параметр), который можно записать в виде

$$Q = 0.5 \left[\Omega^2 - (\nabla u)^2 - (\nabla v)^2 - (\nabla w)^2 \right], \quad (5.1)$$

где u , v и w – компоненты скорости \mathbf{V} в прямоугольной декартовой системе координат, $\Omega = \text{rot} \mathbf{V}$. При этом сами принципы максимума относятся не к скорости, а к давлению. Роуланд [182] и Гамель [183] показали (теорему Роуланда можно найти в монографии Серрина [114, § 28]), что в течениях идеальной [182] и вязкой [183] несжимаемых жидкостей в области, где давление не постоянно, а параметр $Q < 0$, минимум давления не может достигаться во внутренней точке области (аналогично – для максимума давления при $Q > 0$, а при $Q = 0$ невозможно достижение как минимума, так и максимума). В конце XIX столетия интерес к расположению точек минимума давления был вызван исследованием вопроса о формировании Земли. Рассматривалось вращение жидкости как твердого тела с учетом самогравитации [184]. В этом случае, повторяя

доказательство Роуланда, можно показать, что $\Delta[p/\rho]=2Q-4\pi rG$, где p – давление, ρ – плотность жидкости, $G \approx 6.674 \cdot 10^{-11} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ – универсальная гравитационная постоянная. Поэтому достижение минимума во внутренней точке жидкости будет невозможно, если

$$2Q-4\pi rG < 0. \quad (5.2)$$

Пуанкаре в [185] показал, что условие (5.2) будет выполнено даже при частоте вращения в 21 раз большей, чем частота вращения Земли (подробнее см. [179]), и поэтому возникновение пустот внутри Земли при ее формировании было невозможным. Недавно в статье [186] замечено, что, поскольку в покоящейся жидкости условие (5.2) выполнено, давление в гидростатике не может быть постоянным и этот факт не зависит от движения с нерелятивистской скоростью вне жидкости или от расположения вне жидкости тел, создающих гравитационные поля (Земля, Луна, Солнце и т. п.).

Перечисленные выше принципы максимума вытекают из экстремальных свойств решений гармонических, субгармонических и супергармонических уравнений. Толчком к открытию новых принципов максимума послужила теорема Хопфа [187]. В этой теореме идет речь об экстремальных свойствах решений u более сложных уравнений эллиптического типа, имеющих вид

$$\begin{aligned} a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2a_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2a_{23} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + a_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \\ + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + b_3 \frac{\partial u}{\partial z} + cu = f, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где коэффициенты зависят от координат (полную формулировку теоремы на русском языке можно найти в [47]). Одним из первых ПМ, полученных с помощью теоремы Хопфа, был ПМ функции Бернулли [114, § 76]: *в стационарных течениях вязкой несжимаемой жидкости функция Бернулли достигает максимума на границе области течения.* (Другие ПМ были получены с помощью теоремы Хопфа для течений газа, и они будут упомянуты ниже.)

В условия теоремы Хопфа входят требования, чтобы в рассматриваемой области все коэффициенты уравнения (5.3) были ограничены, а коэффициенты

a_{11} , a_{12} , a_{22} , a_{13} , a_{23} , a_{33} являлись бы коэффициентами положительно определенной квадратичной формы A , определитель которой во всей области отграничен от нуля: $\det A \geq \Delta$, где $\Delta > 0$ – константа. Это делало невозможным применение теоремы для областей течений, в которых некоторые из упомянутых коэффициентов были не ограничены в окрестности границы области или в которых $\det A$ стремился к нулю при приближении к некоторым точкам границы. Неограниченные коэффициенты «появляются», например, при записи уравнений осесимметричного движения в цилиндрической системе координат. Поэтому соискателем была поставлена задача ослабить условия теоремы Хопфа. Эта задача была решена в [188, 48]. Новая теорема названа «вариант теоремы Хопфа». В результате удалось получить несколько новых принципов максимума для плоских и осесимметричных течений несжимаемой жидкости. Это – ПМ окружной циркуляции и ПМ отношения завихренности к расстоянию до оси симметрии в осесимметричных течениях вязкой несжимаемой жидкости [48, 189], ПМ давления в плоских течениях идеальной несжимаемой жидкости [190] и ПМ давления в осесимметричных течениях идеальной жидкости [191] (полные формулировки и доказательства приведены ниже в разделах 5.4 – 5.7). Условия этих четырех новых принципов максимума более обозримы, чем условия ПМ Роуланда и Гамеля, поскольку в них не упоминается Q -параметр (5.1).

Замечание. Полученный в [48] вариант теоремы Хопфа будет неоднократно применяться ниже в настоящей главе при получении различных ПМ для небаротроных течений газа.

Заканчивая описание принципов максимума для несжимаемой жидкости, приведем пример интуитивно непредсказуемого качественного вывода из принципа максимума. Это следующее свойство вихревых линий, обнаруженное в [192] с использованием принципа максимума окружной циркуляции [48]: *в стационарном осесимметричном течении несжимаемой жидкости с ненулевой вязкостью невозможно существование винтовых вихревых линий, лежащих на гомеоморфной тору поверхности вращения (имеется в виду вращение вокруг оси симметрии течения).*

Безвихревые течения сжимаемой жидкости (газа). Наиболее известная теорема для таких течений – это дозвуковой принцип максимума Шиффмана [32], доказательство которого (основанное на теореме Хопфа) можно найти в [193, гл. II]. Согласно этому принципу, *в стационарных дозвуковых баротропных безвихревых течениях скорость не может принимать максимальное значение во внутренней точке течения (если эта скорость не постоянна)*. Также известна теорема Гилбарга и Шиффмана [33] о звуковой точке: *если в безвихревом течении местное число Маха всюду не превышает единицы и имеется внутренняя звуковая точка, то через эту точку проходит плоская поверхность, простирающаяся до границы течения, состоящая из звуковых точек, причем вектор (звуковой) скорости нормален к этой плоскости во всех ее точках*. Доказательство этой теоремы основано на варианте леммы Ниренберга [194, с. 168], в которой, в свою очередь, использованы элементы доказательства теоремы Хопфа.

Дозвуковые течения, в каждой точке которых местное число Маха $M \leq 1$, и при этом хотя бы в одной точке число Маха достигает единицы, называются критическими течениями. В задачах обтекания они соответствуют критическому числу Маха M^* набегающего потока, разграничивающему чисто дозвуковые течения и обтекания с местными сверхзвуковыми зонами. Если в набегающем потоке число Маха $M_\infty > M^*$, то при обтекании тела возникают местные сверхзвуковые зоны, что может привести к возникновению скачков уплотнения, которые могут вызывать отрыв потока. И скачки, и отрывы резко увеличивают сопротивление. Поэтому практически важной является задача максимизации M^* – построение форм обтекаемых тел с максимальным значением M^* (при заданных изопериметрических условиях). Теорема о звуковой точке дает теоретическое обоснование известному эмпирическому факту: при медленном повышении дозвуковой скорости набегающего потока первые звуковые точки, в которых местное число Маха $M = 1$, появляются именно на поверхности обтекаемого тела [195]. Поэтому при поиске M^* для разных чисел Маха набегающего потока

выясняют наличие звуковых точек не во всех точках течения, а только на поверхности обтекаемого тела (например, [196–198]). Примером известного решения, иллюстрирующего теорему о звуковой точке, является решение задачи о звуковой струе. Это режим истечения дозвукового потока из сужающегося сопла в пространство с пониженным давлением, сопровождающееся дополнительным разгоном потока до скорости звука, при котором однородный звуковой поток (звуковая струя) образуется на конечном расстоянии от среза сопла и следует за прямой звуковой линией перпендикулярно ей [199].

Отметим, что некоторые положения статьи Гилбарга и Шиффмана [33] были обобщены в [200] при построении конфигураций каналов (внутреннее обтекание) с максимальным критическим числом Маха.

Доказательство дозвукового принципа максимума Шиффмана [32] опирается на предположение о том, что плотность есть функция давления (баротропное течение). В [59] приведен пример дозвукового стационарного безвихревого течения газа, в котором плотность не является функцией давления. Наличие этого примера вызвало необходимость исследовать вопрос о максимуме скорости для безвихревых, но небаротропных, течений. Этот вопрос решен в [59], где показано, что требование баротропности можно исключить из условий дозвукового принципа максимума Шиффмана.

Заканчивает список известных ПМ для безвихревых течений газа принцип максимума для плоских течений [54], аналогичный упомянутому выше принципу максимума для плоских безвихревых течений несжимаемой жидкости (формулировка и доказательство приведены ниже в разделе 5.8).

Баротропные вихревые течения газа. Принцип максимума для таких течений получен Трусделлом в [34]. В его условия кроме знака Q -параметра входит еще и знак величины $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V}$. *Во внутренней точке области стационарного баротропного течения газа, где давление не постоянно, оно не может принимать минимального значения, если во всей области $Q \leq 0$ и $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} \geq 0$; максимального и минимального значений, если во всей области*

$Q=0$ и $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} = 0$; максимального значения, если во всей области $Q \geq 0$ и $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} \leq 0$. (В оригинальной формулировке Трусделла вместо величины $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V}$ рассматривается равная ей в силу уравнения неразрывности величина $-(\mathbf{V} \cdot \nabla)(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho)$.) Для несжимаемой жидкости, в которой $\rho = \text{const}$, и которую также можно считать баротропной, принцип максимума Трусделла совпадает с теоремами Роуланда и Гамеля для несжимаемой жидкости, тем самым обобщая их на сжимаемый баротропный случай. Главными недостатком этого принципа максимума является отсутствие утверждений для случая $Q \leq 0$, $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} < 0$, и для случая $Q \geq 0$, $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} > 0$. Другой недостаток – требование баротропности.

Замечание. Ниже в разделе 5.13 будет показано, что преобразования Мунка – Прима [103] позволяют использовать баротропный ПМ Трусделла для исследования экстремальных свойств давления в небаротропных течениях. Однако такой ПМ становится еще более труднообозримым, и остается проблема отсутствия утверждений для случаев $Q \leq 0$, $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} < 0$, и $Q \geq 0$, $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} > 0$. Поэтому одна из задач главы состоит в получении такого принципа максимума для общего пространственного (небаротропного) случая, в котором эта проблема отсутствует.

Вихревые течения газа и задачи главы. Ниже, если не оговорено особо, под вихревым течением понимается течение идеального газа, которое может быть небаротропным. (Примером такого течения является течение за отошедшей ударной волной.) Единственным известным принципом максимума был ПМ Никольского [3] для плоских вихревых стационарных течений: *во внутренних точках области дозвукового вихревого течения ни давление, ни угол наклона скорости не могут достигать экстремума*. Однако А. А. Никольский в своем доказательстве исключает из рассмотрения случаи, которые, по его мнению, могут иметь место «лишь в исключительных, специально построенных потоках» [3]. Поэтому одной из задач настоящей главы будет поиск строгого доказательства ПМ Никольского для давления (угол наклона скорости

рассматриваться не будет). Другие задачи главы состоят в поиске принципов максимума давления в трех пространственных случаях: в осесимметричном случае, в случае наличия плоскости симметрии и в общем пространственном случае. Такое разделение изначально было вызвано предположением, что ПМ для осесимметричных течений и для течений с плоскостью симметрии будут иметь более обозримый вид и содержать в своих формулировках меньше условий, чем ПМ в общем пространственном случае.

5.2 Q -параметр и визуализация расчетов

В настоящей главе исследование свойств Q -параметра связано с принципами максимума. Однако есть еще одно направление в аэрогидромеханике, в котором второй скалярный инвариант тензора скоростей деформаций (Q -параметр) играет важную роль. Представляется полезным дать краткую историческую справку по этому вопросу. Речь идет о визуализации результатов расчетов с использованием изображения поверхностей уровня Q -параметра. История этой традиции начинается с уже упомянутой работы Трусделла [34], в которой он привел ряд примеров, показывающих, что величина $\mathcal{W}_K = (1 - 4Q/\Omega^2)^{-1/2}$, где $\Omega = \text{rot } \mathbf{V}$, лучше, чем $|\Omega|$, отражает интуитивное представление физиков о том, насколько сложнее завихренное течение по сравнению с движением жидкости как твердого тела или по сравнению со сдвиговым течением. При этом в своих примерах Трусделл в основном рассматривал случаи $\mathcal{W}_K \leq 1$, $\mathcal{W}_K = 1$ и $\mathcal{W}_K \geq 1$, что равносильно рассмотрению случаев $Q \leq 0$, $Q = 0$ и $Q \geq 0$ соответственно. В результате Трусделл предложил считать \mathcal{W}_K «второй мерой завихренности». В теоретической аэрогидромеханике это предложение до сих пор не принято. Но в теории турбулентности была

потребность дать строгое определение очень сложным областям турбулентных течений, которые называются «когерентными вихревыми структурами» («вращающимися вихревыми воронками», «eddy-зонами» или «E-зонами»). Исследователи определяли такие области интуитивно через поле скорости и завихренности. Во многих работах предлагались и обосновывались различные критерии, выводы которых в той или иной степени совпадали с интуитивными представлениями исследователей. Одним из главных «кандидатов» для формального определения E-зоны был Q -критерий (Q criteria), согласно которому E-зоны – это области, где Q -параметр превышает некоторое неотрицательное пороговое значение. Так, например, в [201] предлагались Q -критерий и критерий минимума давления. Хотя строгое понятие E-зоны до сих пор отсутствует, в статье [202] Q -критерий был признан наиболее подходящим для обнаружения E-зон. С тех пор до настоящего времени используют Q -критерий и изображение поверхностей уровня параметра Q как один из способов визуализации E-зон. Например, в [203] Q -критерий использовался для анализа экспериментальных данных в вихревой горелке, в [204] – для представления процесса формирования области турбулентного течения при обтекании острой пластины, в [205] – для валидации пакета программ путем сравнения численного решения задачи об инжекции струи водорода в поток воздуха с данными натурального эксперимента. Популярность такого способа визуализации привела к тому, что в интерфейсы многих программных комплексов и пакетов программ (в частности, ANSYS) была заложена возможность представления поверхностей уровня Q -параметра по результатам расчетов. Наряду с этим в настоящее время все еще продолжается поиск (например, [206]) других критериев для обнаружения E-зон, которые, как показано в [207], совместно с Q -критерием могут давать результаты, более точно совпадающие с экспериментальными данными о следах, оставленными смерчами на песке.

5.3 Вариант теоремы Хопфа

В данном разделе доказана теорема, которая будет использоваться ниже на протяжении всей главы.

Теорема Хопфа [187, 47] предлагает ряд утверждений об экстремальных свойствах решений эллиптических квазилинейных уравнений в частных производных вида (5.3) в зависимости от свойств коэффициентов этих уравнений. Как уже сказано в разделе 5.1, в условия теоремы Хопфа входят требования, чтобы в рассматриваемой области все коэффициенты уравнения (5.3) были ограничены, а коэффициенты a_{11} , a_{12} , a_{22} , a_{13} , a_{23} , a_{33} являлись бы коэффициентами положительно определенной квадратичной формы A , определитель которой во всей области ограничен от нуля: $\det A \geq \Delta$, где $\Delta > 0$ – константа. Это делает невозможным применение теоремы для областей течений, в которых некоторые из упомянутых коэффициентов были не ограничены в окрестности границы области или в которых $\det A$ стремился к нулю при приближении к некоторым точкам границы.

Поэтому для исследования некоторых практически важных течений жидкости и газа, необходимо ослабить упомянутые выше требования теоремы Хопфа к коэффициентам уравнения. Этому посвящен данный раздел. Полученное новое утверждение названо вариантом теоремы Хопфа. Как и теорема Хопфа, новая теорема состоит из ряда утверждений об экстремальных свойствах решений эллиптических квазилинейных уравнений в частных производных вида (5.3) в зависимости от свойств коэффициентов этих уравнений. Доказательство во многих деталях отличается от доказательства Хопфа [187, 47], и поэтому требуется его повторение для новых условий теоремы. При этом можно обойтись без повторения доказательства для многомерного случая с разными вариантами коэффициентов уравнения. Все станет понятным после приведенного ниже нового доказательства в двухмерном случае. Только два свойства (утверждения 1 и 2), касающиеся коэффициентов квадратичных форм, не могут очевидным

образом быть распространены с двухмерного случая на многомерный. Первое из этих свойств есть следствие теоремы Шура [208], и можно было бы обойтись ссылкой, но для удобства читателя соответствующее доказательство (для многомерного случая) приводится ниже.

"Произведение" матриц двух неотрицательных и положительно определенных квадратичных форм.

Теорема Шура. Пусть A и B – матрицы (размеров $n \times n$) неотрицательных квадратичных форм, a_{ij} и b_{ij} – элементы этих матриц. Тогда матрица C тех же размеров с элементами $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$ является матрицей неотрицательной квадратичной формы

Докажем эту теорему. Сами формы будем обозначать такими же символами, как и символы их матриц (коэффициенты квадратичных форм будут совпадать с элементами их матриц).

Поскольку A – матрица неотрицательной квадратичной формы, то ортогональной заменой она может быть приведена к диагональному виду: $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – неотрицательные числа. При этом, если форма A положительно определена, то $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – положительны. Матрица S , обратная к ортогональной матрице, задающей упомянутую выше замену координат, также будет ортогональной матрицей. Тогда $A = S^T \Lambda S$, т.е.

$a_{ij} = \sum_{k=1}^n s_{ki} \lambda_k s_{kj}$, где s_{kj} – элементы матрицы S . Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Докажем,

что результат действия формы C на вектор \mathbf{x} неотрицателен. Действительно,

$$C(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j \left(\sum_{k=1}^n s_{ki} \lambda_k s_{kj} \right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \left[\sum_{i,j=1}^n b_{ij} (s_{ki} x_i) (s_{kj} x_j) \right]. \quad (5.4)$$

При фиксированном k выражение в прямоугольных скобках есть результат действия квадратичной формы B на вектор $\xi^k = (s_{k1} x_1, s_{k2} x_2, \dots, s_{kn} x_n)$. Поскольку

B – неотрицательная форма, то $\sum_{i,j=1}^n b_{ij} \xi_i^k \xi_j^k \geq 0$. Поэтому для каждого k

выражение в прямоугольных скобках неотрицательно. Учитывая

неотрицательность $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, получаем, что $C(\mathbf{x}) \geq 0$ для любого вектора \mathbf{x} . Теорема Шура доказана.

Ниже потребуются следствие этого утверждения, которое получается при применении формы C к вектору $\mathbf{x} = (1, 1, \dots, 1)$.

Утверждение 1 (следствие теоремы Шура). Если a_{ij} и b_{ij} – коэффициенты неотрицательных квадратичных форм, то $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij} \geq 0$.

Теперь перейдем ко второму свойству произведения матриц. Рассмотрим случай, когда формы A и B положительно определены. Пусть \mathbf{x} – отличный от нуля вектор. Если бы все векторы $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ равнялись нулю, то для каждого k было бы верным равенство: $s_{k1}x_1 + s_{k2}x_2 + \dots + s_{kn}x_n = 0$, которое означало бы ортогональность \mathbf{x} всем строкам (векторам) матрицы S , которые образуют ортонормированный базис n -мерного линейного пространства. Но такое невозможно для ненулевого вектора \mathbf{x} . Поэтому для любого ненулевого вектора \mathbf{x} существует такое k , что $\xi^k \neq 0$. А поскольку было предположено, что B положительно определена, то $\sum_{i,j=1}^n b_{ij} \xi_i^k \xi_j^k > 0$. Кроме того, в силу положительной определенности формы A , все диагональные элементы матрицы Λ положительны. Поэтому для любого ненулевого вектора \mathbf{x} в сумме (5.4), состоящей из неотрицательных слагаемых, есть хотя бы одно положительное слагаемое. То есть $C(\mathbf{x}) > 0$, и квадратичная форма C , с коэффициентами $c_{ij} = a_{ij} b_{ij}$, положительно определена. Из этого в результате применения формы C к вектору $\mathbf{x} = (1, 1, \dots, 1)$ получаем следующее.

Утверждение 2. Если две квадратичные формы с коэффициентами a_{ij} и b_{ij} положительно определены, то $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij} > 0$.

Двухмерный случай. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$Lu = a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (5.5)$$

Здесь L – линейный дифференциальный оператор второго порядка:

$$L = a_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y} = 0.$$

Пусть функции $a_{11}(x, y)$, $a_{12}(x, y)$, $a_{22}(x, y)$, $b_1(x, y)$ и $b_2(x, y)$ (коэффициенты этого уравнения) определены в некоторой плоской области G . Если квадратичная форма с коэффициентами a_{11} , a_{12} , $a_{21} = a_{12}$, a_{22} положительно определена для всех точек $M(x, y)$ из G (и, следовательно, определитель матрицы этой формы $a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 > 0$ для всех $M(x, y) \in G$), то (по определению) уравнение (5.5) и оператор L имеют эллиптический тип в области G .

Наряду с однородным уравнением (5.5) будем рассматривать неоднородное уравнение в частных производных

$$Lu = a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} = f, \quad (5.6)$$

где $f(x, y)$ – некоторая функция, заданная в G . Докажем сначала вспомогательное утверждение.

Утверждение 3. Если во всех точках области G коэффициенты a_{11} , a_{12} , $a_{21} = a_{12}$, a_{22} являются коэффициентами положительно определенной квадратичной формы и $f < 0$ ($f > 0$), то любое решение $u \in C^2(G)$ уравнения (5.6) не имеет в G точек минимума (максимума).

Доказательство. Допустим, что утверждение 3 не верно. Пусть, например, $f < 0$ и в области G есть точка минимума. $\partial u / \partial x = \partial u / \partial y = 0$, а второй дифференциал является неотрицательной квадратичной формой:

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 \geq 0.$$

Поэтому, согласно утверждению 1, в рассматриваемой точке минимума

$$Lu = a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \geq 0.$$

С другой стороны, в этой точке $Lu = f < 0$. Из полученного противоречия вытекает справедливость утверждения 3.

Следуя Хопфу [187], докажем более общее утверждение.

Утверждение 4. Пусть во всех точках области G коэффициенты a_{11} , a_{12} , $a_{21} = a_{12}$, a_{22} являются коэффициентами положительно определенной квадратичной формы. Пусть, далее, для любой точки $M(x, y) \in G$ существуют $\omega = \omega(x, y) > 0$ и $\Delta = \Delta(x, y) > 0$ такие, что замкнутый круг $\bar{U}(M; \omega)$ целиком лежит в области G и в нем все коэффициенты уравнения (5.5) ограничены и выполняется неравенство

$$a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 > \Delta. \quad (5.7)$$

Тогда никакое решение $u \in C^2(G)$ однородного уравнения (5.5) не может иметь в точке $M_0(x_0, y_0) \in G$ минимума (максимума), если оно не обращается в постоянную в любой содержащей $M_0(x_0, y_0)$ области G_0 , в которой $u(x, y) \geq u(x_0, y_0)$ ($u(x, y) \leq u(x_0, y_0)$).

Новизна этого утверждения состоит в следующем. В классической теореме Хопфа [187, 47] к коэффициентам уравнения (5.5) предъявляются более строгие требования – коэффициенты должны быть ограничены во всех точках области G общей константой. Кроме того, в классической теореме общей для всех точек области G должна быть величина Δ , входящая в неравенство (5.7).

Доказательство. Для определенности допустим, что $M_0(x_0, y_0)$ – точка минимума, и обозначим через E – множество точек из G_0 , для которых $u(x, y) = u(x_0, y_0)$. Поскольку $u(x, y)$ – непрерывная в G_0 функция, то $u(x, y) = u(x_0, y_0)$ в любой принадлежащей G_0 предельной точке $M(x, y)$ множества E . Следовательно, множество E замкнуто в G_0 , то есть $\bar{E} \cap G_0 = E$,

где \bar{E} – замыкание E . Любая граничная точка множества E является либо предельной, либо изолированной точкой этого множества. Если $E \neq G_0$, то область G_0 пересекается с границей ∂E множества E [209]. Поэтому, если доказать, что пересечение $\partial E \cap G_0$ пусто, то это будет означать, что $E = G_0$. Предположим, что $\partial E \cap G_0$ не пусто, тогда существует точка $M^*(x^*, y^*)$ на ∂E , принадлежащая G_0 , расстояние $\rho(M^*, \partial G_0)$ от которой до ∂G_0 положительно. Положим: $\delta_0 = \rho(M^*, \partial G_0)$. Если $M'(x', y')$ такая точка из $G_0 \setminus E$, для которой $\rho(M^*, M') < \delta_0/2$, то расстояние $\rho(M', E)$ от $M'(x', y')$ до E положительно, а все замкнутые круги $\bar{U}(M'; \delta)$ с центром в точке $M'(x', y')$ и радиусом $\delta < \delta_0/2$ содержатся в G_0 (рис. 5.1).

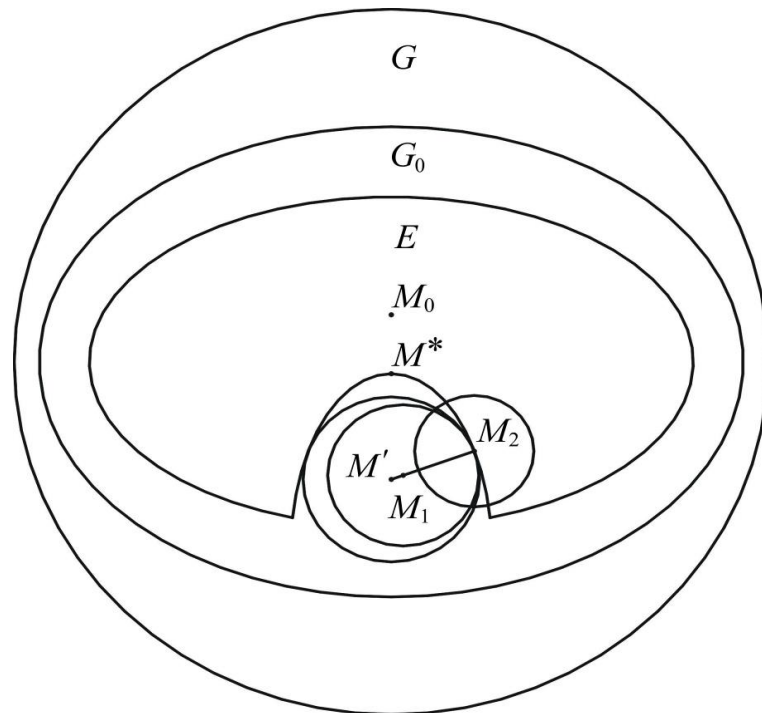


Рисунок 5.1 – Расположение точек и множеств в области G

Пусть δ' верхняя грань значений δ , для которых $\bar{U}(M'; \delta) \subset G_0 \setminus E$. На $\partial \bar{U}(M'; \delta')$ найдется по крайней мере одна точка $M_2(x_2, y_2)$ из E [209], так как

$\delta' = \rho(M', E)$. Если обозначить через $M_1(x_1, y_1)$ произвольную точку на радиусе MM_2 , отличную от $M'(x', y')$, и положить $\rho(M_1, M_2) = \sigma$, то

$$u(x_2, y_2) = u(x_0, y_0),$$

и

$$u(x, y) > u(x_0, y_0), \quad \forall M(x, y) \in \bar{U}(M_1; \sigma) \setminus M_2.$$

Выберем такое $\delta_1 < \min\{\sigma; \omega(x_2, y_2)\}$, что $\bar{U}(M_2; \delta_1) \subset G_0$, и положим

$$r(x, y) = \rho(M, M_1), \quad M(x, y) \in G_0, \quad v(x, y) = e^{-k\sigma^2} - e^{-kr^2},$$

где k – некоторое число. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} e^{kr^2}Lv = & -4k^2(a_{11}(x-x_1)^2 + 2a_{12}(x-x_1)(y-y_1) + a_{22}(y-y_1)^2) + \\ & + 2k(a_{11} + a_{22} + b_1(x-x_1) + b_2(y-y_1)). \end{aligned}$$

Оно представляет собой квадратный двучлен относительно k . Коэффициент при первой степени k ограничен в замкнутом круге $\bar{U}(M_2; \omega(x_2, y_2)) \supset \bar{U}(M_2; \delta_1)$. А коэффициент при второй степени k имеет в $\bar{U}(M_2; \delta_1)$ отрицательную верхнюю грань, так как во всех точках замкнутого круга $\bar{U}(M_2; \omega(x_2, y_2)) \subset G$ для коэффициентов a_{11} , a_{12} , $a_{21} = a_{12}$, a_{22} положительно определенной квадратичной формы выполняется неравенство (5.7). Поэтому можно выбрать число k настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $Lv < 0$ для всех $M(x, y) \in \bar{U}(M_2; \delta_1)$. Пусть число k выбрано таким образом. Тогда для всех $\lambda > 0$ имеем $f = L(u + \lambda v) < 0$ в $\bar{U}(M_2; \delta_1)$. Но последнее неравенство противоречит утверждению 3. В самом деле, на дуге окружности $\partial\bar{U}(M_2; \delta_1)$, лежащей в замкнутом круге $\bar{U}(M_1; \sigma)$,

$$u(x, y) > u(x_0, y_0), \quad r \leq \sigma, \quad -1 < v(x, y) = e^{-k\sigma^2} - e^{-kr^2} \leq 0.$$

А на дуге окружности $\partial\bar{U}(M_2; \delta_1)$, лежащей вне $\bar{U}(M_1; \sigma)$,

$$u(x, y) \geq u(x_0, y_0), \quad r > \sigma, \quad v(x, y) = e^{-k\sigma^2} - e^{-kr^2} > 0.$$

Поэтому для достаточно малых $\lambda > 0$ на всей окружности $\partial\bar{U}(M_2; \delta_1)$ будет верно неравенство $u + \lambda v > u(x_0, y_0)$, и при этом $u(x_2, y_2) + \lambda v(x_2, y_2) = u(x_0, y_0)$, то есть функция $u + \lambda v$ имеет в открытом круге $U(M_2; \delta_1)$ минимум. Это противоречит утверждению 3 (так как $f = L(u + \lambda v) < 0$ в $\bar{U}(M_2; \delta_1)$).

