

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи



ФЕДОТЕНКОВ ГРИГОРИЙ ВАЛЕРЬЕВИЧ

**НЕСТАЦИОНАРНОЕ КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УПРУГИХ
ОБОЛОЧЕК И СПЛОШНЫХ ТЕЛ**

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант д.ф.-м.н., профессор
Тарлаковский Д.В.

Москва – 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА I. ПОСТАНОВКА НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ ДЛЯ УПРУГИХ ТЕЛ И ОБОЛОЧЕК	14
1.1. Современное состояние исследований	14
1.2. Уравнения движения упругих тел	34
1.3. Уравнения движения тонких упругих цилиндрических и сферических оболочек	42
1.4. Условия контакта и определение области взаимодействия деформируемых тел	48
1.5. Разрешающие интегральные уравнения нестационарных контактных задач с подвижными границами	53
1.6. Нестационарные поверхностные функции влияния для упругого полупространства	62
ГЛАВА II. ФУНКЦИИ ВЛИЯНИЯ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ	66
2.1. Двумерная функция влияния (решение в тригонометрических рядах) ...	66
2.2. Двумерная функция влияния (разложение в ряды на переменном интервале)	80
2.3. Плоская задача о динамике цилиндрической оболочки	86
2.4. Пространственная нестационарная функция влияния для цилиндрической оболочки	94
2.5. Пространственная задача о динамике цилиндрической оболочки	101
2.6. Сравнение методов обращения интегральных преобразований	105
2.7. Функция влияния для цилиндрической оболочки с упругим наполнителем	111
2.8. Нестационарное движение цилиндрической оболочки с упругим наполнителем	120
ГЛАВА III. ФУНКЦИИ ВЛИЯНИЯ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ	124
3.1. Расщепление уравнений движения сферической оболочки	124
3.2. Представление решения в виде рядов	127
3.3. Пространственные нестационарные функции влияния для сферической оболочки	129
3.4. Пространственная динамика сферической оболочки	133
3.5. Осесимметричная функция влияния для сферической оболочки	137
3.6. Функция влияния для сферической оболочки с упругим наполнителем	148

3.7. Нестационарное движение сферической оболочки с упругим наполнителем	153
ГЛАВА IV. ДВУМЕРНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОЛОЧЕК	159
4.1. Взаимодействие цилиндрической оболочки и упругой полуплоскости (сверхзвуковой этап).....	159
4.2. Взаимодействие цилиндрической оболочки и упругой полуплоскости (произвольный временной интервал).....	172
4.3. Учёт многосвязности области контакта.....	186
4.4. Взаимодействие сферической оболочки и упругого полупространства (сверхзвуковой этап).....	192
4.5. Взаимодействие сферической оболочки и упругого полупространства (произвольный временной интервал).....	207
4.6. Взаимодействие двух оболочек	225
ГЛАВА V. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА И ОБОЛОЧКИ	238
5.1. Постановка задачи и система разрешающих уравнений	238
5.2. Алгоритм решения	242
5.3. Примеры расчётов.....	248
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	262
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	264

ВВЕДЕНИЕ

Современная техника предъявляет всё более высокие требования к прочностным свойствам элементов конструкций, деталей машин и механизмов, инженерных сооружений и объектов строительства. В авиационной, космической, автомобильной, кораблестроительной и других отраслях промышленности ставятся требования к уменьшению массы и размеров элементов конструкций при сохранении достаточно высокой прочности и жёсткости. Это приводит к потребности создания новых методов расчёта, наиболее полно и адекватно описывающих протекание реальных механических процессов.

Быстрые темпы развития современных видов транспорта, аэрокосмической, судостроительной, автомобильной и авиационной отраслей промышленности диктуют всё более высокие требования к точности расчетов напряженно-деформированного состояния конструкции при различного рода нестационарных воздействиях в условиях контактного взаимодействия. Эта область в настоящее время относится к числу наименее исследованных. Решение подобного рода задач осложняется необходимостью учета начальных условий, смешанным и нелинейным характером граничных условий, а также, в ряде случаев, неизвестностью заранее области контакта, которая зависит от времени. Повышенный интерес к этим вопросам объясняется с одной стороны достаточно широким крутом их практического приложения, а с другой – открытостью многих вопросов в теории контактных задач.

В настоящее время достаточное большое количество работ посвящено решению статических и стационарных контактных задач. Постановки и методы решения подобных задач приведены, например, в монографиях Л.А. Галина [68], К. Джонсона [105]. Однако во многих случаях необходимо учитывать зависимость процессов взаимодействия упругих тел от времени. Поэтому разработка методов решения нестационарных динамических контактных задач является актуальной.

Развитие средств вычислительной техники и специализированных программных комплексов компьютерной алгебры стимулирует создание новых методов решения задач нестационарного контактного взаимодействия. Основы теории, постановки задач и подходы к решению задач этого типа приведены, например, в монографиях А.Г. Горшкова и Д.В. Тарлаковского [80], В.Б. Поручикова [168], В.Н. Сеймова [180].

Удобным инструментом для решения нестационарных и, в частности, контактных задач является метод функций влияния, основанный на принципе суперпозиции. Суть этого метода состоит в предварительном построении решений (функций влияния) специальных нестационарных задач для упругих тел. Эти функции представляют собой перемещения и напряжения как решения нестационарных задач о воздействии на рассматриваемое упругое тело точечных во времени и пространстве силовых и кинематических воздействий. Математически такие воздействия представляются с помощью дельта-функций Дирака. Важность этих решений заключена в том, что они несут всю информацию о поведении исследуемого объекта в ответ на внешние воздействия. Так что построение функции влияния открывает возможность решения всех задач исследуемого класса. Их решения строятся с помощью интегральных операторов, в которых функции влияния используются в качестве ядер. Этот подход продемонстрирован в монографиях А.Г. Горшкова, А.Л. Медведского, Л.Н. Рабинского, Д.В. Тарлаковского [76], Л.И. Слепяна [183], Л.И. Слепяна, Ю.С. Яковлева [184], В.А. Вестяка, А.Р. Гачкевича, Р.С. Мусия, Д.В. Тарлаковского, Г.В. Федотенкова [53].

В настоящее время активно развиваются различные численные методы и подходы к решению контактных задач. Как правило, их основа базируется на двух приближенных методах решения задач математической физики – методе конечного элемента (МКЭ) и методе конечных разностей (МКР). При всей универсальности этих методов, они обладают существенным недостатком – необходимостью разбиения всей области, занимаемой сплошной средой, на подобласти (конечно-элементную или конечно-

разностную сетки). Кроме того, в случае нестационарных контактных задач, существенную сложность при этом вносит необходимость разработки специальных алгоритмов, моделирующих условия контакта. Эти алгоритмы зачастую не в состоянии точно описать механику нестационарного контактного взаимодействия и требуют тщательной параметрической настройки в зависимости от типа контакта, параметров контактирующих тел и процесса контактного взаимодействия. Для решения нестационарных задач, как правило, при этом используются либо прямые методы интегрирования по времени, либо метод разложения по собственным формам колебаний упругой конструкции.

Для решения линейных задач механики сплошных сред применяется альтернативный метод граничного элемента (МГЭ), являющийся приближенным способом решения соответствующих граничных интегральных уравнений (ГИУ) [113-117].

Дальнейшее развитие теории гранично-временных интегральных уравнений приводит к использованию в качестве ядер интегральных операторов функций влияния соответствующей нестационарной задачи, удовлетворяющей заданным краевым условиям (поверхностные функции влияния. Поверхностные функции влияния могут быть найдены в замкнутом виде только для тел канонической формы, граница которых является координатной поверхностью системы координат, используемой в математической постановке задачи. Для построения функций влияния используется теория обобщённых функций, интегральные преобразования Лапласа и Фурье, разложения в ряды по собственным функциям.

Объектом исследования в диссертации являются процессы нестационарного контактного взаимодействия оболочек и упругих тел.

Актуальность работы. Тема диссертационной работы актуальна в фундаментальном отношении, поскольку, как следует из приведенного в первой главе литературного обзора, нестационарные задачи для тонких оболочек и упругих тел в настоящее время мало исследованы. Также

актуальным направлением, развитым в диссертации, является разработка и создание новых подходов к численно-аналитическим методам решения задач о нестационарном контактном взаимодействии упругих тел. В практическом плане актуальность исследований определяется потребностями различных отраслей промышленности в создании методов расчета контактных напряжений в процессе нестационарного взаимодействия оболочек и упругих тел.

В настоящей диссертационной работе дана математическая постановка, разработаны и реализованы методы решения задач о нестационарном контактном взаимодействии тонких упругих цилиндрических и сферических оболочек с упругим полупространством и другими оболочками. Построены решения задач о нестационарных функциях влияния для цилиндрических и сферических оболочек с учётом и без учёта упругого заполнителя в плоской, осесимметричной и пространственной постановках соответствующих задач. Разработаны и реализованы методы, подходы и оригинальные алгоритмы решения нестационарных контактных задач для тонких оболочек и упругих тел.

Целями работы является разработка математических постановок нестационарных контактных задач для тонких оболочек и упругих тел, построение методов и подходов к решению, создание и реализация эффективных численно-аналитических алгоритмов решения новых нестационарных контактных задач, получение и анализ решений этих задач в плоской, осесимметричной и пространственной постановках.

Научную новизну работы составляют следующие результаты.

1. Математические постановки нестационарных контактных задач для тонких цилиндрических и сферических оболочек и упругих тел.
2. Нестационарные функции влияния для цилиндрических и сферических оболочек в плоской, осесимметричной и пространственной постановках.

3. Нестационарные функции влияния для цилиндрических и сферических оболочек с упругим наполнителем в плоской и осесимметричной постановках.

4. Развитие и обобщение метода решения задач о нестационарном контактном взаимодействии деформируемых тел, основанного на принципе суперпозиции и методе функций влияния.

5. Решение на базе разработанного метода новых нестационарных контактных задач с подвижными границами для тонких оболочек и упругих тел.

Практическая значимость. Полученные в работе результаты и разработанные алгоритмы могут быть использованы в различных отраслях промышленности с целью создания методик расчета напряженно-деформированного состояния упругих тел и оболочек в процессе нестационарного контактного взаимодействия.

Методы исследования. В основу работы положен аппарат поверхностных функций влияния для нестационарных операторов, описывающих динамику контактирующих тел в рамках линейных моделей. Указанный подход позволяет получить интегральные соотношения на граничных поверхностях и тем самым снизить размерность задачи. Для решения полученных систем разрешающих функциональных уравнений разработаны и реализованы оригинальные численно-аналитические алгоритмы, основанные на методе механических квадратур. Для вычисления сингулярных интегралов разработаны специальные квадратурные формулы, учитывающие сильные особенности ядер соответствующих интегральных операторов. Созданы итерационные процедуры, позволяющие учесть эффекты отслоения граничных поверхностей взаимодействующих тел и выход перемещений за границы области контакта, а также уточнить положения границ области контакта с учётом деформируемости граничных поверхностей.

Достоверность полученных результатов обеспечивается математически строгой и физически корректной постановкой задач, применением

апробированных математических методов решения нестационарных задач механики деформируемого твёрдого тела, анализом сходимости предложенных алгоритмов решения. Полученные результаты в частных случаях полностью совпадают с известными результатами других авторов и не противоречат имеющимся физическим представлениям.

Апробация работы. Результаты научных исследований, составляющие предмет диссертации, докладывались на:

– IV-XXVI ежегодных Международных симпозиумах «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред имени А.Г. Горшкова» (г. Москва, 1998-2020);

– VIII- XII Всероссийских съездах по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (г. Пермь 2001, г. Нижний Новгород 2006, 2011; г. Казань 2015, г. Уфа 2019 гг.);

– III-VII Международных научных школах-семинарах «Импульсные процессы в механике сплошных сред» (г. Николаев, 1999, 2001, 2003, 2005, 2007);

– XX Международной конференции «Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов» (г. Санкт-Петербург, 2003);

– III Всероссийской конференции по теории упругости с международным участием (г. Ростов-на-Дону, 2004);

– III Международной научно-практической конференции «Проблемы безопасности на транспорте» (г. Гомель, 2005);

– Международной конференции «Интегральные уравнения и их применения» (г. Одесса, 2005);

– II Всероссийской научной конференции по волновой динамике машин и конструкций (г. Н. Новгород, 2007 г.);

– Международной конференции «Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения» (г. Санкт-Петербург, 2008);

- II международной научной конференции «Современные проблемы механики и математики» (г. Львов, 2008);
- Международной конференции, посвященной 70-летию ректора МГУ В.А. Садовниченко «Современные проблемы математики, механики и их приложений» (г. Москва, 2009);
- Международной научной конференции «Импульсные процессы в механике сплошных сред» (г. Николаев, 2009);
- Второй международной конференции «Проблемы нелинейной динамики деформируемого твердого тела» (г. Казань, 2009);
- Международной научной конференции «Теория оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур» (г. Минск, 2013);
- III Международной научно-практической конференции «Проблемы и перспективы развития транспортных систем и строительного комплекса» (г. Гомель, 2013);
- VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твердого тела (г. Ростов-на-Дону, 2013);
- IX Международной научной конференции «Математические проблемы механики неоднородных структур» (г. Львов, 2014);
- VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (г. Чебоксары, 2014);
- Ежегодных научных конференциях «Ломоносовские чтения» (г. Москва, 2014-2020);
- I-V Международных научных семинарах «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» (г. Москва, 2014-2016);
- X Всероссийской школе-семинаре «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (г. Ростов-на-Дону, 2015);
- Научных конференциях «Проблемы прочности, динамики и ресурса» (г. Нижний Новгород, 2017-2019);

– XV International conference «Dynamical system modeling and stability investigation» (г. Киев, 2011);

– 23rd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (Beijing, China, 2012);

– International conference "Shell structures: theory and applications" (Gdansk, Poland, 2017);

– 24rd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (Montreal, Canada, 2016);

– First International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics (Cyprus, Greece, 2018);

– Second International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics (Corfu, Greece, 2019).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 114 научных работ, в том числе 40 научных статей в изданиях, рекомендованных ВАК Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, а также получено 2 Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, включающего 284 наименования. Общий объем диссертации составляет 300 страниц, включая 117 рисунков и 3 таблицы.

