УДК: 539.12

Упражнения с каноническим тензором спина

Р.И. Храпко

Канонический тензор спина стандартной электродинамики неадекватен. Это показано при использовании плоской электромагнитной волны и стоячей электромагнитной волны в качестве примеров. Рассмотрено улучшение канонического тензора спина путем добавления магнитного члена. Продемонстрирован истинный тензор спина.

1. Введение

Общепринято рассматривать выражение $\mathbf{E}\times\mathbf{A}$ в качестве объемной плотности спина электромагнитного поля. Здесь $\mathbf{E}$ и $\mathbf{A}$ являются напряженностью электрического поля и магнитным векторным потенциалом, соответственно. Например, Джексон [1] делит момент импульса распределения электромагнитных полей

$$\mathbf{J}=\int\mathbf{x}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{B})dV \tag{1}$$

на спиновую и орбитальную части,

$$\mathbf{J}=\int[\mathbf{E}\times\mathbf{A}+E^j(\mathbf{x}\times\nabla)A_j]dV \tag{2}$$

(для краткости мы положили $\mu_0=1, c=1$). Он написал: «Первый член иногда идентифицируется как спин фотона».[1]

Оханиан [2] также представляет момент импульса как сумму двух членов:

$$\mathbf{J}=\int\mathbf{x}\times(E^n\nabla A_n)dV+\int\mathbf{E}\times\mathbf{A}\,dV\,. \tag{3}$$

Он написал: «Первый член в уравнении (3) представляет орбитальный момент импульса, второй член – спин».[2]

Выражение $\mathbf{E}\times\mathbf{A}$ использовано Фрисом *et al*. [3] для случая плоской электромагнитной волны. Если $\mathbf{E}=\Re\breve{\mathbf{E}},\quad\breve{\mathbf{E}}=\breve{\mathbf{E}}_0\exp[i(z-t)]$, то мы имеем $\breve{\mathbf{A}}=-i\breve{\mathbf{E}}$, потому что $\mathbf{E}=-\partial_t\mathbf{A}$ (значок краткости отмечает комплексные вектора, и мы положили $\omega=1$). Авторы [3] написали: «Момент импульса определяется электрическим полем $\breve{\mathbf{E}}$ и его комплексным сопряжением $\overline{\mathbf{E}}$ путем интегрирования по всему пространству»[3]

$$\breve{\mathbf{J}}=\int\overline{\mathbf{E}}\times\breve{\mathbf{E}}\,dV/2i \tag{4}$$

---

[1] The first term is sometimes identified with the ‘spin’ of the photon.
[2] The first term in Eq. (3) represents the orbital angular momentum, and the second term the spin.
[3] The angular momentum can be found from the electric field $\breve{\mathbf{E}}$ and its complex conjugate $\overline{\mathbf{E}}$ by integrating over all spatial elements dV

(для краткости мы положили диэлектрическую постоянную $\varepsilon = 1$).

К сожалению, авторы не объясняют, что выражение $\mathbf{E}\times\mathbf{A}$ является компонентом канонического тензора спина.

Хорошо известно [4, 5], что вывод тензоров энергии-импульса и спина электромагнетизма начинается с канонического лагранжиана свободного поля,

$$\underset{c}{L} = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4, \quad F_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}A_{\nu]}, \quad \mu, \nu, \ldots = 0, 1, 2, 3. \tag{5}$$

Используя этот лагранжиан, с помощью лагранжевого формализма, физики получают канонический тензор энергии-импульса

$$\underset{c}{T}^{\lambda\mu} = \partial^{\lambda}A_{\alpha}\frac{\partial \underset{c}{L}}{\partial(\partial_{\mu}A_{\alpha})} - g^{\lambda\mu}\underset{c}{L} = -\partial^{\lambda}A_{\alpha}F^{\mu\alpha} + g^{\lambda\mu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}/4 \tag{6}$$

и канонический тензор полного момента импульса

$$\underset{c}{J}^{\lambda\mu\nu} = 2x^{[\lambda}\underset{c}{T}^{\mu]\nu} + \underset{c}{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu}, \tag{7}$$