Из полученного противоречия следует, что $u(x, y) = u(x_0, y_0)$ в области G_0 .

Утверждение 4 доказано.

Еще раз отметим, что в доказанном утверждении 4, в отличие от классической теоремы Хопфа [187], не требуется, чтобы коэффициенты уравнения (5.5) были ограничены во всей рассматриваемой области G . Утверждение 4 остается в силе, если для любой точки области можно найти ее окрестность, в которой выполняется условие ограниченности коэффициентов уравнения (5.5) и для некоторого числа $\Delta > 0$ справедливо неравенство (5.7).

Утверждение 5. Пусть G – ограниченная область и выполняются условия утверждения 4. Если решение $u \in C^2(G)$ однородного уравнения (5.5) не равно тождественно постоянной и непрерывно в замкнутой области \bar{G} , то во всей области G

$$\min_{\partial G} u < u < \max_{\partial G} u. \quad (5.8)$$

Доказательство. Согласно теореме Вейерштрасса [209], непрерывная на компакте \bar{G} функция $u(x, y)$ ограничена на нем и достигает своего минимального и максимального значений. Допустим для определенности, что минимум достигается в точке $M_0(x_0, y_0) \in G$. Тогда, согласно утверждению 4, неравенство $u(x, y) \geq u(x_0, y_0)$ выполняется во всей области G . Следовательно, $u(x, y) = u(x_0, y_0)$ в G , что противоречит условию.

Таким образом, $u(x, y)$ достигает минимума на границе ∂G области G , и при этом во всей этой области $\min_{\partial G} u < u$. Аналогично доказывается правая часть двойного неравенства (5.8).

В приложениях могут быть полезны некоторые утверждения, основанные на обобщении доказанного выше утверждения 4. Доказательство этих утверждений аналогично приведенным выше доказательствам утверждений 4 и 5. Изложим их применительно к трехмерному и к двумерному случаям. Для этого рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2a_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2a_{23} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + a_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + b_3 \frac{\partial u}{\partial z} + cu = f, \quad (5.9)$$

где в двумерном случае $a_{13} = a_{23} = a_{33} = b_3 = 0$. Предполагается, что коэффициенты этого уравнения $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}, b_1, b_2, b_3, c$ и правая часть f являются функциями трех переменных x, y, z (в двумерном случае – двух переменных x, y) и определены в некоторой области G . Сформулируем общее предположение относительно коэффициентов уравнения (5.9).

Предположение 1 (трехмерный случай). Пусть во всех точках области G трехмерного пространства коэффициенты $a_{11}, a_{12} = a_{21}, a_{22}, a_{13} = a_{31}, a_{23} = a_{32}, a_{33}$ являются коэффициентами положительно определенной квадратичной формы A . Пусть, далее, для любой точки $M(x, y, z) \in G$ существуют $\omega = \omega(x, y, z) > 0$ и $\Delta = \Delta(x, y, z) > 0$ такие, что замкнутый круг $\bar{U}(M; \omega)$ целиком лежит в области G и в нем все коэффициенты уравнения (5.9) ограничены и выполняется неравенство $\det A > \Delta$.

Предположение 1 (двумерный случай). Пусть во всех точках области G двумерного пространства коэффициенты $a_{11}, a_{12} = a_{21}, a_{22}$ являются коэффициентами положительно определенной квадратичной формы A . Пусть, далее, для любой точки $M(x, y) \in G$ существуют $\omega = \omega(x, y) > 0$ и $\Delta = \Delta(x, y) > 0$ такие, что замкнутый круг $\bar{U}(M; \omega)$ целиком лежит в области G и в нем все коэффициенты уравнения (5.9) ограничены (при этом $a_{13} = a_{23} = a_{33} = b_3 = 0$) и выполняется неравенство $\det A > \Delta$.

Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 6. Пусть $c = 0$, $f \leq 0$ в ограниченной области G и выполняется предположение 1. Если решение $u \in C^2(G)$ уравнения (5.9) непрерывно в замкнутой области \bar{G} , то $u \geq \min_{\partial G} u$ во всей области G . При этом, если $u \neq \text{const}$ в G , равенство $u = \min_{\partial G} u$ возможно только на ∂G .

Утверждение 7. Пусть $c = 0$, $f \geq 0$, в ограниченной области G и выполняется предположение 1. Если решение $u \in C^2(G)$ уравнения (5.9) непрерывно в замкнутой области \bar{G} , то $u \leq \max_{\partial G} u$ во всей области G . При этом, если $u \neq \text{const}$ в G , равенство $u = \max_{\partial G} u$ возможно только на ∂G .

Утверждение 8. Пусть $c = 0$, $f = 0$ в ограниченной области G и выполняется предположение 1. Если решение $u \in C^2(G)$ уравнения (5.9) не равно тождественно постоянной и непрерывно в замкнутой области \bar{G} , то $\min_{\partial G} u < u < \max_{\partial G} u$ во всей области G .

Утверждение 9. Пусть $c \leq 0$, $f \leq 0$ в ограниченной области G и выполняется предположение 1. Если решение $u \in C^2(G)$ уравнения (5.9) непрерывно в замкнутой области и $\min_{\partial G} u \leq 0$, то $u \geq \min_{\partial G} u$ во всей области G .

Утверждение 10. Пусть $c \leq 0$, $f \geq 0$ в ограниченной области G и выполняется предположение 1. Если решение $u \in C^2(G)$ уравнения (5.9) непрерывно в замкнутой области \bar{G} и $\max_{\partial G} u \geq 0$, то $u \leq \max_{\partial G} u$ во всей области G .

Доказательства утверждений 6–8 почти полностью повторяют доказательства утверждений 4 и 5, и приводить их здесь представляется излишним. А утверждения 9 и 10 есть следствия утверждений 6 и 7. Приведем

доказательство этих следствий, исходя из верности утверждений 6 и 7, на примере утверждения 10.

Допустим, что условия утверждения 10 выполнены. Докажем, что $u \leq \max_{\partial G} u$ во всей области G . Доказательство проведем от противного, и предположим, что существует внутренняя точка $P \in G$, в которой функция достигает максимума на \bar{G} , и в этой точке $u(P) > \max_{\partial G} u \geq 0$.

Поскольку точка P есть внутренняя точка G , в силу непрерывности существует такая окрестность U точки P , в которой $u > u(P)/2 > 0$. Эта окрестность является (непустой) областью. Поэтому непустым будет множество $G' \subset G$, определяемое как объединение всех областей, принадлежащих G , в которых $u > u(P)/2 > 0$, и которые содержат точку P . В этой области $u > 0$, максимум $u = u(P)$ достигается во внутренней точке, а уравнение (5.9) можно представить в виде

$$Lu = a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2a_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2a_{23} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + a_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + b_3 \frac{\partial u}{\partial z} + cu = \tilde{f}, \quad (5.10)$$

где $\tilde{f} = f - cu$. Поскольку $c \leq 0$, $f \geq 0$ и $u > 0$, в области \bar{G} выполняется неравенство $\tilde{f} \geq 0$, из которого, согласно утверждению 7, примененному к уравнению (5.10), следует, что во всей области \bar{G} функция u постоянна и равна $u(P)$. Допустим, что область G' не совпадает с областью G . Тогда существует точка $P' \in \partial G'$, являющаяся внутренней точкой G (и в любой ее окрестности есть точки, не принадлежащие G'). В силу непрерывности $u(P') = u(P)$. Следовательно, (поскольку $u(P') = u(P) = \max_{\bar{G}} u$) существует окрестность $U' \subset G$ точки P' , во всех точках которой $u > u(P)/2$. Но тогда объединение $G'' = G' \cup U'$ не совпадает с G' и является областью, содержащей точку P , в которой $u > u(P)/2$. Область G'' содержит в себе область G' и не совпадает с

ней. Это противоречит определению области G' . Полученное (промежуточное) противоречие показывает, что $G' = G$. Но это невозможно, поскольку тогда во всей области G (и на ее замыкании \bar{G}) функция u должна быть постоянна и равна $u(P)$, что противоречит предположению $u(P) > \max_{\partial G} u$, сделанному в начале доказательства. Таким образом, доказано, что $u \leq \max_{\partial G} u$ во всей области G .

Приведенные в данном разделе утверждения (кроме известных классических утверждений 1 и 2) и основная идея их доказательства были предложены соискателем и опубликованы в совместной статье [48].

О применении варианта теоремы Хопфа. Под вариантом теоремы Хопфа будем понимать набор утверждений с 4 по 10 включительно. При доказательстве почти всех принципов максимума, представленных ниже в настоящей главе, будут использоваться утверждения 5, 6, 7 и 8 варианта теоремы Хопфа. Перед тем, как применить эти утверждения для небаротропных течений газа, сначала в нескольких следующих разделах с их помощью получим принципы максимума для течений несжимаемой жидкости и для безвихревого течения газа. Это делается для того, чтобы на относительно простых течениях (по сравнению с небаротропными течениями) показать приемы использования варианта теоремы Хопфа, и тем самым «подготовить» читателя к знакомству с более сложными доказательствами для небаротропных течений. Кроме того, приемы и подходы, которые использованы для исследования течений несжимаемой жидкости и для безвихревых течений газа, представляют самостоятельную ценность, поскольку могут оказаться полезными при исследовании течений других типов, в частности, для продолжения исследований небаротропных течений, выполненных в рамках настоящей диссертации.

Следует заметить, что сам по себе вариант теоремы Хопфа (как и классическая теорема Хопфа) в общем случае не позволяют находить принципы максимума для решений уравнений вида (5.9). Дело в том, что уравнение такого вида, где в качестве функции u выступает давление, как правило, получается

после применения оператора $\operatorname{div} \mathbf{V}$ к динамическому уравнению движения жидкости или газа. При этом определить знак правой части (5.9) не получается, и утверждения варианта теоремы Хопфа применить невозможно.

Поэтому некоторые исследования, которые все-таки заканчиваются применением варианта теоремы Хопфа, состоят либо в выяснении знака правой части, либо в приведении уравнения к виду с понятным знаком правой части. Как будет видно из доказательств следующих разделов, такие исследования представляют собой содержательные задачи, решения которых «не лежали на поверхности» (хотя иногда, будучи найденными, решения этих задач представляются простыми).

Другие исследования настоящей главы, которые заканчиваются применением варианта теоремы Хопфа, состоят в поиске параметра (давление, модуль скорости, отношение завихренности к расстоянию до оси симметрии, логарифм параметра Чаплыгина и т. п.), для которого удастся получить уравнение вида (5.9) с легко обозримой правой частью.

Таким образом, если говорить кратко, то суть всех исследований настоящей главы, которые заканчиваются применением варианта теоремы Хопфа, и которые привели к новым принципам максимума, с математической точки зрения состоят в «получении» таких уравнений, к которым можно применить классическую теорему Хопфа или вариант теоремы Хопфа, полученный в настоящем разделе.

5.4 Принцип максимума окружной циркуляции

Рассмотрим задачу об установившемся осесимметричном течении вязкой несжимаемой жидкости. Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z с началом в точке O так, чтобы течение оказалось осесимметричным относительно оси Oz . В таких координатах уравнение Навье – Стокса для окружной компоненты скорости жидкости V_φ имеет вид [1]

$$V_z \frac{\partial}{\partial z} V_\varphi + V_r \frac{\partial}{\partial r} V_\varphi + \frac{V_\varphi V_r}{r} = \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} V_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} V_\varphi - \frac{V_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} V_\varphi \right),$$

где V_r и V_z – радиальная и осевая компоненты скорости соответственно, $\nu > 0$ – кинематический коэффициент вязкости. Если выразить окружную компоненту скорости V_φ через окружную циркуляцию $\gamma = 2\pi r V_\varphi$ (термин «окружная циркуляция» для γ был впервые предложен в [10]), то последнее уравнение принимает следующий вид уравнения для γ :

$$\left(V_r + \frac{\nu}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} \gamma + V_z \frac{\partial}{\partial z} \gamma = \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \gamma + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \gamma \right).$$

Поскольку ограниченность V_r и V_z является естественным свойством ламинарного течения, величина $\left(V_r + \frac{\nu}{r} \right)$ не ограничена в окрестности точек, лежащих на оси Oz . Поэтому к решению полученного выше уравнения для γ нельзя применить классическую теорему Хопфа [47, 187]. В работе [188] был доказан принцип максимума для случая неограниченности одного из коэффициентов эллиптических уравнений. В результате был получен следующий принцип максимума окружной циркуляции.

Пусть осесимметричное ламинарное течение несжимаемой жидкости с ненулевой вязкостью установилось; и пусть \bar{G} – произвольная ограниченная замкнутая область, лежащая в радиально-осевой (меридиональной) полуплоскости $r \geq 0$; тогда минимум и максимум окружной циркуляции достигаются на границе области \bar{G} .

Эта формулировка допускает достижение максимума и минимума во внутренних точках области. Из полученного в разделе 5.3 утверждения 5 следует более сильный вывод (этот результат опубликован в [48]).

Принцип максимума окружной циркуляции. *Пусть осесимметричное ламинарное течение несжимаемой жидкости с ненулевой вязкостью установилось; и пусть \bar{G} – произвольная ограниченная замкнутая область, лежащая в радиально-осевой (меридиональной) полуплоскости $r \geq 0$; тогда или*

о́кружная циркуляция постоянна, или ее минимум и максимум достигаются на границе и только на границе области \bar{G} .

5.5 Принцип максимума завихренности, отнесенной к расстоянию до оси симметрии

В незакрученном течении окружная скорость $V_\varphi = 0$, и, следовательно, окружная циркуляция $\gamma = 0$. Поэтому ПМ, сформулированный в разделе 5.4, вырождается. Однако для этого случая в [189] был предложен другой нетривиальный параметр, подчиняющийся принципу максимума.

Обозначим: \mathbf{V} – скорость, $\mathbf{\Omega} = \text{rot } \mathbf{V}$ – завихренность, p – давление, $\rho = \text{const}$ – плотность, Π – потенциал массовых сил, $\nu > 0$ – кинематический коэффициент вязкости. Движение жидкости описывается уравнениями Навье – Стокса. Поскольку $\text{div } \mathbf{V} = 0$, из известного векторного тождества $\nabla \text{div } \mathbf{V} = \text{rot rot } \mathbf{V} + \Delta \mathbf{V}$ следует, что $\Delta \mathbf{V} = -\text{rot } \mathbf{\Omega}$. Поэтому векторное уравнение Навье – Стокса может быть записано в форме Громеки – Ламба [1]:

$$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} = -\nu \text{rot } \mathbf{\Omega} - \nabla \left[p + \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \Pi \right].$$

Применив к этому уравнению операцию rot , получим

$$\text{rot}(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V}) = -\nu \text{rot rot } \mathbf{\Omega}. \quad (5.11)$$

Введем цилиндрическую систему координат $O r \varphi z$ с началом в точке O так, чтобы течение оказалось осесимметричным относительно оси Oz . Обозначим: $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ – правая тройка единичных векторов в радиальном, окружном и осевом направлениях соответственно; V_r, V_φ, V_z – соответствующие компоненты скорости ($\mathbf{V} = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_\varphi + \mathbf{V}_z = V_r \mathbf{e}_r + V_\varphi \mathbf{e}_\varphi + V_z \mathbf{e}_z$). В силу осесимметричности все компоненты скорости и завихренности не зависят от координаты φ . Завихренность в

цилиндрической системе координат $Or\varphi z$, с учетом $\frac{\partial}{\partial\varphi} \equiv 0$, вычисляется по формуле

$$\mathbf{\Omega} = \text{rot } \mathbf{V} = \left(-\frac{\partial}{\partial z} V_\varphi \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial}{\partial z} V_r - \frac{\partial}{\partial r} V_z \right) \mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\varphi) \right) \mathbf{e}_z.$$

Поскольку в незакрученном течении окружная скорость $V_\varphi = 0$, то

$\mathbf{\Omega} = \left(\frac{\partial}{\partial z} V_r - \frac{\partial}{\partial r} V_z \right) \mathbf{e}_\varphi$. Это значит, что завихренность в любой точке A коллинеарна нормали к радиально-осевой (меридиональной) полуплоскости $r \geq 0$, содержащей эту точку (такая полуплоскость лежит в меридиональной плоскости, содержащей точку A), а величина завихренности равна $\Omega = \left(\frac{\partial}{\partial z} V_r - \frac{\partial}{\partial r} V_z \right)$.

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} &= (\Omega \mathbf{e}_\varphi) \times (V_r \mathbf{e}_r + 0 \cdot \mathbf{e}_\varphi + V_z \mathbf{e}_z) = (\Omega V_r) \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r + (\Omega V_z) \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_z = \\ &= -(\Omega V_r) \mathbf{e}_z + (\Omega V_z) \mathbf{e}_r, \end{aligned}$$

и левая часть (5.11) вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V}) &= \left(-\frac{\partial}{\partial z} 0 \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial}{\partial z} (\Omega V_z) - \frac{\partial}{\partial r} (-\Omega V_r) \right) \mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r 0) \right) \mathbf{e}_z = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial z} (\Omega V_z) + \frac{\partial}{\partial r} (\Omega V_r) \right) \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned}$$

Чтобы записать правую часть (5.11) в цилиндрических координатах, сначала, учитывая, что $\frac{\partial}{\partial\varphi} \equiv 0$ и что r - и z -компоненты вектора $\mathbf{\Omega}$ равны нулю, получим

$$\text{rot } \mathbf{\Omega} = \left(-\frac{\partial}{\partial z} \Omega \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial}{\partial z} 0 - \frac{\partial}{\partial r} 0 \right) \mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Omega) \right) \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial z} \Omega + \mathbf{e}_z \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Omega).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \mathbf{\Omega} &= \left(-\frac{\partial}{\partial z} 0 \right) \mathbf{e}_r + \left(-\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \Omega - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Omega) \right) \right) \mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r 0) \right) \mathbf{e}_z = \\ &= \left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Omega - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Omega) \right) \right) \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned}$$

Приравнивая правую и левую части (5.11), имеем

$$\frac{\partial}{\partial z}(\Omega V_z) + \frac{\partial}{\partial r}(\Omega V_r) = \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Omega + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Omega) \right) \right).$$

Подставляя в это уравнение Ω в виде $\Omega = H \cdot r$ (обе функции Ω и H зависят от r и от z), и учитывая уравнение неразрывности, записанное в цилиндрической системе координат, $V_r + r \frac{\partial}{\partial r} V_r + r \frac{\partial}{\partial z} V_z = 0$, приходим к уравнению

$$\left(V_r - \frac{3\nu}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} H + V_z \frac{\partial}{\partial z} H = \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} H + \frac{\partial^2}{\partial z^2} H \right)$$

или

$$\left(V_r - \frac{3\nu}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Omega}{r} \right) + V_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Omega}{r} \right) = \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\Omega}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\Omega}{r} \right) \right).$$

Как было замечено выше, завихренность в точке A коллинеарна нормали к меридиональной плоскости, содержащей точку A . Через ось симметрии проходит бесконечное количество различных меридиональных плоскостей (пучок плоскостей). Поэтому, если точка A лежит на оси симметрии, то завихренность в точке A равна нулю, поскольку только нулевой вектор коллинеарен всем нормальям к различным плоскостям пучка. Следовательно, при достаточной гладкости поля скорости отношение $\frac{\Omega}{r}$ допускает непрерывное продолжение на ось симметрии. Под значением $\frac{\Omega}{r}$ в точке на оси симметрии (при $r=0$) будем понимать значение непрерывного продолжения. Это позволяет применить утверждение 5 из раздела 5.3. В результате получаем следующий принцип максимума отношения завихренности к радиусу.

Для любой замкнутой области \bar{G} , лежащей в радиально-осевой (меридиональной) полуплоскости $r \geq 0$, отношение завихренности к радиусу в стационарном незакрученном осесимметричном течении несжимаемой жидкости с ненулевой вязкостью, если оно не постоянно всюду, достигает экстремальных значений на границе и только на границе области \bar{G} .

В этом ПМ граница области \bar{G} может иметь точки на оси симметрии. Если использовать классическую теорему Хопфа, то утверждение будет обосновано только для области, граница которой не содержит точек на оси симметрии, и в формулировке ПМ вместо «в радиально-осевой (меридиональной) полуплоскости $r \geq 0$ » нужно будет написать «в открытой радиально-осевой полуплоскости $r > 0$ ».

5.6 Принцип максимума давления в плоских течениях идеальной несжимаемой жидкости

В условия ПМ Роуланда (см. текст после формулы (5.1)), верного в общем пространственном случае, входит знак Q -параметра. Оказывается, что для плоских течений ситуация с экстремальными значениями давления намного проще.

Рассмотрим стационарное плоское вихревое течение идеальной несжимаемой жидкости. Как и выше, обозначим через \mathbf{V} и $\mathbf{\Omega} = \text{rot } \mathbf{V}$ векторы скорости и завихренности соответственно, p – давление, $\rho = \text{const}$ – плотность.

Движение жидкости описывается уравнениями Эйлера в форме Громеки – Ламба [1]:

$$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) - \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right), \quad V = |\mathbf{V}|, \quad (5.12)$$

и уравнением неразрывности

$$\text{div } \mathbf{V} = 0. \quad (5.13)$$

Пусть в течении отсутствуют точки торможения. Тогда в плоскости течения можно ввести ортогональную систему естественных координат Os_n так, что координата s отсчитывается вдоль линий тока, n – по нормали к ним. Пусть H_s и H_n – коэффициенты Ламэ (Ляме) этой системы координат [1, 210]. В

координатах s, n система векторных уравнений (5.12) и (5.13) дает систему трех скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} -\frac{V}{H_s H_n} \frac{\partial}{\partial n} (V H_s) &= -\frac{1}{H_n} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{p}{\rho} \right) - \frac{1}{H_n} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{V^2}{2} \right), \\ \frac{1}{H_s} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{1}{H_s} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{V^2}{2} \right) &= 0, \\ \frac{1}{H_s H_n} \frac{\partial}{\partial s} (V H_n) &= 0. \end{aligned}$$

В области течения, где $V \neq 0$, эти уравнения равносильны соответственно трем уравнениям

$$\frac{1}{H_n} \frac{\partial}{\partial n} H_s = \frac{H_s}{H_n} \frac{1}{V^2} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{p}{\rho} \right), \quad \frac{\partial}{\partial s} V = -\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\rho} \right), \quad \frac{\partial}{\partial s} \ln V + \frac{\partial}{\partial s} \ln H_n = 0. \quad (5.14)$$

Исключим из двух последних уравнений (5.14) производную $\frac{\partial}{\partial s} V$:

$$\frac{1}{H_s} \frac{\partial}{\partial s} H_n = \frac{H_n}{H_s} \frac{1}{V^2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\rho} \right). \quad (5.15)$$

Используем дифференциальное свойство коэффициентов Ламэ криволинейной системы естественных координат [211]:

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{H_n} \frac{\partial}{\partial n} H_s \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{H_s} \frac{\partial}{\partial s} H_n \right) = 0. \quad (5.16)$$

Подставляя входящие в равенство (5.16) выражения, записанные в скобках, из уравнений (5.14) и (5.15) и учитывая, что $\rho = \text{const} > 0$, получим

$$\begin{aligned} \frac{H_s}{H_n} \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2}{\partial n^2} p + \frac{H_n}{H_s} \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} p + \\ + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{H_s}{H_n} \frac{1}{V^2} \right) \frac{\partial}{\partial n} p + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{H_n}{H_s} \frac{1}{V^2} \right) \frac{\partial}{\partial s} p = 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Это однородное уравнение эллиптического типа относительно функции p . Рассмотрим случай, когда скорость не обращается в нуль во внутренних точках течения, а на границе области G может принимать нулевые значения (например,

в точках торможения). При приближении к таким точкам не только неограниченно возрастает величина $\frac{1}{V^2}$, но и коэффициенты Ламэ могут неограниченно возрастать. Применение классической теоремы Хопфа становится невозможным. Но предположение 1 раздела 5.3 будет выполнено во всей области G . Поэтому (утверждение 8 раздела 5.3), если решение $p \in C(\bar{G}) \cap C^2(G)$ уравнения (5.17) существует, то либо оно постоянно на \bar{G} , либо достигает как своего максимума, так и своего минимума на границе и только на границе области G . Таким образом, справедлив следующий принцип максимума давления. *Пусть в области G плоского стационарного течения идеальной несжимаемой жидкости отсутствуют точки торможения. Тогда давление либо постоянно, либо его максимум и минимум достигаются на границе и только на границе области G .*

Таким образом, в плоском случае условием ПМ давления является отсутствие точек торможения внутри области. Это условие исключить нельзя, поскольку в [190] (где опубликован этот ПМ) приведены примеры, в которых давление во внутренних точках торможения достигает минимального, максимального и промежуточного значений.

5.7 Принцип максимума давления в осесимметричном течении идеальной жидкости

Используем обозначения предыдущего раздела. Рассмотрим пространственное стационарное течение идеальной несжимаемой жидкости в замыкании \bar{G} некоторой ограниченной области G . Такое течение (как и плоское) описывается векторными уравнениями (5.12) и (5.13). Будем считать, что в рассматриваемой области отсутствуют точки торможения, то есть что

$$V > 0. \quad (5.18)$$

При этом допускается наличие точек торможения ($V = 0$) на границе области.

Как обычно, будем считать, что все гидродинамические функции являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями координат в области G и непрерывными на ее замыкании \bar{G} .

Покажем, что для осесимметричных течений при выполнении указанных выше условий справедлив принцип минимума давления: если давление не постоянно в области G , то оно достигает минимального значения только на границе этой области.

Для доказательства введем трехмерную прямоугольную декартову систему координат $Oxuz$ и обозначим через u, v, w соответствующие компоненты вектора скорости. Вычисляя дивергенцию обеих частей векторного уравнения (5.12), получим

$$\frac{1}{\rho} \Delta p = \Omega^2 - (\mathbf{V} \cdot \text{rot } \mathbf{\Omega}) - \frac{1}{2} \Delta V^2, \quad (5.19)$$

где Δ – оператор Лапласа.

Учитывая, что $\frac{1}{2} \Delta V^2 = (\mathbf{V} \cdot \Delta \mathbf{V}) + (\nabla u)^2 + (\nabla v)^2 + (\nabla w)^2$ и что для несжимаемой жидкости $(\mathbf{V} \cdot \text{rot } \mathbf{\Omega}) = -(\mathbf{V} \cdot \Delta \mathbf{V})$, из (5.19) после перестановки слагаемых получим

$$\frac{1}{\rho} \Delta p = \Omega^2 - (\nabla u)^2 - (\nabla v)^2 - (\nabla w)^2. \quad (5.20)$$

Уравнение (5.20) известно давно [182]. Q -параметр, о котором говорилось в разделах 5.1 и 5.2, есть половина правой части (5.20). Если во всей $Q \leq 0$ или $Q \geq 0$, то уравнение (5.20) становится супер- или субгармоническим, и давление (если оно не постоянно всюду) не может достигать во внутренней точке течения соответственно минимума или максимума. В этом состоит принцип Роуланда. Однако до сих пор знак параметра Q можно было априорно указать только для безвихревых течений, в которых $Q \leq 0$.

Предложим способ исследования экстремальных свойств давления для незакрученных осесимметричных течений без выяснения знака параметра Q . Для этого уравнение (5.20) преобразуем к виду, допускающему применение одного из утверждений раздела 5.3.

Уравнение (5.20) верно для общего 3D-случая. Далее рассмотрим незакрученные осесимметричные течения и воспользуемся присущим им свойством ортогональности векторов скорости и завихренности. Тогда из (5.12) следует, что $(\Omega V)^2 = \left(\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{2} \nabla V^2 \right)^2$, или, учитывая принятое выше предположение (5.18) об отсутствии точек торможения ($V > 0$), что (точка означает скалярное произведение)

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \frac{1}{\rho^2 V^2} (\nabla p)^2 + \frac{1}{\rho V^2} \nabla p \cdot \nabla V^2 + \frac{1}{V^2} \left(\frac{1}{2} \nabla V^2 \right)^2 = \\ &= \left(\frac{1}{\rho^2 V^2} \nabla p + \frac{1}{\rho V^2} \nabla V^2 \right) \cdot \nabla p + \frac{1}{V^2} \left(\frac{1}{2} \nabla V^2 \right)^2. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение для квадрата завихренности в (5.20), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \Delta p - \left(\frac{1}{\rho^2 V^2} \nabla p + \frac{1}{\rho V^2} \nabla V^2 \right) \cdot \nabla p = \\ = \frac{1}{V^2} \left(\frac{1}{2} \nabla V^2 \right)^2 - (\nabla u)^2 - (\nabla v)^2 - (\nabla w)^2. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Левая часть этого уравнения инвариантна относительно выбора системы координат $Oxyz$. Следовательно, правая часть (для обозначения которой будем использовать символ I)

$$I = \frac{1}{V^2} \left(\frac{1}{2} \nabla V^2 \right)^2 - (\nabla u)^2 - (\nabla v)^2 - (\nabla w)^2$$

также инвариантна, то есть ее значение не зависит от выбора системы координат $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$. Возьмем произвольную точку области G и расположим систему координат $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ так, чтобы положительное направление оси $\tilde{O}\tilde{x}$ совпало с направлением

скорости \mathbf{V} . Тогда в выбранной точке соответствующие компоненты скорости будут $\tilde{u}=V>0$, $\tilde{v}=0$, $\tilde{w}=0$. Следовательно, в этой точке

$$I = \frac{1}{\tilde{u}^2} (\tilde{u}\nabla\tilde{u} + \tilde{v}\nabla\tilde{v} + \tilde{w}\nabla\tilde{w})^2 - (\nabla\tilde{u})^2 - (\nabla\tilde{v})^2 - (\nabla\tilde{w})^2 = -(\nabla\tilde{v})^2 - (\nabla\tilde{w})^2 \leq 0.$$

Поскольку точка была выбрана произвольно, неравенство $I \leq 0$ выполнено во всей области G . Поэтому во всех точках области G уравнение (5.21) можно записать в виде

$$\Delta p - \left\{ \frac{1}{\rho V^2} \nabla p + \frac{1}{V^2} \nabla V^2 \right\} \cdot \nabla p = f,$$

где правая часть неположительна: $f = \rho I \leq 0$.