В первой главе приведён аналитический обзор научных работ, связанных с темой диссертационного исследования, приведены математические постановки нестационарных контактных задач для оболочек и упругих тел, включающие уравнения движения, кинематические и физические соотношения, начальные условия, граничные условия и условия контакта. Выделены вопросы, касающиеся определения области контакта в нестационарных контактных задачах с подвижными границами. Указан способ сведения математических постановок нестационарных контактных

задач к системам разрешающих уравнений. Приведены функции влияния для упругого полупространства.

Вторая и третья главы посвящены нестационарным функциям влияния для цилиндрических и сферических оболочек. Приведены постановки нестационарных задач о функциях влияния для цилиндрических и сферических оболочек в плоской, осесимметричной и пространственной постановках задач. Дано их решение и проведено исследование функций влияния. Найдены функции влияния для цилиндрических и сферических оболочек без учёта и с учётом наличия упругого заполнителя в плоской и осесимметричной постановке. Построены пространственные функции влияния для цилиндрических и сферических оболочек. Решены плоские, осесимметричные и пространственные нестационарные задачи о воздействии давления на оболочки с учётом и без учета упругого заполнителя.

В четвёртой главе рассмотрены плоские и осесимметричные нестационарные контактные задачи с подвижными границами для цилиндрической и сферической оболочки и упругим полупространством, а также для двух цилиндрических или сферических оболочек с учётом наличия в них упругого заполнителя.

Для решения нестационарных кантатных задач для оболочек и упругого полупространства разработаны два метода. Первый из них справедлив только для сверхзвукового этапа взаимодействия. На этом этапе скорость расширения границы области контакта больше либо равна максимальной скорости распространения волн в оболочке и в полупространстве. При этом перемещения не выходят за границу зоны контакта. Для этого этапа задача сведена к бесконечной системе интегро-дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разложения искомым функций в ряды по собственным функциям цилиндрических и сферических оболочек (тригонометрическим функциям или полиномам Лежандра и Гегенбауэра). При решении задачи используется интегральная формула связи контактного давления с нормальными перемещениями.

Второй метод разработан для произвольного этапа нестационарного контактного взаимодействия. Здесь разрешающей является система интегральных уравнений относительно контактного давления, которая решается численно с использованием специальных квадратурных формул, позволяющих учитывать сингулярные особенности ядер интегральных операторов. Построена разностная схема для разрешающей системы уравнений и численный алгоритм решения. При этом используется специальная итерационная процедура, позволяющая уточнить положения границ области контакта с учётом деформируемости граничных поверхностей ударника и основания, а также учесть возможный частичный отрыв граничных поверхностей и выход перемещений за границы области контакта.

Приведены постановки задач о нестационарном контактом взаимодействии двух цилиндрических или сферических оболочек с учётом наличия в них упругого заполнителя, получены системы разрешающих уравнений. Построены и реализованы численно-аналитические алгоритмы решения. Проведён анализ влияния упругого заполнителя на процесс нестационарного контактного взаимодействия.

Пятая глава посвящена решению пространственной контактной задачи с подвижными границами для абсолютно твердого тела и цилиндрической оболочки. Приведена постановка задачи и получена система разрешающих уравнений. Разработан метод решения, справедливый для произвольного этапа нестационарного контактного взаимодействия. Предложен и реализован численно-аналитический алгоритм решения. Приведены примеры расчётов.

ГЛАВА I. ПОСТАНОВКА НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ ДЛЯ УПРУГИХ ТЕЛ И ОБОЛОЧЕК

1.1. Современное состояние исследований

Контактные задачи, очевидно, возникали с самого начала развития цивилизации, однако строгое математическое обоснование механика контактных взаимодействий впервые получила в работах Г. Герца (1881 г). Дальнейшее развитие теории контактных задач заложено в работах В.М. Александрова, В.А. Бабешко, Н.М. Беляева, И.И. Воровича, Л.А. Галина, А.Г. Горшкова, И.Г. Горячевой, Э.И. Григолюка, В.С. Гудрамовича, А.Н. Динника, В.В. Калинин, Н.А. Кильчевского, В.Д. Кубенко, А.И. Лурье, Н.И. Мухелешвили, В.И. Моссаковского, Б.Л. Пелеха, Г.Я. Попова, В.С. Саркисяна, В.Н. Сеймова, Д.В. Тарлаковского, В.М. Толкачева, И.Я. Штаермана, Ф. Эссенберга и других отечественных и зарубежных ученых.

Исчерпывающий обзор состояния развития теории контактных задач до 2001 г. дан в обзорном издании [142] коллектива авторов, среди которых крупнейшие отечественные ученые в области механики контактных взаимодействий. К сожалению, после издания этой книги и до настоящего времени подобного всеобъемлющего обзорного труда по контактным задачам механики деформируемого твердого тела из печати не выходило.

Отметим, что при построении разрешающих уравнений нестационарных контактных задач существенную роль играют так называемые *функции влияния*. Они являются фундаментальными решениями нестационарных задач для рассматриваемых деформируемых тел при воздействии на них сосредоточенных по координатам и времени нагрузок. Функции влияния подразделяются на поверхностные (граничные) и объёмные. Эта классификация соответствует типу приложенной к упругому телу нагрузки: поверхностная (или граничная) нагрузка соответствует граничным

функциям влияния, а объёмная (или массовая) – объёмным. Соответственно в случае задач об объёмных функциях влияния сосредоточенные нагрузки входят в правые части уравнений движения, а в случае задач о поверхностных (граничных) функциях влияния – в правые части граничных условий. Фактически, функции влияния содержат в себе всю информацию о процессе нестационарного деформирования тела в ответ на воздействие произвольной нагрузки соответствующего типа (объёмной или поверхностной). В том смысле, что, имея функцию влияния, отвечающую сосредоточенной нагрузке, существует возможность построения решения при воздействии произвольной нагрузки соответствующего типа в квадратурах. Этот подход к решению называется принципом суперпозиции. Таким образом, принцип суперпозиции позволяет сразу построить решение любой начально-краевой задачи с граничными условиями несмешанного типа.

Сложнее обстоит дело в случае контактных задач. Дело в том, что в контактных задачах граничные условия имеют смешанный тип и в этом случае построить решение задачи сразу в квадратурах не удаётся. Однако здесь принцип суперпозиции предоставляет удобный способ сведения общей постановки задачи к разрешающему интегральному уравнению или к системе разрешающих уравнений. Решения задач о функциях влияния для упругого пространства и полупространства можно найти в работах [76], [80], [182, 183], [184], [121], [272].

В работе [201] решена плоская задачи типа Лэмба для моментного упругого полупространства и построена соответствующая функция влияния, которая затем использована для решения нестационарных и контактных задач в [200] и [248].

Статьи [161], [206] и [238] посвящены построению нестационарных поверхностных функций влияния для упруго-пористого полупространства. Эти функции затем были использованы в работах [167] и [273] для решения нестационарных задач о воздействии распределённых нагрузок на границу упруго-пористой полуплоскости.

В работах [84, 85, 147] найдены функции влияния для цилиндрических и сферических оболочек в плоской и осесимметричной постановках. В [66] функция влияния для цилиндрической оболочки использована при решении нестационарной задачи о воздействии давления на её боковую поверхность. Аналогичные задачи в случае пространственной постановки решены в работах [126], [213] для сферической оболочки, и в [208, 249, 254] для цилиндрической оболочки. В этих же работах рассмотрены пространственные нестационарные задачи о воздействии внешнего давления на цилиндрические и сферические оболочки. В работах [55] и [181] построена нестационарная функция влияния для сферической оболочки с упругим наполнителем в случае осесимметричной постановки задачи, а также решена нестационарная задача о воздействии давления на оболочку с упругим наполнителем. Подобный вопрос для цилиндрической оболочки с упругим наполнителем в плоской постановке исследован в [123], [179] и [214]. В работе [230] с использованием функций влияния исследованы задачи о распространении нестационарных волн в оболочках с упругим и акустическим наполнителями. Задачи о взаимодействии волн с тонкими упругими сферическими оболочками, заполненными упругой средой рассматривались в [81] с помощью представления решения в виде суперпозиции обобщённых сферических волн. В работе [266] функция влияния использована при решении нестационарной контактной задачи для абсолютно твёрдого тела и мембраны. Функции влияния для мембраны и упругого полупространства применяются в [266] для решения нестационарной задачи о воздействии поверхностного давления на полупространство с покрытием в виде мембраны.

Использование функций влияния в исследовании различных задач механики анизотропных тел и композитных оболочек в сочетании с оригинальными способами численного обращения интегрального преобразования Лапласа на основе методов граничных элементов продемонстрировано в работах [114-117], [251-253].

Функции влияния для термомехано-диффузионных тел и элементов конструкций найдены и использованы для решения соответствующих начально-краевых задач в работах [104, 110, 111, 241, 245, 279-281].

Нестационарные задачи для электромагнитоупругих тел с применением метода функций влияния исследованы в работах [60-62, 276]. Алгоритм построения оригиналов функций влияния для электромагнитоупругих тел детально описан в статье [63].

Фундаментальные вопросы, связанные с методами обращения интегрального преобразования Лапласа применительно к задачам механики деформируемого твёрдого тела поставлены и решены в [164], [172], [255].

Функции влияния используются также при решении задач о подвижных нагрузках. Например, в работах [118], [165] функция влияния для полупространства использована при решении плоской нестационарной задачи о движении сосредоточенной нагрузки по границе упругой полуплоскости.

В работах [130], [131] с помощью функций влияния исследованы задачи о распространении нестационарных волн в упругом слое.

Далее ограничимся обзором работ, касающихся динамических задач для оболочек и упругих тел, в том числе направленных на исследование их динамического контактного взаимодействия.

Стационарные задачи.

Разработанная в настоящее время теория стационарных динамических смешанных, в том числе контактных, задач в значительной мере опирается на методы теории интегральных уравнений. Но присутствие осциллирующих составляющих ядер интегральных уравнений наряду с сохранением свойств сингулярности или других локальных особенностей затрудняет прямое применение к этим интегральным уравнениям методов, позволяющих успешно решать интегральные уравнения статических задач. Одним из подходов, позволяющих преодолеть затруднения, связанные с осцилляцией ядер, является метод факторизации, впервые использованный в работе Н.

Винера и Е. Хопфа, подробно изложенный в работах Б. Нобла [162, 163] и развитый в работах В.А. Бабешко, И.В. Ананьева и И.И. Воровича [12, 20, 21, 22, 67]. Там же сформулированы условия однозначной разрешимости интегральных уравнений и их корректного вывода с использованием принципа предельного поглощения и принципа предельной амплитуды для упругих тел. Особенность метода факторизации состоит в переходе от определения самих искомых функций, определяющих напряжения или перемещения в областях контакта упругих тел или областях, занятых дефектами, вне штампа или дефекта, которые, как правило, в динамических задачах оказываются осциллирующими, к определению их Фурье-преобразований.

В работах [22] и [25-28] реализован способ решения динамических задач, идея которого состоит в выделении осциллирующей составляющей решения, в то время как в качестве неизвестной остается неосциллирующая функция. Суть этого метода, названного методом фиктивного поглощения, состоит в таком преобразовании интегрального уравнения, чтобы исключить в представлении ядра осциллирующие члены, после чего получается интегральное уравнение для среды с поглощением. Преимущества такого подхода подробно описаны в [20]. Позднее этот метод получил дальнейшее развитие в применении к задачам электроупругости. Подобный подход позволяет использовать богатый арсенал методов решения смешанных статических задач для динамических процессов, вместе с тем, являясь полуаналитическим, он устраняет недостатки прямых численных методов, позволяя вскрывать все особенности решений смешанных задач, а затем учитывать их в численных процедурах. Особенности в угловых точках пространственных штампов в контактных задачах исследовались в работе [24], а также в [70].

Стационарные задачи о движении твёрдых тел по поверхности деформируемого полупространства.