где

$$\underset{c}{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu} = -2A^{[\lambda}\delta^{\mu]}_{\alpha}\frac{\partial \underset{c}{L}}{\partial(\partial_{\nu}A_{\alpha})} = -2A^{[\lambda}F^{\mu]\nu} \tag{8}$$

является каноническим тензором спина. Здесь $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$, $F_{\mu\nu} = F^{\alpha\beta}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}$ - тензор электромагнитного поля. Смысл его компонентов – следующий:

$$F^{0i} = -E^{i}, \quad F_{0i} = E_{i}, \quad F^{ij} = -B^{ij}, \quad F_{ij} = -B_{ij}, \quad B_{k} = B^{ij}e_{ijk}, \quad B^{k} = B_{ij}e^{ijk}, \quad i, j, \ldots = 1, 2, 3. \tag{9}$$

Например,

$$F^{x0} = F_{0x} = E^{x} = E_{x}, \quad F^{xy} = F_{xy} = B^{z} = B_{z}. \tag{10}$$

Компонент

$$\underset{c}{\Upsilon}^{ij0} = -2A^{[i}F^{j]0} = -2A^{[i}E^{j]} = E^{i}A^{j} - E^{j}A^{i} = \mathbf{E}\times\mathbf{A} \tag{11}$$

есть объемная плотность спина. Это означает, что

$$dS^{ij} = \underset{c}{\Upsilon}^{ij0}\,dV \tag{12}$$

есть спин электромагнитного поля внутри элемента объема dV. Компонент

$$\underset{c}{\Upsilon}^{ijk} = -2A^{[i}F^{j]k} = 2A^{[i}B^{j]k} \tag{13}$$

есть плотность потока спина в направлении оси x^{k}. Например,

$$\underset{c}{\Upsilon}^{xyz} = 2A^{[x}B^{y]z} = A^{x}B^{yz} - A^{y}B^{xz} = A^{x}B_{x} + A^{y}B_{y}, \tag{14}$$

и

$$dS_z = dS^{xy} = \underset{c}{\Upsilon}^{xyz}\, da_z = (A^x B_x + A^y B_y) da_z \tag{15}$$

есть *z*-компонента спина, прошедшего сквозь элемент поверхности da_z в единицу времени.

В настоящей статье мы намерены выяснить, является ли выражение (8) адекватным действительности. Для этого мы применим это выражение к плоской волне и к стоячей волне.

2. Плоская волна

Пусть плоская электромагнитная волна правой круговой поляризации, распространяющаяся вдоль оси *z*, имеет вид

$$E^x = \cos(z-t), \quad E^y = -\sin(z-t), \quad B^x = \sin(z-t), \quad B^y = \cos(z-t)\,. \tag{16}$$

Из-за того, что $\mathbf{A} = -\int \mathbf{E} dt$, мы имеем, согласно (11), (14),

$$A^x = \sin(z-t), \quad A^y = \cos(z-t), \quad \underset{c}{\Upsilon}^{xy0} = 1, \quad \underset{c}{\Upsilon}^{xyz} = 1\,. \tag{17}$$

Этот результат верен, поскольку вектор Пойнтинга $E^x B^y - E^y B^x = 1$, и отношение спина к энергии, $S/U = 1/\omega$, выполняется. Однако, вычисление других компонент тензора спина дает

$$\underset{c}{\Upsilon}^{zxy} = A^x B_x = \sin^2(z-t), \qquad \underset{c}{\Upsilon}^{yzx} = A^y B_y = \cos^2(z-t)\,. \tag{18}$$

Этот результат неверен, так как он означает существование потока спина в направлениях, перпендикулярных к направлению распространения волны.