Вернемся к выбранной с самого начала системе координат $Oxyz$. Если записать левую часть последнего уравнения в координатной форме, то второе слагаемое примет вид $b_1 \frac{\partial p}{\partial x} + b_2 \frac{\partial p}{\partial y} + b_3 \frac{\partial p}{\partial z}$, где коэффициенты b_1 , b_2 и b_3 суть компоненты вектора, записанного в фигурных скобках, и зависят не только от гидродинамических функций u , v , w , p , но и от их первых производных. Таким образом, уравнение (5.21), которое является следствием уравнений Эйлера, может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} a_{11} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + 2a_{13} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} + 2a_{23} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial z} + a_{33} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \\ + b_1 \frac{\partial p}{\partial x} + b_2 \frac{\partial p}{\partial y} + b_3 \frac{\partial p}{\partial z} = f, \end{aligned} \quad (5.22)$$

где коэффициенты $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$, $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ и функция $f \leq 0$. Поэтому предположение 1 (для трехмерного случая) раздела 5.3 выполнено для коэффициентов (5.22) во всей области G . Используя утверждение 6 раздела 5.3, получаем следующий принцип максимума, в условия которого не входит Q -параметр: *при отсутствии точек торможения в ограниченной области незакрученного осесимметричного вихревого течения идеальной несжимаемой жидкости давление достигает минимального значения только на границе*

области. Этот ПМ получен соискателем и опубликован в [191], где соавтор провел расчеты, представленные в следующем подразделе.

Случай наличия точек торможения. Проиллюстрируем существенность требования отсутствия точек торможения для полученного ПМ. Приведем пример, в котором нарушение этого требования приводит к «появлению» внутренней точки минимума давления.

Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z с началом в точке O и будем рассматривать симметричные относительно оси Oz течения. Пусть $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ – правая тройка единичных векторов в радиальном, окружном и осевом направлениях соответственно. Вектор скорости незакрученного течения имеет вид $\mathbf{V} = V_r \mathbf{e}_r + V_z \mathbf{e}_z$, где компоненты скорости V_r и V_z зависят только от переменных r, z .

В данном разделе все величины r, z, V_r, V_z и давление \hat{p} , отнесенное к плотности, будем считать безразмерными. (Размерные величины координат \tilde{r}, \tilde{z} , компонент скорости \tilde{V}_r, \tilde{V}_z и давления \tilde{p} можно выразить через безразмерные переменные по формулам: $\tilde{r} = rL, \tilde{z} = zL, \tilde{V}_r = V_r U, \tilde{V}_z = V_z U$ и $\tilde{p} = \hat{p} \rho U^2$, где L и U – характерные значения длины и скорости в рассматриваемом течении.)

Будем искать (точное) решение системы уравнений (5.12) и (5.13) в виде

$$V_r = -(g(r) \sin z)/r, \quad V_z = -(g'(r) \cos z)/r, \quad (5.23)$$

$$\hat{p} = 2 - (g(r) \cos z)^2 - 0.5(V_r^2 + V_z^2), \quad (5.24)$$

где $g = g(r)$ – некоторая функция одной координаты r . Если записать уравнения (5.12) и (5.13) в цилиндрической системе координат r, φ, z и подставить в них выражения (5.23) и (5.24), то эти уравнения окажутся выполненными, если функция g удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (здесь и далее штрих означает дифференцирование по аргументу r)

$$g'' - \frac{g'}{r} - g + 2r^2 g = 0. \quad (5.25)$$

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (5.25) на отрезке $0.75 \leq r \leq 1.25$ с условиями, заданными в середине отрезка:

$$g(1) = 1, \quad g'(1) = 0. \quad (5.26)$$

Эта задача состоит из двух «стандартных» задач Коши. Одна из них – для уравнения (5.25) на отрезке $0.75 \leq r \leq 1$ с условиями (5.26) на правом конце отрезка. Другая – для уравнения (5.25) на отрезке $1 \leq r \leq 1.25$ с условиями (5.26) на левом конце отрезка.

Коэффициенты уравнения (5.25) ограничены на отрезке $0.75 \leq r \leq 1.25$. Поэтому решение задачи Коши (5.25), (5.26) на отрезке $0.75 \leq r \leq 1.25$ существует и единственно. Формулы (5.23) и (5.24), в которых $g(r)$ является решением этой задачи, дают точное решение уравнений (5.12) и (5.13) в полосе $0.75 < r < 1.25$, $-\infty < z < +\infty$. Рассмотрим прямоугольную область $0.75 < r < 1.25$, $-0.25 < z < 0.25$. В выражения (5.23) и (5.24) входят функция $g(r)$ и ее производная $g'(r)$. Их графики, полученные в результате численного решения задачи (5.25), (5.26), представлены на рисунке 5.2, а линии тока соответствующего течения показаны на рисунке 5.3.

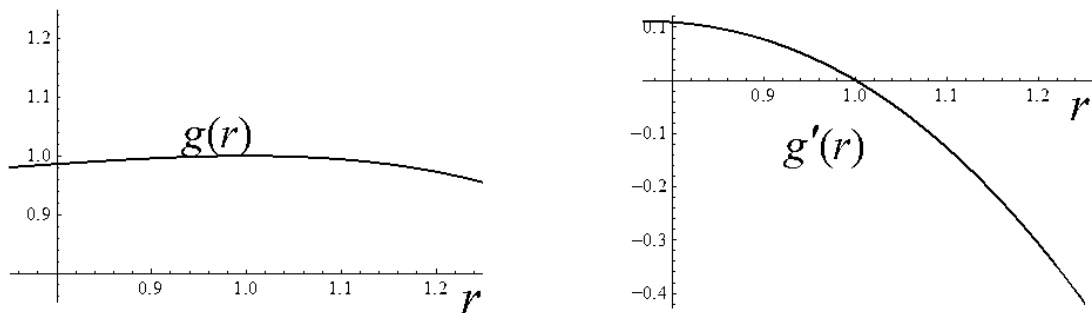


Рисунок 5.2

Из (5.23) и (5.26) следует, что точка S с координатами $r = 1$, $z = 0$ является точкой торможения ($V_r = V_z = 0$). Жидкость вращается вокруг точки S , и кривизна линий тока показывает, что давление должно уменьшаться по мере приближения к точке S . Поэтому в точке S будет минимум давления.

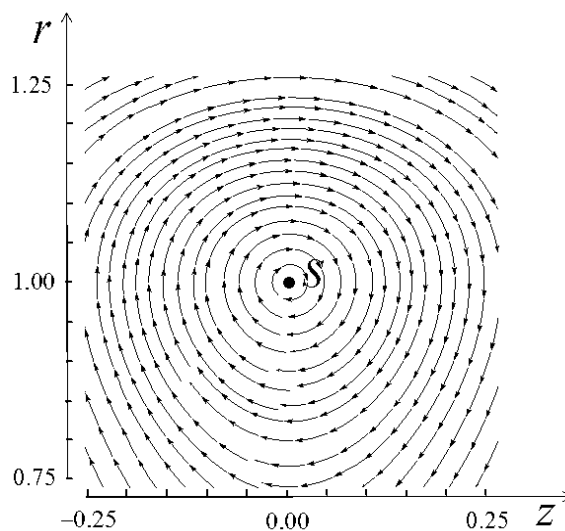


Рисунок 5.3 – Линии тока

Результаты расчетов в виде картины изобар с оттенками серого цвета приведены на рисунке 5.4.

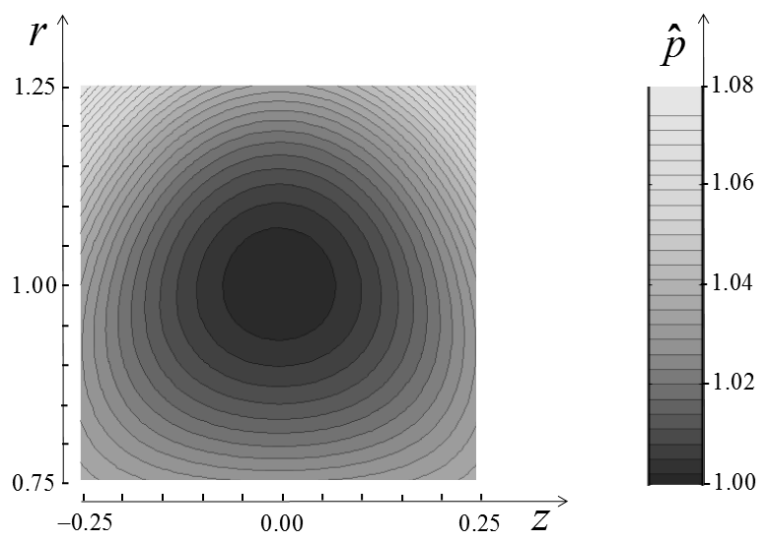


Рисунок 5.4 – Картина изобар

Расчеты показывают, что в рассматриваемой области точкой минимума давления является внутренняя точка S . Таким образом, при наличии внутренней точки торможения, когда условия установленного ПМ нарушаются, минимум давления может располагаться внутри области, а не на границе.

Численные расчеты проведены с высокой точностью. Тем не менее, предложим строгое доказательство того, что точка S является точкой локального минимума давления. Из (5.23) и (5.24) следует, что $g''(1) = -1$. Это позволяет найти значения первых и вторых производных $\hat{p}(r, z)$ в точке $z = 0, r = 1$. В итоге в окрестности точки S имеем разложение

$$\hat{p}(1 + \Delta r, \Delta z) = \hat{p}(1, 0) + 0.5(\Delta r)^2 + 0.5(\Delta z)^2 + o\left((\Delta r)^2 + (\Delta z)^2\right), \quad \Delta r \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0,$$

показывающее, что точка S действительно является точкой локального минимума давления.

Другое точное решение, показывающее существенность требования отсутствия точек торможения в полученном принципе максимума – это сферический вихрь Хилла [92, 179], который представляет из себя незакрученное осесимметричное течение, в котором завихренность равна нулю всюду вне сферы некоторого радиуса r . В меридиональной плоскости внутри сферы есть точка на расстоянии $r/\sqrt{2}$ от оси симметрии с нулевым значением скорости. Давление в этой внутренней точке торможения достигает минимального значения.

5.8 Признак наличия точки торможения в плоском безвихревом течении идеального газа

Переходя к принципам максимума для течений газа, рассмотрим сначала плоские безвихревые течения. В известном дозвуковом ПМ Шиффмана (см. раздел 5.1) утверждается, что если модуль скорости не постоянен, то его максимум достигается на границе и только на границе дозвукового течения. Относительно минимума модуля скорости для плоских течений вопрос будет решен в этом разделе. Для этого будет применен вариант теоремы Хопфа (раздел 5.3) к полученному впервые для модуля скорости (точнее, для логарифма параметра Чаплыгина) однородному уравнению эллиптического типа.

Однородность уравнения обеспечивает «полноценный» принцип, в котором речь идет и о максимуме, и о минимуме. Для формирования однородного уравнения была использована криволинейная система естественных координат.

Рассмотрим плоское стационарное безвихревое изэнтропическое (величина энтропийной функции σ постоянна во всем потоке) течение идеального (отсутствуют вязкость и теплопроводность и выполняется закон Менделеева – Клапейрона) газа с постоянными теплоемкостями c_p и c_v . Обозначим, как обычно: \mathbf{V} – скорость, ρ – плотность, $k = c_p / c_v$ – показатель адиабаты, $p = \sigma \rho^k$ – давление. Движение газа описывается уравнениями

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\sigma \frac{\nabla \rho^k}{\rho}, \quad \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0.$$

Если записать первое из этих уравнений в форме Громеки – Ламба [1]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} \times \mathbf{V} = -\nabla \left(\frac{k}{k-1} \sigma \rho^{k-1} + \frac{V^2}{2} \right), \quad V = |\mathbf{V}|,$$

то, поскольку $\operatorname{rot} \mathbf{V} = 0$, получается известное свойство – полная энтальпия

$$i_0 = \frac{k}{k-1} \sigma \rho^{k-1} + \frac{V^2}{2} > 0 \text{ постоянна во всем поле течения.}$$

Рассмотрим область G дозвукового течения без точек торможения, то есть течение, в котором значение квадрата параметра Чаплыгина [134] $\tau^2 = \frac{V^2}{2i_0}$ лежит в пределах

$$0 < \tau^2 < \frac{k-1}{k+1}. \quad (5.27)$$

Условие $\tau^2 > 0$, входящее в (5.27), соответствует отсутствию точек торможения.

А условие $\tau^2 < \frac{k-1}{k+1}$ – отсутствию звуковых и сверхзвуковых точек.

В плоскопараллельном течении введем ортогональную систему естественных координат Osn так, чтобы равенства вида $s = \text{const}$ и $n = \text{const}$

задавали бы, соответственно, эквипотенциальные линии и линии тока. Пусть H_s и H_n – коэффициенты Ламэ этой системы координат [1, 210]. В координатах s, n уравнение неразрывности и условие отсутствия завихренности выглядят соответственно так:

$$\frac{\partial}{\partial s} (H_n (1 - \tau^2)^{\frac{1}{k-1}} \tau) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial n} (\tau H_s) = 0.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial}{\partial s} H_n = H_n \frac{\alpha \tau^2 - 1}{1 - \tau^2} \frac{\partial}{\partial s} \ln \tau \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial n} H_s = -H_s \frac{\partial}{\partial n} \ln \tau, \quad (5.28)$$

где $\alpha = \frac{k+1}{k-1}$.

В [211] было показано, что независимо от природы плоского течения справедливо дифференциальное равенство (оно уже использовалось в разделе 5.6)

$$-\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{H_s} \frac{\partial}{\partial s} H_n \right) = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{H_n} \frac{\partial}{\partial n} H_s \right).$$

Подставим в это равенство выражения (5.28). После перестановки слагаемых получим

$$\begin{aligned} & \frac{H_n}{H_s} \frac{\alpha \tau^2 - 1}{1 - \tau^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \ln \tau + \frac{H_s}{H_n} \frac{\partial^2}{\partial n^2} \ln \tau + \\ & + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{H_n}{H_s} \frac{\alpha \tau^2 - 1}{1 - \tau^2} \right) \frac{\partial}{\partial s} \ln \tau + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{H_s}{H_n} \right) \frac{\partial}{\partial n} \ln \tau = 0. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Если течение дозвуковое, то $1 - \alpha \tau^2 > 0$, и последнее уравнение для $\ln \tau$ представляет собой уравнение эллиптического типа вида (5.9), где $c = f = 0$. К этому уравнению можно применить классическую теорему Хопфа, если ограничиться случаем, когда на границе области G нет звуковых точек и точек торможения (то есть, когда условия (5.27) выполнены на замыкании \bar{G}). Если же такие точки есть, то при приближении к ним коэффициенты Ламэ могут неограниченно возрастать, а уравнение (5.29) в этих точках может вырождаться, и применять классическую теорему Хопфа нельзя. Однако даже при наличии таких

точек предположение 1 раздела 5.3 будет выполнено, и можно применить утверждение 8 варианта теоремы Хопфа (раздел 5.3). В итоге имеем следующий принцип максимума (он впервые опубликован в [54]) для области, на границе которой допускается нарушение условий (5.27).

Пусть в области G плоского стационарного безвихревого изоэнтропического течения идеального газа отсутствуют точки торможения, а течение является дозвуковым. Тогда, если число Маха M (и модуль скорости) не постоянно, то и минимум, и максимум M (и модуля скорости) достигаются на границе и только на границе области G .

Заметим, что требование отсутствия точек торможения неустранимо для утверждения о минимуме, так как можно привести пример достижения нулевого (а потому минимального) значения числа Маха во внутренней точке течения. Например, точка торможения может возникать при столкновении двух противоположно направленных струй газа. Для утверждения о максимуме требование отсутствия точек торможения устранимо. Это следует из дозвукового ПМ Шиффмана. Рассмотрение дозвуковых областей связано с вырождением уравнения в звуковых и сверхзвуковых точках, и вопрос об устранении этого ограничения выходит за рамки настоящего исследования.

Возможность нарушения принципа минимума при наличии точек торможения в некоторых случаях позволяет утверждать о существовании точки торможения в течении. Для этого может оказаться достаточно информации о скорости только в зоне, в которой нет точек торможения. Действительно, рассмотрим область течения с произвольным числом Маха. Обозначим M_1 – минимальное значение числа Маха на границе области. Допустим, что в течении существует дозвуковая точка A , значение числа Маха M_A в которой меньше M_1 , то есть $M_A < \min\{M_1; 1\}$. Тогда A является внутренней точкой дозвуковой области G , определяемой неравенством $M < M_2 = 0.5(M_A + \min\{M_1; 1\})$. Поскольку $M_A < M_2$, во внутренней точке области G есть точка минимума. Согласно доказанному выше принципу минимума, это означает наличие в G

точки торможения. Таким образом, доказан следующий признак наличия точки торможения (в области G могут быть звуковые и сверхзвуковые точки).

Пусть в некоторой (внутренней) точке области G плоского стационарного безвихревого изоэнтропического течения идеального газа число Маха меньше единицы и меньше своего минимального значения на границе области G . Тогда в области G есть хотя бы одна внутренняя точка торможения.

Из признака, в частности, следует, что, если дозвуковое в G течение является звуковым во всех точках границы G , то внутри G есть хотя бы одна точка торможения.

5.9 Принцип максимума Никольского

Перейдем, наконец, к вихревым течениям идеального газа, к которым относятся, например, течения за отошедшей ударной волной, и исследование которых является главной целью главы. Начнем со строгого доказательства ПМ Никольского. Формулировка, данная самим А. А. Никольским, приведена в подразделе «Вихревые течения газа и задачи главы» раздела 5.1. Там же обосновано отсутствие строгого доказательства.

Обозначим: \mathbf{V} – скорость, $\rho > 0$ – плотность, k – показатель адиабаты, $p = \sigma \rho^k$ – давление (величина энтропийной функции σ постоянна вдоль линий тока).

Стационарное движение газа с гладкими параметрами описывается уравнениями Эйлера, записанными в форме Громеки – Ламба:

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} \times \mathbf{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right), \quad V = |\mathbf{V}|, \quad (5.30)$$

уравнением неразрывности:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (5.31)$$

и уравнением адиабатического движения частиц газа:

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)(p\rho^{-k}) = 0. \quad (5.32)$$

Рассмотрим плоское дозвуковое течение внутри ограниченной области G . Пусть во внутренних точках этой области параметры течения (p, ρ, \mathbf{V}) дважды непрерывно дифференцируемы и скорость газа \mathbf{V} не обращается в нуль. А на замыкании области G эти параметры непрерывны (скорость газа может обращаться в нуль на границе области). (Давление и плотность в дозвуковых течениях не обращаются в нуль даже на границе течения.)

Поскольку скорость в области G отлична от нуля, можно ввести в этой области ортогональную систему естественных координат Osn так, чтобы равенства вида $n = \text{const}$ задавали линии тока, а равенства вида $s = \text{const}$ задавали линии, ортогональные линиям тока. Тогда $\sigma = \sigma(n)$. Пусть H_s и H_n – коэффициенты Ламэ этой системы координат. Поскольку компоненты скорости дважды непрерывно дифференцируемы и нет точек торможения, то и коэффициенты Ламэ будут дважды непрерывно дифференцируемы. В координатах s, n векторные уравнения (5.30) и (5.31) представляют собой три следующих скалярных уравнения:

$$-\frac{V}{H_s H_n} \frac{\partial}{\partial n} (V H_s) = -\frac{1}{\rho H_n} \frac{\partial}{\partial n} p - \frac{1}{H_n} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{V^2}{2} \right),$$

$$\frac{1}{\rho H_s} \frac{\partial}{\partial s} p + \frac{1}{H_s} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{V^2}{2} \right) = 0,$$

$$\frac{1}{H_s} \frac{\partial}{\partial s} (\rho V H_n) = 0.$$

С учетом (5.32), перепишем эти уравнения в виде

$$\frac{1}{H_n} \frac{\partial}{\partial n} H_s = \frac{H_s}{H_n} \frac{1}{\rho V^2} \frac{\partial}{\partial n} p, \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} V = -\frac{1}{\rho V} \frac{\partial}{\partial s} p, \quad (5.34)$$

$$\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial s} \ln p + \frac{\partial}{\partial s} \ln V + \frac{\partial}{\partial s} \ln H_n = 0. \quad (5.35)$$

Из (5.34) и (5.35) исключим $\frac{\partial}{\partial s} V$:

$$\frac{1}{H_s} \frac{\partial}{\partial s} H_n = \frac{H_n}{H_s} \frac{k p - \rho V^2}{k p \rho V^2} \frac{\partial}{\partial s} p. \quad (5.36)$$

Как и в предыдущих разделах, воспользуемся равенством

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{H_s} \frac{\partial}{\partial s} H_n \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{H_n} \frac{\partial}{\partial n} H_s \right) = 0.$$

С использованием формул (5.33) и (5.36) последнее равенство позволяет получить следующее необходимое условие совместности уравнений (5.33) и (5.36):

$$a_{11} \frac{\partial^2}{\partial s^2} p + a_{22} \frac{\partial^2}{\partial n^2} p + b_1 \frac{\partial}{\partial s} p + b_2 \frac{\partial}{\partial n} p = 0, \quad (5.37)$$

где

$$a_{11} = \frac{H_n}{H_s} \frac{k p - \rho V^2}{k p \rho V^2}, \quad a_{22} = \frac{H_s}{H_n} \frac{1}{\rho V^2}, \quad b_1 = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{H_n}{H_s} \frac{k p - \rho V^2}{k p \rho V^2} \right), \quad b_2 = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{H_s}{H_n} \frac{1}{\rho V^2} \right).$$

Если уравнение (5.37) используется для поиска решения какой-либо краевой задачи, то нельзя считать коэффициенты a_{11} , a_{22} , b_1 и b_2 известными функциями координат s и n . Однако если уравнение (5.37) используется для выяснения свойств решения задачи в предположении, что такое решение существует, то эти коэффициенты можно считать некоторыми пусть и неизвестными, но существующими функциями координат. Поскольку в дозвуковых точках (то есть во всех точках области G) $k p - \rho V^2 > 0$, то все условия предположения 1 варианта теоремы Хопфа (раздел 5.3) выполнены. Поэтому, применяя утверждение 8 раздела 5.3, получаем следующий принцип максимума давления, который уточняет ПМ давления Никольского.

Пусть в ограниченной области G плоское дозвуковое течение идеального газа таково, что в области G отсутствуют точки торможения, и что гидродинамические параметры p , ρ , \mathbf{V} дважды непрерывно дифференцируемы в

области G и непрерывны в замкнутой области \bar{G} . При этом допускается наличие звуковых точек и точек торможения на ∂G .

Тогда если давление p не постоянно, то и максимум, и минимум p достигаются на границе и только на границе области G .

Рассмотрим по отдельности два требования, содержащиеся в приведенной формулировке.

1. В течении должны отсутствовать точки торможения. Это требование неустранимо, поскольку можно привести пример достижения максимального значения давления во внутренней точке течения. Например, точка торможения может возникать при столкновении двух противоположно направленных однородных струй газа, и в этой точке будет максимум давления.

С математической точки зрения это условие существенно используется в двух моментах приведенного доказательства. Во-первых, из отсутствия точек с нулевой скоростью следует возможность введения системы естественных координат (Osn) . Во-вторых, следует ограниченность коэффициентов уравнения (13), что требуется для применения следствия теоремы Хопфа.

2. Течение должно быть дозвуковым (число Маха $M < 1$) в области G . Нарушение этого требования приводит к вырождению уравнения (5.37): при $M \geq 1$ оно уже не будет уравнением эллиптического типа.

Замечание. Применение операции div к обеим частям уравнения (5.30) также приводит к уравнению эллиптического типа. Но как в прямоугольной декартовой системе координат, так и во введенной выше системе естественных координат Osn это уравнение будет иметь вид уравнения (5.37) с нетривиальной правой частью. Вопрос о том, равна ли эта правая часть нулю или имеет определенный знак, остается в настоящее время открытым. И применение классической теоремы Хопфа, а также применение варианта теоремы Хопфа (раздел 5.3) невозможно. В этом состояла основная трудность исследования в данном разделе. Она преодолена тем, что следствие теоремы Хопфа применено не к уравнению, полученному в результате применения операции div к обеим частям уравнения (5.30), а к (однородному) уравнению (5.37), полученному из

дифференциального свойства коэффициентов Ламэ (формула (5.16)), которое в итоге обеспечило равенство нулю правой части (5.37).

Этот результат опубликован в [58] с тем отличием, что в [58] была использована классическая теорема Хопфа, и предполагалось, что на границе области G отсутствуют звуковые точки и точки торможения. В предложенном здесь варианте ПМ наличие таких точек допускается (из-за использования варианта теоремы Хопфа). Вклад соавтора [58] состоит в получении следствия из ПМ давления Никольского: признак наличия сверхзвуковой точки или точки торможения (подробнее см. в [58]).

5.10 Дозвуковой принцип максимума давления в осесимметричных течениях

Рассмотрим дозвуковую область осесимметричного течения за отошедшей ударной волной, сформировавшимся при обтекании однородным сверхзвуковым потоком затупленного тела. Такое течение вихревое и небаротропное. Поскольку набегающий поток однороден, то закрутка отсутствует (окружная скорость равна нулю), и завихренность ортогональна скорости. Эта особенность незакрученного осесимметричного течения будет использована ниже для получения принципа максимума, в условия которого не входит Q -параметр. В этом смысле доказательство похоже на доказательство раздела 5.7, но имеет отличия, связанные с преодолением проблем, вызванных сжимаемостью (и небаротропностью).

Первые шаги предложенного здесь доказательства будут повторены также в разделе 5.11, в котором рассматривается общий пространственный случай. Поэтому сделаем эти шаги для общего пространственного случая (а не только для осесимметричных течений).

Пространственное стационарное течение идеального газа описывается системой уравнений (5.30) – (5.32).

Будем рассматривать дозвуковое течение в некоторой пространственной области G при отсутствии в ней точек торможения. Это значит, что местное число Маха M заключено в диапазоне

$$0 < M = V / \sqrt{k p / \rho} < 1. \quad (5.38)$$

При этом допускается наличие точек торможения ($V = 0$) или звуковых точек ($M = 1$) на границе области G . Также будем считать, что все газодинамические функции (компоненты скорости, плотность и давление) являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями координат в области G и непрерывными на ее замыкании \bar{G} .

Покажем, что не только для плоских (см. раздел 5.9), но и для осесимметричных течений при выполнении указанных условий справедлив принцип минимума давления: если давление не постоянно в области G , то оно достигает минимального значения на границе и только на границе этой области.

Вычисляя дивергенцию обеих частей векторного уравнения (5.30), получим (точка означает скалярное произведение)

$$\frac{1}{\rho} \Delta p - \frac{1}{\rho^2} \nabla p \cdot \nabla \rho = \Omega^2 - \mathbf{V} \cdot \text{rot} \mathbf{\Omega} - \frac{1}{2} \Delta V^2, \quad (5.39)$$

где Δ – оператор Лапласа, $\Omega = |\mathbf{\Omega}|$, $\mathbf{\Omega} = \text{rot} \mathbf{V}$ – завихренность. Поскольку

$\frac{1}{2} \Delta V^2 = \mathbf{V} \cdot \Delta \mathbf{V} + (\nabla u)^2 + (\nabla v)^2 + (\nabla w)^2$, где u, v, w – компоненты вектора

скорости в произвольной трехмерной прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$, то, используя векторное тождество

$\mathbf{V} \cdot \text{rot} \mathbf{\Omega} \equiv \mathbf{V} \cdot \nabla \text{div} \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \Delta \mathbf{V}$, вытекающее из известного векторного тождества

$\nabla \text{div} \mathbf{V} \equiv \text{rot} \text{rot} \mathbf{V} + \Delta \mathbf{V}$, из (5.39) после перестановки слагаемых получим

$$\frac{1}{\rho} \Delta p + \mathbf{V} \cdot \nabla \text{div} \mathbf{V} - \frac{1}{\rho^2} \nabla p \cdot \nabla \rho = \Omega^2 - (\nabla u)^2 - (\nabla v)^2 - (\nabla w)^2. \quad (5.40)$$

Преобразуем второе слагаемое в левой части (5.40). Из уравнений (5.31) и (5.32) следует, что $-\text{div} \mathbf{V} = (\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho)$ и $\mathbf{V} \cdot \nabla (\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho) = \frac{1}{k} \mathbf{V} \cdot \nabla (\mathbf{V} \cdot \nabla \ln p)$

соответственно. Поэтому $\mathbf{V} \cdot \nabla \operatorname{div} \mathbf{V} = -\frac{1}{k} \mathbf{V} \cdot \nabla (\mathbf{V} \cdot \nabla \ln p)$. Преобразуем в этом равенстве правую часть. Для этого используем известные векторные тождества

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \equiv (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \operatorname{rot} \mathbf{a},$$

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla)(\gamma \mathbf{b}) \equiv \gamma(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + ((\mathbf{a} \cdot \nabla)\gamma)\mathbf{b} \quad \text{и} \quad \operatorname{rot} \nabla \gamma \equiv 0,$$

где γ – скалярная функция. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot \nabla \operatorname{div} \mathbf{V} &= -\frac{1}{k} \mathbf{V} \cdot \nabla (\mathbf{V} \cdot \nabla \ln p) = -\frac{1}{k p} \mathbf{V} \cdot ((\mathbf{V} \cdot \nabla) \nabla p) + \\ &+ \frac{1}{k p^2} (\mathbf{V} \cdot \nabla p)^2 - \frac{1}{k p} \mathbf{V} \cdot ((\nabla p \cdot \nabla) \mathbf{V}) - \frac{1}{k p} \mathbf{V} \cdot (\nabla p \times \boldsymbol{\Omega}). \end{aligned}$$

Поскольку $\mathbf{V} \cdot ((\nabla p \cdot \nabla) \mathbf{V}) = \frac{1}{2} \nabla p \cdot \nabla V^2$ и $\mathbf{V} \cdot (\nabla p \times \boldsymbol{\Omega}) = \nabla p \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V})$, сумма двух

последних слагаемых равна $-\frac{1}{k p} \nabla p \cdot \left(\frac{1}{2} \nabla V^2 + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}) \right)$. Учитывая, что,

согласно (5.30), верна формула $\left(\frac{1}{2} \nabla V^2 + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}) \right) = -\frac{\nabla p}{\rho}$, получим, что сумма

двух последних слагаемых равна

$$-\frac{1}{k p} \nabla p \cdot \left(\frac{1}{2} \nabla V^2 + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}) \right) = \frac{1}{k p \rho} (\nabla p)^2.$$

Поэтому

$$\mathbf{V} \cdot \nabla \operatorname{div} \mathbf{V} = -\frac{1}{k p} \mathbf{V} \cdot ((\mathbf{V} \cdot \nabla) \nabla p) + \frac{1}{k p^2} (\mathbf{V} \cdot \nabla p)^2 + \frac{1}{k p \rho} (\nabla p)^2.$$

Подставляя это выражение в левую часть (5.40), получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho} \Delta p - \frac{1}{k p} \mathbf{V} \cdot ((\mathbf{V} \cdot \nabla) \nabla p) - \frac{1}{\rho^2} \nabla p \cdot \nabla \rho = \\ &= \Omega^2 - (\nabla u)^2 - (\nabla v)^2 - (\nabla w)^2 - \frac{1}{k p^2} (\mathbf{V} \cdot \nabla p)^2 - \frac{1}{k p \rho} (\nabla p)^2. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Это уравнение справедливо для общего пространственного случая без ограничения (5.38), и оно будет использовано в следующем разделе в общем пространственном случае.