Динамические контактные задачи о движении гладких штампов по вязкоупругому полупространству исследовались в [3], [94]. В [102] рассмотрен процесс скольжения при наличии трения.

В [96, 97, 100, 101, 103] рассмотрены контактные задачи о скольжении штампов, ограниченных гладкими и волнистыми поверхностями по вязкоупругому основанию с учетом адгезионного притяжения. Предложен метод, позволяющий рассчитывать конфигурацию областей контакта и областей адгезионного взаимодействия, распределение давлений на контактной поверхности и деформационную составляющую силы трения при различных величинах параметров вязкости, адгезии, скорости и микрогеометрии поверхности. Исследовано влияние указанных параметров на слияние пятен контакта и переход от дискретного контакта к насыщенному при увеличении внешней нагрузки.

Квазистационарная динамика упругого цилиндра на упругом основании с учетом трения всесторонне исследована в работах [98, 99, 112, 282]. В этих работах впервые проведен анализ динамических задач о плоскопараллельном качении с проскальзыванием упругого цилиндра по упругому основанию из того же материала. Распределение нормальных и касательных напряжений в области контактного взаимодействия, состоящей из участка относительного проскальзывания и участка сцепления, соответствует решению квазистатической задачи теории упругости. Проведено сравнение полученного решения с решением задачи о скольжении абсолютно твердого цилиндра по абсолютно твердой плоскости с сухим трением Амонтона-Кулона.

Контакт упругих тел в условиях трения качения при наличии промежуточного слоя исследован в работах [95, 144]. В работе [122] рассмотрена задача о движении композитной сферической оболочки по твердой поверхности с учётом комбинированного сухого трения.

Постановки и методы решения динамических контактных задач для предварительно напряженных тел даны в монографии [119]. Решениям

соответствующих динамических задач посвящены работы [13], [23], [39, 40, 120].

В работах [187-193] разработаны *механические модели трения и изнашивания применительно к решению динамических контактных задач*. Модели позволяют прогнозировать снижение эффективных коэффициентов трения и износа в зависимости от параметров процесса контактного взаимодействия. Предложенные модели и подходы к решению могут быть использованы для корректной интерпретации результатов трибологических экспериментов.

Приближенное квазистатическое решение задачи ударного взаимодействия конического ударника с цилиндрической оболочкой получено в работе [243].

Нестационарные задачи.

Нестационарные задачи для трёхслойных оболочек. В работах [129, 133, 134] рассмотрены свободные и вынужденные колебания трехслойной цилиндрической оболочки в упругой безынерционной среде Винклера, возникающие под действием импульсных нагрузок. Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа – Лява. В толстом наполнителе учитываются работа поперечного сдвига и обжатие по толщине. Изменение перемещений принято линейным по поперечной координате. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Получен ряд аналитических решений и проведен их численный анализ.

В работе [195] приведена постановка и решение задачи о вынужденных колебаниях трехслойной цилиндрической оболочки, заполненной упругой средой (наполнителем). Учтены радиальные и окружные силы инерции. Реакция упругого наполнителя описывается моделью Винклера. Получен ряд аналитических решений и проведен численный анализ зависимостей перемещений при действии резонансного нагружения.

Нестационарный контакт абсолютно твёрдых ударников с деформируемыми телами. Основы нестационарного контактного взаимодействия абсолютно твёрдых твёрдых и упругого полупространства даны в монографии А.Г. Горшкова и Д.В. Тарлаковского [80].

В работах [65], [135], [171] рассмотрены плоские нестационарные контактные задачи для абсолютно твёрдых, гладких, выпуклых ударников и упругого полупространства. Разработан метод решения, основанный на факторизации функции влияния в пространстве изображений по Фурье и Лапласу путём её представления в виде произведения сомножителей, оригиналы каждого из которых представляют собой обобщённые функции, сосредоточенные на отдельных прямых. Использование этого подхода приводит к возможности построения аналитического решения.

Интегральные преобразования Лапласа и Фурье в сочетании с методом совместного обращения Каньяра использованы в работе [256] применительно к исследованию нестационарных волновых процессов в упругой полуплоскости. Такой подход позволяет получать аналитические решения некоторых плоских нестационарных задач о воздействии распределённых нагрузок на поверхность упругого полупространства, а также открывает возможность решения нестационарных контактных задач с заданной областью взаимодействия.

В статье [259] описан численно-аналитический подход к исследованию процесса ударного взаимодействия твёрдого сферического тела с поверхностью сферической полости в упругом пространстве. Ставится нестационарная смешанная начально-краевая задача с подвижными границами, вообще говоря, неизвестными заранее. С помощью методов интегральных преобразований, разложения искомым функций в ряды Фурье и метода квадратур задача сводится к решению системы интегральных уравнений совместно с уравнениями движения тела и соотношением для определения границы области контакта. аналогичная задача рассмотрена

этими же авторами в работе [261] для случая цилиндрического ударника и цилиндрической полости в упругой среде.

В работе [140] исследован сверхзвуковой этап взаимодействия абсолютно твёрдого ударника и упругого изотропного однородного полупространства в рамках плоской задачи теории упругости в условиях жесткого сцепления контактирующих поверхностей. Задача динамики ударника сведена к начальной задаче Коши для системы квазилинейных дифференциальных уравнений. В статье [141] исследован произвольный этап взаимодействия абсолютно твердого ударника и упругого изотропного однородного полупространства в рамках плоской задачи теории упругости. Нестационарная контактная задача сведена к системе функциональных уравнений (СФУ), содержащей кратное сингулярное интегральное уравнение типа Вольтерра I рода, ядром которого являются поверхностные функции влияния для упругой полуплоскости. Для решения СФУ используется метод сеток для пространственно-временной области контакта.

В работе [271] разработаны методы решения нестационарных контактных задач для абсолютно твёрдых ударников и упругого полупространства с учётом адгезионных сил.

Одной из простейших моделей учета деформируемости ударника является абсолютно *жесткая оболочка, заполненная упругой средой*. Она позволяет использовать многие результаты, полученные для абсолютно жестких тел. В работах [78, 202, 204] рассмотрены осесимметричная и плоская задачи о вертикальном ударе абсолютно жестких сферы и кругового цилиндра с упругим наполнителем по упругому полупространству. Найдено выражение для реакции наполнителя на поступательное движение ударника.

Нестационарные контактные задачи для сплошных деформируемых ударников и упругого полупространства исследовались в работе [10]. Проведено исследование процесса нестационарного контактного взаимодействия упругого ударника, ограниченного гладкой выпуклой поверхностью с упругим полупространством в плоской постановке. Решение

построено как для сверхзвукового, так и для дозвукового этапов контактного взаимодействия. Проведён учёт частичного отрыва граничных поверхностей ударника и полупространства, а также выхода перемещений за границы области взаимодействия.

Начальный этап нестационарного контактного взаимодействия затупленного твердого тела с упругим полупространством исследован в [257]. При этом используются интегральное преобразование Лапласа по временной переменной и интегральное преобразование Фурье по одной из пространственных переменных. Для тела с фиксированной областью контакта получено аналитическое выражение нормального напряжения в произвольной точке полуплоскости как функции времени. Для тела в виде тупоугольного клина получены аналитические выражения нормального напряжения и смещения в произвольной точке на оси симметрии задачи.

Процесс нестационарного вдавливания затупленного твердого тела в упругий слой исследован в работе [258]. Общая постановка задачи включает различные граничные условия в зоне контакта и на свободной поверхности слоя. Точно решается упрощенная несмешанная задача, возникающая на ранней стадии взаимодействия и позволяющая получить приближенные результаты при более поздних временах. Полученное решение сравнивается с решением для плоского случая.

В работе [139] решена задача о вертикальном ударе упругим однородным изотропным шаром по абсолютно жесткой плоской преграде. Для решения поставленной задачи использованы поверхностные функции влияния для упругого шара при малых временах взаимодействия. Исследована динамика шара на сверхзвуковом этапе внедрения. Задача сведена к нелинейному интегродифференциальному уравнению относительно глубины погружения шара, для решения которого используется метод сеток. Приведены результаты решения задачи об ударе стальным шаром по неподвижной преграде.

Процессы ударного взаимодействия твердого тела с жидким или упругим полупространством, а также между двумя упругими телами рассмотрены в [260]. Изложены основные подходы и представлены результаты численного решения соответствующих задач.

Различные аспекты процессов нестационарного контактного взаимодействия абсолютно твёрдых и деформируемых тел с упругим полупространством рассмотрены в [231, 232, 240].

Следующим этап усложнения контактной задачи является *модель тонкой оболочки*. В работах [79, 82] и [203] рассмотрена плоская задача об ударе по упругой полуплоскости тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки. Для последней использованы уравнения типа С. П. Тимошенко. С помощью функций влияния для полупространства и оболочки из условий контакта построено интегральное уравнение относительно контактного давления. Указан алгоритм его численного решения.

Эта же задача рассмотрена в [210] и [84]. В первой из этих работ исследован начальный этап взаимодействия с использованием интегральной связи контактного давления и вертикального перемещения, полученного в монографии А.Г. Горшкова и Д.В. Тарлаковского [80], а во второй с использованием указанного выше интегрального уравнения дано решение для произвольных моментов взаимодействия. Также основные аспекты этой проблемы можно найти в работах [56-59, 77, 85-90, 209, 211, 233].

Подобная задача рассмотрена в [125] и [169]. Исходные уравнения динамики системы оболочка-полупространство сводятся к бесконечной системе интегральных уравнений Вольтера второго рода. Однако в этих работах предлагаемая методика позволяет рассчитать контактное давление только в лобовой точке. Аналогичная осесимметричная задача для ударника в виде сферической оболочки решена в [45]. Следует также отметить, что предложенный авторами метод решения применим только для оболочек в рамках модели Кирхгофа. В работах [199, 202, 204, 205] дополнительно

рассмотрено влияние акустического заполнителя в круговой цилиндрической оболочке.

Нестационарное контактное взаимодействие цилиндрической оболочки с абсолютно твёрдой преградой исследовано в [227]. Аналогичная задача рассмотрена в работе [196].

В [14, 145, 148-155, 157] рассмотрен удар сферической оболочки типа Тимошенко по упругому полупространству на сверхзвуковом этапе контактного взаимодействия. Задача сводится к бесконечной системе интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов рядов по полиномам Лежандра и их производным. Произвольный этап контактного взаимодействия исследован в [17, 127, 128, 136, 146, 147, 158, 207, 269]. Получена система разрешающих уравнений, основное уравнение которой вытекает из граничных условий и интегральных представлений нормальных перемещений оболочки и полупространства, базирующихся на принципе суперпозиции. Построены и реализованы алгоритмы решения. В работе [159] исследован процесс нестационарного контактного взаимодействия упругой сферической оболочки с недеформируемыми штампами. Подобная задача рассмотрена в [247] для оболочек, изготовленных с использованием аддитивной технологии. Приведено сравнение с результатами экспериментальных исследований.

В работах [143, 160, 166] решена пространственная нестационарная контактная задача для круговой цилиндрической оболочки и абсолютно твёрдого ударника. Подход к решению основан на принципе суперпозиции и методе функций влияния.

Нестационарные контактные задачи для двух цилиндрических или сферических оболочек рассмотрены в [4-7, 18, 19, 46, 212, 215, 228, 229]. Осесимметричные и пространственные нестационарные контактные задачи для оболочек и абсолютно твёрдых тел рассмотрены в работе [274].

Нестационарный контакт заполненных жидкостью сферических оболочек с недеформируемой плоской преградой исследован [267, 268]. Для

решения использована построенная в этих работах функция влияния для сферической оболочки с жидким наполнителем. Постановки нестационарных контактных задач для тонких упругих оболочек с наполнителем и абсолютно твердых, упругих и акустических преград сформулированы в [198]. Работы [47, 50, 177, 178] посвящены решению плоских нестационарных контактных задач для круговой цилиндрической оболочки с упругим наполнителем и упругого полупространства.

Плоские нестационарные контактные задачи для абсолютно жестких штампов и упругого полупространства с заглубленными полостями рассмотрены в работе [278].

В работе [262] с помощью разложения в ряд по собственным формам колебаний исследован процесс нестационарного деформирования цилиндрической оболочки при ударном воздействии.

В работе [263] рассмотрен переходный отклик цилиндрических оболочек с двумя свободными концами, подвергнутых локализованному удару. С использованием классической теории оболочек Кирхгофа и разложений в тригонометрические ряды Фурье получено приближенное решение, в котором для выражения трех компонент смещения используются двойные тригонометрические ряды. Для верификации решения исследованы цилиндрические оболочки, подвергнутые постоянной ударной нагрузке малой длительности. Показано достаточно хорошее согласование между полученными результатами решения и результатами моделирования в программе ABAQUS.