3. Стоячая волна

Давайте сложим волну (16)

$$E_1^x = \cos(z-t), \quad E_1^y = -\sin(z-t), \quad B_1^x = \sin(z-t), \quad B_1^y = \cos(z-t)\,. \tag{19}$$

и волну, отраженную от сверхпроводящей плоскости $z = 0$

$$E_2^x = -\cos(z+t), \quad E_2^y = -\sin(z+t), \quad B_2^x = -\sin(z+t), \quad B_2^y = \cos(z+t)\,. \tag{20}$$

Результирующее поле будет выглядеть так:

$$E^x = E_1^x + E_2^x = 2\sin z \sin t\,, \qquad E^y = E_1^y + E_2^y = -2\sin z \cos t\,, \tag{21}$$

$$B^x = B_1^x + B_2^x = -2\cos z \sin t\,, \qquad B^y = B_1^y + B_2^y = 2\cos z \cos t\,. \tag{22}$$

Магнитный векторный потенциал, согласно $\mathbf{A} = -\int \mathbf{E} dt$, есть

$$A^x = 2\sin z \cos t, \quad A^y = 2\sin z \sin t\,. \tag{23}$$

Поэтому расчет компонентов тензора спина дает

$$\underset{c}{\Upsilon}^{xy0} = 4\sin^2 z, \quad \underset{c}{\Upsilon}^{xyz} = 0\,. \tag{24}$$

Результат $\underset{c}{\Upsilon}^{xyz} = 0$ верен, потому что отсутствует поток спина к отражающей плоскости, однако $\underset{c}{\Upsilon}^{xy0} = 4\sin^2 z$ вызывает сомнения, потому что не существует причины подразделения электромагнитного спина на слои. Как известно, плотность энергии постоянна: $(E^2 + B^2)/2 = 2$.

К сожалению, подсчет других компонент тензора спина также дает неверный результат

$$\underset{c}{\Upsilon}^{zxy} = A^x B_x = -\sin 2z \sin 2t\,, \qquad \underset{c}{\Upsilon}^{yzx} = A^y B_y = \sin 2z \sin 2t\,. \tag{25}$$

4. Магнитная часть спина

Канонический тензор спина (8), (11) очевидно несимметричен в смысле электро-магнитной симметрии. Он представляет только электрическое поле, $\mathbf{E}$, $\mathbf{A} = -\int \mathbf{E} dt$. Это вызывает неудовлетворительный результат (24) для Υ^{xy0}. Поэтому имеет смысл симметрировать тензор спина добавлением магнитного члена

$$\underset{c.m}{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu} = -\Pi_*^{[\lambda} F_*^{\mu]\nu}\,. \tag{26}$$

Дело в том, что электродинамика асимметрична. Магнитная индукция замкнута, а напряженность магнитного поля имеет источник в виде электрического тока:

$$\partial_{[\lambda} F_{\mu\nu]} = 0, \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = -j^\mu\,. \tag{27}$$

Поэтому магнитный векторный потенциал A_ν существует, а, вообще говоря, электрический векторный потенциал не существует. Однако, если токи отсутствуют, симметрия восстанавливается, и появляется возможность ввести электрический поливекторный потенциал $\Pi^{\lambda\mu\nu}$. Он удовлетворяет уравнению

$$\partial_\nu \Pi^{\lambda\mu\nu} = F^{\lambda\mu}\,. \tag{28}$$

Ковариантный псевдовектор, дуальный к поливекторному потенциалу,

$$\Pi_\kappa^* = e_{\kappa\lambda\mu\nu} \Pi^{\lambda\mu\nu}\,, \tag{29}$$

является аналогом магнитного векторного потенциала A_κ. Мы называем его электрическим векторным потенциалом. Именно он вставлен в формулу (26). А псевдотензор $F_*^{\mu\nu}$ дуален к электромагнитному тензору $F^{\mu\nu}$,

$$F_*^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} e_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\gamma\delta} / 2\,. \tag{30}$$

Смысл его компонент следующий

$$F_*^{0i} = B^i, \quad F_*^{ij} = -e^{ijk} E_k\,. \tag{31}$$

Например,

$$F_*^{0x} = B^x, \quad F_*^{yz} = -E_x. \tag{32}$$

Итак, согласно (26), опуская звездочку у Π, мы имеем,

$$\underset{c.m}{\Upsilon}^{ij0} = -\Pi^{[i} F_*^{j]0} = (\Pi^i B^j - \Pi^j B^i)/2 = (\Pi \times \mathbf{B})/2. \tag{33}$$

$$\underset{c.m}{\Upsilon}^{ijk} = -\Pi^{[i} F_*^{j]k}. \tag{34}$$

Например,

$$\underset{c.m}{\Upsilon}^{xyz} = -\Pi^{[x} F_*^{y]z} = (\Pi^x E_x + \Pi^y E_y)/2, \qquad \underset{c.m}{\Upsilon}^{zxy} = -\Pi^{[z} F_*^{x]y} = (\Pi^z E_z + \Pi^x E_x)/2. \tag{35}$$