Вернемся к незакрученным осесимметричным течениям и воспользуемся присущим им свойством ортогональности векторов скорости и завихренности. Тогда из (5.30) следует, что

$$(\Omega V)^2 = \left(\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{2} \nabla V^2 \right)^2.$$

С учетом принятого выше предположения об отсутствии точек торможения ($V \neq 0$), последнее уравнение позволяет выразить квадрат завихренности в виде

$$\Omega^2 = \left(\frac{1}{\rho^2 V^2} \nabla p + \frac{1}{\rho V^2} \nabla V^2 \right) \cdot \nabla p + \frac{1}{V^2} \left(\frac{1}{2} \nabla V^2 \right)^2.$$

Подставляя в (5.41) квадрат завихренности в таком виде, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \Delta p - \frac{1}{k p} \mathbf{V} \cdot ((\mathbf{V} \cdot \nabla) \nabla p) - \left\{ \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho + \frac{1}{\rho^2 V^2} \nabla p + \frac{1}{\rho V^2} \nabla V^2 \right\} \cdot \nabla p = \\ & = \frac{1}{V^2} \left(\frac{1}{2} \nabla V^2 \right)^2 - (\nabla u)^2 - (\nabla v)^2 - (\nabla w)^2 - \frac{1}{k p^2} (\mathbf{V} \cdot \nabla p)^2 - \frac{1}{k p \rho} (\nabla p)^2. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Повторяя рассуждения и выкладки, приведенные в разделе 5.7 после формулы

(5.21), получим, что $I = \frac{1}{V^2} \left(\frac{1}{2} \nabla V^2 \right)^2 - (\nabla u)^2 - (\nabla v)^2 - (\nabla w)^2 \leq 0$. Поэтому

уравнение (5.42) во всех точках области G можно записать в виде

$$\frac{1}{\rho} \Delta p - \frac{1}{k p} \mathbf{V} \cdot ((\mathbf{V} \cdot \nabla) \nabla p) - \left\{ \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho + \frac{1}{\rho^2 V^2} \nabla p + \frac{1}{\rho V^2} \nabla V^2 \right\} \cdot \nabla p = f, \quad (5.43)$$

где функция $f \leq 0$.

Зафиксируем произвольно выбранную прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ и запишем левую часть (5.43) в координатной форме. Во всех точках области G уравнение (5.43) примет вид

$$\begin{aligned} & a_{11} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + 2a_{13} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} + 2a_{23} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial z} + a_{33} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \\ & + b_1 \frac{\partial p}{\partial x} + b_2 \frac{\partial p}{\partial y} + b_3 \frac{\partial p}{\partial z} = f, \quad f \leq 0. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33}$ зависят от газодинамических функций (от параметров течения u, v, w, ρ, p). Коэффициенты b_1, b_2, b_3 есть компоненты вектора, записанного в фигурных скобках в левой части уравнения (5.43), и зависят как от самих газодинамических функций, так и от их первых производных. В данном исследовании искомые функции, удовлетворяющие уравнениям газодинамики (5.30) – (5.32) и вытекающему из них уравнению (5.44), неизвестны, и поэтому коэффициенты a_{ij}, b_i и функция f также неизвестны. Вместе с тем выяснить свойства решения уравнения (5.44) для давления (считая, что решение существует) можно на основании свойств этих коэффициентов, не требующих их полной детерминированности. Например, используя только их непрерывность или неравенство $f \leq 0$. Рассмотрим уравнение (5.44) с такой точки зрения. Воспользуемся утверждением 6 раздела 5.3. Уравнение (5.44) удовлетворяет всем условиям этого утверждения. Действительно, поскольку плотность и давление в стационарном дозвуковом течении не могут обращаться в нуль, то из (5.38) следует, что для любой внутренней точки существует окрестность, в которой все коэффициенты a_{ij}, b_i и функция f ограничены. Далее, если применить критерий Сильвестра, то непосредственной проверкой, с учетом (5.38), можно убедиться в том, что величины $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33}$ являются коэффициентами положительно определенной квадратичной формы. Определитель матрицы A , составленной из коэффициентов a_{ij} , равен $\det A = \rho^{-3}(1 - M^2)$. В силу принятого ограничения (5.38) и непрерывности параметров течения для любой внутренней точки существует окрестность, в которой местное число Маха M отграничено от единицы. То есть существует такое число $c_0 > 0$, что во всех точках упомянутой окрестности выполнено условие $\det A > c_0$. Таким образом, выполнены все условия утверждения 6. Поэтому *при отсутствии внутренних точек торможения в ограниченной дозвуковой области стационарного осесимметричного (возможно, вихревого и, возможно, небаротропного) течения идеального газа, давление, если оно не*

постоянно всюду, достигает минимального значения на границе и только на границе области.

В статье [62], где был опубликован этот ПМ, соавторы проиллюстрировали верность этого ПМ, проанализировав выполненные ими численные расчеты обтекания сферы при числах Маха набегающего потока $M_\infty = 3, 4, 6$ и 8 при помощи комплекса программ АРГОЛА-2 [212].

5.11 Дозвуковой принцип максимума давления в общем пространственном случае (ДПМД)

В этом разделе будет получен новый ПМ давления в общем пространственном случае для дозвуковых вихревых и небаротропных течений, каковыми являются течения за отошедшей ударной волной в некоторой области, содержащей линию торможения.

Выкладки предыдущего раздела до формулы (5.41) включительно верны для общего пространственного случая. При этом требование отсутствия точек торможения в области G в предыдущем разделе использовалось после вывода формулы (5.41). Поэтому условие (5.38) можно ослабить, допустив наличие точек торможения, и заменить его на одно только требование отсутствия звуковых и сверхзвуковых точек: $M = V/\sqrt{k p/\rho} < 1$. При этом формула (5.41) останется верной. Перепишем ее в виде

$$\frac{1}{\rho} \Delta p - \frac{1}{k p} \mathbf{V} \cdot ((\mathbf{V} \cdot \nabla) \nabla p) + \left\{ \frac{1}{k p^2} (\mathbf{V} \cdot \nabla p)^2 + \frac{1}{k p \rho} (\nabla p)^2 - \frac{1}{\rho^2} \nabla p \cdot \nabla \rho \right\} = 2Q,$$

где Q определяется формулой (5.1) (Q -параметр). В каждое слагаемое в фигурных скобках градиент давления входит в виде множителя как минимум один раз, а компоненты градиента давления не дифференцируются. Поэтому выражение в фигурных скобках можно записать в виде скалярного произведения

$\mathbf{b} \cdot \nabla p$, где \mathbf{b} зависит от газодинамических функций и их производных так, что компоненты этого вектора ограничены в области G . Таким образом,

$$\frac{1}{\rho} \Delta p - \frac{1}{k\rho} \mathbf{V} \cdot ((\mathbf{V} \cdot \nabla) \nabla p) + \mathbf{b} \cdot \nabla p = 2Q. \quad (5.45)$$

Если записать уравнение (5.45) в координатной форме и сгруппировать множители при первых и вторых производных давления, получится уравнение

$$\begin{aligned} a_{11} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + 2a_{13} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} + 2a_{23} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial z} + a_{33} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \\ + b_1 \frac{\partial p}{\partial x} + b_2 \frac{\partial p}{\partial y} + b_3 \frac{\partial p}{\partial z} = f, \quad f = 2Q. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33}$ зависят от газодинамических функций (u, v, w, ρ, p) . Коэффициенты b_1, b_2, b_3 суть компоненты вектора \mathbf{b} и зависят еще и от первых производных газодинамических функций. Коэффициенты уравнения (5.46) удовлетворяют всем условиям предположения 1 раздела 5.3. Действительно, поскольку плотность и давление в стационарном дозвуковом течении не могут обращаться в нуль, то из неравенства $M = V / \sqrt{k p / \rho} < 1$ следует, что для любой внутренней точки существует окрестность, в которой все коэффициенты a_{ij}, b_i и функция f ограничены. Далее, если применить критерий Сильвестра, то непосредственной проверкой, с учетом $M < 1$, можно убедиться в том, что величины $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33}$ являются коэффициентами положительно определенной квадратичной формы. Определитель матрицы A , составленной из коэффициентов a_{ij} , равен $\det A = \rho^{-3} (1 - M^2)$. В этом легко убедиться, записав в координатном виде выражение $\frac{1}{\rho} \Delta p - \frac{1}{k\rho} \mathbf{V} \cdot ((\mathbf{V} \cdot \nabla) \nabla p)$ в системе координат, в которой одна из осей сонаправлена со скоростью \mathbf{V} в рассматриваемой точке. В силу принятого ограничения $M < 1$ и непрерывности параметров течения для любой внутренней точки существует окрестность, в которой местное число Маха M отграничено от

единицы. То есть для любой внутренней точки существует такое число $c_0 > 0$, что во всех точках упомянутой окрестности выполнено условие $\det A > c_0$. Таким образом, выполнены все условия предположения 1 раздела 5.3. Поэтому, применяя утверждения 6, 7 и 8 раздела 5.3, имеем следующий принцип максимума, составляющий основной результат главы.

Дозвуковой принцип максимума давления (ДПМД). Пусть все газодинамические параметры дозвукового стационарного течения идеального газа являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями координат в некоторой ограниченной области G , а давление p непрерывно на замыкании \bar{G} . И пусть в G выполняются уравнения (5.30) – (5.32), а величина Q определяется формулой (5.1). Тогда, если давление не постоянно в G и во всех точках G выполняется

1) $Q \leq 0$, то давление p достигает минимума на \bar{G} на границе и только на границе области G ;

2) $Q \geq 0$, то давление p достигает максимума на \bar{G} на границе и только на границе области G ;

3) $Q = 0$, то давление p достигает минимума и максимума на \bar{G} на границе и только на границе области G .

Из ДПМД следует (далее – «следствие ДПМД»), что если давление не постоянно всюду и достигает строгого или нестрогого минимума во внутренней точке течения, то Q -параметр в этой точке должен быть неотрицательным, а во внутренней точке максимума давления Q -параметр должен быть неположительным.

Это следствие ДПМД позволяет для верификации ограничиться вычислением Q -параметра только в точке экстремума давления.

Основная идея предложенного доказательства была впервые применена соискателем в [59] для безвихревых течений газа. ДПМД впервые опубликован в [64] и получен лично соискателем, что соавтор подтверждает в статье [37].

Соавтор соискателя в статье [64] выполнил расчеты течений и провел их верификацию с помощью ДПМД. Другим примерам применения ДПМД посвящен следующий раздел.

5.12 Применение ДПМД для верификации численных расчетов

После опубликования ДПМД в статье [64] соавтор соискателя (В. В. Вышинский) продолжил использовать проверку выполнения ДПМД для верификации численных расчетов течений идеального газа. Разумеется, выполнение принципа максимума еще не означает правильности решения, но его нарушение позволяет «отфильтровать» решение как неверное.

Этот подход показал свою эффективность в серии работ В. В. Вышинского с соавторами [37–44]. В работе [37] проведен расчет обтекания фюзеляжа вертолета с оперением и шасси. В [38] на примере расчета обтекания параллелепипеда решалась задача о моделировании обтекания фрагментов ландшафта (плохообтекаемых тел) атмосферным ветром. В работе [39] проведены расчеты ветровой нагрузки на колесо обозрения.

Предметы исследований в работах [40–42] видны из их названий. Все расчеты подвергались дополнительной верификации путем проверки выполнения следствия ДПМД.

В некоторых из этих работ, например в [40, 42], результаты расчета демонстрируют выполнение следствия ДПМД, что авторами рассматривалось как подтверждение высокого качества полученных решений.

В других работах, например в [37–40], в первоначальных расчетах наблюдались нарушения следствия ДПМД, а потому приходилось увеличивать число итераций и модифицировать и сгущать расчетную сетку в некоторых областях течения. В итоге удавалось получать решения, в которых следствие ДПМД оказывалось выполненным.

В работах [43, 44] на примерах численных расчетов дозвукового обтекания компоновок летательных аппаратов и их элементов продемонстрирована эффективность применения проверки выполнения ДПМД в качестве независимой верификации решений для повышения качества и выявления «слабых» мест в расчетах, которые приводят к снижению точности, а в ряде случаев – к получению недостоверных результатов.

Таким образом, полученный в [64] ДПМД оказался востребованным. Поэтому представилось актуальным в общем пространственном случае получить принцип максимума давления без ограничений на величину местного числа Маха в точках рассматриваемой области. То есть принцип максимума давления для областей, в которых могут быть дозвуковые, трансзвуковые и сверхзвуковые зоны. Этому посвящены следующие три раздела.

5.13 Небаротропный принцип максимума Трусделла

В условия ПМ Трусделла [34] входит баротропность (формулировка приведена в подразделе «Баротропные вихревые течения газа» раздела 5.1). Для течений идеального газа это означает постоянство энтропийной функции σ во всех точках течения, то есть условие (5.32) заменяется более жестким условием

$$p\rho^{-k} = \sigma = \text{const}. \quad (5.47)$$

Преимуществом ПМ Трусделла по сравнению с ДПМД является отсутствие ограничений на значения местного числа Маха в рассматриваемой области.

В течении за отошедшей ударной волной условие (5.47) нарушено и ПМ Трусделла применять нельзя. Однако преобразования Мунка – Прима [103] позволяют использовать (баротропный) ПМ Трусделла для исследования экстремальных свойств давления в небаротропных и сверхзвуковых течениях. Действительно.

Пусть стационарное небаротропное течение с параметрами (\mathbf{V}, ρ, p) описывается системой уравнений (5.30) – (5.32). Применим преобразование Мунка – Прима [103]. Согласно [103], если функция m такова, что $(\mathbf{V} \cdot \nabla)m = 0$, то новое стационарное течение с параметрами $\tilde{\mathbf{V}} = m\mathbf{V}$, $\tilde{\rho} = m^{-2}\rho$ и $\tilde{p} = p$ также удовлетворяет уравнениям (5.30) – (5.32) и имеет те же самые линии тока, что и старое (\mathbf{V}, ρ, p) течение. При этом местное число Маха, как и давление, не меняется: $\tilde{M} = M$.

Из уравнения (5.32) следует, что функция $m = \sigma^{-1/(2k)}$, где $\sigma = p\rho^{-k}$, удовлетворяет условию Мунка – Прима: $(\mathbf{V} \cdot \nabla)m = 0$. Тогда энтропийная функция $\tilde{\sigma} = \tilde{p}\tilde{\rho}^{-k}$ нового течения $(\tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\rho}, \tilde{p})$ при $(\mathbf{V} \cdot \nabla)m = 0$ будет равна $\tilde{\sigma} = \tilde{p}\tilde{\rho}^{-k} = p(\rho(\sigma^{-1/(2k)})^{-2})^{-k} = p\rho^{-k}\sigma^{-1} = 1$. Это значит, что новое течение будет изоэнтропийным, и к нему можно применить ПМ Трусделла. При этом, поскольку $\tilde{p} = p$, утверждения относительно точек достижения экстремумов давления будут верны и для старого (\mathbf{V}, ρ, p) течения. Кроме того, поскольку $(\mathbf{V} \cdot \nabla)m = 0$, то $(m\mathbf{V} \cdot \nabla)\operatorname{div}(m\mathbf{V}) = m^2(\mathbf{V} \cdot \nabla)\operatorname{div}\mathbf{V}$, и, следовательно, знаки $(m\mathbf{V} \cdot \nabla)\operatorname{div}(m\mathbf{V})$ и $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\operatorname{div}\mathbf{V}$ совпадают. В результате получаем следующий небаротропный ПМ Трусделла.

Пусть все газодинамические параметры (\mathbf{V}, ρ, p) стационарного течения идеального газа являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями координат в некоторой ограниченной области G , а давление p непрерывно на замыкании \bar{G} . И пусть в G выполняются уравнения (5.30) – (5.32), а величина \tilde{Q} определяется формулой

$$\tilde{Q} = 0.5 \left[(\operatorname{rot}(m\mathbf{V}))^2 - (\nabla(mi))^2 - (\nabla(mv))^2 - (\nabla(mw))^2 \right],$$

где $m = (p\rho^{-k})^{-1/(2k)}$. Тогда, если давление не постоянно в G и во всех точках G выполняется

1) $\tilde{Q} \leq 0$ и $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\operatorname{div}\mathbf{V} \geq 0$, то давление p достигает минимума на \bar{G} на

границе и только на границе области G ;

2) $\tilde{Q} \geq 0$ и $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} \leq 0$, то давление p достигает максимума на \bar{G} на границе и только на границе области G ;

3) $\tilde{Q} = 0$ и $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} = 0$, то давление p достигает минимума и максимума на \bar{G} на границе и только на границе области G .

В этом небаротропном ПМ Трусделла, как и в классическом (баротропном) ПМ Трусделла, отсутствует ограничение на значения местного числа Маха в рассматриваемой области и отсутствует требование баротропности. Однако имеют место два недостатка.

Первый недостаток – исключенность из рассмотрения случаев $\tilde{Q} \leq 0$, $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} \leq 0$ и $\tilde{Q} \geq 0$, $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} \geq 0$.

Другой недостаток – невозможность при верификации ограничиться вычислением производных параметров течения в одной только точке экстремума давления, как это можно делать при использовании следствия ДПМД (см. конец раздела 5.11). Поясним это на примере верификации расчета течения идеального газа, в котором давление достигает минимума в некоторой внутренней точке A .

Из небаротропного ПМ Трусделла следует, что в любой окрестности точки A (в которой давление достигает минимума) должна быть точка, в которой нарушено условие, состоящее из одновременного выполнения условий

$$\tilde{Q} \leq 0 \text{ и } (\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} \geq 0.$$

Рассмотрим последовательность таких точек, стремящихся к A . В точках последовательности или $\tilde{Q} > 0$, или $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} < 0$, или верны оба эти строгие неравенства. Поэтому хотя бы одно из строгих неравенств $\tilde{Q} > 0$ и $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} < 0$ выполняется на бесконечном числе точек последовательности (на некоторой подпоследовательности). Отсюда в силу непрерывности получаем, что в точке A должно быть верным хотя бы одно из неравенств $\tilde{Q} \geq 0$ и $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} \leq 0$. Это следствие не позволяет «отфильтровывать» неверные решения, поскольку неравенство $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} \leq 0$ всегда окажется выполненным.

Действительно, из уравнения неразрывности следует, что $-(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} = (\mathbf{V} \cdot \nabla)(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln p)$, а из уравнения (5.32), верного для небаротропных течений, следует, что $(\mathbf{V} \cdot \nabla)(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln p) = \frac{1}{k} \mathbf{V} \cdot \nabla(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln p)$.

Используя известную формулу векторного анализа для градиента скалярного произведения $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \equiv (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \operatorname{rot} \mathbf{a}$ и учитывая, что ротор градиента равен нулю, имеем

$$\begin{aligned} -(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} &= (\mathbf{V} \cdot \nabla)(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln p) = \frac{1}{k} \mathbf{V} \cdot \nabla(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln p) = -\frac{1}{k p^2} (\mathbf{V} \cdot \nabla p)^2 + \\ &+ \frac{1}{k p} \mathbf{V} \cdot ((\mathbf{V} \cdot \nabla) \nabla p) + \frac{1}{k p} \mathbf{V} \cdot ((\nabla p \cdot \nabla) \mathbf{V}) + \frac{1}{k p} \mathbf{V} \cdot (\nabla p \times \boldsymbol{\Omega}). \end{aligned}$$

В точке A градиент давления равен нулю. Поэтому

$$-((\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V})(A) = \frac{1}{k p} \mathbf{V} \cdot ((\mathbf{V} \cdot \nabla) \nabla p)(A). \quad (5.48)$$

Правая часть есть произведение $V^2 / (k p)$ на вторую производную давления по направлению скорости в точке A (в этом можно убедиться, записав правую часть (5.48) в прямоугольной системе координат, у которой одна из осей сонаправлена со скоростью \mathbf{V} в точке A). Одно из необходимых условий минимума состоит в том, что такая вторая производная неотрицательна. Поэтому условие $((\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V})(A) \leq 0$ всегда окажется выполненным в точке минимума давления, расположенной внутри течения. Это показывает, что необходимое условие минимума давления, состоящее в выполнении хотя бы одного из неравенств $\tilde{Q} \geq 0$ и $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} \leq 0$, всегда будет выполнено. Поэтому при использовании небаротропного ПМ Труслелла невозможно ограничиться вычислением производных параметров течения только в точке минимума. Небаротропный ПМ Труслелла опубликован в [52], где соавтор показал, что в случае строгих неравенств $Q < 0$ или $Q > 0$ в точке экстремума эти неравенства будут иметь место и для \tilde{Q} .

5.14 Общий принцип максимума давления (ОПМД)

Получим ПМ для небаротропных течений, у которого отсутствуют два недостатка небаротропного ПМ Трусделла, описанные в предыдущем разделе, и у которого отсутствует ограничение на значения местного числа Маха в рассматриваемой области. (Заметим, что в настоящем разделе уравнение состояния не используется.)

Рассмотрим стационарное течение идеального (отсутствуют вязкость и теплопроводность) газа с произвольным уравнением состояния. Полная система уравнений движения газа может отличаться от системы (5.30) – (5.32) только уравнением (5.32).

Просматривая выкладки в начале раздела 5.10, можно убедиться в том, что формула (5.40) есть следствие только первых двух уравнений системы (5.30) – (5.32), а уравнение (5.32) и условие (5.38) при выводе формулы (5.40) не используются. Это значит, что уравнение (5.40) верно для невязкого газа с любым уравнением состояния при любых значениях числа Маха. Воспользуемся формулой (5.40) и представим ее в виде

$$\frac{1}{\rho} \Delta p - \frac{1}{\rho^2} \nabla p \cdot \nabla \rho = 2Q - \mathbf{V} \cdot \nabla \operatorname{div} \mathbf{V}.$$

Это уравнение имеет вид (5.9), где правая часть $f = 2Q - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V}$, а коэффициенты уравнения удовлетворяют предположению 1 раздела 5.3. Поэтому, используя утверждения 6, 7 и 8 раздела 5.3, получим следующий принцип максимума, в котором отсутствуют два недостатка небаротропного ПМ Трусделла, описанные в предыдущем разделе, и в котором отсутствует ограничение на значения местного числа Маха в рассматриваемой области.

Общий принцип максимума давления (ОПМД). Пусть все параметры (\mathbf{V}, ρ, p) стационарного течения невязкого газа являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями координат в некоторой ограниченной области G , а давление p непрерывно на замыкании \bar{G} . И пусть в G выполняются

уравнения (5.30) – (5.31), а величина Q определяется формулой (5.1). Тогда если давление не постоянно в G и во всех точках G выполняется

1) $2Q - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} \leq 0$, то давление p достигает минимума на \bar{G} на границе и только на границе области G ;

2) $2Q - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} \geq 0$, то давление p достигает максимума на \bar{G} на границе и только на границе области G ;

3) $2Q - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V} = 0$, то давление p достигает минимума и максимума на \bar{G} на границе и только на границе области G .

Новый ПМ предложено назвать *общим* принципом максимума давления (ОПМД) по трем причинам. Первая – он верен как для баротропных, так и для небаротропных течений (поскольку в доказательстве баротропность не используется). Вторая – в нем отсутствует ограничение на значения местных чисел Маха. Третья – он верен для течений невязкого газа с произвольным уравнением состояния, а не только для совершенного газа (уравнение состояния может отличаться от уравнения Менделеева – Клапейрона), поскольку в доказательстве не используется уравнение (5.32).

Следствие ОПМД. Пусть все газодинамические параметры (\mathbf{V}, p, ρ) стационарного течения идеального (невязкого) газа являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями координат в некоторой окрестности точки экстремума давления A (которая есть внутренняя точка течения), и пусть в этой окрестности выполняются уравнения (5.30) – (5.31), а величина Q определяется формулой (5.1). Тогда если давление достигает в точке A строгого или нестрогого минимума, то величина $2Q - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V}$ в этой точке должна быть неотрицательной, а если давление достигает в точке A строгого или нестрогого максимума, то величина $2Q - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V}$ должна быть неположительной.

Это следствие позволяет при верификации ограничиться вычислением производных параметров течения в одной только точке экстремума давления так же, как это можно делать при использовании следствия ДПМД. (Некоторые

рекомендации по применению следствия ОПМД для верификации расчетов идеального газа будут даны в следующем разделе.)

Сравнивая формулировки (баротропного) ПМ Трусделла и ОПМД, можно убедиться в том, что первый ПМ есть следствие второго (но не наоборот). Область применения ОПМД шире и включает в себя область применения ПМ Трусделла. Поэтому ОПМД представляет собой обобщение ПМ Трусделла. Из сравнения формулировок также видно, что ПМ Трусделла оказывается верен и для небаротропных течений (то есть ПМ Трусделла можно применять для небаротропных течений даже без использования преобразования Мунка – Прима).

Замечание. Как сказано в разделе 5.2, целью работы Трусделла [34] было показать важную роль величины $\mathcal{W}_K = (1 - 4Q/\Omega^2)^{-1/2}$ как характеристики вихревых течений, и баротропный ПМ был приведен как один из удачных примеров. Поэтому обобщать этот ПМ в рамках работы [34] до уровня ОПМД не имело особого смысла. Это обобщение (ОПМД) получено в [75] после возникновения потребности в таком ПМ для верификации расчетов.

Итак, получены два ПМ давления для общего пространственного случая. Это ДПМД (раздел 5.11) и ОПМД, полученный в настоящем разделе. Оба ПМ применимы как для баротропных, так и для небаротропных течений. Они отличаются с точки зрения применимости для верификации расчетов путем проверки выполнения этих ПМ. Отличие состоит в следующем.

Область применения ОПМД шире (нет ограничений на значение местного числа Маха и нет требования, чтобы газ был совершенным). Однако для верификации расчетов в дозвуковых областях течений идеального *совершенного* (выполняется закон Менделеева – Клапейрона) газа удобнее и проще использовать ДПМД, поскольку для проверки его условий достаточно вычисления только первых производных компонент скорости.

Впервые ОПМД был опубликован в [75].

5.15 О применении ОПМД для верификации расчетов

При проверке расчетов течений в рамках модели идеального (см. «Список терминов») газа можно пользоваться уравнением (5.32), которое следует из закона сохранения энергии [1, 92, 178]. Наличие этого уравнения в полной системе уравнений движения помогает в некоторых случаях упростить проверку следствия ОПМД и не вычислять вторые производные (не вычислять $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V}$). Речь идет о следующем.

Как было показано в разделе 5.13 на примере минимума, в точке экстремума A , являющейся внутренней точкой течения, знак $-(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V}(A)$ совпадает со знаком второй производной по направлению скорости (точки торможения не рассматриваются, так как для дозвуковых областей проще применять ДПМД). В точке минимума такая вторая производная неотрицательна, а в точке максимума – неположительна. Поэтому *если в точке минимума давления (в численном расчете) окажется, что $Q \geq 0$, то, поскольку величина $2Q - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V}$, входящая в условие следствия ОПМД, «автоматически» окажется неотрицательной, величину $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V}$ можно не вычислять: в численном расчете следствие ОПМД будет выполнено. Аналогично если в точке максимума давления (в численном расчете) окажется, что $Q \leq 0$, то величину $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V}$ можно не вычислять: в численном расчете следствие ОПМД будет выполнено.*

В других случаях для применения следствия ОПМД необходимо вычислять $2Q - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V}$ в точке A . При этом представляется полезным использовать тот факт, что (см. текст после формулы (5.48)) величина $-(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V}$ равна произведению $V^2 / (k p)$ на вторую производную давления по направлению скорости \mathbf{V} в точке A .

5.16 О значении Q -параметра в точке минимума давления на плоскости симметрии течения

В настоящем разделе (его результаты были опубликованы в [76]) рассматривается практически важный класс стационарных течений идеального газа с плоскостью симметрии. Течения с плоскостью симметрии возникают, когда скорость невозмущенного набегающего потока лежит в плоскости симметрии обтекаемого тела. Оказывается, что для точек минимума давления, расположенных на плоскости симметрии, можно получить утверждение относительно значений Q -параметра, верное и для сверхзвуковых течений, а для дозвуковых течений можно предложить более сильный «фильтр», чем проверка следствия ДПМД. При этом в отличие от ОПМД не надо вычислять $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{V}$.