Задача о нормальном низкоскоростном ударе упругих тел ограниченных размеров по упругой изотропной сферической оболочке, движения которой описываются уравнениями типа Тимошенко приведена в [173]. В момент удара в мишени и ударнике зарождаются ударные волны (поверхности сильного разрыва), которые затем распространяются вдоль соударяемых тел в процессе удара. За фронтами этих волн вплоть до границы области контакта решение строится при помощи теории разрывов и одночленных лучевых

разложений. В зоне контакта используется нелинейная теория Герца. Для анализа процессов соударения упругого шара или упругого длинного тонкого цилиндрического стержня с закругленным концом со сферической оболочкой получены нелинейные интегродифференциальные уравнения относительно величины, характеризующей сближение ударника и мишени, решение которых строится при помощи степенных рядов с целыми и дробными показателями. Получены зависимости контактной силы от времени при различных значениях радиуса оболочки. Показано, что наибольшее значение контактной силы и время контакта растут с увеличением радиуса кривизны оболочки, что согласуется с экспериментальными данными.

В работах [106, 107] представлена численно-аналитическая методика решения контактных задач теории пластин и оболочек. Получены результаты численно-аналитического решения задачи контактного взаимодействия круглых пластин с жесткими штампами различных форм. Проблема решения интегрального уравнения, описывающего условия контакта, сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Для реализации расчетной схемы написана компьютерная программа. Получены поля распределения контактных напряжений для ряда частных случаев.

Следует отметить, что в нестационарных контактных задачах, в случаях, когда одно или оба тела ограничены выпуклыми поверхностями, возникает необходимость определения границ области контакта, которые перемещаются в процессе взаимодействия. При этом одной из наименее исследованных проблем является возможность наличия особенностей контактного давления в окрестности подвижной границы области взаимодействия. При исследовании наличия и характера особенностей контактного давления используют методы интегральных преобразований, теорию обобщенных функций и сингулярных интегральных уравнений. Различные аспекты этой проблемы исследованы в [91-93, 197, 216-226, 234-236].

Экспериментальные и численные исследования.

Экспериментальные и численные исследования процесса продольного удара цилиндрических оболочек приведены в работе [270].

В [8, 9] проведено исследование распространения продольных волн в упругой трубе при ударном погружении трубы в грунт с сухим трением. Математическая постановка задачи опирается на модель продольных колебаний упругого стержня с учетом бокового сопротивления. Боковое действие грунта описывается законом контактного сухого трения. Решен ряд задач о продольном нагружении трубы, взаимодействующей с внешней упругой средой, проведено сопоставление численных и аналитических результатов. Сравниваются расчеты, полученные с учетом и без учета деформируемости среды, окружающей трубу.

Экспериментальное исследование ударного воздействия частицы или твердого тела на цилиндрическую оболочку представлено в работе [246].

Трехмерная задача упругопластического деформирования и выпучивания полусферических оболочек при контактном взаимодействии с жесткими телами исследована в [32]. Для описания деформирования оболочки применяется текущая лагранжева формулировка. Уравнение движения выводится из баланса виртуальных мощностей. В качестве уравнений состояния используются соотношения теории течения с изотропным упрочнением. Контактное взаимодействие жесткого тела и оболочки моделируется исходя из условия непроникания. Решение задачи при заданных граничных и начальных условиях основано на моментной схеме метода конечных элементов и явной конечно-разностной схеме интегрирования по времени типа «крест».

Методика численного решения нелинейных нестационарных задач осесимметричного упругопластического деформирования оболочек вращения с учетом кручения при заданных кинематических и силовых нагружениях изложена в работе [33]. Она основывается на геометрически нелинейной теории оболочек типа Тимошенко и теории пластичности с изотропным

упрочнением. Решение задачи осуществляется вариационно-разностным методом в сочетании с явной схемой интегрирования уравнений движения по времени. Для иллюстрации эффективности данной методики проведены исследования предельных состояний упругопластического процесса деформирования цилиндрической металлической оболочки под действием внутреннего давления и последующего кручения.

Динамический осесимметричный упругопластический контакт массивного тела и кругового сегмента сферической оболочки, шарнирно опертой по контуру исследован в работе [43]. Ставится задача об определении контактной силы взаимодействия в случаях, когда тело имеет сферическую и коническую форму. Выводится нелинейное интегральное уравнение для определения контактной силы с использованием безмоментных уравнений равновесия сферической оболочки, разрешенных относительно радиального перемещения оболочки, и различных моделей местного смятия. Результаты численного решения приводятся в виде графиков.

В работе [264] исследован нелинейный динамический отклик и эволюцию повреждений функционально градиентной малоразмерной сферической оболочки при низкоскоростном ударе. Основываясь на теории континуального повреждения, устанавливается структурная зависимость повреждения для функционально градуированного материала. Для прогнозирования распространения повреждений в структуре оболочки используется закон эволюции повреждений Качанова. Для моделирования контактной силы в процессе воздействия применяется модифицированная модель контакта, подходящая для неомогенного (функционально градиентного) материала. Для моделирования функционально градиентной оболочки с переменными по толщине постоянными материалами используется метод послойного моделирования путем деления оболочки на N слоев с постоянными свойствами материала для каждого слоя. Задача решается с использованием метода ортогональной точки коллокации, метода Ньюмарка и итеративного метода.

В работе [244] исследуются функционально градиентные пологие конических оболочек, подвергающихся низкоскоростному удару твердым телом сферической формы. Для расчёта контактного давления использован модифицированный закон Герца. Для численного интегрирования по времени применена схема интегрирования Ньюмарка.

В работе [138] представлены результаты экспериментальных исследований и рассмотрены особенности взрывного разрушения тонкостенных сферических оболочек из АМг-6, характерных для космических и спускаемых аппаратов, при внутреннем неконтактном взрыве заряда взрывчатого вещества (ВВ). Отсутствие проявлений масштабного фактора в опытах при взрывном разрушении геометрически подобных систем «тонкостенная оболочка - заряд ВВ» позволило предложить графоаналитический метод расчета степени фрагментации сферических тонкостенных оболочек.

Вопросы нестационарного взаимодействия тонкостенных конструкций, в частности, оболочек с грунтами изучены недостаточно. В имеющихся решениях по удару сферических оболочек, связанных с жестким телом заданной массы, о поверхность грунта, например, в [44] и [64], реакция грунта заменяется распределенным по пятну контакта давлением, величина которого в каждой точке определяется на основе приближенной одноосной модели грунта [137]. В этом случае контактное давление однозначно определяется вертикальной составляющей скорости движения точки оболочки, находящейся в зоне пятна. Найдены характеристики реакции.

Аналогичная задача рассмотрена в [31]. При этом грунт рассматривался как идеальная сплошная пластически сжимаемая среда. Задача решается конечноразностным методом.

Задачу о высокоскоростном ударном входе упругой цилиндрической оболочки с жестким передним срезом в пластически сжимаемую среду (удар торцом) рассмотрена в [176]. Здесь взаимодействие с грунтом осуществляется через жесткий диск.

Существенное значение для решения проблемы ударного взаимодействия тел и элементов конструкций с грунтом имеют экспериментальные исследования. В работе [42] с помощью пенетрации при проникании с постоянной скоростью цилиндрического тела с коническим наконечником определены физико-механические характеристики глинистого грунта (опыты проводились на пневмоустановке в диапазоне скоростей входа от 1 до 20 м/с). Результаты эксперимента по косоугольному входу группы тел в упругопластическое полупространство приведены в [41].

Обширные экспериментальные данные о внедрении жесткого шара в ледяной и снежный покров представлены в [108] и [109].

Различные методики экспериментов по взаимодействию твердых ударников с грунтом и их результаты приведены в работах [37], [51], [237], [242] и [250].

В работах [34, 35] приведено описание серии опытов на экспериментальной установке, состоящей из пневмопушки с пультом управления подачей сжатого газа, мишени и измерительно-регистрающей аппаратуры с блоком автоматического управления, по исследованию деформирования тонких конических оболочек с жесткими наконечниками при их вертикальном проникании в грунт. Метание моделей осуществлялось при скоростях от 60 до 120 м/с. Короб мишени заполнялся глиной. Измерения относительных деформаций проводились тензорезисторами с базой 5 мм.

В [29], [30] и [124] развита методика для решения задач удара и проникания жестких и деформируемых тел вращения в мягкие грунтовые среды, описываемые моделью С.С. Григоряна, предложенная в [1]. В сочетании с результатами обращенных экспериментов проводится анализ влияния на силы сопротивления и контактные давления поверхностного кулоновского трения в зоне контакта, объемной сжимаемости и сдвиговой прочности мягкого грунта. Результаты численных решений задач в связанной постановке сопоставляются с аналитическими зависимостями и

экспериментальными данными по определению сил и коэффициентов сопротивления внедрению ударников различной формы в мягкий грунт.

На основе методики обращенного эксперимента с использованием техники мерных стержней в [48] проведены исследования процессов удара и проникания стального конического ударника в мерзлый песчаный грунт. Представлены зависимости максимальных значений силы сопротивления внедрению в грунт конусов с диаметром основания 10,0, 12,0 и 19,8 мм от скорости удара в диапазоне значений 100÷400 м/с. В результате численного решения задачи в осесимметричной постановке с использованием пакета программ "Динамика-2" показано влияние волн, отраженных от стенок контейнера, на контактную силу. Проведен сравнительный анализ сил сопротивления внедрению ударника в уплотненный сухой, водонасыщенный и мерзлый песчаные грунты.

В [36] разработан экспериментальный комплекс для определения основных параметров процесса удара и проникания твердых деформируемых тел в мягкие грунтовые среды на основе методики обращенного эксперимента с использованием мерного стержня и методики прямого эксперимента с фоторегистрацией с применением теневых картин процесса взаимодействия ударника с грунтовой мишенью. Для верификации методик проведены численные расчеты процессов соударения твердых тел с грунтом и определены временные интервалы, на которых изменение силы сопротивления пропорционально квадрату скорости внедрения. Показано соответствие значений коэффициента сопротивления внедрению, полученных в прямых и обращенных экспериментах в диапазоне скоростей соударения от 80 до 400 м/с, что подтверждает работоспособность методик и достоверность измерения интегральных нагрузок.

На основе численного решения задачи о цилиндрическом поршне, расширяющемся и одновременно движущемся поступательно вдоль своей оси в массиве грунта, в [52] рассмотрены особенности движения и состояния материала грунтовой преграды на границе контакта с недеформируемым

ударником при проникании. Для описания поведения грунта использована модель сжимаемой упругопластической среды с условием перехода в пластическое состояние в зависимости от действующего в ней давления. Показано, что тонкий слой грунта на границе контакта с головной частью ударника должен вовлекаться им в движение и двигаться без проскальзывания вместе с ударником. Проанализирована правомерность использования закона сухого трения для определения касательных напряжений на поверхности ударника при проникании. Оценено тепловыделение в слое грунта на контактной границе, обусловленное внутренним трением, и его возможное влияние на процесс проникания.

Экспериментальные исследования о поведении оболочек при их ударе боковой поверхностью о песок описаны в работах [75] (цилиндрические оболочки) и [35], [72] (конические оболочки). Испытания проводились на специальном экспериментальном комплексе, в состав которого входит стенд для воспроизведения ударного нагружения, измерительный комплекс и емкости для жидких и сыпучих сред. Описание данного комплекса и его возможности изложены в обзоре [54]. Построены эпюры деформаций и напряжений по характерным сечениям оболочек в зависимости от определяющих физических и геометрических параметров и времени. Результаты этих исследований могут служить основой для построения и обоснования различных приближенных моделей грунтов.

Таким образом, рассматриваемые в работе нестационарные контактные задачи для упругих тел и оболочек исследованы недостаточно. Математические постановки, построение методов и подходов к решению, получение и анализ результатов решения являются актуальными и важными вопросами. Их решение вносит значительный вклад в развитие механики деформируемого твердого тела и механики контактного взаимодействия.

1.2. Уравнения движения упругих тел

Уравнения движения однородной изотропной линейно упругой среды с постоянными Ламе λ , μ и плотностью ρ в перемещениях (уравнения Ламе) при отсутствии массовых сил имеют следующий вид [76]:

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1.2.1)$$

где grad , div и Δ – дифференциальные операторы градиента, дивергенции и оператор Лапласа соответственно; \mathbf{u} – вектор перемещения точек среды, зависящий от координат ξ^i и времени t .

С помощью представления $\mathbf{u} = \operatorname{div} \varphi + \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}$ уравнения (1.2.1) приводятся к двум волновым уравнениям относительно скалярного φ и векторного $\boldsymbol{\psi}$ потенциалов

$$c_1^2 \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad c_2^2 \Delta \boldsymbol{\psi} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2}, \quad c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \quad c_2 = \sqrt{\mu/\rho}, \quad (1.2.2)$$

где c_1 и c_2 – скорости упругих волн растяжения-сжатия и сдвига.

В пространственном случае к уравнениям (1.2.2) следует добавить дополнительное условие $\operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = 0$.

Компоненты тензора деформаций ε_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) связаны с вектором перемещений соотношениями Коши [76]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i), \quad (1.2.3)$$

где ∇_i – оператор ковариантного дифференцирования [76].

Связь компонент тензора напряжений σ^{ij} с деформациями обеспечивается законом Гука [76]

$$\sigma^{ij} = \lambda \theta g^{ij} + 2\mu \varepsilon^{ij}, \quad \theta = \varepsilon_{ij} g^{ij}, \quad (1.2.4)$$

где g^{ij} – компоненты метрического тензора.