Соотношение между Π и F может быть легко получено в векторной форме следующим образом. Если $\mathrm{div}\mathbf{D} = 0$, то $\mathbf{D} = \mathrm{rot}\,\Pi$. Если также $\partial\mathbf{D}/\partial t = \mathrm{rot}\mathbf{H}$, то $\mathbf{H} = \partial\Pi/\partial t$, но мы полагает $\mathbf{H} = \mathbf{B}$, поэтому

$$\partial\Pi/\partial t = \mathbf{B}. \tag{36}$$

5. Полный тензор спина

Мы рассматриваем здесь полный тензор спина, соответствующий каноническому тензору спина (8):

$$\underset{tot}{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu} = \underset{c}{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu}/2 + \underset{c.m}{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu} = -A^{[\lambda} F^{\mu]\nu} - \Pi_*^{[\lambda} F_*^{\mu]\nu}. \tag{37}$$

Для плоской волны (16) мы получаем тот же верный результат (17),

$$\Pi^x = \cos(z-t), \quad \Pi^y = -\sin(z-t), \quad \underset{tot}{\Upsilon}^{xy0} = 1, \quad \underset{tot}{\Upsilon}^{xyz} = 1 \tag{38}$$

Однако вычисление других компонент тензора спина дает по-прежнему неверный результат

$$\underset{tot}{\Upsilon}^{zxy} = (A^x B_x + \Pi^x E_x)/2 = 1/2, \qquad \underset{tot}{\Upsilon}^{yzx} = (A^y B_y + \Pi^y E_y)/2 = 1/2, \tag{39}$$

правда, несколько улучшенный. Магнитная часть тензора спина выровнила слоистость (18) потока спина перпендикулярного направлению распространения волны.

Для стоячей волны (21) - (23) мы имеем, вместо (24), (25),

$$\Pi^x = 2\cos z\cos t, \quad \Pi^y = 2\cos z\sin t. \quad \underset{tot}{\Upsilon}^{xy0} = 2, \quad \underset{tot}{\Upsilon}^{xyz} = 0. \quad \underset{tot}{\Upsilon}^{zxy} = 0 \quad \underset{tot}{\Upsilon}^{yzx} = 0 \tag{40}$$

Это – верный результат, поскольку плотность энергии равна $(E^2 + B^2)/2 = 2$, и отношение спина к энергии, $S/U = 1/\omega$, выполняется.

Таким образом, магнитная часть спина выравнивает слоистость и ликвидирует поперечные потоки спина для стоячих волн. Это свидетельствует о полезности рассмотрения тензора спина, состоящего из двух частей, электрической и магнитной. Тем не менее, поперечные потоки спина в случае плоских волн доказывают, что канонический тензор спина неадекватен даже с магнитным членом.

6. Истинный тензор спина

Новый тензор спина был предложен и использован в серии работ [6 - 17]. Этот тензор также является суммой электрической и магнитной частей,

$$\Upsilon^{\lambda\mu\nu} = \underset{e}{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu} + \underset{m}{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu} = A^{[\lambda}\partial^{|\nu|}A^{\mu]} + \Pi^{[\lambda}\partial^{|\nu|}\Pi^{\mu]}. \tag{41}$$

При расчете нужно учитывать, что $\partial^z = g^{zz}\partial_z = -\partial_z$. Для плоской волны использование (17) и (38) дает

$$\Upsilon^{xy0} = 1, \quad \Upsilon^{xyz} = 1, \quad \Upsilon^{zxy} = \Upsilon^{yzx} = 0\,. \tag{42}$$