Ниже будут рассмотрены два типа экстремумов (минимумов или максимумов) давления. В обоих типах рассматриваются только точки экстремума давления, лежащие на плоскости симметрии (в некоторых течениях такие точки экстремума могут отсутствовать). В первом типе в точке достигается строгий или нестрогий экстремум в некоторой ее пространственной окрестности. Такой экстремум будет называться экстремумом по пространству, а когда в точке достигается строгий или нестрогий экстремум в некоторой ее (двухмерной) окрестности на плоскости симметрии – экстремумом по плоскости симметрии. Такой экстремум может не быть экстремумом по пространству.

В рассматриваемых течениях могут быть дозвуковые и сверхзвуковые зоны. Также возможно наличие точек торможения (например, передняя точка торможения на обтекаемом теле). Допустим, что на плоскости симметрии есть точка A , в которой давление достигает (строгого или нестрогого) локального минимума по пространству, и в некоторой пространственной окрестности G точки A течение дозвуковое и отсутствуют точки торможения:

$$0 < M = V / \sqrt{k p / \rho} < 1. \quad (5.49)$$

Расположим прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ так, чтобы плоскость Oxy совпала с плоскостью симметрии течения, а положительное направление оси x совпало с направлением скорости газа в точке A (при этом начало координат на плоскости симметрии можно выбрать произвольно). Как обычно, будем считать, что компоненты скорости, плотность и давление имеют в рассматриваемой области течения G непрерывные вторые производные. Обозначим: $Q = 0.5[\Omega^2 - (\nabla u)^2 - (\nabla v)^2 - (\nabla w)^2]$, где u, v, w – компоненты вектора скорости.

Сформулированные выше требования подразумевают, что точка A расположена внутри течения (в частности, не на поверхности обтекаемого тела) и не может быть расположена на скачке уплотнения или на тангенциальном разрыве. В такой точке, согласно следствию ДПМД, должно выполняться неравенство

$$Q(A) \geq 0. \quad (5.50)$$

Обозначим $\mathbf{e} = \mathbf{V}/V$ – единичный вектор, касательный к линиям тока. Как замечено в [72], поскольку $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = V(\mathbf{e} \cdot \nabla)(V\mathbf{e}) = \mathbf{e}V(\mathbf{e} \cdot \nabla)V + V^2(\mathbf{e} \cdot \nabla)\mathbf{e}$, уравнение Эйлера (5.30) можно записать в виде $\mathbf{e}V(\mathbf{e} \cdot \nabla)V + V^2(\mathbf{e} \cdot \nabla)\mathbf{e} = -(\nabla p)/\rho$. В точке минимума давления $\nabla p = 0$ и в точке A последнее уравнение упрощается:

$$\mathbf{e}V(\mathbf{e} \cdot \nabla)V + V^2(\mathbf{e} \cdot \nabla)\mathbf{e} = 0. \quad (5.51)$$

Из известного векторного тождества $\nabla \mathbf{a}^2 = 2(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{a} + 2\mathbf{a} \times \text{rota}$ следует, что $(\mathbf{e} \cdot \nabla)\mathbf{e} = -\mathbf{e} \times \text{rote}$. Поэтому (5.51) равносильно

$$\mathbf{e}V(\mathbf{e} \cdot \nabla)V = V^2\mathbf{e} \times \text{rote} \quad (\text{в точке } A). \quad (5.52)$$

Левая и правая части (5.52) ортогональны друг другу, и, следовательно, они обе равны нулю. Учитывая, что $V \neq 0$, имеем одно скалярное и одно векторное равенства:

$$(\mathbf{e} \cdot \nabla)V = 0, \quad \mathbf{e} \times \text{rote} = 0 \quad (\text{в точке } A). \quad (5.53)$$

В общем пространственном случае из второго равенства не следует, что $\text{rote} = 0$. Однако на плоскости симметрии течения (где расположена точка A) векторы \mathbf{e} и rote ортогональны. Это доказывается так же, как доказана ортогональность завихренности к плоскости симметрии в разделе 2.7. Поэтому из второго равенства (5.53) следует, что в точке A $\text{rote} = 0$. Воспользуемся этим при вычислении завихренности в точке A :

$$\mathbf{\Omega} = \text{rot } V\mathbf{e} = V\text{rote} - \mathbf{e} \times \nabla V = -\mathbf{e} \times \nabla V.$$

Первое равенство (5.53) можно записать как равенство нулю скалярного произведения $(\mathbf{e} \cdot \nabla)V = 0$. Это значит, что векторы \mathbf{e} и ∇V ортогональны, из чего в свою очередь следует, что $|\mathbf{\Omega}| = |\mathbf{e} \times \nabla V| = |\mathbf{e}| \cdot |\nabla V| = |\nabla V| = |\nabla \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}|$. Чтобы найти квадрат завихренности, вычислим компоненты вектора $\nabla \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$. Система координат выбрана так, что в точке A только одна компонента скорости отлична от нуля: $u = V > 0$, $v = 0$, $w = 0$. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \frac{u \frac{\partial}{\partial x} u + v \frac{\partial}{\partial x} v + w \frac{\partial}{\partial x} w}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = \frac{\partial}{\partial x} u.$$

Аналогично $\frac{\partial}{\partial y} \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \frac{\partial}{\partial y} u$ и $\frac{\partial}{\partial z} \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \frac{\partial}{\partial z} u$. Следовательно,

$$\mathbf{\Omega}^2 = \left(\nabla \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} u \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} u \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} u \right)^2 = (\nabla u)^2.$$

Подставляя это выражение для $\mathbf{\Omega}^2$ в формулу для Q -параметра, получаем

$$\begin{aligned} Q(A) &= 0.5((\nabla u)^2 - (\nabla u)^2 - (\nabla v)^2 - (\nabla w)^2) = \\ &= 0.5(-(\nabla v)^2 - (\nabla w)^2) \leq 0. \end{aligned} \quad (5.54)$$

В итоге с учетом (5.50), которое верно в силу правого неравенства (5.49), приходим к первому результату настоящего раздела: $Q(A) = 0$. Таким образом.

Если во внутренней точке стационарного дозвукового течения идеального газа, скорость в которой отлична от нуля и которая расположена на плоскости

симметрии течения, достигается локальный минимум давления по пространству, то значение Q -параметра в этой точке равно нулю.

Следствие. В лежащей на плоскости симметрии внутренней точке течения, в которой второй скалярный инвариант тензора скоростей деформаций (Q -параметр) положителен, давление, если только оно не постоянно в некоторой окрестности рассматриваемой точки, не может иметь строгих и нестрогих локальных минимума и максимума по пространству.

В приведенном доказательстве размер пространственной окрестности G , в которой скорость должна отличаться от нуля и быть дозвуковой (условие (5.49)), не имеет значения и может быть сколь угодно мал. Поэтому достаточно потребовать выполнения (5.49) в самой точке A , и тогда в силу непрерывности (для внутренней точки течения) найдется окрестность G , в которой условие также будет выполнено. Другими словами, при верификации расчетов существование окрестности G можно не проверять, если условия (5.49) выполнены в одной только точке A . Если же точка A лежит на разрыве, то условия гладкости, сформулированные в первом разделе, будут нарушены в любой окрестности этой точки и полученное выше равенство $Q(A)=0$ будет не обосновано (как и неравенство (5.50)).

Случай экстремума по плоскости симметрии. Возможна ситуация, при которой точка A не является точкой экстремума (то есть не является точкой минимума или максимума) давления в своей малой пространственной окрестности. Но при этом является точкой строгого или нестроного экстремума в некоторой плоской окрестности, лежащей на плоскости симметрии (экстремум по плоскости симметрии). В этом случае неравенство (5.50) использовать нельзя. Однако поскольку на плоскости симметрии поперечная производная давления всегда равна нулю, в точке экстремума по плоскости верно равенство $\nabla p = 0$, на котором основано приведенное выше доказательство. Кроме того, при выводе формулы (5.54) использовалось не двойное неравенство (5.49), а только его левая часть ($0 < M$) (правая часть использовалась после получения формулы (5.54) для

обоснования верности неравенства (5.50)). Поэтому доказательство неравенства (5.54) можно повторить, и оно остается в силе и для звуковых, и для сверхзвуковых точек. В результате имеем второй основной результат настоящего раздела, в котором нет ограничений на значение местного числа Маха.

Независимо от того, является ли внутренняя точка A стационарного течения идеального газа, скорость в которой отлична от нуля, и которая лежит на плоскости симметрии течения, точкой локального экстремума давления по пространству, если только A есть точка локального экстремума давления по плоскости симметрии, то $Q(A) \leq 0$.

Замечание. При выводе этого ПМ уравнение (5.32) не использовалось. Поэтому ПМ верен для газа с любым уравнением состояния.

При использовании полученных результатов для проверки расчетов течений, которые описываются системой (5.30) – (5.32), предлагается придерживаться следующей последовательности действий. Сначала следует найти точку минимума или максимума давления (если она есть) по плоскости симметрии, то есть такую лежащую на плоскости симметрии точку A , в плоской окрестности которой (также лежащей на плоскости симметрии) $p \geq p(A)$ или $p \leq p(A)$. В такой точке должно быть $Q(A) \leq 0$ (нарушение этого неравенства будет означать ошибочность расчета). Если, более того, точка A окажется точкой локального минимума давления по пространству (то есть если неравенство $p \geq p(A)$ выполняется в некоторой трехмерной окрестности точки A), и в ней верно двойное неравенство (5.49), то должно выполняться более сильное условие $Q(A) = 0$. Однако при выполнении этой последовательности действий следует учитывать некоторые моменты.

Во-первых, точка A должна быть внутренней точкой течения. В частности, должны быть исключены из рассмотрения точки экстремума давления, лежащие на поверхности обтекаемого тела.

Во-вторых, скорость в точке A должна быть отлична от нуля (она может быть дозвуковой, звуковой или сверхзвуковой), а сама точка должна лежать в

области гладких параметров течения (в частности, должны быть исключены из рассмотрения точки, лежащие на скачке и на тангенциальном разрыве).

Только при выполнении этих условий можно утверждать, что в верном расчете в точке экстремума давления по плоскости симметрии должно выполняться неравенство $Q(A) \leq 0$. (Если же, кроме того, точка A есть точка минимума давления по пространству, и скорость в ней дозвуковая, то должно быть $Q(A) = 0$.)

5.17 О выборе принципа максимума для верификации расчетов

Выше в настоящей главе представлены пять новых принципов максимума давления для стационарных течений газа, которые могут быть небаротропными. Также обоснован (строго доказан) давно известный ПМ Никольского. При этом различным течениям соответствуют ПМ с условиями, проверка которых при верификации имеет разную сложность. Так, например, в дозвуковых плоскопараллельных течениях условие состоит только в отсутствии точек торможения. А в условия ДПМД входит знак Q -параметра (требуется вычислять производные компонент скорости). В условия ОПМД в общем случае входит величина, требующая вычислять как первые, так и вторые производные компонент скорости. Поэтому, чтобы помочь специалистам по численным расчетам выбрать ПМ с наиболее простыми условиями, представим таблицу, в которой указаны основные требования к течению у различных принципов максимума.

В таблице 5.1 принципы максимума перечислены в порядке усложнения проверки их выполнения (или проверки выполнения их следствий). При этом в таблице под идеальным понимается газ, в котором отсутствуют вязкость и теплопроводность, а его состояние описывается уравнением, указанным в четвертом столбце таблицы (сравните со определением в «Списке терминов»).

Таблица 5.1

Название ПМ	Пространственный тип течений	Ограничения на значения местного числа Маха	Уравнение состояния идеального газа	Номера разделов
ПМ Никольского	Плоские	$0 < M < 1$	Менделеева – Клапейрона	5.9
ПМ для осесимметричных течений	Незакрученные осесимметричные	$0 < M < 1$	Менделеева – Клапейрона	5.10
ПМ для минимума на плоскости симметрии	Течения с плоскостью симметрии	$0 < M < 1$	Менделеева – Клапейрона	5.16
ПМ для экстремума по плоскости симметрии	Течения с плоскостью симметрии	$0 < M$	Любое	5.16
ДПМД	Общий пространственный случай	$M < 1$	Менделеева – Клапейрона	5.11, 5.12
ОПМД	Общий пространственный случай	Нет ограничений	Любое	5.14, 5.15

Напомним, что все ПМ в таблице 5.1 справедливы для стационарных течений идеального газа, которые могут быть вихревыми и небаротропными. Также еще раз заметим, что для применения ПМ или следствия ПМ достаточно, чтобы условия, содержащиеся в формулировках этих ПМ или их следствий, выполнялись в сколь угодно малой окрестности точки экстремума. При этом все ПМ обоснованы только для областей с гладкими параметрами (см. второй абзац раздела 5.1). Другими словами, точка экстремума не должна лежать на поверхности тела, на скачке или на тангенциальном разрыве.

Поскольку незакрученные осесимметричные течения – суть простейшие примеры течений с плоскостью симметрии, то при обнаружении максимума давления в расчетах таких течений можно пользоваться ПМ для экстремума по плоскости симметрии, представленному в подразделе «Случай экстремума по плоскости симметрии» раздела 5.16.

5.18 Заключение к главе 5

Задачи, поставленные в начале главы, решены. Получено строгое доказательство ПМ Никольского для давления. Обнаружены принципы максимума давления для течений (которые могут быть небаротропными) в трех пространственных случаях: осесимметричный случай, случай наличия плоскости симметрии и общий пространственный случай. При этом для общего пространственного случая предложено два ПМ. Один (более удобный для верификации расчетов, поскольку в его условия входят только первые производные компонент скорости) – ДПМД, верный для дозвуковых течений. Другой – ОПМД, в котором отсутствует ограничение на число Маха, но в его условия входят вторые производные компонент скорости. Обнаруженные ПМ для осесимметричных течений и для течений с плоскостью симметрии имеют более обозримый вид и содержат в своих формулировках меньше условий, чем ПМ в общем пространственном случае.

Самым важным результатом главы является ДПМД, поскольку он справедлив в общем пространственном случае, и по сравнению с ПМ Труделла он не требует баротропности и в его условия входят только первые производные компонент скорости (Q -параметр).

Заключение

Цель диссертации достигнута благодаря решению всех задач, поставленных в начале работы над диссертацией. В результате на защиту представлены следующие новые теоретические положения. (При упоминании течений за отошедшей ударной волной (УВ) подразумевается, что речь идет о сверхзвуковом обтекании тела с гладкой выпуклой носовой частью.)

1. Строгое доказательство совпадения лидирующей линии тока и линии торможения в течении за отошедшей УВ в общем пространственном случае (решение задачи Дородницына).
2. Равенство нулю завихренности на линии торможения в течении за отошедшей УВ.
3. Замкнутость вихревых линий γ_{Ω} (то есть линий вектора Ω) в течениях за отошедшей УВ.
4. Замкнутость векторных линий $\gamma_{\mathbf{a}}$ вектора $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla \sigma$, где $\sigma = p\rho^{-k}$ – энтропийная функция, в течениях за отошедшей УВ.
5. Существование в общем пространственном случае скорости Фридмана в вихревом течении любой однородной жидкости.
6. Локальные формулы скоростей Фридмана для меридиональной и окружной составляющих завихренности в закрученных осесимметричных течениях (раздел 3.5).
7. Три неизвестных ранее интегральных инварианта, которые представляют собой криволинейные интегралы от функций, зависящих от параметров течения и от их пространственных производных, по замкнутым (см. выше п. 3 и п. 4) линиям γ_{Ω} и $\gamma_{\mathbf{a}}$ (в отличие от осесимметричного случая, в общем пространственном случае векторы Ω и \mathbf{a} могут быть неколлинеарными, и линии γ_{Ω} и $\gamma_{\mathbf{a}}$ могут не совпадать): $\int_{\gamma_{\Omega}} \frac{p}{|\Omega|} dl$,

$$\int_{\gamma_{\mathbf{a}}} \frac{p}{|\mathbf{\Omega}_{\mathbf{a}}|} dl \text{ и } \int_{\gamma_{\mathbf{a}}} \frac{T \operatorname{ctg} \alpha}{|\mathbf{V}|} dl = 0, \text{ где } \mathbf{\Omega}_{\mathbf{a}} \text{ – проекция вектора } \mathbf{\Omega} \text{ на вектор } \mathbf{a},$$

T – температура, α – угол между векторами скорости \mathbf{V} и завихренности $\mathbf{\Omega}$. Первые два из этих инвариантов сохраняются на изоэнтропийных поверхностях тока и обобщают *инвариант Крокко* (см. «Список терминов») на общий пространственный случай. Третий инвариант равен нулю на всех замкнутых линиях вектора \mathbf{a} .

8. Строгое доказательство принципа максимума Никольского.
9. Дозвуковой принцип максимума давления (ДПМД), справедливый для дозвуковых стационарных течений идеального газа, в условия которого входит только знак Q -параметра ($Q = 0.5 [\mathbf{\Omega}^2 - (\nabla u)^2 - (\nabla v)^2 - (\nabla w)^2]$), где u , v и w – компоненты вектора скорости \mathbf{V} в прямоугольной декартовой системе координат, $\mathbf{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{V}$). Если давление не постоянно на замыкании \bar{G} ограниченной области течения G и во всех точках G выполняется

1) $Q \leq 0$, то давление достигает минимума на \bar{G} на границе и только на границе области G ;

2) $Q \geq 0$, то давление достигает максимума на \bar{G} на границе и только на границе области G ;

3) $Q = 0$, то давление достигает минимума и максимума на \bar{G} на границе и только на границе области G .

В условия ДПМД входят только первые производные компонент скорости (Q -параметр), а требование баротропности отсутствует.

Среди этих девяти положений, выносимых на защиту, наиболее важными являются три положения: 1, 5 и 9, поскольку они представляют собой решения проблем, стоявших перед теоретической аэрогидромеханикой в течение многих десятилетий. Именно эти три положения уже имеют практическое применение (см. Приложение А). Положение 7 (три неизвестных ранее интегральных

инварианта) не было решением какой-либо известной проблемы. Дело в том, что все три неизвестных ранее интегральных инварианта есть интегралы по замкнутым (в течении за отошедшей УВ) линиям вектора $\mathbf{\Omega} = \text{rot } \mathbf{V}$ и линиям вектора $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla \sigma$, где $\sigma = p\rho^{-k}$ – энтропийная функция. А сам факт замкнутости этих линий ранее был неизвестен и обнаружен при решении задач диссертационной работы.

Кроме этих основных результатов внимания заслуживают и некоторые другие результаты диссертации, поскольку они могут быть полезными для качественного анализа течений, для верификации расчетов и для дальнейших исследований. К таким результатам относятся следующие положения.

1. Вихревая альтернатива (верная не только для течений за отошедшей УВ). *Если на некотором отрезке линии тока стационарного изоэнергетического течения идеального газа с дважды непрерывно дифференцируемыми параметрами скорость не обращается в нуль, то величина завихренности либо тождественно равна нулю на этом отрезке линии тока, либо на всем отрезке завихренность отлична от нуля.*

2. Связь инварианта Крокко $I = \frac{\Omega}{pr}$ на поверхности тела ($r > 0$) в осесимметричном течении за отошедшей УВ с радиусом ее кривизны в лидирующей точке:
$$\frac{\Omega}{pr} = \frac{V_\infty}{p_A R_A^2} \frac{\rho_A}{\rho_\infty} \left(1 - \frac{\rho_\infty}{\rho_A} \right)^2$$
, где ρ_∞ и V_∞ – параметры набегающего сверхзвукового ($M > 1$) потока, R_A – радиус кривизны УВ в лидирующей точке, p_A и ρ_A – давление и плотность за УВ в лидирующей точке (p_A и ρ_A рассчитываются по соотношениям Рэнкина – Гюгонио на прямом скачке через параметры набегающего сверхзвукового потока).

3. Установлено, что неоднородность набегающего сверхзвукового потока при обтекании тела с гладкой выпуклой носовой частью приводит к тому, что линия тока с максимальной энтропией и линия торможения за отошедшей УВ

различаются. Энтропия на поверхности тела оказывается меньше максимального значения, которое достигается на линии тока, проходящей около поверхности тела.

4. Вариант теоремы Хопфа (раздел 5.3), в котором отсутствует требование ограниченности коэффициентов уравнения (5.2), а условие отграниченности $\det A$ от нуля ослаблено до условия ограниченности: $\det A > 0$. Эта новая теорема может применяться для таких областей течения, в окрестности граничных точек которых коэффициенты могут быть неограниченными, а $\det A$ может обращаться в нуль в граничных точках (последнее, в частности, означает возможность исследования экстремальных свойств давления в дозвуковой области, на границе которой могут находиться звуковые точки). Все принципы максимума в диссертации получены с использованием варианта теоремы Хопфа.

5. Принципы максимума для осесимметричного случая и для случая наличия плоскости симметрии (разделы 5.10 и 5.16). Как и ожидалось, обнаруженные принципы максимума для осесимметричных течений и для течений с плоскостью симметрии имеют более обозримый вид и содержат в своих формулировках меньше условий, чем принципы максимума в общем пространственном случае.

Если рассматривать полученные в диссертации принципы максимума давления как средство верификации расчетов, то дальнейшие усилия исследователей должны быть направлены на получение такого ПМ для сверхзвуковых течений, в условия которого входят только первые производные компонент скорости. При этом представляется полезным использовать вариант теоремы Хопфа, разработанный в рамках диссертационного исследования.

Также к задачам будущих исследований относятся вопросы о форме линии торможения в течениях за отошедшей УВ и об угле примыкания этой линии к поверхности тела.

Список сокращений и условных обозначений

$i_0 = (k/(k-1))(p/\rho) + \mathbf{V}^2/2$ – полная энтальпия;

k – показатель адиабаты;

M – местное число Маха (отношение величины скорости газа в точке к скорости звука в этой же точке);

p – давление;

u, v, w – компоненты вектора скорости \mathbf{V} в прямоугольной декартовой системе координат;

\mathbf{V} – вектор скорости жидкости или газа;

ρ – плотность жидкости или газа;

$\sigma = p\rho^{-k}$ – энтропийная функция;

$\mathbf{\Omega} = \text{rot } \mathbf{V}$ – завихренность;

АДТ – аэродинамическая труба;

ДПМД – дозвуковой принцип максимума давления;

ЛНУ – линейное неоднородное уравнение в частных производных;

Метод ВВД – метод вязких вихревых доменов;

ОДУ – обыкновенные дифференциальные уравнения;

ОПМД – общий принцип максимума давления;

ПВК – простой вихревой контур (раздел 4.1);

ПМ – принцип максимума;

СРЗ – скорость распространения завихренности [129];

УВ – ударная волна.

Список терминов

Q-параметр: Второй скалярный инвариант тензора скоростей деформации:

$$Q = 0.5 \left[\Omega^2 - (\nabla u)^2 - (\nabla v)^2 - (\nabla w)^2 \right],$$

где u , v и w – компоненты вектора скорости

\mathbf{V} в прямоугольной декартовой системе координат, $\Omega = \text{rot } \mathbf{V}$.

верификация программного обеспечения компьютерной модели: Процесс определения соответствия ПО КМ (компьютерной модели, программы) математической модели. Верификация обеспечивает обоснование того, что ПО КМ при определенных параметрах рассчитывает математическую модель правильно и с соответствующей точностью (ГОСТ Р 57700.2 – 2017).

верификация расчета: Проверка выполнения в расчете, выполненным компьютерной программой, одного или нескольких необходимых условий, строго вытекающих из математической модели, рассчитываемой этой программой (термин предложен соискателем).

идеальный газ: Для краткости, если не оговорено иначе, под идеальным газом в диссертации понимается газ, в котором отсутствуют вязкость и теплопроводность, а его состояние подчиняется закону Менделеева – Клапейрона.

изоэнергетическое течение: Течение с однородным полем полной энтальпии.

инвариант Крокко: Сохраняющаяся вдоль линий тока в стационарных изоэнергетических незакрученных осесимметричных течениях величина $|\Omega|/(pr)$, где r – расстояние от оси симметрии, (в плоских течениях – $|\Omega|/p$) [113].

лидирующая линия тока: Линия тока, пересекающая отошедшую ударную волну по нормали.

лидирующая точка: Точка пересечения отошедшей ударной волны лидирующей линией тока.

линия торможения: Передняя критическая линия тока.

однородная жидкость: Текучая континуальная (сплошная) однородная среда, динамическое уравнение движения которой в области гладких параметров течения представляется в виде $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{F}$, где \mathbf{F} – плотность распределения равнодействующей всех сил, приложенных к среде. Сюда относятся однофазные и однокомпонентные вязкие (различных реологий) и невязкие жидкости и газы.

параметры течения: Если не оговорено иначе, в диссертации под параметрами течения идеального газа понимаются поле плотности ρ , поле давления p и поле вектора скорости \mathbf{V} .

полная энтальпия: $i_0 = (k/(k-1))(p/\rho) + \mathbf{V}^2/2$, где ρ – плотность, p – давление, k – показатель адиабаты.

скорость Фридмана: Скорость \mathbf{U} мнимых (воображаемых) частиц, движущихся так, что если они составляют в некоторый момент времени векторную трубку завихренности $\mathbf{\Omega}$ (реальной) жидкости, то продолжают во время своего движения составлять векторную трубку $\mathbf{\Omega}$ той же интенсивности. Для того, чтобы поле \mathbf{U} обладало описанным выше свойством переноса вихревых трубок, при выполнении некоторых требований к гладкости полей $\mathbf{\Omega}$ и \mathbf{U} необходимо и достаточно, чтобы во всей рассматриваемой пространственно-временной области течения выполнялось уравнение Фридмана $\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{U}) = 0$ [9].

точка торможения: Передняя критическая точка, то есть точка на носовой части обтекаемого тела, в которой заканчивается передняя критическая линия тока (в которой заканчивается линия торможения).

энтропийная функция: $\sigma = p\rho^{-k}$.

Список литературы

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Москва : Дрофа, 2003. 840 с.
2. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. Москва–Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.
3. Никольский А.А. Теоретические исследования по механике жидкости и газа // Труды ЦАГИ. 1981. Вып. 2122. С. 1–286.
4. Ладыженский М.Д. Пространственные гиперзвуковые течения газа. Москва : Машиностроение, 1968. 120 с.
5. Абражкин А.А., Якубович Е.И. Вихревая динамика в лагранжевом описании. Москва : Физматлит, 2006. 176 с.
6. Сетуха А.В. О лагранжевом описании трехмерных течений вязкой жидкости при больших значениях числа Рейнольдса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2020. Т. 60, № 2. С. 297–322.
7. Коцур О.С. Модификация метода вихревых петель для моделирования движения вихревых структур в вязкой несжимаемой жидкости и его программная реализация: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, 2022. 195 с.
8. Марчевский И.К. Разработка и реализация Т-схем численного решения граничных интегральных уравнений в математических моделях вихревых методов вычислительной гидродинамики: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Москва, 2021. 480 с.
9. Фридман А.А. Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости. Москва : ОНТИ, 1934. 368 с.
10. Сизых Г.Б. Эволюция завихренности в закрученных осесимметричных течениях вязкой несжимаемой жидкости // Учёные записки ЦАГИ. 2015. Т. 46, № 3. С. 14–20.
11. Коцур О.С. Математическое моделирование эллиптического вихревого кольца в вязкой жидкости методом вихревых петель // Математика и математическое моделирование. 2021. № 3. С. 46–61.

12. Rosenhead L. The formation of vortices from a surface of discontinuity // *Proceedings of the Royal Society of London*. 1931. V. 134, No. 823. P. 170–192.
13. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. Москва : Наука, 1978. 352 с.
14. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). Москва : ТОО «Янус», 1995. 520 с.
15. Гутников В.А., Лифанов И.К., Сетуха А.В. О моделировании аэродинамики зданий и сооружений методом замкнутых вихревых рамок // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2006. № 4. С. 78–92.
16. Голубкин В.Н., Сизых Г.Б. О некоторых общих свойствах плоскопараллельных течений вязкой жидкости // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 1987. № 3. С. 176–178.
17. Брутян М.А., Голубкин В.Н., Крапивский П.Л. Об уравнении Бернулли для осесимметричных течений вязкой жидкости // *Учёные записки ЦАГИ*. 1988. Т. 19, № 2. С. 98–100.
18. Дынникова Г.Я. Лагранжев подход к решению нестационарных уравнений Навье–Стокса // *Доклады Академии наук*. 2004. Т. 399, № 1. С. 42–46.
19. Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. Москва : Издательство Московского университета, 2006. 184 с.
20. Dynnikova G. The integral formula for pressure field in the nonstationary barotropic flows of viscous fluid // *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*. 2014. V. 16, No. 1. P. 145–162.
21. Dynnikova G.Y., Dynnikov Y.A., Guvernyuk S.V., Malakhova T.V. Stability of a reverse Karman vortex street // *Physics of Fluids*. 2021. V. 33, No. 2. P. 1–10.
22. Kuzmina K., Marchevsky I., Soldatova I., Izmailova Y. On the scope of Lagrangian vortex methods for two-dimensional flow simulations and the POD technique application for data storing and analyzing // *Entropy*. 2021. V. 23, I. 1. Art. 118.

23. Leonova D., Marchevsky I., Ryatina E. Fast methods for vortex influence computation in meshless Lagrangian vortex methods for 2D incompressible flows simulation // WIT Transactions on Engineering Sciences. 2019. V. 126. P. 255–267.
24. Kraposhin M., Kuzmina K., Marchevsky I., Puzikova V. Study of OpenFOAM® efficiency for solving fluid-structure interaction problems // OpenFOAM® – Selected Papers of the 11th Workshop / ed. by Jasak H., Nóbrega J.M. Exeter, UK : Springer 2019. P. 465–479.
25. Aparinov A.A., Setukha A.V., Zhelannikov A.I. Numerical simulation of separated flow over three-dimensional complex shape bodies with some vortex method // AIP Conference Proceedings. 2014. V. 1629. P. 69–76.
26. Головкин М.А. Ортогональные векторные преобразования и фундаментальные свойства уравнений Навье–Стокса и Эйлера для вихревых течений несжимаемой жидкости // Учёные записки ЦАГИ. 1991. Т. 22, № 1. С. 7–19.
27. Брутян М.А. Об одном свойстве сохранения для магнитогидродинамических течений вязкой несжимаемой жидкости // Учёные записки ЦАГИ. 2008. Т. 39, № 1–2. С. 108–110.
28. Mobbs S.D. Same vorticity theorems and conservation laws for non-barotropic fluids // Journal of Fluid Mechanics. 1981. V. 108. P. 475–483.
29. Голубинский А.И., Сычёв В.В. О некоторых свойствах сохраняемости вихревых течений газа // Доклады АН СССР. 1977. Т. 237, № 4. С. 798–799.
30. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. Москва : Наука. Гл. ред. Физматлит, 1988. 736 с.
31. Голубинский А.И. О сохранении обобщенной циркуляции скорости в установившихся течениях идеального газа // Доклады АН СССР. 1971. Т. 196, № 5. С. 1043–1045.
32. Shiffman M. On the existence of subsonic flows of a compressible fluid // Journal of Rational Mechanics and Analysis. 1952. V. 1. P. 605–652.