Остановимся подробнее на используемых далее системах координат: декартовой $Oxyz$ с базисом $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, цилиндрической $Ora\alpha z$ с базисом $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_z$ ($\alpha \in (-\pi, \pi], r \geq 0, z \in R$) и сферической $Ora\alpha\beta$ с базисом $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta$ ($\alpha \in (-\pi, \pi], \beta \in [0, \pi], r \geq 0$). Все базисы ортонормированные. Индексы у физических компонент векторов и тензоров в соответствующих системах координат совпадают с соответствующими координатами.

Далее используем систему безразмерных величин (штрихом обозначены размерные параметры)

$$\begin{aligned} x &= \frac{x'}{L}, y = \frac{y'}{L}, z = \frac{z'}{L}, r = \frac{r'}{L}, \varphi = \frac{\varphi'}{L^2}, \psi = \frac{\psi'}{L^2}, \\ \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{u}'}{L}, \tau = \frac{c_* t}{L}, \lambda = \frac{\lambda'}{\lambda_* + 2\mu_*}, \mu = \frac{\mu'}{\lambda_* + 2\mu_*}, \\ \sigma_{ij} &= \frac{\sigma'_{ij}}{\lambda_* + 2\mu_*}, \kappa_1 = \frac{c_1}{c_*}, \kappa_2 = \frac{c_2}{c_*}, \eta = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} = \frac{c_1}{c_2}, \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

где L – некоторый линейной размер, c_* – характерная скорость, λ_*, μ_* – характерные постоянные Ламе; τ – безразмерное время.

Приведём безразмерные уравнения движения упругой среды в рассматриваемых системах координат. Точками здесь и далее обозначаются производные по безразмерному времени τ .

Прямоугольная декартовая система координат:

– уравнения движения в потенциалах

$$\kappa_1^2 \Delta \varphi = \ddot{\varphi}, \kappa_2^2 \Delta \psi = \ddot{\psi}, \operatorname{div} \psi = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \psi_z}{\partial z} = 0, \quad (1.2.6)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \Delta \psi = \Delta \psi_x \mathbf{e}_x + \Delta \psi_y \mathbf{e}_y + \Delta \psi_z \mathbf{e}_z;$$

– связи перемещений с потенциалами

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z}, \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x},$$

$$u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y};$$
(1.2.7)

– соотношения Коши

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right);$$
(1.2.8)

– закон Гука

$$\sigma_{xx} = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{xx}, \quad \sigma_{yy} = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{yy}, \quad \sigma_{zz} = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{zz},$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu \varepsilon_{xy}, \quad \sigma_{yz} = 2\mu \varepsilon_{yz}, \quad \sigma_{xz} = 2\mu \varepsilon_{xz},$$

$$\theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}.$$
(1.2.9)

Цилиндрическая система координат:

– уравнения движения в потенциалах

$$\kappa_1^2 \Delta \varphi = \ddot{\varphi}, \quad \kappa_2^2 \Delta \Psi = \ddot{\Psi}, \quad \operatorname{div} \Psi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r \psi_r)}{\partial r} + \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \alpha} \right] + \frac{\partial \psi_z}{\partial z} = 0,$$
(1.2.10)

где

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\Delta \Psi = \left[\Delta \psi_r - \frac{1}{r^2} \left(2 \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \alpha} + \psi_r \right) \right] \mathbf{e}_r + \left[\Delta \psi_\alpha + \frac{1}{r^2} \left(2 \frac{\partial \psi_r}{\partial \alpha} - \psi_\alpha \right) \right] \mathbf{e}_\alpha + \Delta \psi_z \mathbf{e}_z;$$

– связи перемещений с потенциалами

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial z}, \quad u_\alpha = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi_r}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial r},$$

$$u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r \psi_\alpha)}{\partial r} - \frac{\partial \psi_r}{\partial \alpha} \right];$$
(1.2.11)

– соотношения Коши

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\
\varepsilon_{r\alpha} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} - \frac{u_\alpha}{r} \right), \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \\
\varepsilon_{\alpha z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \alpha} \right);
\end{aligned} \tag{1.2.12}$$

– закон Гука

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{rr}, \quad \sigma_{\alpha\alpha} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{\alpha\alpha}, \quad \sigma_{zz} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{zz}, \\
\sigma_{r\alpha} &= 2\mu\varepsilon_{r\alpha}, \quad \sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz}, \quad \sigma_{\alpha z} = 2\mu\varepsilon_{\alpha z}, \\
\theta &= \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{zz}.
\end{aligned} \tag{1.2.13}$$

Сферическая система координат.

– уравнения движения в потенциалах

$$\begin{aligned}
\kappa_1^2 \Delta\varphi &= \ddot{\varphi}, \quad \kappa_2^2 \Delta\Psi = \ddot{\Psi}, \\
\operatorname{div}\Psi &= \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{\sin\beta} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \alpha} + \psi_\beta \operatorname{ctg}\beta + 2\psi_r \right) = 0,
\end{aligned} \tag{1.2.14}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \sin\beta \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\beta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}, \\
\Delta\Psi &= \left[\Delta\psi_r - \frac{2}{r^2} \left(\frac{1}{\sin\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} (\psi_\beta \sin\beta) + \frac{1}{\sin\beta} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \alpha} + \psi_r \right) \right] \mathbf{e}_r + \\
&+ \left\{ \Delta\psi_\beta + \frac{1}{r^2} \left[2 \frac{\partial \psi_r}{\partial \beta} - \frac{1}{\sin^2\beta} \left(2 \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \alpha} \cos\beta + \psi_\beta \right) \right] \right\} \mathbf{e}_\beta + \\
&+ \left[\Delta\psi_\alpha + \frac{1}{r^2 \sin\beta} \left(2 \frac{\partial \psi_r}{\partial \alpha} + 2 \frac{\partial \psi_\beta}{\partial \alpha} \operatorname{ctg}\beta - \frac{\psi_\alpha}{\sin\beta} \right) \right] \mathbf{e}_\alpha;
\end{aligned}$$

– связи перемещений с потенциалами

$$\begin{aligned}
u_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\beta} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} (\psi_\alpha \sin\beta) - \frac{\partial \psi_\beta}{\partial \alpha} \right], \\
u_\beta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin\beta} \frac{\partial \psi_r}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial r} (r\psi_\alpha) \right], \\
u_\alpha &= \frac{1}{r \sin\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r\psi_\beta) - \frac{\partial \psi_r}{\partial \beta} \right];
\end{aligned} \tag{1.2.15}$$

– соотношения Коши

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\beta\beta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + u_r \right), \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + u_\beta \operatorname{ctg} \beta + u_r \right), \\ \varepsilon_{r\beta} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_\beta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \beta} - u_\beta \right) \right], \quad \varepsilon_{r\alpha} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} - u_\alpha \right) \right], \\ \varepsilon_{\beta\alpha} &= \frac{1}{2r} \left[\frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} - u_\alpha \operatorname{ctg} \beta \right];\end{aligned}\quad (1.2.16)$$

– закон Гука

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{rr}, \quad \sigma_{\alpha\alpha} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{\alpha\alpha}, \quad \sigma_{\beta\beta} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{\beta\beta}, \\ \sigma_{r\alpha} &= 2\mu\varepsilon_{r\alpha}, \quad \sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{r\beta}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta}, \\ \theta &= \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\beta\beta}.\end{aligned}\quad (1.2.17)$$

Приведем также частные случаи уравнений плоского и осесимметричного движения. Отметим, что для них не требуется привлечение дополнительного условия $\operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = 0$. Единственную отличную от нуля компоненту векторного потенциала в этих случаях будем обозначать буквой ψ .

Плоское движение в прямоугольной декартовой системе координат Oxz ($\mathbf{u} = u_x \mathbf{e}_x + u_z \mathbf{e}_z$):

– уравнения движения в потенциалах

$$\kappa_1^2 \Delta \varphi = \ddot{\varphi}, \quad \kappa_2^2 \Delta \psi = \ddot{\psi}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad (1.2.18)$$

– связи перемещений с потенциалами

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (1.2.19)$$

– соотношения Коши

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \\ \varepsilon_{yy} &= 0, \quad \varepsilon_{xy} = 0, \quad \varepsilon_{yz} = 0;\end{aligned}\quad (1.2.20)$$

– закон Гука

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{xx}, \quad \sigma_{yy} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{yy}, \quad \sigma_{zz} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{zz}, \\
\sigma_{xz} &= 2\mu\varepsilon_{xz}, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0, \\
\theta &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}.
\end{aligned}
\tag{1.2.21}$$

Плоское движение в цилиндрической системе координат

$$(\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\alpha \mathbf{e}_\alpha):$$

– уравнения движения в потенциалах

$$\kappa_1^2 \Delta \varphi = \ddot{\varphi}, \quad \kappa_2^2 \Delta \psi = \ddot{\psi}, \quad \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}; \tag{1.2.22}$$

– связи перемещений с потенциалами

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}, \quad u_\alpha = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi}{\partial r}; \tag{1.2.23}$$

– соотношения Коши

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{r\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} - \frac{u_\alpha}{r} \right), \\
\varepsilon_{zz} &= 0, \quad \varepsilon_{\alpha z} = 0, \quad \varepsilon_{rz} = 0;
\end{aligned}
\tag{1.2.24}$$

– закон Гука

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{rr}, \quad \sigma_{\alpha\alpha} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{\alpha\alpha}, \quad \sigma_{zz} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{zz}, \\
\sigma_{r\alpha} &= 2\mu\varepsilon_{r\alpha}, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{\alpha z} = 0, \\
\theta &= \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\alpha\alpha}.
\end{aligned}
\tag{1.2.25}$$

Осесимметричное движение в цилиндрической системе координат

$$(\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_z \mathbf{e}_z):$$

– уравнения движения в потенциалах

$$\kappa_1^2 \Delta \varphi = \ddot{\varphi}, \quad \kappa_2^2 \left(\Delta \psi - \frac{\psi}{r^2} \right) = \ddot{\psi}, \quad \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \tag{1.2.26}$$

– связи перемещений с потенциалами

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r\psi)}{\partial r}; \tag{1.2.27}$$

– соотношения Коши

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad (1.2.28)$$

$$\varepsilon_{r\alpha} = 0, \quad \varepsilon_{\alpha z} = 0;$$

– закон Гука

$$\sigma_{rr} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{rr}, \quad \sigma_{\alpha\alpha} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{\alpha\alpha}, \quad \sigma_{zz} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{zz},$$

$$\sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz}, \quad \sigma_{\alpha z} = 0, \quad \sigma_{r\alpha} = 0, \quad (1.2.29)$$

$$\theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{zz}.$$

Осесимметричное движение в сферической системе координат

($\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\beta \mathbf{e}_\beta$):

– уравнения движения в потенциалах

$$\kappa_1^2 \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2}, \quad \kappa_2^2 \left(\Delta \psi - \frac{\psi}{r^2 \sin^2 \beta} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2}, \quad (1.2.30)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \operatorname{ctg} \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right);$$

– связи перемещений с потенциалами

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \beta} + \psi \operatorname{ctg} \beta \right), \quad u_\beta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \psi \right) - \frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad (1.2.31)$$

– соотношения Коши

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\beta\beta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + u_r \right), \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{r} (u_\beta \operatorname{ctg} \beta + u_r), \quad (1.2.32)$$

$$\varepsilon_{r\beta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_\beta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \beta} - u_\beta \right) \right], \quad \varepsilon_{r\alpha} = 0, \quad \varepsilon_{\beta\alpha} = 0;$$

– закон Гука

$$\sigma_{rr} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{rr}, \quad \sigma_{\beta\beta} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{\beta\beta}, \quad \sigma_{\alpha\alpha} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{\alpha\alpha},$$

$$\sigma_{r\beta} = 2\mu\varepsilon_{r\beta}, \quad \sigma_{r\alpha} = 0, \quad \sigma_{\beta\alpha} = 0, \quad (1.2.33)$$

$$\theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\beta\beta}.$$

Все системы уравнений этого пункта дополняются начальными условиями в перемещениях

$$\mathbf{u}|_{\tau=0} = \mathbf{U}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}|_{\tau=0} = \mathbf{V}_0, \quad (1.2.34)$$

или в потенциалах

$$\varphi|_{\tau=0} = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}|_{\tau=0} = \hat{\varphi}_0, \quad \psi|_{\tau=0} = \psi_0, \quad \dot{\psi}|_{\tau=0} = \hat{\psi}_0, \quad (1.2.35)$$

где $\mathbf{U}_0, \mathbf{V}_0, \varphi_0, \hat{\varphi}_0, \psi_0, \hat{\psi}_0$ – заданные функции координат.