Для стоячей волны использование (23), (40) дает

$$\Upsilon^{xy0} = 2, \quad \Upsilon^{xyz} = 0, \quad \Upsilon^{zxy} = \Upsilon^{yzx} = 0\,, \tag{43}$$

что и требовалось продемонстрировать

7. Замечания

Выражение (41) было направлено в журнал «ЖЭТФ» 27 января 1999 года. Статья была отклонена, потому что ее публикация была признана нецелесообразной. С тех пор выражение для спина (41) было отклонено свыше 350 раз следующими научными журналами: Письма в ЖЭТФ, ЖЭТФ, ТМФ, УФН, Изв. вузов, AJP, EJP, EPL, PRA, PRD, PRE, APP, FP, PLA, JPA, JPB, JMP, JOPA, JMO, CJP, OL, NJP, arXiv. Исключением в мире научных журналов явился журнал «Измерительная техника», свободный от номенклатурных теоретиков [8, 9].

Я глубоко благодарен профессору Роберту Ромеру за публикацию моего вопроса [20], а также профессору Тимо Ниеминену за плодотворную дискуссию в интернете (Newsgroups: sci.physics.electromag).

Список литературы

1 Jackson J. D. Classical Electrodynamics. - Wiley, 1999.- 808 p.

2. Ohanian H. C. What is spin? // Amer. J. Phys. – 1986, **54.**- p.500-5

3. Friese M. E. J., Nieminen T. A., Heckenberg N. R. & Rubinsztein-Dunlop H. Optical alignment and spinning of laser-trappedmicroscopic particles. // Nature. – 1998, **394.-** p.348–350

4. Soper D. E. Classical Field Theory. - N.Y.: John Wiley, 1976.- 423 p.

5. Rohrlich F. Classical Charged Particles. Mass.: Addison-Wesley, 1965.- 512 p.

6. Храпко Р.И. Спин классической электродинамики. //Вестник Российского университета дружбы народов, Серия Физика. – 2002, № 10(1).- с.40-48
7. R.I.Khrapko. The Beth's experiment is under review //mp_arc@mail.ma.utexas.edu REQUEST: send papers NUMBER: 03-307 (2003)
8. Khrapko R.I. Experimental verification of Maxwellian electrodynamics. // Measurement Techniques – 2003, **46**, No. 4.- p.317.
9. Храпко Р.И. Экспериментальная проверка электродинамики Максвелла.// Измерительная техника. – 2003, № 4.- с.3-5.
10. Храпко Р.И. Истинные тензоры энергии-импульса и спина среды однозначны.// Теоретические и экспериментальные проблемы общей теории относительности и гравитации. X Российская гравитационная конференция, Владимир. 1999: Тез. докл. - Москва, 1999. - с.47.
11. R.I. Khrapko. True energy-momentum tensors are unique. Electrodynamics spin tensor is not zero. - http://arXiv.org/abs/physics/0102084 (10.08.2001)
12. R.I. Khrapko. Violation of the gauge equivalence. - http://arXiv.org/abs/physics/0105031 (11.12.2001)
13. Храпко Р.И. Локализация энергии-импульса и спин.// Вестник Российского университета дружбы народов, *Серия* Физика. – 2002, № 10(1).- с.35-39.
14. R.I.Khrapko. Radiation of spin by a rotator. - mp_arc@mail.ma.utexas.edu REQUEST: send papers NUMBER: 03-315
15. R.I.Khrapko. A circularly polarized beam carries the double angular momentum. - mp_arc@mail.ma.utexas.edu REQUEST: send papers NUMBER: 03-311
16. Khrapko R.I. Classical spin in space with and without torsion. // Gravitation & Cosmology – 2004, **10**, No. 1-2.- p.91.
17. R.I. Khrapko. Transfer of spin to a mirror2. – http://www.sciprint.org (17.09.05)
18. Khrapko R.I. Does plane wave not carry a spin? //Amer. J. of Physics. – 2001, **69.-** p.405.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Храпко Радий Игоревич, доцент кафедры физики Московского авиационного института (государственного технического университета), к.ф.-м.н. E-mail: *khrapko_ri@hotmail.com*

121433, Москва, Б. Филевская, 43 – 92, т. 1446312