33. Gilbarg D., Shiffman M. On bodies achieving extreme value of the critical mach number. I // *Journal of Rational Mechanics and Analysis*. 1954. V. 3, No. 2. P. 209–230.
34. Truesdell C. Two measures of vorticity // *Journal of Rational Mechanics and Analysis*. 1953. V. 2. P. 173–217.
35. Сизых Г.Б. Значение энтропии на поверхности несимметричной выпуклой головной части при сверхзвуковом обтекании // *ПММ*. 2019. Т. 83, Вып. 3. С. 377–383.
36. Марков В.В., Харченко Н.А. Верификация компьютерного кода ГРАТ методом Сизых // *Труды МФТИ*. 2024. Т. 16, № 1. С. 119–128.
37. Anikin V.A., Vyshinsky V.V., Pashkov O.A., Streltsov E.V. Using the maximum pressure principle for verification of calculation of stationary subsonic flow // *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*. 2019. № 6 (129). P. 4–16.
38. Вышинский В.В., Зоан К.Т. Численное моделирование обтекания фрагментов ландшафта и вопросы верификации решений // *Учёные записки ЦАГИ*. 2020. Т. 51, № 6. С. 60–68.
39. Айрапетов А.Б., Вышинский В.В., Катунин А.В. О верификации расчётов стационарных дозвуковых течений около плохообтекаемых тел // *Учёные записки ЦАГИ*. 2021. Т. 52, № 1. С. 34–40.
40. Вышинский В.В., Зоан К.Т. Обтекание горного ландшафта в окрестности аэропорта Дананг атмосферным ветром и вопросы безопасности полета // *Научный вестник МГТУ ГА*. 2021. Т. 24, № 6. С. 27–41.
41. Айрапетов А.Б., Вышинский В.В., Катунин А.В. Обтекание пролётных конструкций объездной дороги аэропорта Адлер и вопросы безопасности посадки // *Учёные записки ЦАГИ*. 2021. Т. 52, № 6. С. 41–49.
42. Vyshinsky V.V., Chinh D.C. Study of aerodynamic characteristics of an aircraft during approach to landing in a disturbed atmosphere // *Vietnam Journal of Mechanics*. 2022. V. 44, No. 2. P. 133–152.

43. Брутян М.А., Вышинский В.В., Раздобарин А.М. Применение критериев независимой верификации решений для повышения качества численных расчётов // Учёные записки ЦАГИ. 2022. Т. 53, № 4. С. 26–32.
44. Вышинский В.В., Раздобарин А.М. Повышение качества расчёта сеточных методов с помощью критериев независимой верификации решений // Математическое моделирование. 2022. Т. 34, № 11. С. 3–18.
45. Prim R., Truesdell C. A derivation of Zorawski's criterion for permanent vector-lines // Proceedings of the American Mathematical Society. 1950. V. 1. P. 32–34.
46. Truesdell C. The kinematics of vorticity. Bloomington : Indiana University Press, 1954. 232 p.
47. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. Москва : Издательство иностранной литературы, 1957. 256 с.
48. Беспорточный А.И., Бурмистров А.Н., Сизых Г.Б. Вариант теоремы Хопфа // Труды МФТИ. 2016. Т. 8, № 1. С. 115–122.
49. Markov V.V., Sizykh G.B. Generalized Helmholtz's theorem // AIP Conference Proceedings. 2015. V. 1648, I. 1. Art. 390005.
50. Vyshinsky V.V., Sizykh G.B. Verification of the calculation of stationary subsonic flows and presentation of results // Smart Innovation, Systems and Technologies. 2019. V. 133. P. 228–235.
51. Голубкин В.Н., Сизых Г.Б. Особенности структуры течения в окрестности критической точки тела, обтекаемого неоднородным сверхзвуковым потоком газа // Модели и методы аэродинамики: Материалы Девятой международной школы-семинара, 10–17 сентября 2020 г., Евпатория. Москва : ЦАГИ, 2020. С. 41–42.
52. Марков В.В., Сизых Г.Б. Небаротропный принцип максимума Трусделла // Труды МФТИ. 2023. Т. 15, № 1. С. 33–40.
53. Марков В.В., Сизых Г.Б. Эволюция завихренности в жидкости и газе // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2015. № 2. С. 8–15.

54. Сизых Г.Б. Признак наличия точки торможения в плоском безвихревом течении идеального газа // Труды МФТИ. 2015. Т. 7, № 2 (26). С. 108–112.
55. Голубкин В.Н., Марков В.В., Сизых Г.Б. Интегральный инвариант уравнений движения вязкого газа // ПММ. 2015. Т. 79, Вып. 6. С. 808–816.
56. Сизых Г.Б. О верификации численных расчетов вихревых течений методом проверки сохранения циркуляции // Труды МФТИ. 2016. Т. 8, № 2. С. 153–159.
57. Сизых Г.Б. Метод добавления завихренности // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 3. С. 26–31.
58. Голубкин В.Н., Сизых Г.Б. Экстремальные свойства давления в плоских дозвуковых течениях // Труды МФТИ. 2016. Т. 8, № 4. С. 149–154.
59. Сизых Г.Б. Дозвуковой принцип максимума для неизоэнтропийных течений // Научный вестник МГТУ ГА. 2017. Т. 20, № 2. С. 74–82.
60. Голубкин В.Н., Сизых Г.Б. О некоторых свойствах газовых течений с осевой симметрией // Труды МФТИ. 2017. Т. 9, № 1. С. 64–70.
61. Левин В.А., Марков В.В., Сизых Г.Б. О завихренности на поверхности осесимметричного тела за отошедшим скачком уплотнения // Доклады Академии наук. 2018. Т. 483, № 6. С. 625–627.
62. Голубкин В.Н., Сизых Г.Б., Чернов С.В. Экстремальные свойства давления в осесимметричных вихревых течениях газа // Учёные записки ЦАГИ. 2018. Т. 49, № 5. С. 26–33.
63. Golubkin V.N., Sizykh G.B. On the vorticity behind 3-D detached bow shock wave // Advances in Aerodynamics. 2019. V. 1, No. 15. P. 1–6.
64. Вышинский В.В., Сизых Г.Б. О верификации расчетов стационарных дозвуковых течений и о форме представления результатов // Математическое моделирование. 2018. Т. 30, № 6. С. 21–38.
65. Голубкин В.Н., Сизых Г.Б. Обобщение инварианта Крокко для 3D течений газа за отошедшим головным скачком // Известия вузов. Математика. 2019. № 12. С. 52–56.

66. Sizykh G.B. Closed vortex lines in fluid and gas // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2019. V. 23, No. 3. P. 407–416.
67. Сизых Г.Б. Система ортогональных криволинейных координат на изоэнтропийной поверхности за отошедшим скачком уплотнения // ПММ. 2020. Т. 84, Вып. 3. С. 304–310.
68. Голубкин В.Н., Сизых Г.Б. О влиянии неоднородности сверхзвукового набегающего потока на течение в окрестности передней критической точки // Учёные записки ЦАГИ. 2020. Т. 51, № 4. С. 26–35.
69. Сизых Г.Б. Интегральный инвариант течений идеального газа за отошедшим скачком уплотнения // ПММ. 2021. Т. 85, Вып. 6. С. 742–747.
70. Сизых Г.Б. О коллинеарности завихренности и скорости за отошедшим скачком уплотнения // Труды МФТИ. 2021. Т. 13, № 3. С. 144–147.
71. Сизых Г.Б. Второе интегральное обобщение инварианта Крокко для 3D-течений за отошедшим головным скачком // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2021. Т. 25, № 3. С. 588–595.
72. Сизых Г.Б. Угол примыкания звуковой линии к обтекаемой поверхности // ПММ. 2021. Т. 85, Вып. 6. С. 734–741.
73. Сизых Г.Б. К вопросу об эволюции завихренности в жидкости и газе // Труды МФТИ. 2022. Т. 14, № 1. С. 27–34.
74. Сизых Г.Б. Новый лагранжев взгляд на эволюцию завихренности в двухмерных течениях жидкости и газа // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, Вып. 1. С. 30–36.
75. Сизых Г.Б. Общий принцип максимума давления в стационарных течениях невязкого газа // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2022. Т. 26, № 3. С. 544–555.

76. Сизых Г.Б. О значении Q -параметра в точке минимума давления на плоскости симметрии небаротропного течения // ПММ. 2022. Т. 86, Вып. 6. С. 917–925.
77. Марков В. В., Сизых Г. Б. Критерий существования решения уравнений движения идеального газа для заданной винтовой скорости // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2020. Т.28, вып. 6. С. 643-652.
78. Сизых Г.Б. О линии торможения за отошедшим скачком уплотнения в плоских течениях // Труды МФТИ. 2022. Т. 14, № 4. С. 84–94.
79. Сизых Г.Б. Решение задачи Дородницына // Труды МФТИ. 2022. Т. 14, № 4. С. 95–107.
80. Сизых Г.Б. Решение задачи Дородницына – Ладыженского // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2022. Т. 26, № 4. С. 764–776.
81. Mangler K.L. The calculation of the flow field between a blunt body and the bow wave // Hypersonic Flow: Proceedings of the Eleventh Symposium of the Colston Research Society held in the University of Bristol, 6–8 April 1959, Bristol, United Kingdom. London : Butterworths Scientific Publications, 1960. P. 219–237.
82. Vaglio-Laurin R., Ferri A. Theoretical investigation of the flow field about blunt-nosed bodies in supersonic flight // Journal of the Aeronautical Sciences. 1958. V. 25. P. 761–770.
83. Шифрин Э.Г. Об экстремальности энтропии на критической линии тока // Прикладная математика и механика. 1967. Вып. 3. С. 590–592.
84. Крайко А.Н. Краткий курс теоретической газовой динамики. Москва : МФТИ, 2007. 300 с.
85. Матяш Е.С., Савельев А.А., Трошин А.И., Устинов М.В. Учёт влияния сжимаемости газа в γ -модели ламинарно-турбулентного перехода // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59, № 10. С. 1779–1791.

86. Королев Г.Л. Стационарное вязкое обтекание эллиптического цилиндра до чисел Рейнольдса 900 // Учёные записки ЦАГИ. 2012. Т. 43, № 5. С. 46–59.
87. Egorov I.V., Fedorov A.V., Palchekovskaya N., Obraz A.O. Effects of injection on heat transfer and the boundary-layer instability for a hypersonic blunt body configuration // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2020. V. 149. P. 119197.
88. Чувахов П.В., Егоров И.В. Численное моделирование эволюции возмущений в сверхзвуковом пограничном слое над углом разряжения // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2021. № 5. С. 49–60.
89. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. Москва : Мир, 1986. 184 с.
90. Миронюк И.Ю., Усов Л.А. Инвариант линии торможения при стационарном обтекании тела завихренным потоком идеальной несжимаемой жидкости // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2020. Т. 24, № 4. С. 780–789.
91. Анкудинов А.Л. Кинетический ударный слой в плоскости растекания аппарата типа несущий корпус // Прикладная математика и механика. 2021. Т. 85, Вып. 5. С. 615–625.
92. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. Москва : Мир, 1973. 760 с.
93. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. Москва : Иностранная литература, 1961. 588 с.
94. Крайко А.Н. Теоретическая газовая динамика: классика и современность. Москва : Торус Пресс, 2010. 440 с.
95. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. Москва : Физматгиз, 1963. 584 с.
96. Марков В.В., Сизых Г.Б. Эволюция завихренности в жидкости и газе // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2015. № 2. С. 8–15.
97. Бибииков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва : Высшая школа, 1991. 303 с.

98. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва : Издательство Московского университета, 1984. 296 с.
99. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 400 с.
100. Денисов А.М., Разгулин А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ч. 1. Москва : Издательство Московского университета, 2009. 122 с.
101. Денисов А.М., Разгулин А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ч. 2. Москва : Издательство Московского университета, 2009. 114 с.
102. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т 1. Москва : Наука, 1983. 528 с.
103. Munk M., Prim R. On the multiplicity of steady gas flows having the same streamline pattern // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 1947. V. 33. P. 137–141.
104. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2000. 176 с.
105. Truesdell C. On curved shocks in steady plane flow of an ideal fluid // Journal of the Aeronautical Sciences. 1952. No. 19. P. 826–828.
106. Hayes W.D. The vorticity jump across a gasdynamic discontinuities // Journal of Fluid Mechanics. 1957. No. 2. P. 595–600.
107. Левин В.А., Скопина Г.А. Анализ завихренности потока за ударными и детонационными волнами. Владивосток : Дальнаука, 2016. 65 с.
108. Миронюк И.Ю., Усов Л.А. Точки торможения на вихревых линиях в течениях идеального газа // Труды МФТИ. 2020. Т. 12, № 4. С. 171–176.
109. Лайтхилл М. Динамика диссоциирующего газа // Вопросы ракетной техники. 1957. № 6. С. 41–60.
110. Майкапар Г.И. Вихри за головной ударной волной // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1968. № 4. С. 162–165.

111. Левин В.А., Скопина Г.А. Поведение вектора вихря скорости в сверхзвуковых потоках за поверхностями разрывов // Теплофизика и аэромеханика. 2007. Т. 13, № 3. С. 381–389.
112. Левин В.А., Скопина Г.А. Поведение вектора вихря скорости в сверхзвуковых осесимметричных закрученных потоках за детонационной волной // Прикладная механика и техническая физика. 2007. Т. 48, № 6. С. 1–7.
113. Crocco L. Eine neue stromfunktion für die erforschung der bewegung der gase mit rotation // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1937. V. 17, No. 1. P. 1–7.
114. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. Москва : Издательство иностранной литературы, 1963. 256 с.
115. ЦАГИ – основные этапы научной деятельности. 1968–1993 / под ред. В.Я. Нейланда. Москва : Наука. Физматлит, 1996. 576 с.
116. Харитонов А.М. Техника и методы аэрофизического эксперимента. Новосибирск : Издательство НГТУ, 2011. 643 с.
117. Бюшгенс Г.С., Бедржицкий Е.Л., Дмитриев В.Г. Центр авиационной науки. Москва : Издательство ЦАГИ, 2004. 392 с.
118. Лунев В.В. Гиперзвуковая аэродинамика. Москва : Машиностроение, 1975. 328 с.
119. Боровой В.Я., Егоров И.В., Мошаров В.Е., Радченко В.Н., Скуратов А.С. Экстремальный нагрев тел в гиперзвуковом потоке. Москва : Наука, 2018. 390 с.
120. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. Москва : Гостехтеориздат, 1956. 421 с.
121. Глаголев А.И., Зубков А.И. Экспериментальное исследование экстремальности энтропии на критической линии тока при сверхзвуковом обтекании тел // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1968. № 1. С. 90–94.

122. Swigard R.J. A theory of asymmetric hypersonic blunt-body flows // *AIAA Journal*. 1963. V. 1, No. 5. P. 1034–1046.
123. Гишинский С.М., Теленин Г.Ф. Сверхзвуковое обтекание тел различной формы с отошедшей ударной волной // *Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение*. 1964. № 5. С. 148–156.
124. Васильев О.Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. Ленинград–Москва : Госэнергоиздат, 1958. 144 с.
125. Dritschel D.G. Generalized helical Beltrami flows in hydrodynamics and magnetohydrodynamics // *Journal of Fluid Mechanics*. 2006. V. 222. P. 525–541.
126. Сизых Г.Б. Осесимметричные винтовые течения вязкой жидкости // *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2019. № 2. С. 49–56.
127. Ковалёв В.П., Сизых Г.Б. Осесимметричные винтовые течения идеальной жидкости // *Труды МФТИ*. 2016. Т. 8, № 3. С. 171–179.
128. Голубинский А.И., Голубкин В.Н. О некоторых свойствах сохранения в газовой динамике // *Прикладная математика и механика*. 1985. Т. 49, Вып. 1. С. 115–119.
129. Брутян М.А. Диффузия завихренности в вязкоупругой жидкости // *Известия АН СССР, Механика жидкости и газа*. 1997. № 5. С. 18–23.
130. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 468 с.
131. Максименко И.А., Марков В.В. О новом лагранжевом взгляде на эволюцию завихренности в пространственных течениях // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки»*. 2022. Т. 26, № 1. С. 179–189.
132. Kotsur O.S., Shcheglov G.A., Marchevsky I.K. Approximate weak solutions to the vorticity evolution equation for a viscous incompressible fluid in the class of

- vortex filaments // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2022. V. 18, No. 3. P. 423–439.
133. Коцур О.С. О существовании локальных способов вычисления скорости переноса вихревых трубок с сохранением их интенсивности // *Труды МФТИ*. 2019. Т. 11, № 1. С. 76–85.
134. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. Москва : Физматгиз, 1963. 728 с.
135. Селиванов В.В., Левин Д.П. Оружие нелетального действия. Москва : Изд-во МГТУ, 2019. 360 с.
136. Wang Z., He P., Lv Y., Zhou J., Fan J., Cen K. Direct numerical simulation of subsonic round turbulent jet // *Flow Turbulence Combust*. 2010. V. 84. P. 669–686.
137. Афонина Н.Е., Громов В.Г., Мануйлович И.С., Марков В.В., Смехов Г.Д., Хмелевский А.Н. Исследование запуска кольцевого сопла в натурной и виртуальной импульсной аэродинамической установке // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2016. № 2. С. 158–165.
138. Dergachev S.A., Marchevsky I.K., Scheglov G.A. Flow simulation around 3D bodies by using Lagrangian vortex loops method with boundary condition satisfaction with respect to tangential velocity components // *Aerospace Science and Technology*. 2019. V. 94. Art. 105374.
139. Borovoy V.Y., Egorov I.V., Skuratov A.S., Struminskaya I.V. Two-dimensional shock wave/boundary-layer interaction in the presence of entropy layer // *AIAA Journal*. 2013. V. 51, No. 1. P. 80–93.
140. Egorov I.V., Novikov A.V. Direct numerical simulation of laminar–turbulent flow over a flat plate at hypersonic flow speeds // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2016. V. 56, No. 6. P. 1048–1064.
141. Левин В.А., Мануйлович И.С., Марков В.В. Как рассчитать газовую детонацию на «Ломоносове» // *Суперкомпьютеры*. 2014. Т. 3, № 19. С. 24–30.

142. Левин В.А., Афонина Н.Е., Громов В.Г., Мануйлович И.С., Марков В.В., Смехов Г.Д., Хмелевский А.Н. Нестационарные ламинарные течения газа в кольцевом сопле // Теплофизика высоких температур. 2016. Т. 54, № 6. С. 889–893.
143. Левин В.А., Мануйлович И.С., Марков В.В. Трехмерная ячеистая детонация в цилиндрических каналах // Доклады Академии наук. 2015. Т. 460, № 1. С. 35–38.
144. Левин В.А., Мануйлович И.С., Марков В.В. Формирование спиновой детонации в каналах круглого сечения // Доклады Академии наук. 2015. Т. 460, № 6. С. 656–659.
145. Левин В.А., Афонина Н.Е., Громов В.Г., Мануйлович И.С., Марков В.В., Смехов Г.Д., Хмелевский А.Н. Пульсирующие течения газа в кольцевом сопле // Доклады Академии наук. 2015. Т. 465, № 1. С. 42–45.
146. Железнякова А.Л. Технологии верификации и валидации в численном газодинамическом моделировании // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2018. Т. 19, Вып. 2.
147. Li M., Tang T., Fornberg B. A compact fourth-order finite difference scheme for the steady incompressible Navier–Stokes equations // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1995. V. 20, no. 10. P. 1137–1151.
148. Королев Г.Л. Численное исследование стационарного обтекания семейства эллиптических цилиндров потоком вязкой несжимаемой жидкости // Учёные записки ЦАГИ. 2015. Т. 46, № 2. С. 1–15.
149. Босняков С.М., Михайлов С.В., Подаруев В.Ю., Трошин А.И. Нестационарный разрывный метод Галеркина высокого порядка точности для моделирования турбулентных течений // Математическое моделирование. 2018. Т. 30, № 5. С. 37–56.
150. Толстых А.И., Ширококов Д.А. О возбуждении и развитии неустойчивости в пограничном слое сжимаемого газа, наблюдаемых при высокоточном численном моделировании без введения искусственных возмущений //

- Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62, № 7. С. 1209–1223.
151. Tolstykh A.I., Shirobokov D.A. Observing production and growth of Tollmien–Schlichting waves in subsonic flat plate boundary layer via exciter-free high fidelity numerical simulation // *Journal of Turbulence*. 2020. V. 21, I. 11. P. 632–649.
 152. Громека И.С. Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости. Собрание сочинений. Москва : Издательство АН СССР, 1952. С. 76–148.
 153. Beltrami E. Considerazioni idrodinamiche // *Rendiconti – Istituto lombardo, Accademia di Scienze e Lettere*. 1889. V. 22. P. 122–131.
 154. Arnold V.I. Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits // *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*. 1965. V. 261, No. 1. P. 17–20.
 155. Childress S. New solutions of the kinematic dynamo problem // *Journal of Mathematical Physics*. 1970. V. 11. P. 3063–3076.
 156. Bogoyavlenskij O.I. Infinite families of exact periodic solutions to the Navier–Stokes equations // *Moscow Mathematical Journal*. 2003. V. 3, No. 2. P. 263–272.
 157. Vereshchagin V.P., Subbotin Y.N., Chernykh N.I. On the mechanics of helical flows in an ideal incompressible nonviscous continuous medium // *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2014. V. 284, suppl. 1. P. 159–174.
 158. Vereshchagin V.P., Subbotin Y.N., Chernykh N.I. Some solutions of continuum equations for an incompressible viscous medium // *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2014. V. 287, suppl. 1. P. 208–223.
 159. Trkal V. Poznámka k hydrodynamice vazkých tekutin // *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*. 1919. V. 48, I. 3. P. 302–311.
 160. Lakhtakia A., Trkal V. Beltrami fields and Trkalian flows // *Czechoslovak Journal of Physics*. 1994. V. 44, I. 2. P. 89–96.
 161. Ковалев В.П., Просвиряков Е.Ю., Сизых Г.Б. Получение примеров точных решений уравнений Навье–Стокса для винтовых течений методом суммирования скоростей // *Труды МФТИ*. 2017. Т. 9, № 1. С. 71–88.

162. Berker R. Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible: Handbunch der Physic, Bd VIII/2, Encyclopedia of Physics. Berlin : Springer-Verlag, 1963. 384 p.
163. Неменьи П.Ф. Современное развитие обратных и полуобратных методов в механике сплошной среды // Проблемы механики / под ред. Р. Мизеса и Т.М. Кармана. Москва : ИЛ, 1955. С. 234–257.
164. Drazin P.G., Riley N. The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions. New York : Cambridge University Press, 2006. 196 p.
165. Пухначев В.В. Симметрии в уравнениях Навье–Стокса // Успехи механики. 2006. Т. 4, № 1. С. 6–76.
166. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. Неоднородные течения Куэтта // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10, № 2. С. 177–182.
167. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. Нестационарные слоистые течения завихренной жидкости // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 2. С. 25–31.
168. Аристов С.Н., Князев Д.В. Трёхмерное струйное течение вязкой жидкости с плоскими свободными границами // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2017. № 2. С. 50–53.
169. Брутян М.А. Автомодельные решения типа Джеффри–Гамеля для течения вязкого сжимаемого газа // Учёные записки ЦАГИ. 2017. Т. 48, № 6. С. 13–22.
170. Голубкин В.Н., Сизых Г.Б. Течение вязкого газа между вертикальными стенками // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82, Вып. 5. С. 657–667.
171. Брутян М.А., Крапивский П.Л. Точные решения стационарных уравнений Навье–Стокса вязкого теплопроводного газа для плоской струи из линейного источника // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82, Вып. 5. С. 644–656.
172. Голубкин В.Н., Сизых Г.Б. О сжимаемом течении Куэтта // Учёные записки ЦАГИ. 2018. Т. 49, № 1. С. 27–38.

173. Брутян М.А., Ибрагимов У.Г. Автономные и неавтономные течения вязкого газа, истекающего из вершины конуса // Труды МФТИ. 2018. Т. 10, № 4. С. 113–121.
174. Хорин А.Н., Конюхова А.А. Течение Куэтта горячего вязкого газа // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2020. Т. 24, № 2. С. 365–378.
175. Brutyan M.A., Ibragimov U.G. Asymmetric self-similar viscous gas flows in a wedge // Fluid Dynamics. 2022. V. 57, I. 7. P. 923–931.
176. Голубкин В.Н., Мануйлович И.С., Марков В.В. Пятый инвариант линий тока для осесимметричных закрученных течений газа // Труды МФТИ. 2018. Т. 10, № 2. С. 131–135.
177. Morgulis A., Yudovich V.I., Zaslavsky G.M. Compressible helical flows // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1995. V. 48, I. 5. P. 571–582.
178. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. Москва : Наука, 1973. 584 с.
179. Ламб Г. Гидродинамика. Москва : ОГИЗ, 1947. 929 с.
180. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. Москва : Наука, 1973. 736 с.
181. Сизых Г.Б. Минимум скорости потенциального течения жидкости // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2017. № 3. С. 12–17.
182. Rowland H. On the motion of a perfect incompressible fluid when no bodies are present // American Journal of Mathematics. 1880. V. 3. P. 226–268.
183. Hamel G. Ein allgemeiner satz über den druck bei der bewegung volumneständiger flüssigkeiten // Monatshefte für Mathematik und Physik. 1936. V. 43. P. 345–363.
184. Поляченко В.Л., Фридман А.М. Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. Москва : Наука, 1976. 447 с.
185. Poincaré H. Figures d'équilibre d'une masse fluide. Paris: Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire, 1902. 212 p.

186. Prosviryakov E.Yu. Gravitational principle of minimum pressure for incompressible flows // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. 2021. I. 2. P. 22–29.
187. Hopf E. Elementare bemerkungen über die lösungen partieller differentialgleichungen zweiter ordnung vom elliptischen typus // *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*. 1927. V. 19. P. 147–152.
188. Бурмистров А.Н., Ковалёв В.П., Сизых Г.Б. Принцип максимума для решения уравнения эллиптического типа с неограниченными коэффициентами // *Труды МФТИ*. 2014. Т. 6, № 4. С. 97–102.
189. Голубкин В.Н., Сизых Г.Б. Принципы максимума в гидродинамике // *XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов, 20–24 августа 2015 г., Казань*. Казань : Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015. С. 989–991.
190. Голубкин В.Н., Ковалёв В.П., Сизых Г.Б. Принцип максимума давления в плоских течениях идеальной несжимаемой жидкости // *Учёные записки ЦАГИ*. 2016. Т. 47, № 6. С. 28–36.
191. Голубкин В.Н., Сизых Г.Б. Точки минимума давления в осесимметричных течениях жидкости // *Труды МФТИ*. 2017. Т. 9, № 2. С. 23–29.
192. Sizykh G.B. Helical vortex lines in axisymmetric viscous incompressible fluid flows // *Fluid Dynamics*. 2019. V. 54, No. 8. P. 1038–1042.
193. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околосзвуковой аэродинамики. Москва : Издательство иностранной литературы, 1961. 208 с.
194. Nirenberg L. Strong maximum principle for parabolic equation // *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1953. V. 6, No. 2. P. 167–177.

195. Петров К.П. Аэродинамика элементов летательных аппаратов. Москва : Машиностроение, 1985. 272 с.
196. Брутян М.А., Ляпунов С.В. Оптимизация формы симметричных плоских тел с целью увеличения критического числа Маха // Учёные записки ЦАГИ. 1981. Т. 12, № 5. С. 10–22.
197. Вышинский В.В. Влияние удлинения цилиндрического участка на сопротивление фюзеляжа при околозвуковых скоростях полета // Учёные записки ЦАГИ. 1985. Т. 16, № 3. С. 110–113.
198. Баринов В.А., Болсуновский А.Л., Бузоверя Н.П., Кузнецов Е.Н., Скоморохов С.И., Чернышев И.Л. Исследование обтекания околозвуковым потоком газа модели самолета с носовой частью фюзеляжа в виде полукаверны Рябушинского // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416, № 4. С. 474–476.
199. Коул Дж., Кук Л. Трансзвуковая аэродинамика. Москва : Мир, 1989. 360 с.
200. Крайко А.Н. Плоские и осесимметричные конфигурации, обтекаемые с максимальным критическим числом Маха // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51, Вып. 6. С. 941–950.
201. Hunt J.C.R., Wray A.A., Moin P. Eddies, streams, and convergence zone in turbulent flows // Proceedings of the Summer Program, report CTR-S88, NASA Standford center for turbulence research. 1988. P. 193–208.
202. Jeong J., Hussain F. On the identification of a vortex // Journal of Fluid Mechanics. 1995. V. 285. P. 69–94.
203. Cala C.E., Fernandes E.C., Heitor M.V., Shtork S.I. Coherent structures in unsteady swirling jet flow // Experiments in Fluids. 2006. V. 40, No. 2. P. 267–276.
204. Егоров И.В., Федоров А.В., Динь К.Х. Прямое численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода при сверхзвуковом обтекании острой пластины // Учёные записки ЦАГИ. 2018. Т. 49, № 5. С. 17–25.
205. Troshin A., Vlasenko V., Sabelnikov V. Large eddy simulation of a transverse hydrogen jet in supersonic crossflow // Proceedings of EUCASS 2019. 7 p.