1.3. Уравнения движения тонких упругих цилиндрических и сферических оболочек

Из множества известных к настоящему времени теорий оболочек одной из наиболее подходящих для нестационарных контактных задач является теория оболочек типа Тимошенко [76, 156]. Это связано прежде всего с тем, что уравнения движения указанной теории имеют гиперболический тип, что позволяет с них помощью исследовать волновые процессы, распространяющиеся с конечными скоростями, в отличие от, например, более простых уравнений модели Кирхгофа, которые являются параболическими и более пригодны для исследования процессов стационарных колебаний. Во-вторых, при использовании гиперболических уравнений теории Тимошенко совместно с уравнениями движения упругого полупространства, которые также имеют гиперболический тип, замкнутая система уравнений моделирующая процесс нестационарного контактного взаимодействия будет согласованной по типу входящих в неё уравнений, что даёт определенные преимущества при построении эффективных численно-аналитических методов решения.

Для описания движения тонких упругих оболочек будем использовать уравнения в перемещениях в векторно-матричной форме записи [76, 156]

$$\mathbf{L}\mathbf{w} + \mathbf{p} = \ddot{\mathbf{w}}, \quad (1.3.1)$$

где \mathbf{w} – вектор перемещений оболочки, \mathbf{p} – вектор внешних нагрузок, \mathbf{L} – матрица, элементами которой являются дифференциальные операторы по пространственным переменным. Размерности векторов \mathbf{w} , \mathbf{p} , а также размерность матрицы \mathbf{L} и её элементы будут далее конкретизированы с учетом геометрии оболочки и размерности задачи.

Полагаем, что оболочка имеет постоянную толщину h , радиус R , а её материал характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными Ламе λ_0 , μ_0 .

Пространственное движение цилиндрической оболочки Тимошенко.

Срединная поверхность Π цилиндрической оболочки задаётся следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi: x = R \cos \alpha, y = R \sin \alpha, z = z; \\ (\alpha, z) \in D_{\alpha z} \subset (-\pi, \pi] \times (-\infty, \infty). \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Уравнения её движения в перемещениях имеют вид [76, 156]:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\mathbf{w} + \mathbf{p} = \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \tau^2}, \quad \mathbf{L} = (L_{ij})_{5 \times 5}, \\ \mathbf{w} = (u, v, w, \chi_\alpha, \chi_z)^\top, \quad \mathbf{p} = (q_\alpha, q_z, p, 0, 0)^\top. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Здесь u, v – тангенциальные перемещения в направлении координатных линий α и z соответственно, w – нормальное перемещение, χ_α, χ_z – углы поворота нормального к срединной поверхности до деформации волокна за счет сдвиговых деформаций; q_α, q_z, p – тангенциальные и нормальная составляющие вектора давления, L_{ij} – дифференциальные операторы следующего вида:

$$\begin{aligned} L_{11} = \eta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \eta_2^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right), \quad L_{12} = (\eta_1^2 - \eta_2^2) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial z}, \quad L_{13} = (\eta_1^2 + k^2 \eta_2^2) \frac{\partial}{\partial \alpha}, \\ L_{14} = -\eta_1^2 \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \eta_2^2 k^2, \quad L_{15} = -\gamma^2 (\eta_1^2 - 2\eta_2^2) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial z}, \quad L_{21} = L_{12}, \\ L_{22} = \eta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \eta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}, \quad L_{23} = (\eta_1^2 - 2\eta_2^2) \frac{\partial}{\partial z}, \quad L_{24} = -\gamma^2 \eta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{25} &= -\gamma^2 \eta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}, \quad L_{31} = -L_{13}, \quad L_{32} = -L_{23}, \quad L_{33} = \eta_2^2 k^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \eta_1^2, \\
L_{34} &= \eta_2^2 k^2 \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad L_{35} = \eta_2^2 k^2 \frac{\partial}{\partial z}, \quad L_{41} = \gamma^{-2} L_{14}, \\
L_{42} &= \gamma^{-2} L_{24}, \quad L_{43} = -\gamma^{-2} L_{34}, \quad L_{44} = \eta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \eta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \eta_2^2 k^2 \gamma^{-2}, \\
L_{45} &= L_{12}, \quad L_{51} = \gamma^{-2} L_{15}, \quad L_{52} = \gamma^{-2} L_{25}, \quad L_{53} = -\gamma^{-2} L_{35}, \quad L_{54} = L_{12}, \\
L_{55} &= \eta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \eta_2^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - k^2 \gamma^{-2} \right).
\end{aligned}$$

В (1.3.1) и далее использованы безразмерные величины (c_* и L имеют тот же смысл, что и ранее, штрихом обозначены размерные величины):

$$\begin{aligned}
u &= \frac{u'}{L}, \quad v = \frac{v'}{L}, \quad w = \frac{w'}{L}, \quad \eta_1 = \frac{c_{10}}{c_*}, \quad \eta_2 = \frac{c_{20}}{c_*}, \quad c_{10} = \sqrt{\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho_0}}, \\
c_{20} &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}}, \quad \gamma^2 = \frac{h^2}{12L^2}, \quad \tilde{\gamma}^2 = \frac{\rho L}{\rho_0 h}, \quad p = \frac{p' \tilde{\gamma}^2}{\lambda_* + 2\mu_*}, \\
q_\xi &= \frac{q'_\xi \rho L}{\rho_0 h (\lambda_* + 2\mu_*)}, \quad \xi = \alpha, z, \quad k^2 = \frac{5}{6},
\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

где c_{10} , c_{20} – скорости продольных и сдвиговых волн в материале оболочки.

Пространственное движение сферической оболочки Тимошенко.

Срединная поверхность оболочки задаётся так

$$\begin{aligned}
\Pi: \quad x &= R \sin \beta \cos \alpha, \quad y = R \sin \beta \sin \alpha, \quad z = R \cos \alpha; \\
(\beta, \alpha) &\in D_{\beta\alpha} \subset [0, \pi] \times (-\pi, \pi].
\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

Безразмерные уравнения движения в перемещениях имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}\mathbf{w} + \mathbf{p} &= \ddot{\mathbf{w}}, \quad \mathbf{L} = (L_{ij})_{5 \times 5}, \\
\mathbf{w} &= (u, v, w, \chi_\beta, \chi_\alpha)^T, \quad \mathbf{p} = (q_\beta, q_\alpha, p, 0, 0)^T.
\end{aligned} \tag{1.3.6}$$

Здесь u , v – тангенциальные перемещения в направлении координатных линий $\beta = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$ соответственно, а дифференциальные операторы L_{ij} определяются следующим образом

$$\begin{aligned}
L_{11} &= \eta_1^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \operatorname{ctg} \beta \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{\sin^2 \beta} \right) + \frac{\eta_2^2}{\sin^2 \beta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \eta_2^2 (2 - k^2), \\
L_{12} &= \frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{\sin \beta} \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \alpha} - \operatorname{ctg} \beta \frac{\eta_1^2 + \eta_2^2}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad L_{13} = \left[2(\eta_1^2 - \eta_2^2) + \eta_2^2 k^2 \right] \frac{\partial}{\partial \beta}, \\
L_{14} &= -\gamma^2 \left[\eta_1^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \operatorname{ctg} \beta \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{\sin^2 \beta} \right) + \frac{\eta_2^2}{\sin^2 \beta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] + \eta_2^2 k^2, \quad L_{15} = -\gamma^2 L_{12}, \\
L_{21} &= \frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{\sin \beta} \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \alpha} + \operatorname{ctg} \beta \frac{\eta_1^2 + \eta_2^2}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \\
L_{22} &= \eta_2^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \operatorname{ctg} \beta \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{\sin^2 \beta} \right) + \frac{\eta_1^2}{\sin^2 \beta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \eta_2^2 (2 - k^2), \\
L_{23} &= \frac{1}{\sin \beta} \left[2(\eta_1^2 - \eta_2^2) + \eta_2^2 k^2 \right] \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad L_{24} = -\gamma^2 L_{21}, \\
L_{25} &= -\gamma^2 \left[\eta_2^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \operatorname{ctg} \beta \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{\sin^2 \beta} \right) + \frac{\eta_1^2}{\sin^2 \beta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] + \eta_2^2 k^2, \\
L_{31} &= - \left[2(\eta_1^2 - \eta_2^2) + \eta_2^2 k^2 \right] \left(\frac{\partial}{\partial \beta} + \operatorname{ctg} \beta \right), \quad L_{32} = -L_{23}, \\
L_{33} &= \eta_2^2 k^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \operatorname{ctg} \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) - 4(\eta_1^2 - \eta_2^2), \\
L_{34} &= \eta_2^2 k^2 \left(\frac{\partial}{\partial \beta} + \operatorname{ctg} \beta \right), \quad L_{35} = \frac{\eta_2^2 k^2}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad L_{41} = \gamma^{-2} L_{14}, \quad L_{42} = \gamma^{-2} L_{15}, \\
L_{43} &= -(\eta_2^2 k^2 \gamma^{-2} + 2\eta_1^2) \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad L_{44} = -\gamma^{-2} L_{14}, \quad L_{45} = -\gamma^{-2} L_{15}, \\
L_{51} &= \gamma^{-2} L_{24}, \quad L_{52} = \gamma^{-2} L_{25}, \quad L_{53} = -\gamma^{-2} L_{35}, \quad L_{54} = L_{21}, \quad L_{55} = -\gamma^{-2} L_{25}, \\
q_\beta &= \frac{q'_\beta \rho L}{\rho_0 h (\lambda_* + 2\mu_*)}.
\end{aligned}$$

Приведем также уравнения для двух частных случаев движения.

Плоское движение цилиндрической оболочки Тимошенко.

В этом случае полагаем, что тангенциальное перемещение v в направлении оси Oz и угол отклонения материального волокна χ_z тождественно равны нулю: $v \equiv 0$, $\chi_z \equiv 0$. Также тождественно равна нулю

компонента q_z вектора давления: $q_z \equiv 0$. Все заданные и неизвестные функции зависят только от угловой координаты α и времени τ . При этом из пяти уравнений движения (1.3.3) нетривиальными остаются только три (здесь введены обозначения $\chi = \chi_\alpha$, $q = q_\alpha$):

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\mathbf{w} + \mathbf{p} &= \ddot{\mathbf{w}}, \quad \mathbf{L} = (L_{ij})_{3 \times 3}, \\ \mathbf{w} &= (u, w, \chi)^T, \quad \mathbf{p} = (q, p, 0)^T, \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

$$\begin{aligned} L_{11} &= \eta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \eta_2^2 k^2, \quad L_{12} = (\eta_1^2 + k^2 \eta_2^2) \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad L_{13} = -\eta_1^2 \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \eta_2^2 k^2, \\ L_{21} &= -L_{12}, \quad L_{22} = \eta_2^2 k^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \eta_1^2, \quad L_{23} = \eta_2^2 k^2 \frac{\partial}{\partial \alpha}, \\ L_{31} &= \gamma^{-2} L_{13}, \quad L_{32} = -\gamma^{-2} L_{23}, \quad L_{33} = -\gamma^{-2} L_{13}. \end{aligned}$$

Осесимметричное движение сферической оболочки Тимошенко.

Здесь полагаем, что заданные и искомые функции зависят только от угловой координаты β и времени τ . Тангенциальное перемещение v , угол отклонения материального волокна χ_α и компонента q_α вектора давления тождественно равны нулю: $v \equiv 0$, $\chi_z \equiv 0$, $q_\alpha \equiv 0$. Тогда из пяти уравнений движения (1.3.6) нетривиальными остаются только три (здесь введены обозначения $\chi = \chi_\beta$, $q = q_\beta$):

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\mathbf{w} + \mathbf{p} &= \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \tau^2}, \quad \mathbf{L} = (L_{ij})_{3 \times 3}, \\ \mathbf{w} &= (u, w, \chi)^T, \quad \mathbf{p} = (q, p, 0)^T, \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

$$\begin{aligned}
L_{11} &= \eta_1^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \operatorname{ctg} \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \eta_2^2 (2 - k^2) - \frac{\eta_1^2}{\sin^2 \beta}, \\
L_{12} &= \left[2(\eta_1^2 - \eta_2^2) + \eta_2^2 k^2 \right] \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad L_{13} = -\gamma^2 \eta_1^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \operatorname{ctg} \beta \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{\sin^2 \beta} \right) + \eta_2^2 k^2, \\
L_{21} &= -\left[2(\eta_1^2 - \eta_2^2) + \eta_2^2 k^2 \right] \left(\frac{\partial}{\partial \beta} + \operatorname{ctg} \beta \right), \quad L_{22} = \eta_2^2 k^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \operatorname{ctg} \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right) - 4(\eta_1^2 - \eta_2^2), \\
L_{23} &= \eta_2^2 k^2 \left(\frac{\partial}{\partial \beta} + \operatorname{ctg} \beta \right), \quad L_{31} = \gamma^{-2} L_{13}, \quad L_{32} = -\eta_2^2 k^2 \gamma^{-2} \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad L_{33} = -\gamma^{-2} L_{13}.
\end{aligned}$$

Все уравнения движения оболочек дополняются начальными условиями:

$$\mathbf{w}|_{\tau=0} = \mathbf{W}_0, \quad \dot{\mathbf{w}}|_{\tau=0} = \mathbf{V}_0. \quad (1.3.9)$$

где $\mathbf{W}_0, \mathbf{V}_0$ – заданные вектор-функции главных ортогональных координат срединной поверхности оболочки.

Граничные условия и условия контакта будут рассмотрены далее.

1.4. Условия контакта и определение области взаимодействия деформируемых тел

В нестационарных контактных задачах для получения замкнутой математической постановки необходимо привлекать условия контакта деформируемых тел. Кроме того, в задачах с подвижными границами области взаимодействия нужны дополнительные соотношения для определения положения границ контактной области в каждый момент времени.

В общем случае положим, что контакт происходит между двумя телами, занимающими геометрические области G_1 и G_2 , ограниченные поверхностями Π_{10} и Π_{20} , соответствующими недеформированному состоянию тел в начальный момент времени $\tau = 0$ (рис. 1.4.1). Рассмотрим такие задачи о контактном взаимодействии, в которых в начальный момент времени тела находятся в недеформированном состоянии. Поверхности Π_{10} и Π_{20} в этот момент соприкасаются в некоторой точке O в пространственной или осесимметричной задаче, или по прямой, проходящей через точку O , в плоском случае. Это возможно, когда, например, обе поверхности являются гладкими и выпуклыми, или, если одна из них – плоскость, а другая – выпуклая. Положим, что через точку O можно провести плоскость P , являющуюся касательной к поверхностям Π_{10} , Π_{20} . Будем далее также использовать инерциальную прямоугольную декартовую систему координат $Ox_1x_2x_3$ с базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, оси Ox_1 и Ox_2 которой лежат в плоскости P , а ось Ox_3 направлена в сторону второго тела.

Поверхности Π_1 и Π_2 , ограничивающие тела G_1 и G_2 в момент времени $\tau > 0$, в неподвижной системе координат задаются уравнениями

$$\Pi_k : x_3 = f_k(x_1, x_2, \tau), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_k, \quad k = 1, 2, \quad (1.4.1)$$

где Ω_k – проекция Π_k на плоскость Ox_1x_2 . Тогда область контакта Π_* определяется следующими условиями

$$\begin{aligned} \Pi_* : \Delta(x_1, x_2, \tau) = f_1(x_1, x_2, \tau) - f_2(x_1, x_2, \tau) = 0, \\ \sigma_n^{(k)}(x_1, x_2, \tau) < 0, (x_1, x_2) \in \Omega_k. \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Здесь Δ – зазор между поверхностями Π_1 и Π_2 , $\sigma_n^{(k)}$ – проекция вектора напряжений на нормаль к поверхности контакта Π_* .

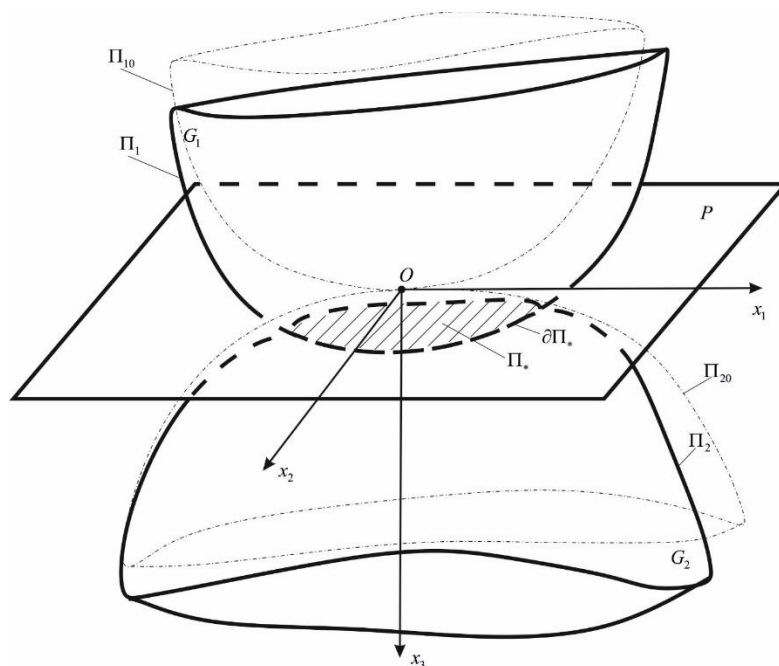


Рис. 1.4.1.

Из (1.4.2) следует уравнения, неявно определяющие границу области контакта $\partial\Pi_*$:

$$\partial\Pi_* : \Delta(x_1, x_2, \tau) = 0, \sigma_n^{(k)}(x_1, x_2, \tau) = 0. \quad (1.4.3)$$

Однако при этом для внутренних точек Π_* необходима дополнительная проверка неравенства $\sigma_n^{(k)}(x_1, x_2, \tau) < 0$. Отметим также, что в общем случае граница $\partial\Pi_*$ может состоять из нескольких замкнутых кривых и соответственно поверхность Π_* может быть многосвязной.

Перейдём теперь к постановке условий контакта на поверхности Π_* . Ограничимся тем случаем, когда контакт происходит в условиях свободного проскальзывания

$$\mathbf{u}_n^{(1)}|_{\Pi_*} = \mathbf{u}_n^{(2)}|_{\Pi_*}, \quad \sigma_n^{(1)}|_{\Pi_*} = \sigma_n^{(2)}|_{\Pi_*}, \quad \sigma_\tau^{(1)}|_{\Pi_*} = \sigma_\tau^{(2)}|_{\Pi_*} = 0, \quad \sigma_n^{(k)}|_{\Pi_\sigma} < 0. \quad (1.4.4)$$

где $\mathbf{u}_n^{(k)}|_{\Pi_\sigma}$ – перемещения k -того тела по нормали к поверхности Π_σ , $\sigma_\tau^{(k)}$ – касательная составляющая вектора напряжений k -того тела на поверхности Π_σ .

Необходимо отметить, что условия контакта (1.4.4) являются нелинейными по следующим причинам: во все соотношения входит неизвестная деформированная поверхность Π_* и присутствует неравенство для искомых напряжений. В такой постановке контактные задачи могут быть решены, вероятно, только с помощью численных методов. Для построения аналитических решений необходима линеаризация условий контакта. Она связана с двумя основными моментами: снесение граничных условий на недеформированные граничные поверхности и линеаризация соотношений (1.4.4) [80].

В качестве поверхности, на которой ставятся граничные условия в линейных задачах, естественно выбрать поверхность Π_{kT} , являющуюся границей k -того тела, перемещающегося под действием внешних и контактных сил как абсолютно жесткое. Основным вопросом при снесении граничных условий (1.4.4) на недеформированную поверхность Π_{kT} является приближенное определение фиктивной смоченной поверхности $\Pi_{k*} \approx \Pi_*$, $\Pi_{k*} \subset \Pi_{kT}$. В случае малых перемещений $\mathbf{u}_\Pi^{(k)}$ в нулевом приближении границу $\partial\Pi_{k*}$ области Π_{k*} можно определить как линию пересечения поверхностей Π_{kT} (рис. 1.4.2).

Если для одного из контактирующих тел поверхность Π_{kT} – плоскость, то соответственно и фиктивная смоченная поверхность Π_{k*} является плоской

областью. В тех случаях, когда одно из тел является сильно пологим в зоне контакта (радиусы кривизны поверхности Π_{k*} , много больше ее диаметра), поверхность Π_{kT} может быть приближенно заменена, например, на плоскость P_{kT} , касательную к Π_{kT} в точке первоначального контакта тел и жестко с ней связанную. Тогда поверхность Π_{k*} при решении соответствующей начально-краевой задачи и при вычислении контактных усилий может опять же считаться плоской областью. Если дополнительно рассматриваемое тело совершает небольшие отклонения от первоначального положения, то приближенно Π_{kT} можно отождествить с плоскостью P (см. рис. 1.4.1), а поверхность контакта Π_* – с плоской областью Ω_T , где граница $\partial\Omega_T$ есть проекция $\partial\Pi_{T*}$ на плоскость P (см. рис. 1.4.2).

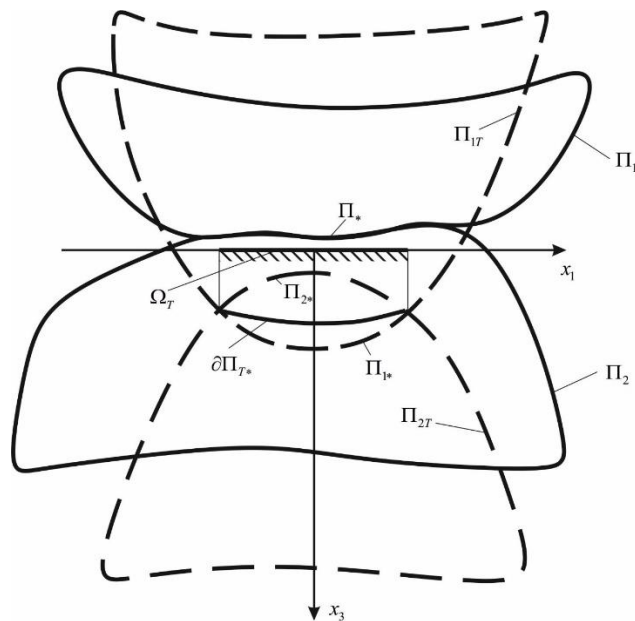


Рис. 1.4.2

В дальнейшем в нулевом приближении область контакта будем, как правило, приближенно заменять плоской областью Ω_T , которая может быть многосвязной. Её границы с учётом деформируемости граничных

поверхностей взаимодействующих тел могут быть уточнены с помощью, например, метода последовательных приближений. При этом:

$$u_n^{(1)} \Big|_{\Omega_T} = u_n^{(2)} \Big|_{\Omega_T}, \quad \sigma_n^{(1)} \Big|_{\Omega_T} = \sigma_n^{(2)} \Big|_{\Omega_T}, \quad \sigma_\tau^{(1)} \Big|_{\Omega_T} = \sigma_\tau^{(2)} \Big|_{\Omega_T} = 0, \quad \sigma_n^{(k)} \Big|_{\Omega_T} < 0. \quad (1.4.5)$$

Условие $\sigma_n^{(k)} \Big|_{\Omega_T} < 0$ проверяется в процессе построения решения.

1.5. Разрешающие интегральные уравнения нестационарных контактных задач с подвижными границами

Для построения систем разрешающих уравнений нестационарных контактных задач используем принцип суперпозиции [80, 84-93, 147-159]. При этом существенную роль играют так называемые *функции влияния* (*фундаментальные решения, функции Грина*).

Обозначим через $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$, $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ – вектор-строки координат некоторой одной и той же координатной системы, которая в общем случае может быть криволинейной. Число координат может быть от единицы до трех и определяется размерностью задачи по пространственным переменным. Функции влияния $\mathbf{G}^i(\mathbf{x}, \tau, \xi, t)$, $i = 1..N \leq 3$ (N определяется размерностью задачи) для определенного линейно деформируемого тела G , ограниченного поверхностью $\Pi = \partial G$ (или кривой $\Gamma = \partial G$ в случае, если область, занимаемая упругим телом, двумерная), являются решениями соответствующих начально-краевых задач при специальном типе правых частей уравнений движения. Математическая постановка этих начально-краевых задач включает:

– уравнения движения тела относительно введённой выше системы координат $Ox^1x^2x^3$ со специальной правой частью

$$\mathbf{L}(\mathbf{G}^i) = \mathbf{f}_i, \quad \mathbf{x} \in G, \quad \tau > 0, \quad (1.5.1)$$

где $\mathbf{L} = \mathbf{L}_x - \mathbf{L}_\tau$ – матрица линейных дифференциальных операторов уравнений движения, при этом \mathbf{L}_x – матрица дифференциальных операторов по пространственным переменным, а \mathbf{L}_τ – матрица дифференциальных операторов по времени, \mathbf{f}_i – вектор, все компоненты которого равны нулю за исключением i -й, которая совпадает с дельта-функцией Дирака $\delta(\mathbf{x} - \xi, \tau - t) = \delta(\mathbf{x} - \xi)\delta(\tau - t)$ [76, 80, 121];

– нулевые начальные условия

$$\mathbf{G}^i \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{G}^i}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0; \quad (1.5.2)$$

– однородные граничные условия

$$\mathbf{V}(\mathbf{G}^i) \Big|_{\partial G} = 0, \quad (1.5.3)$$

где \mathbf{V} – матрица-оператор граничных условий, вид которого зависит от их типа граничных условий.

С использованием функций влияния решение задачи о распространении объёмных возмущений $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N)$ в теле G можно представить в интегральном виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) = \int_0^\tau dt \int_G \sum_{i=1}^N \mathbf{G}^i(\mathbf{x}, \tau, \xi, t) f_i(\xi, t) dS, \quad (1.5.4)$$

где \mathbf{u} – вектор перемещений точек тела G . Внутренний интеграл в (1.5.4) является тройным интегралом в случае трехмерного тела G , поверхностным интегралом первого рода в случае если тело G представляет собой двумерное многообразие (пластина, оболочка) или криволинейным интегралом первого рода, если тело G – одномерное.

Выражение (1.5.4) и сами функции влияния упрощаются в случае если дифференциальные операторы в (1.5.1) - (1.5.3) обладают свойством инвариантности относительно сдвига по времени и (или) пространственным переменным [76].