206. Dong X., Gao Y., Liu C. New normalized Rortex/vortex identification method // *Physics of Fluids*. 2019. V. 31, No. 1. Art. 011701.
207. Zhan J., Li Y., Onyx W.W., Hu W. Comparison between the Q criterion and Rortex in the application of an in-stream structures // *Physics of Fluids*. 2019. V. 31.
208. Ланкастер П. Теория матриц. Москва : Наука, 1973. 280 с.
209. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1. Москва : Высшая школа, 1981. 687 с.
210. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Москва : Издательство АН СССР, 1951. 427 с.
211. Сизых Г.Б. Критерий Бернулли для установившегося плоскопараллельного течения вязкой несжимаемой жидкости // *Труды МФТИ*. 2013. Т. 5, № 2. С. 81–87.
212. Косых А.П., Нерсесов Г.Г., Чельшева И.Ф., Юмашев В.Л. Численное моделирование пространственного обтекания сверхзвуковых летательных аппаратов и их элементов на основе многозонной технологии // *Учёные записки ЦАГИ*. 2004. Т. 35, № 1–2. С. 3–20.
213. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. Ч. 1. Москва : Наука, 1991. 600 с.
214. Бессонов О.А., Харченко Н.А. Программная платформа для суперкомпьютерного моделирования задач аэротермодинамики // *Программная инженерия*. 2021. Т. 12, № 6. С. 302–310.
215. Босняков С.М., Березко М.Э., Дерюгин Ю.Н., Дубень А.П., Жучков Р.Н., Козелков А.С., Козубская Т.К., Матяш С.В., Михайлов С.В., Окулов М.К., Талызин В.А., Уткина А.А., Харченко Н.А., Шевяков В.И. Оценка точности современных кодов путем сопоставления расчетных и экспериментальных данных на примере задачи обтекания тандема клиньев разрежения и сжатия сверхзвуковым потоком вязкого турбулентного газа // *Математическое моделирование*. 2023. Т. 35, № 10. С. 69–112.

216. Харченко Н.А., Никонов А.М. Определение распределенных аэродинамических характеристик осесимметричного тела конфигурации СОСВТ при турбулентном обтекании трансзвуковым потоком // Математическое моделирование и численные методы. 2023. № 2. С. 100–128.
217. Вычислительные аспекты решения задач охраны окружающей среды / под ред. У.Г. Пирумова. Москва : МАИ, 1988. 68 с.
218. Пирумов У.Г., Росляков Г.С. Газовая динамика сопел. Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 368 с.
219. Moukalled F., Mangani L., Darwish M. The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics: An Advanced Introduction with OpenFOAM® and Matlab®. Cham : Springer, 2016. 791 p.
220. Tuković Ž., Karač A., Cardiff P., Jasak H., Ivanković A. OpenFOAM finite volume solver for fluid-solid interaction // Transactions of FAMENA. 2018. V. 42, No. 3. P. 1–31.
221. OpenFOAM [Электронный ресурс]. URL: <http://openfoam.com> (Дата обращения: 14.04.2024).
222. Adhikari D. Some experimental studies on vortex ring formation and interaction: diss. ... National University of Singapore, 2009. 188 p.
223. Kotsur O.S., Shcheglov G.A. Viscous fluid simulation with the vortex element method // 31st Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences: ICAS 2018, 9–14 September 2018, Belo Horizonte, Brazil. 10 p. URL: https://www.icas.org/ICAS_ARCHIVE/ICAS2018/data/papers/ICAS2018_0718_paper.pdf (Дата обращения: 14.04.2024).

Приложение А

Примеры применения выносимых на защиту положений в вычислительной аэрогидромеханике

Практическое значение теоретических положений 1–4 и 7–9, выносимых на защиту, состоит в возможности проводить верификацию программного обеспечения компьютерной модели и конкретного расчета путем проверки выполнения новых, строго обоснованных закономерностей, не заложенных в расчетные схемы. А практическое значение результатов, связанных со скоростью Фридмана (положения 5 и 6, выносимые на защиту), состоит в том, что эти результаты могут быть использованы при создании новых бессеточных методов.

В настоящем приложении приводятся примеры использования положений диссертации в вычислительной аэрогидромеханике.

Замечание. Текст настоящего приложения представляет собой краткое изложение статей (или их частей) с результатами, полученными без участия соискателя. С учетом того, что это замечание сделано, соискатель даже при дословном цитировании в приложении некоторых предложений из статей других авторов не указывает на факт цитирования там, где понятно, о цитировании какой статьи идет речь. Это делается для удобства читателя (чтобы не загромождать текст лишними кавычками и повторными ссылками на источники).

Пример 1

Одно из следствий положения 1, выносимого на защиту, состоит в том, что при сверхзвуковом обтекании тела с гладкой выпуклой носовой частью даже при отсутствии симметрии течения энтропия принимает максимальное значение на линии торможения и на поверхности тела, а поэтому давление торможения минимально на критической линии тока и на поверхности тела и равно давлению торможения, вычисленному по формуле Релея для давления торможения P_0 за

прямым скачком через показатель адиабаты k , давление P_∞ и число Маха M_∞ невозмущенного набегающего сверхзвукового потока [213]:

$$P_0/P_\infty = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} \left(\frac{k-1}{2}\right)^{\frac{-1}{k-1}} M_\infty^{\frac{2k}{k-1}} \left(\frac{2k}{k-1} M_\infty^2 - 1\right)^{\frac{-1}{k-1}}.$$

В статье [36] проверка выполнения этой теоретически установленной закономерности использована для верификации кода ГРАТ, предназначенного для суперкомпьютерного моделирования аэротермогазодинамики высокоскоростных реагирующих течений с сильными ударными волнами (подробное описание кода ГРАТ содержится в совокупности работ [214–216]). В основе этого компьютерного кода лежит численное решение методом конечного объема трехмерной нестационарной системы уравнений движения вязкого, теплопроводного, химически реагирующего газа [217, 218], дополненной двухпараметрической RANS моделью турбулентности $k-\omega$ SST вида

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial F^x(\mathbf{w})}{\partial x} + \frac{\partial F^y(\mathbf{w})}{\partial y} + \frac{\partial F^z(\mathbf{w})}{\partial z} = \frac{\partial G^x(\mathbf{w})}{\partial x} + \frac{\partial G^y(\mathbf{w})}{\partial y} + \frac{\partial G^z(\mathbf{w})}{\partial z}, \quad (\text{A.1})$$

где \mathbf{w} – столбец консервативных переменных, F^x , F^y , F^z – компоненты вектора конвективного потока, G^x , G^y , G^z – компоненты вектора вязкого потока (в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$).

На рисунке А.1 представлена трехмерная поверхность осесимметричного тела, затупленного по эллипсоиду с соотношением 1:2:2, созданная для проведения аэромеханических расчетов.



Рисунок А.1 – Трехмерная модель осесимметричного затупленного тела [36]

Численное моделирование трехмерного поля течения в [36] проводилось с использованием неструктурированных сеток, важным преимуществом которых является автоматизация построения для сложных геометрических форм. Расчетная сетка, фрагмент которой представлен на рисунке А.2, состояла из тетраэдральных и призматических элементов.

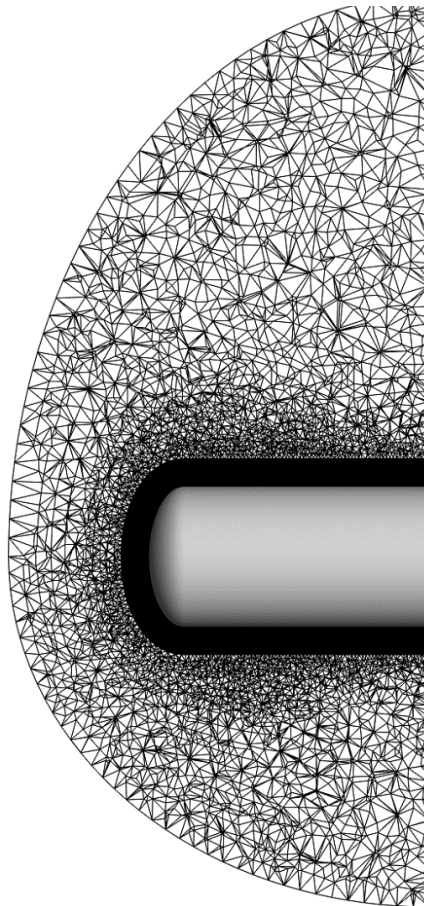


Рисунок А.2 – Фрагмент расчетной сетки в сечении $z = 0$ [36]

Для более детального описания поля течения в области отошедшей ударной волны и для исследования влияния подробности расчетной сетки на изменение давления в области точки торможения потока проводилось сгущение призматическими элементами. Сгущение расчетной сетки осуществлялось путем увеличения количества призматических элементов в нормальном направлении к поверхности осесимметричного затупленного тела, что позволило сохранить топологию расчетной сетки для дальнейшего анализа сходимости решения по

сетке и оценки величины отклонения рассчитанного давления в точке торможения потока на теле от точного теоретического значения. Количество призматических ячеек в нормальном направлении к поверхности осесимметричного затупленного тела задавалось равным 25, 50 и 100 элементам. В итоге были построены три расчетные сетки разного уровня подробности в области отошедшей ударной волны, представленные на рисунке А.3. Общее количество ячеек в расчетной области для сеток составило 1 102 305, 1 774 055 и 3 117 555 элементов.

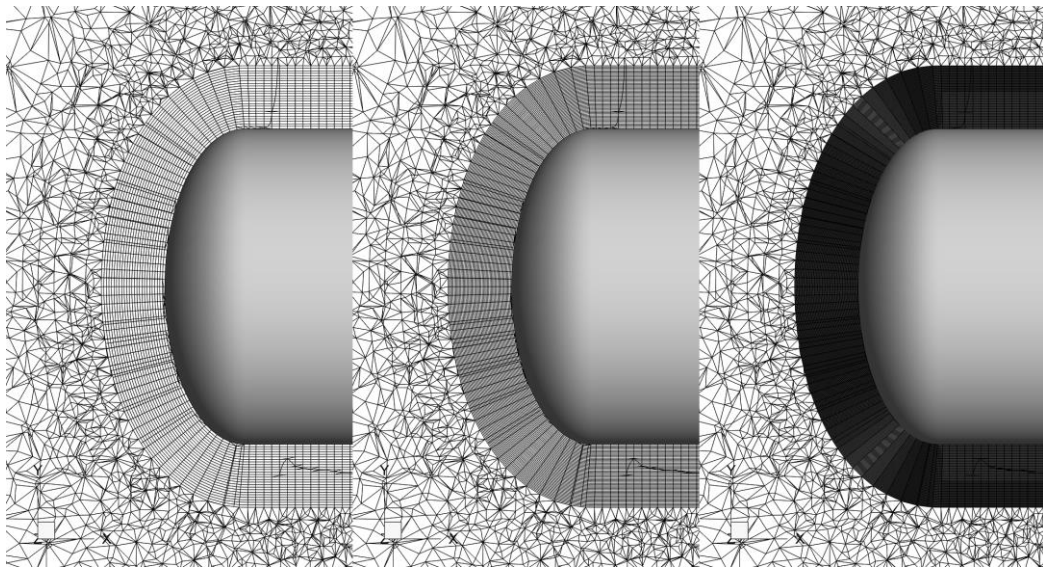


Рисунок А.3 – Расчетные сетки с возрастающим количеством призматических элементов в нормальном направлении к поверхности затупленного тела (сечение $z = 0$) [36]

На поверхности обтекаемого тела задавались граничные условия проскальзывания с теплоизолированной поверхностью вследствие того, что обтекание при моделировании осесимметричного затупленного тела проводилось сверхзвуковым потоком невязкого, совершенного газа, вследствие чего компоненты вектора вязкого потока в системе уравнений газовой динамики (А.1) полагались равными нулю.

На рисунках А.4–А.7 представлены распределения давления, полученные на сетках разного уровня подробности в результате численного моделирования невязкого обтекания сверхзвуковым потоком воздуха ($k=1.4$) осесимметричного

тела, затупленного по эллипсоиду (рис. А.1), для двух чисел Маха 3 и 4 под двумя углами атаки – 15 и 30 градусов. Погрешности (отклонения) расчетного значения давления в точке торможения от теоретического значения приведены в таблицах А.1 и А.2.

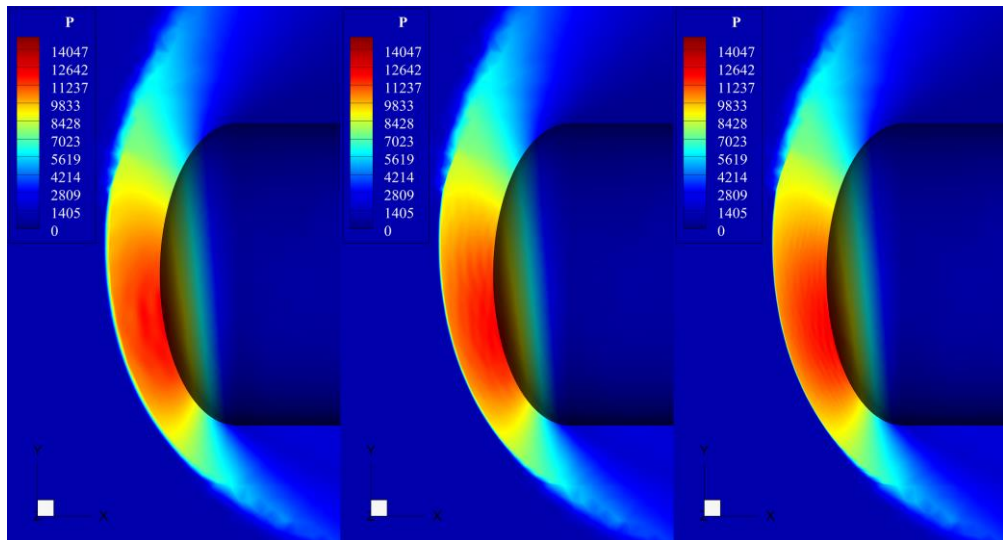


Рисунок А.4 – Распределения давления в окрестности затупленного тела на сетках разного уровня подробности, $M = 3$, угол атаки $\alpha = 15^\circ$ (сечение $z = 0$) [36]

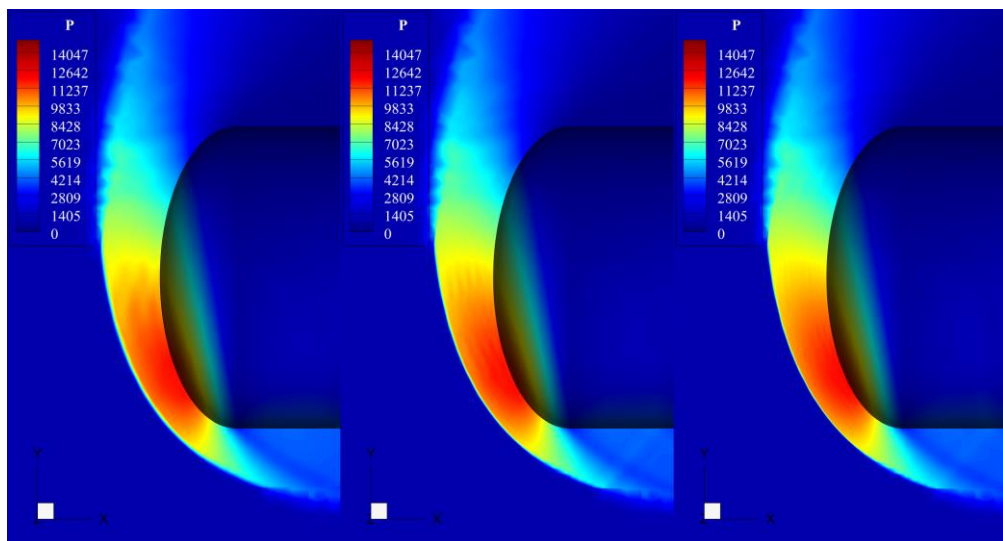


Рисунок А.5 – Распределения давления в окрестности затупленного тела на сетках разного уровня подробности, $M = 3$, угол атаки $\alpha = 30^\circ$ (сечение $z = 0$) [36]

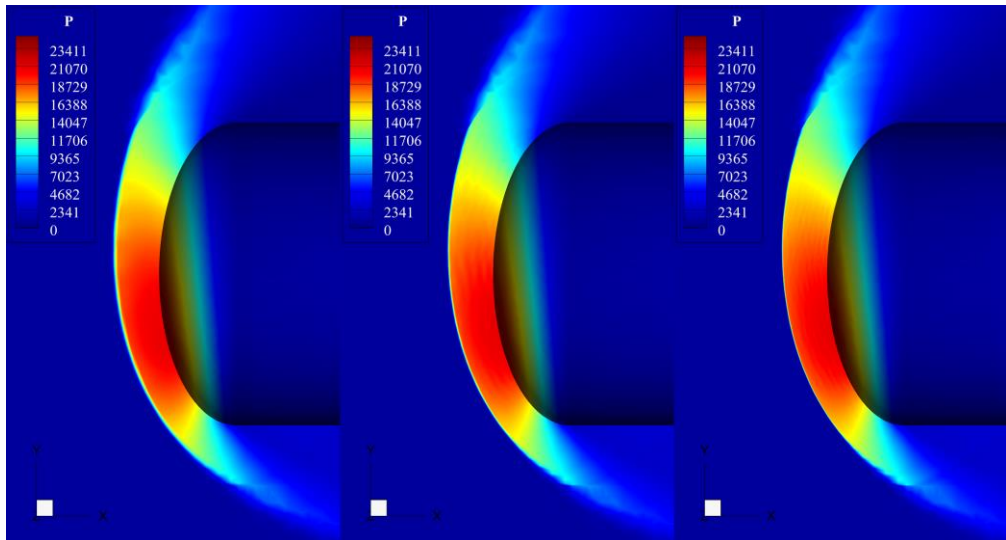


Рисунок А.6 – Распределения давления в окрестности затупленного тела на сетках разного уровня подробности, $M = 4$, угол атаки $\alpha = 15^\circ$ (сечение $z = 0$) [36]

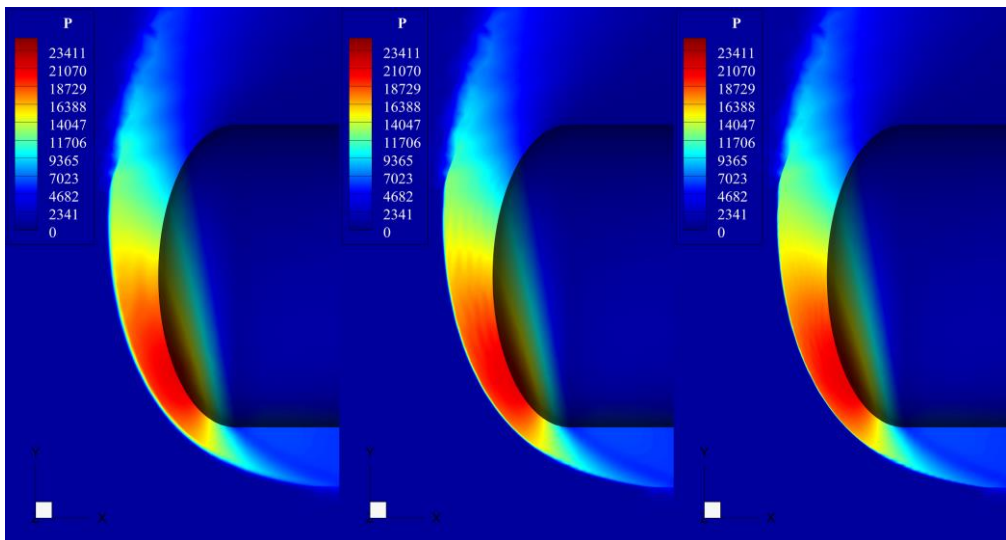


Рисунок А.7 – Распределения давления в окрестности затупленного тела на сетках разного уровня подробности, $M = 4$, угол атаки $\alpha = 30^\circ$ (сечение $z = 0$) [36]

Таблица А.1 – Сравнение давления в области точки торможения потока при числе Маха 3 с теоретическим значением полного давления, равным 12061 Па [36]

Число призматических ячеек в нормальном направлении	Угол атаки 15°		Угол атаки 30°	
	Расчетное значение, Па	Погрешность, %	Расчетное значение, Па	Погрешность, %
25	12246	1.53	11899	1.34
50	12194	1.10	11915	1.21
100	12060	0.00	11977	0.70

Таблица А.2 – Сравнение давления в области точки торможения потока при числе Маха 4 с теоретическим значением полного давления, равным 21068 Па [36]

Число призматических ячеек в нормальном направлении	Угол атаки 15°		Угол атаки 30°	
	Расчетное значение, Па	Погрешность, %	Расчетное значение, Па	Погрешность, %
25	20735	1.58	20886	0.86
50	20920	0.70	20902	0.79
100	21105	0.18	21069	0.00

В качестве оценки качества расчетов в [36] рассматривалась погрешность отклонения величины давления на теле в передней точке торможения, полученной в расчетах, от точного значения, которое, согласно положению 1, выносимого на защиту, равно давлению торможения за прямым скачком.

Авторы [36] рассматривали погрешности вычислений, указанные в таблицах А.1 и А.2, как объективную количественную оценку точности компьютерного кода ГРАТ в зависимости от густоты расчетной сетки. Результаты расчетов, выполненных на сетках с измельчением для двух значений угла атаки и числа Маха, показывают тенденцию уменьшения отклонения вычисленного давления от точного по мере измельчения расчетной сетки.

В заключение авторы [36] приходят к выводу, что проверка отклонения величины давления на теле в передней точке торможения, полученной в расчетах, от точного значения, равного давлению торможения за прямым скачком, дает возможность проводить верификацию и получать объективную количественную оценку точности компьютерного кода.

Пример 2

Идея вихревых методов состоит в аппроксимации непрерывного поля завихренности Ω набором элементарных полей Ω_i , называемых вихревыми элементами (ВЭ). В лагранжевых вихревых методах ВЭ перемещаются в пространстве по полю скорости Фридмана \mathbf{U} (для идеальной несжимаемой жидкости это скорость самой жидкости: $\mathbf{U} = \mathbf{V}$) и на каждом временном шаге позволяют воссоздать как поле завихренности, так и поле скорости \mathbf{V} с помощью интеграла Био – Савара.

Особенность лагранжевых вихревых методов состоит в том, что для их применения не требуется сетка, в отличие от сеточных методов (методы конечных объемов (МКО), конечных элементов и конечных разностей), которые наиболее часто применяются для решения задач гидродинамики [219]. Недостаток использования сеток проявляется при моделировании течений с подвижными границами из-за необходимости тем или иным способом перестраивать сетку, отслеживая на каждом шаге положение границ обтекаемых тел [220].

Существующие алгоритмы динамических сеток требуют переинтерполяции полей на каждом шаге на всей сетке целиком (метод деформируемых сеток), либо для ее части вблизи границ поверхности (метод погруженных границ). В первом случае частая переинтерполяция приводит к дополнительной схемной вязкости, а во втором случае влияет на точность вычисления нагрузок, действующих на поверхность тела со стороны жидкости.

Метод вихревых петель (МВП) является лагранжевым вихревым методом, предназначенным для моделирования нагрузок, действующих на тело, обтекаемое потоком несжимаемой жидкости [138]. Полностью бессеточная формулировка МВП позволяет учитывать широкий класс движений или топологических изменений тела в процессе обтекания. До опубликования статьи [11] ограничением МВП являлась возможность моделирования лишь невязких течений, поскольку скорость Фридмана для вязких течений была неизвестна и было неизвестно, существует ли она. После того, как в настоящей диссертационной работе (в статье [53]) было доказано существование скорости Фридмана и получена формула для этой скорости, в статье [11] была предложена модификация метода вихревых петель для расчетов вязких течений несжимаемой жидкости (предложено перемещать вихревые элементы со скоростью Фридмана).

Как уже отмечено выше в основном тексте диссертации, формула для скорости Фридмана в вязкой несжимаемой жидкости

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} + \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \{-\nu \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega} - \nabla f\}}{\Omega^2}, \quad (\text{A.2})$$

где ν – кинематический коэффициент вязкости, полученная в разделе 3.4, в общем случае не является локальной в том смысле, что \mathbf{U} в какой-либо точке не может быть вычислена через параметры течения и их производные в этой же точке. Подробно это описано в главе 3. Если говорить кратко, то суть состоит в следующем. Для вычисления поля f в точках пространства сначала это поле произвольным образом задается функцией f_0 на плоской области σ , которая пересекается вихревыми линиями под ненулевыми углами (рис. А.8). Затем

функция f в точке пространства вычисляется интегрированием вдоль вихревой линии по формуле

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_0(x_1^{(0)}(x_1, x_2, x_3), x_2^{(0)}(x_1, x_2, x_3)) - \nu \int_0^{l(x_1, x_2, x_3)} ((\mathbf{\Omega} \cdot \text{rot } \mathbf{\Omega}) / \Omega) dl. \quad (\text{A.3})$$

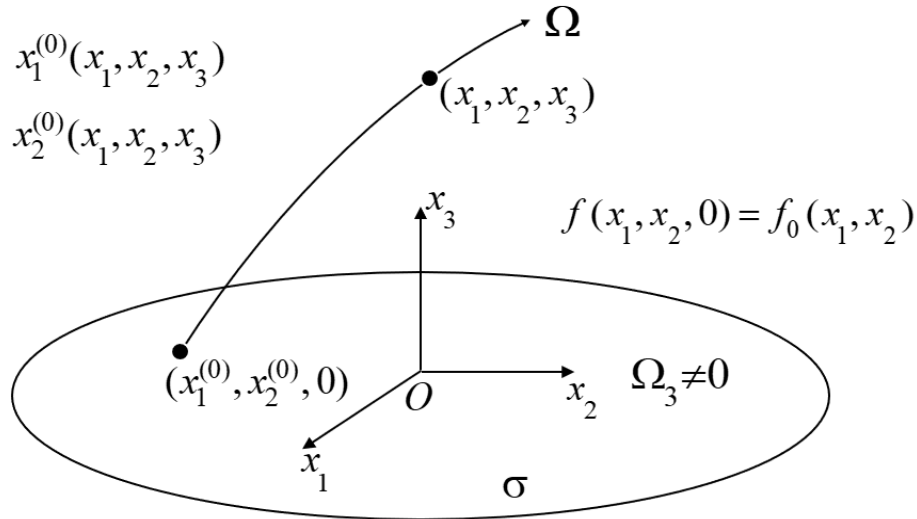


Рисунок А.8 – Функция f в точке пространства (x_1, x_2, x_3) вычисляется интегрированием вдоль вихревой линии от точки $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, 0)$

Необходимость такого интегрирования вдоль вихревых линий делает формулу (А.2) практически непригодной (при современном уровне развития вычислительной техники) для использования в численных методах. Поэтому в [11] было предложено пренебречь величиной $(\mathbf{\Omega} \cdot \text{rot } \mathbf{\Omega}) / \Omega$, входящей в формулу (А.3), то есть считать ее равной нулю (как это имеет место в плоских и в незакрученных осесимметричных течениях). В результате величина ∇f получается равной нулю, и формула (А.2) становится локальной. Таким образом, суть нового метода вихревых петель, предназначенного для расчета вязких течений, состоит в использовании упрощенной формулы для скорости Фридмана

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} - \nu \frac{\mathbf{\Omega} \times \text{rot } \mathbf{\Omega}}{(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega})}. \quad (\text{A.4})$$

Следует заметить, что метод [11] может применяться не только для задач, в которых величина $(\mathbf{\Omega} \cdot \text{rot } \mathbf{\Omega})/\Omega$ пренебрежимо мала. Метод будет работать при менее жестком предположении. Дело в следующем. Величина $(\mathbf{\Omega} \cdot \text{rot } \mathbf{\Omega})/\Omega$ может быть отличной от нуля настолько, что пренебречь величиной ∇f будет невозможно. Однако в формулу (А.2) входит только поперечная к завихренности составляющая вектора ∇f . Поэтому формула (А.4) и вместе с ней метод [11] подходят для более широкого класса течений – течений, в которых $v|\mathbf{\Omega} \times \text{rot } \mathbf{\Omega}| \gg |\mathbf{\Omega} \times \nabla f|$.

Ниже приводится пример (опубликованный в [11] и [7]) использования формулы (А.4) в рамках моделирования движения эллиптического вихревого кольца, движущегося в вязкой жидкости, методом вихревых петель. Из-за различного радиуса кривизны участков такого кольца возникают зоны закрутки вихревых линий, в которых нельзя пренебречь величиной $(\mathbf{\Omega} \cdot \text{rot } \mathbf{\Omega})/\Omega$. Тем не менее, предположение $v|\mathbf{\Omega} \times \text{rot } \mathbf{\Omega}| \gg |\mathbf{\Omega} \times \nabla f|$ остается верным, и использование формулы (А.4) позволяет получить результаты, соответствующие экспериментальным данным и расчетным данным, полученным для этой же задачи сеточным методом контрольного объема в пакете OpenFOAM [221]. Более того, применение данного подхода позволяет значительно сократить время расчета по сравнению с сеточным методом.

Физические параметры задачи и параметры расчетных схем эллиптического вихревого кольца при расчетах методом вихревых петель и сеточным методом в пакете OpenFOAM приведены в таблице А.3. Движение эллиптического кольца с отношением полуосей $AR = 2$ характеризуется в процессе движения периодической сменой полуосей без перезамыкания. Число Рейнольдса и начальный размер ядра трубки кольца выбраны в соответствии с экспериментом [222]. Начальное распределение завихренности по сечению трубки задается по Гауссовой функции

$$\Omega(r) = \frac{\Gamma}{\pi r_c^2} e^{-\frac{r^2}{r_c^2}},$$

где r отсчитывается от оси трубки, а остальные величины вместе с параметрами расчетной схемы приведены в таблице А.3.

Таблица А.3 – Параметры схемы расчета вихревого эллипса методом вихревых петель [7]

Физические параметры	
Отношение полуосей AR	2
Большая полуось a	2
Циркуляция Γ_0	1
Вязкость ν	0.0012
Число Рейнольдса Re	834
Параметр начального условия t_0	1.25
Радиус начального ядра кольца r_c	0.1
Параметры расчетной модели	
Модель вязкости	DVM-3D
Количество слоёв в сечении	4
Количество сечений	28
Количество отрезков в сечении	49
Количество отрезков в эллипсе	1372(×5)
Количество промежуточных точек на отрезке	5
Радиус внешнего слоя	0.127
Расстояние между слоями	0.043
Параметр сглаживания производных ε	0.035
Параметр сглаживания скорости ε_v	0.035
Длина отрезка $2h$ (на осевой линии)	0.342
Функция сглаживания отрезка	WGAUS
Схема интегрирования	RK2
Шаг интегрирования	0.05
Распараллеливание	4 ядра
Время расчёта	0,7 ч

Моделирование задачи методом вихревых петель с предлагаемой моделью вязкости сравнивается с экспериментом [222] и с расчетом сеточным методом в пакете OpenFOAM в такой же постановке (таблица А.4).

Таблица А.4 – Параметры расчетной модели OpenFOAM [7]

Постановка	трёхмерная (четверть)
Расчётный домен	$5 \times 5 \times 18$
Количество ячеек сетки	8.5×10^6
Решатель	pimpleFoam
Шаг интегрирования	0.005
Распараллеливание	30 ядер
Время расчёта	6,1 ч

На рисунках А.9 и А.10 показаны виды эллипса в процессе эволюции в вязкой жидкости во фронтальной и боковой проекциях для заданных моментов времени. Результаты качественно близки друг к другу. В процессе эволюции наблюдается постепенная смена полуосей, которая сопровождается выходом эллипса из плоскости, что видно на боковой проекции. Заметно увеличение толщины трубки эллипса, связанное с вязкой диффузией.

На рисунках А.11 и А.12 приведены профили завихренности и скорости в сечении эллипса, проходящем вдоль его большой полуоси, полученные вихревым методом (красный) и в пакете OpenFOAM (зеленый). Профили завихренности и скорости качественно совпадают. Небольшие отклонения связаны с нерегулярным расположением петель по сечению и возникновением небольших зон кластеризации и разрежения, из-за которых на графиках видны осцилляции. С момента $t = 19$ на графиках скорости видно небольшое взаимное смещение профилей двух расчетов, связанное со смещением центров ядра эллипса (максимума завихренности по сечению).

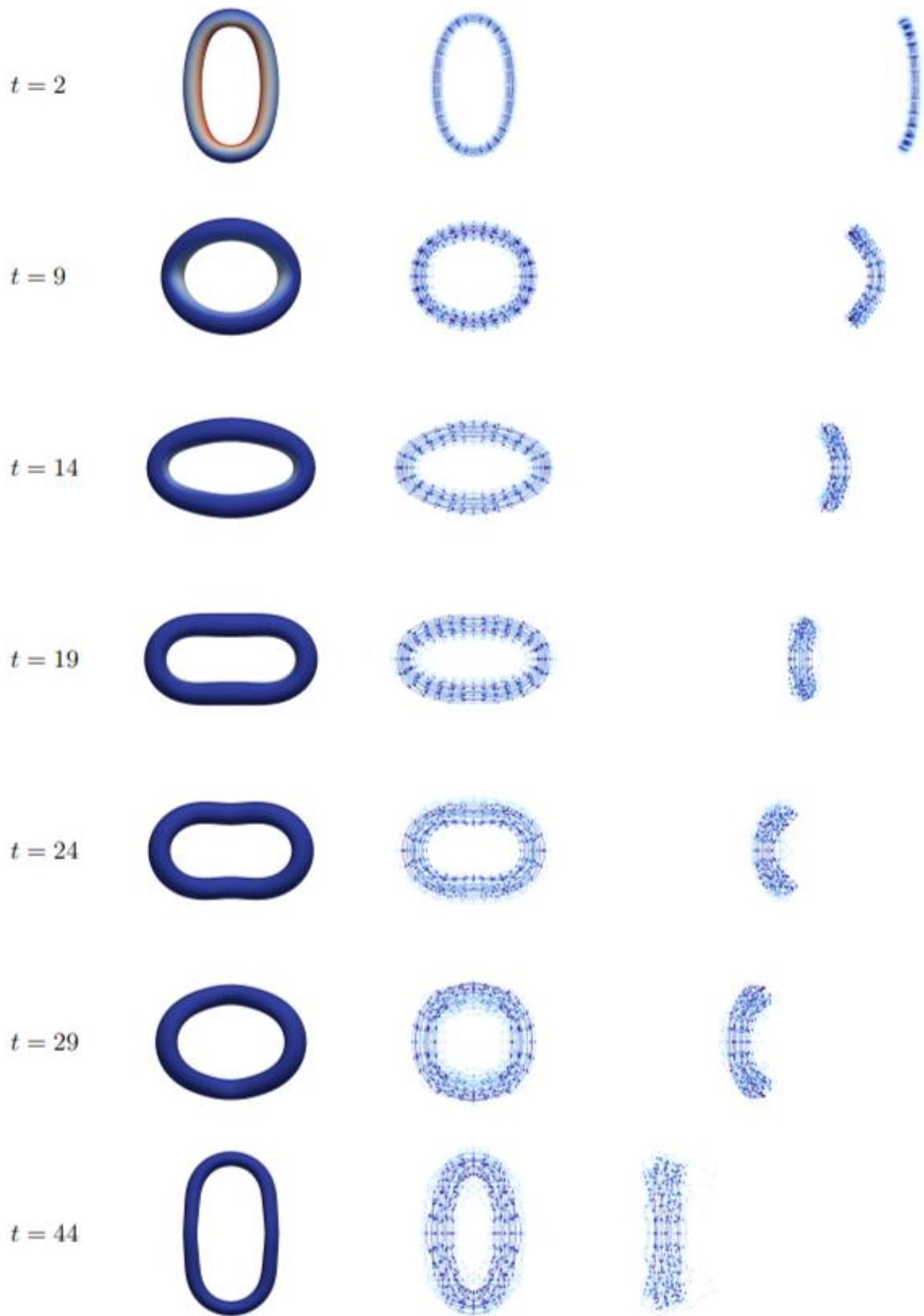


Рисунок А.9 – Эволюция вихревого эллипса во фронтальной и боковой проекциях. Расчет OpenFOAM (слева), вихревой метод (в центре и справа).

Рисунок взят из [7]

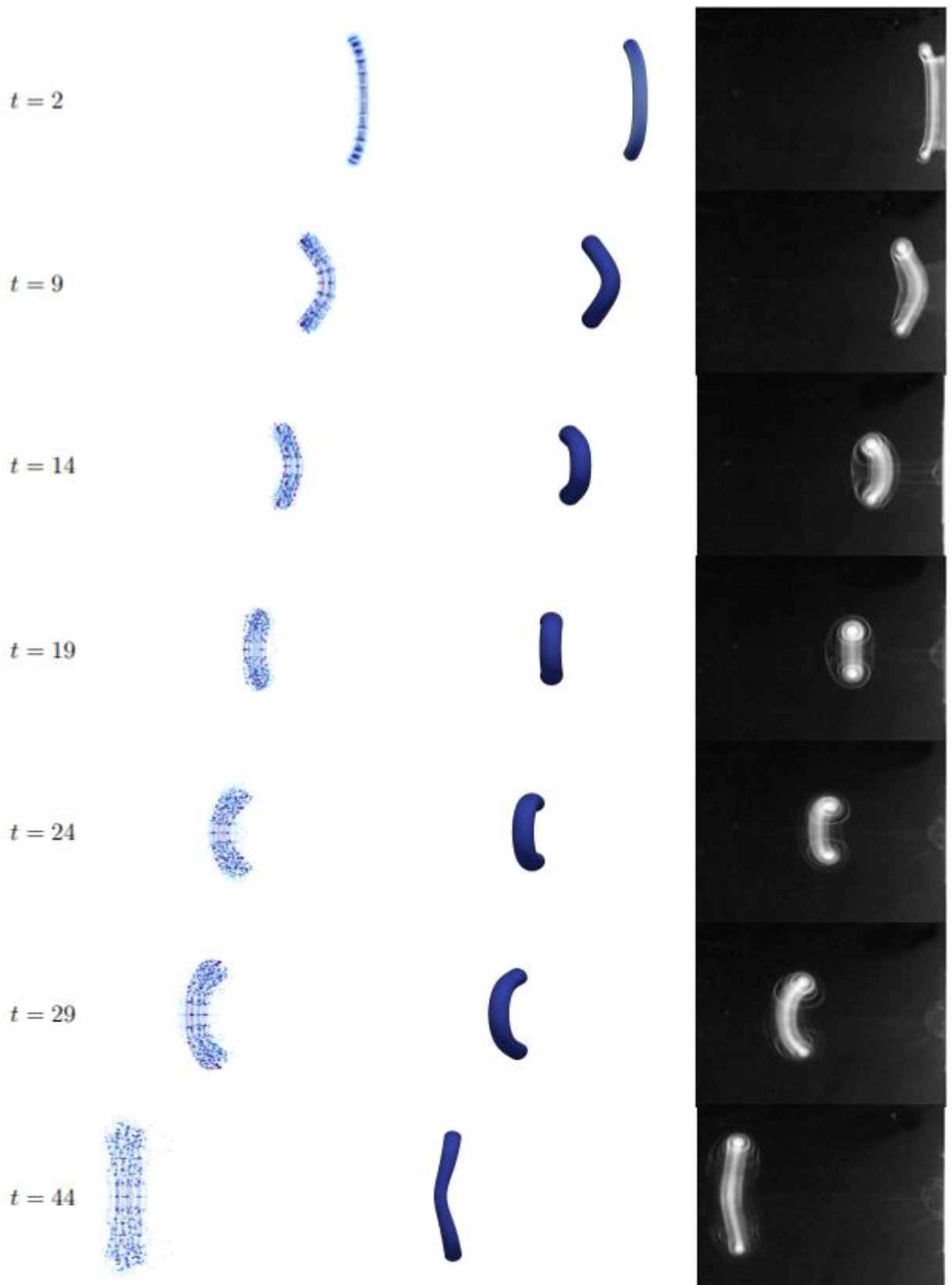


Рисунок А.10 – Эволюция вихревого эллипса в боковой проекции. Вихревой метод (слева), расчет в OpenFOAM (в центре), эксперимент DPIV [222] (справа).

Рисунок взят из [7]

Заметная неравномерность профилей завихренности на рисунке А.11 связана с тем, что для ее вычисления требуется брать производные от поля, распределенного на множестве вихревых элементов, которые теряют регулярность с течением времени. Поэтому осцилляции профилей выражены более явно в местах, где есть кластеризация или разрежения вихревых элементов по сечению.

На рисунке А.13 представлены графики перемещения центра (максимума) завихренности в рассматриваемом сечении в координатах y, z , где ось z направлена перпендикулярно плоскости эллипса, а ось y – вдоль большой полуоси. Видно, что обе расчетные кривые согласуются между собой и с экспериментом, попадая в погрешность экспериментального определения центра завихренности в ядре трубки. В разных фазах эволюции эллипса наблюдаются небольшие отклонения, связанные с нарушением симметричности положения экстремальных точек большой полуоси эллипса в эксперименте.

В целом, несмотря на наличие зон, в которых нельзя пренебречь величиной $(\mathbf{\Omega} \cdot \text{rot } \mathbf{\Omega}) / \Omega$ (из-за разной скорости закрутки вершин эллипса), результаты эксперимента и расчета сеточным методом показывают, что доминирующим эффектом вязкой диффузии завихренности является эффект расширения трубки, который хорошо описывается использованием упрощенной формулы (А.4) для скорости Фридмана, подобно тому, как эта формула действует в задачах, где она верна без всяких допущений (например, расширение прямолинейной вихревой трубки или эволюция кругового вихревого кольца в вязкой жидкости [223]). Здесь также следует иметь в виду замечание (см. начало стр. 280) о том, что приближенная формула (А.4) для скорости Фридмана может использоваться не только в зонах, где можно пренебречь величиной $(\mathbf{\Omega} \cdot \text{rot } \mathbf{\Omega}) / \Omega$, но и в зонах, где $v |\mathbf{\Omega} \times \text{rot } \mathbf{\Omega}| \gg |\mathbf{\Omega} \times \nabla f|$.

С точки зрения затрат вычислительных ресурсов используемый метод вихревых петель на данной конкретной задаче оказывается эффективнее сеточного метода, что видно из таблиц А3 и А4.

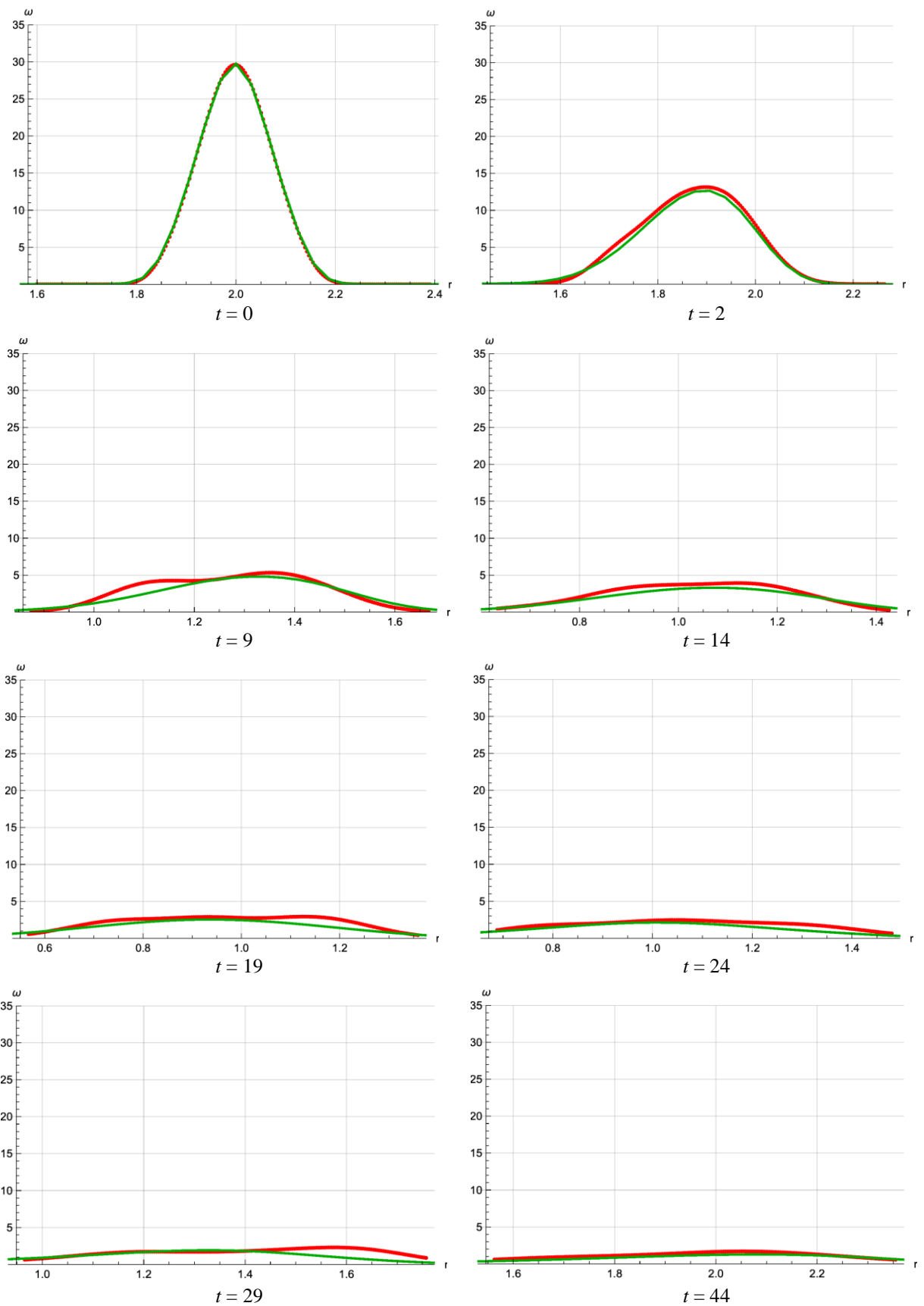


Рисунок А.11 – Эволюция профиля завихренности вихревого эллипса (красная линия – расчет вихревым методом; зеленая линия – расчет в OpenFOAM).

Рисунок взят из [7], где завихренность обозначалась символом ω

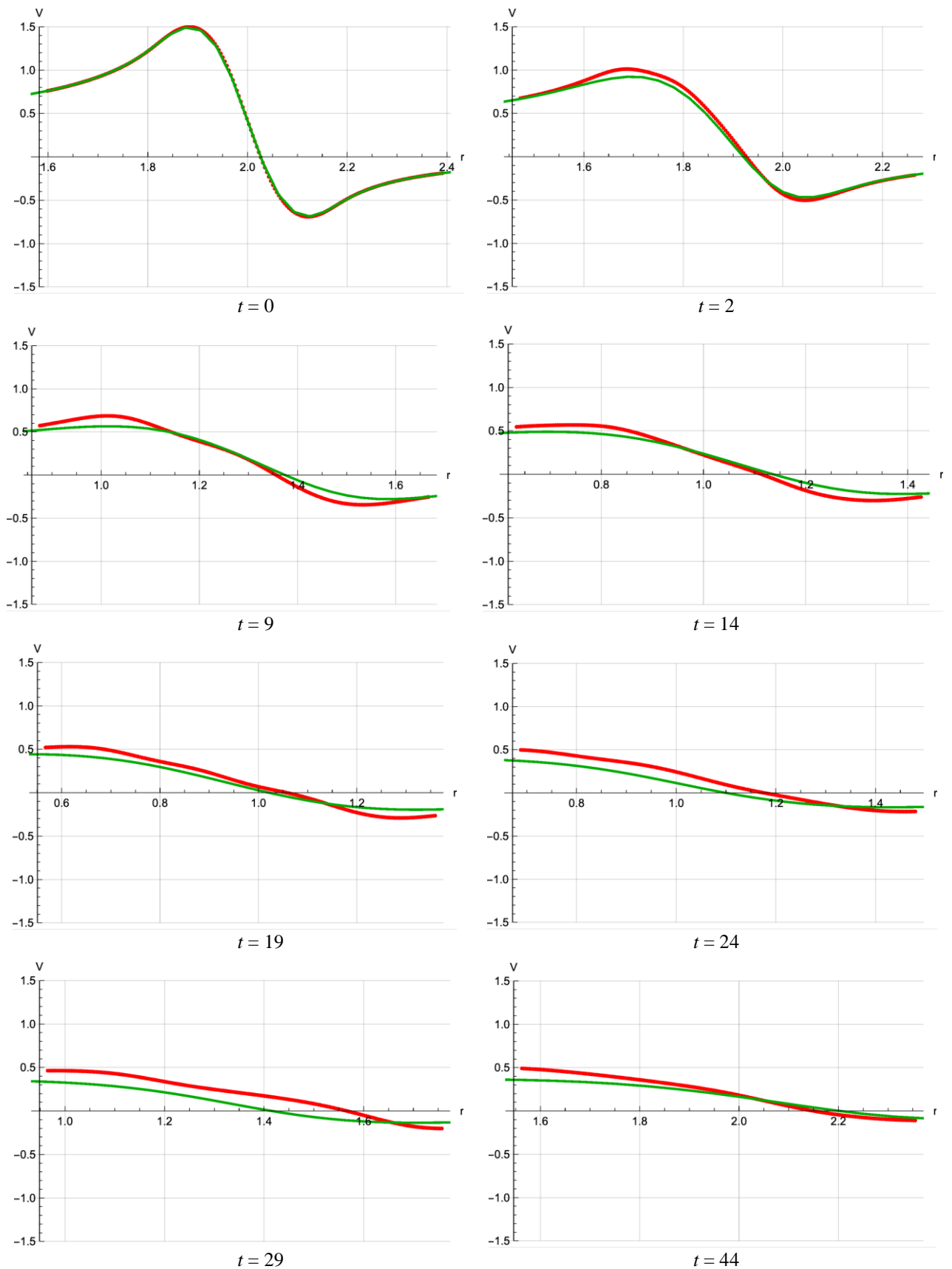


Рисунок А.12 – Эволюция профиля скорости вихревого эллипса (красная линия – расчет вихревым методом; зеленая линия – расчет в OpenFOAM).

Рисунок взят из [7]

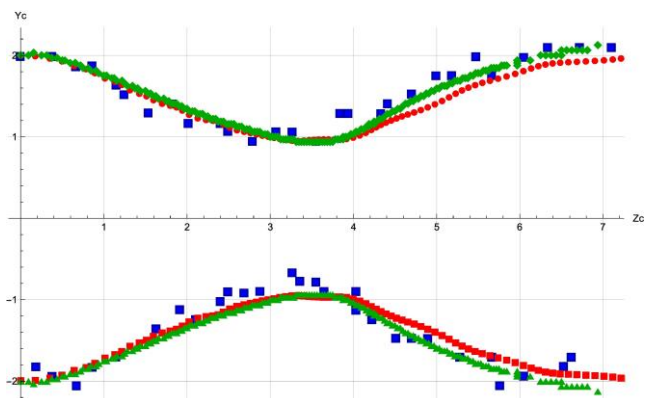


Рисунок А.13 – Эволюция верхнего и нижнего максимумов завихренности в сечении вдоль изначально большой полуоси эллипса в координатах y и z (эллипс движется вдоль оси z). Красная линия – расчет вихревым методом; синие точки – эксперимент [222]; зеленая линия – расчет в OpenFOAM. Рисунок взят из [7]

На рисунке А.14 представлены графики изменения длины большой полуоси эллиптического кольца от времени t . Видно, что добавление модели вязкости позволяет существенно точнее моделировать динамику вихревого эллиптического кольца, что подтверждается сравнением с экспериментом.

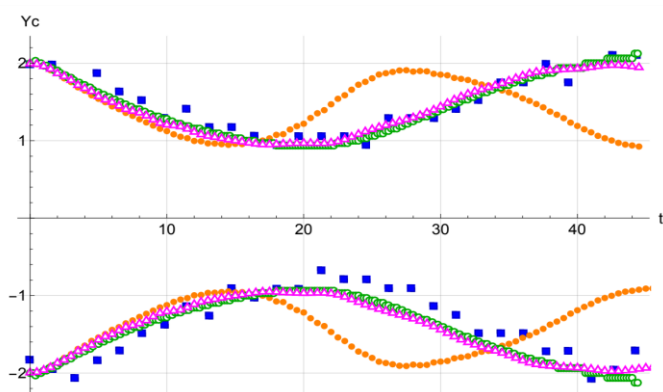


Рисунок А.14 – Эволюция длины изначально большой полуоси эллиптического кольца в зависимости от времени (розовая линия – расчет вихревым методом; синие точки – эксперимент [222]; зеленая линия – расчет в OpenFOAM; оранжевая линия – расчет вихревым методом без учета вязкости). Рисунок взят из [7]

Результаты работ [7, 12] показывают, что положение 5, выносимое на защиту в настоящей диссертации, позволило распространить метод вихревых петель на расчет течений вязкой несжимаемой жидкости. В этом состоит второй пример практического применения результатов диссертации.

Пример 3

Как уже было сказано в главе 5, использование дозвукового принципа максимума давления (ДПМД – положение 9, выносимое на защиту) для верификации расчетов показало свою эффективность в серии работ В. В. Вышинского с соавторами [37–44]. Проиллюстрируем это на примере материалов, приведенных в статье [43].

В начале статьи авторы отмечают, что «Методы вычислительной аэрогидромеханики (CFD) в рамках сеточных подходов реализуют решение начально-краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных на конкретной вычислительной технике, в большинстве случаев – недостаточной мощности для полноценной верификации. Поэтому, как правило, отсутствует доказательство того, что полученное решение зависит только от физических параметров задачи и не зависит от параметров численной схемы (размеров расчетной области, густоты и топологии сеток, числа итераций, адекватности и согласованности граничных условий и т.д.). ... По этой причине всякий дополнительный способ верификации полезен и представляет практическую ценность» [43]. Затем в статье дозвуковой принцип максимума давления используется для выявления «слабых мест» получаемых решений и улучшений этих решений, оставаясь в рамках возможностей используемой вычислительной техники. В рамках краевой задачи для уравнений Навье–Стокса, осредненных по Рейнольдсу, проведен расчет обтекания компоновки дальнемагистрального пассажирского самолета: крыло + фюзеляж + мотогондолы + пилоны на режиме посадки при числе $M=0.2$. Угол атаки $\alpha=5^\circ$. Сначала для выбора параметров сетки

проведен расчет обтекания изолированного фюзеляжа. Для визуализации вихревых структур в [43] изображались поверхности нулевого уровня Q -параметра (серый цвет). В первоначальном расчете (рис. А.15) видны изолированные от фюзеляжа вытянутые области, ограниченные поверхностями $Q=0$.

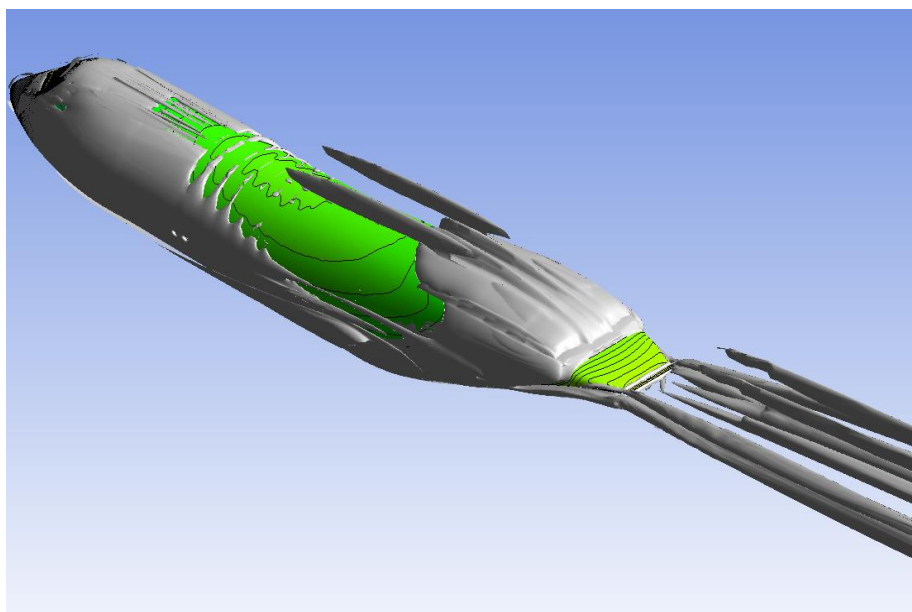


Рисунок А.15 – Визуализация расчета обтекания изолированного фюзеляжа на исходной сетке [43]

По мнению авторов [43], наличие таких областей лишено физического смысла. Однако это интуитивное соображение требовало объективного подтверждения. Для этого было проверено выполнение дозвукового принципа максимума давления (ДПМД). Оказалось, что в упомянутых областях имело место нарушение ДПМД. Это было объективным подтверждением ошибочности расчета. После этого за счет модификации расчетной сетки при сохранении первоначального количества узлов (12 млн) было получено решение (рис. А.16), в котором есть только четыре вытянутые области, ограниченные поверхностями $Q=0$, присоединенные к фюзеляжу. В этих областях отсутствуют нарушения ДПМД. Наличие таких областей не противоречит физическому смыслу, поскольку они соответствуют сходящим с фюзеляжа вихрям. Параметры сетки

улучшались подобным образом при расчетах других отдельных частей самолета. Только после этого «окончательная» улучшенная сетка была использована для расчета всей компоновки самолета.

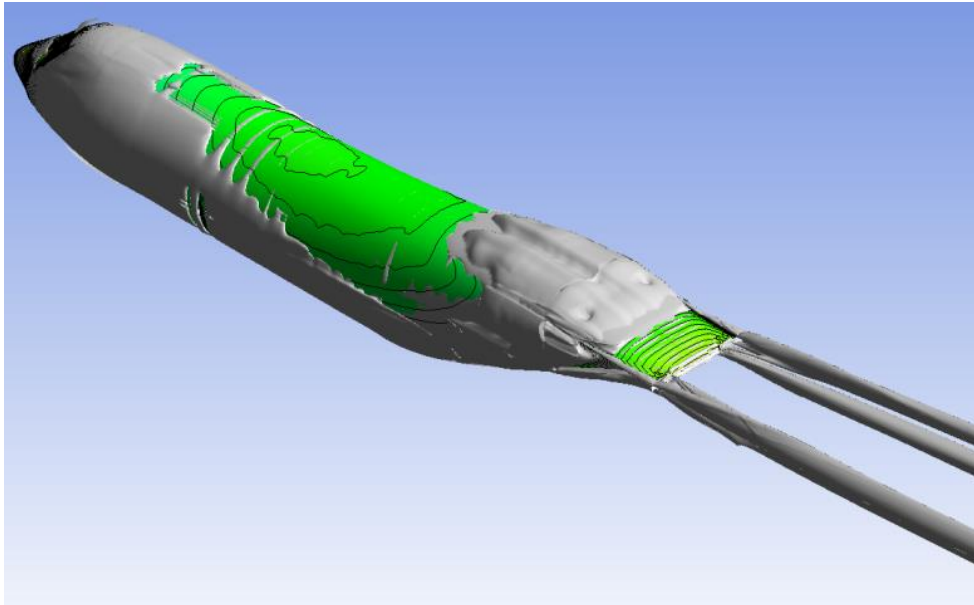


Рисунок А.16 – Визуализация расчета обтекания изолированного фюзеляжа на улучшенной сетке [43]

В интерфейсах многих программных комплексов заложена возможность построения поверхностей $Q=\text{const}$. В связи с этим авторы [43] отмечают удобство использования ДПМД, состоящее в том, что в условия этого принципа максимума входит только значение Q -параметра.

Таким образом, в работе [43] (как и в других упомянутых выше работах В. В. Вышинского с соавторами) положение 9, выносимое на защиту, нашло практическое применение.