В рассматриваемых задачах матрица-оператор \mathbf{L}_τ – диагональная. Её диагональные элементы являются вторыми производными по времени. Следовательно, \mathbf{L}_τ инвариантен относительно сдвига по времени. Операторы начальных условий (1.5.2) также инвариантны относительно сдвига по времени. Поэтому $\mathbf{G}^i(\mathbf{x}, \tau, \xi, t) = \mathbf{G}^i(\mathbf{x}, \xi, \tau - t)$ и интеграл по времени в (1.5.4) переходит в свёртку

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) = \int_0^\tau dt \int_G \sum_{i=1}^N \mathbf{G}^i(\mathbf{x}, \xi, \tau - t) g_i(\xi, t) dS. \quad (1.5.5)$$

Отметим, что для того, чтобы дифференциальные операторы \mathbf{L}_x и \mathbf{B} были инвариантными относительно сдвига по одной из переменных, необходимо и достаточно, чтобы они имели постоянные коэффициенты, и область изменения соответствующей координаты совпадала со всей числовой прямой R или допускала периодическое продолжение решения на R [76]. Пусть для определенности операторы \mathbf{L}_x и \mathbf{B} инвариантны относительно сдвига по переменной x^3 , тогда $\mathbf{G}^i(\mathbf{x}, \tau, \xi, t) = \mathbf{G}^i(x^1, x^2, x^3 - \xi^3, \xi^1, \xi^2, \tau - t)$ и в повторном интеграле, соответствующем внутреннему интегралу в (1.5.5), интеграл по ξ^3 переходит в свертку по x^3 .

Отметим также, что в случае инвариантности относительно сдвига и с учетом свойств прямого произведения обобщённых функций [121], дельта-функции в правых частях граничных условий (1.5.3) могут быть записаны в виде $\delta(\mathbf{x})\delta(\tau)$. Советующие решения (функции влияния) примут вид $\mathbf{G}^i(\mathbf{x}, \tau)$, а все интегралы в (1.5.4) будут являться свёртками по пространственным переменным и времени.

Ещё один тип функций влияния, называемый *поверхностными функциями влияния*, связан с задачами о влиянии на упругое тело граничных возмущений. *Поверхностными функциями влияния (поверхностными фундаментальными решениями, поверхностными функциями Грина)* называются векторы $\mathbf{G}_{\Pi}^i(\mathbf{x}, \tau, \xi, t)$, $i = 1, \dots, N \leq 3$, являющиеся решением следующих задач о распространении граничных возмущений специального вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mathbf{G}_{\Pi}^i) &= 0, \quad \mathbf{x} \in G, \quad \tau > 0; \\ \mathbf{G}_{\Pi}^i|_{\tau=0} &= 0, \quad \frac{\partial \mathbf{G}_{\Pi}^i}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0; \\ \mathbf{B}(\mathbf{G}_{\Pi}^i) \Big|_{\partial G} &= \mathbf{g}_i, \end{aligned} \tag{1.5.6}$$

где \mathbf{g}_i – вектор, все компоненты которого равны нулю, кроме i -того, равного сосредоточенной на ∂G дельта-функции Дирака $\delta_{\partial G}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}, \tau-t) = \delta_{\partial G}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\delta(\tau-t)$ [76, 121].

Знание поверхностных функций влияния позволяет, аналогично (1.5.4), представить решение задач о распространении граничных возмущений в упругом теле в интегральном виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) = \int_0^{\tau} dt \int_{\partial G} \sum_{i=1}^N \mathbf{G}_{\Pi}^i(\mathbf{x}, \tau, \boldsymbol{\xi}, t) g_i(\boldsymbol{\xi}, t) ds, \quad (1.5.7)$$

Внутренний интеграл в (1.5.7) является поверхностным интегралом первого рода в случае трехмерного тела G и криволинейным интегралом первого рода в случае если тело G – двумерное. В случае одномерного тела этот интеграл переходит в простое произведение.

С учетом инвариантности относительно сдвига по времени $\mathbf{G}_{\Pi}^i(\mathbf{x}, \tau, \boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{G}_{\Pi}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \tau-t)$, и внешний интеграл в (1.5.7) является свёрткой

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) = \int_0^{\tau} dt \int_{\partial G} \sum_{i=1}^N \mathbf{G}_{\Pi}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \tau-t) g_i(\boldsymbol{\xi}, t) ds. \quad (1.5.8)$$

Если кроме того дифференциальные операторы \mathbf{L}_x и \mathbf{B} инвариантны относительно сдвига по какой-либо пространственной переменной, то в повторном интеграле, соответствующем поверхностному интегралу в (1.5.8) (или в определенном интеграле, соответствующем криволинейному), соответствующий интеграл также переходит в свертку.

Функции влияния для замкнутых оболочек, аналогично объемным функциям влияния для упругого тела, представляют собой перемещения как решения уравнений движения (1.3.1) с нулевыми начальными условиями и вектором нагрузок \mathbf{P} , в котором все компоненты равны нулю, за исключением i -й, которая совпадает с дельта-функцией Дирака. При этом $i = 1, 2$ или 3 .

Использование введённых выше интегральных представлений позволяет свести постановку нестационарных контактных задач к системам разрешающих уравнений. Для этих целей понадобятся поверхностные

функции влияния для упругого полупространства и функции влияния для оболочек. Причем в случае полупространства достаточно построить функции влияния на поверхности полупространства $z = 0$.

Под поверхностными функциями влияния для упругого полупространства $z \geq 0$ в дальнейшем будем понимать перемещения *границы* полупространства $z = 0$, как решения соответствующей начально-краевой задачи (1.5.6) при задании на границе $z = 0$ напряжений или перемещений в виде дельта-функций Дирака (δ_{ij} – символ Кронеккера)

$$\sigma_{3j}|_{z=0} = \delta(x, y)\delta(\tau)\delta_{ij}, \quad i = 1, 3. \quad (1.5.9)$$

или

$$u_3|_{z=0} = \delta(x, y)\delta(\tau), \quad \sigma_{13}|_{z=0} = \sigma_{23}|_{z=0} = 0. \quad (1.5.10)$$

Соответствующие перемещения $\mathbf{u}^i|_{z=0} = \mathbf{G}^i(x, y, \tau)$ или напряжения $\sigma_{33}|_{z=0} = \Gamma(x, y, \tau)$ и являются искомыми поверхностными функциями влияния.

В случае плоской постановки задачи отличными от нуля будут лишь два вектора функций влияния, компоненты которых зависят только от координаты x и времени τ : $\mathbf{G}^1(x, \tau)$, $\mathbf{G}^3(x, \tau)$. В дальнейшем для решения плоских контактных задач в условиях свободного проскальзывания потребуются только функция влияния $G_3^3(x, \tau)$, для которой введём обозначение $G(x, \tau)$, и функция $\Gamma(x, \tau)$.

В осесимметричной постановке с условиями (1.5.9) ненулевым является только $\mathbf{G}^3(r, \tau)$ (два других случая не являются осесимметричными). При этом для построения интегральных уравнений нестационарных контактных задач в условиях свободного проскальзывания потребуются функции $G_a(r, \tau) = G_3^3(r, \tau)$ и $\Gamma_a(r, \tau) = \sigma_{33}|_{z=0}$.

Отметим ещё один момент. По определению функции влияния являются решением соответствующих задач с нулевыми начальными условиями. В нестационарных же контактных задачах одно или оба взаимодействующих

тела в начальный момент времени обладают некоторыми начальными скоростями. Поэтому при построении разрешающих уравнений необходимо свести исходную математическую постановку к задаче с нулевыми начальными условиями. В дальнейшем будем полагать, что в начальный момент времени для взаимодействующих тел в общем случае справедливы начальные условия вида:

$$\mathbf{u}|_{\tau=0} = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{u}}|_{\tau=0} = \mathbf{V}_0 = \mathbf{const}. \quad (1.5.11)$$

Вектор перемещения \mathbf{u} для тела, которому соответствуют начальные условия (1.5.11) представим в виде (см. (1.2.34)):

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{V}_0 \tau. \quad (1.5.12)$$

Очевидно при этом начальные условия для $\tilde{\mathbf{u}}$ будут нулевыми. При подстановке представления (1.5.12) в соответствующие уравнения движения, дифференциальные операторы, входящие в эти уравнения, не изменятся. Таким образом, уравнения движения относительно вектора $\tilde{\mathbf{u}}$ будут иметь тот же вид, что и относительно исходного вектора \mathbf{u} . Аналогичное (1.5.12) представление можно использовать и в случае оболочки (см. (1.3.9)):

$$\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{w}} + \mathbf{V}_0 \tau, \quad \mathbf{w}|_{\tau=0} = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{w}}|_{\tau=0} = \mathbf{V}_0 = \mathbf{const}. \quad (1.5.13)$$

Как будет показано далее, подстановка (1.5.13) в уравнения движения оболочек также не изменяет последние.

Перейдём теперь к контактнм задачам. Отметим, что их всегда можно привести к такому виду, при котором у одного из взаимодействующих тел начальные условия будут однородными. Положим, что одно из взаимодействующих тел (основание) в начальный момент времени находится в состоянии покоя, а другое (ударник), двигаясь с некоторой начальной скоростью, входит в контакт с основанием.

Соответствующие разрешающие уравнения строятся с помощью принципа суперпозиции, который выражается формулами (1.5.5) и (1.5.8). При

этом основные из них являются интегральными и вытекают условий контакта (1.4.5) на смоченной поверхности Ω_T :

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}) = \mathbf{V}_0\tau + f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega_T. \quad (1.5.14)$$

Здесь $\mathbf{A}(\mathbf{p})$ – интегральный оператор, ядром которого является разность функций влияния взаимодействующих тел

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \left(\int_0^\tau dt \int_{\Omega_T} \sum_{i=1}^N \left[\mathbf{G}^{i(2)}(\mathbf{x}, \tau, \xi, t) - \mathbf{G}^{i(1)}(\mathbf{x}, \tau, \xi, t) \right] p_i(\xi, t) ds, \mathbf{n} \right).$$

Индекс (1) соответствует ударнику, (2) – основанию; $\mathbf{G}^{i(k)}$ – функции влияния ударника и основания, p_i – компоненты вектора контактного давления \mathbf{p} , $f(\mathbf{x})$ – функция, задающая поверхность ударника в выбранной системе координат в нулевой момент времени.

Далее везде будем полагать, что в начальный момент времени вектор скорости ударника коллинеарен внешней нормали к поверхности основания, что исключает его вращение в процессе контактного взаимодействия.

Для определения положения границ области контакта в нулевом приближении к (1.5.14) добавляются уравнения прямолинейного движения ударника как абсолютно твердого тела

$$m\ddot{\mathbf{u}}_T^{(1)} = \int_{\Omega_T} \mathbf{p} ds \quad (1.5.15)$$

и кинематическое соотношение для определения границ области контакта из условия пересечения недеформированных граничных поверхностей ударника и основания.

$$\mathbf{u}_T^{(1)} \Big|_{\partial\Omega_T} = \mathbf{u}_T^{(2)} \Big|_{\partial\Omega_T}, \quad (1.5.16)$$

где m – масса ударника; $\mathbf{u}_T^{(1)}$, $\mathbf{u}_T^{(2)}$ – перемещения границ ударника и основания как абсолютно твердых тел.

В некоторых случаях уравнение движения (1.5.15) удобно записать в интегральной форме

$$m\mathbf{u}_T^{(1)} = \mathbf{V}_0\tau + \mathbf{A}_T(\mathbf{p}). \quad (1.5.17)$$

Здесь $\mathbf{A}_T(\mathbf{p})$ – интегральный оператор следующего вида:

$$\mathbf{A}_T(\mathbf{p}) = \int_0^\tau (\tau - t) dt \int_{\Omega_T(t)} \mathbf{p} ds.$$

Итак, система разрешающих уравнений нестационарных контактных задач с подвижными границами включает интегральное уравнение (1.5.14), уравнение движение ударника как абсолютно твёрдого тела (1.5.15) или (1.5.17) и кинематическое соотношение (1.5.16) для определения области контакта в нулевом приближении.

Для уточнения положения границ области контакта можно использовать итерационную процедуру. Опишем принцип её работы.

На нулевой итерации положение границ области контакта Ω_{T_0} определяется из условия (1.5.16) с использованием уравнения движения ударника как абсолютно твёрдого тела (1.5.17).

Затем из уравнения (1.5.14) находится распределение контактного давления по области контакта \mathbf{p}_0 в нулевом приближении. После этого определяются распределения нормальных перемещений границ ударника и основания в нулевом приближении $w_0^{(1)}(\mathbf{x}, \tau)$, $w_0^{(2)}(\mathbf{x}, \tau)$:

$$w_0^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) = \left(\int_0^\tau dt \int_{\Omega_T} \sum_{i=1}^N \mathbf{G}^{i(1)}(\mathbf{x}, \tau, \xi, t) p_i(\xi, t) ds, \mathbf{n} \right) + V_0\tau + f(\mathbf{x}),$$

$$w_0^{(2)}(\mathbf{x}, \tau) = \left(\int_0^\tau dt \int_{\Omega_T} \sum_{i=1}^N \mathbf{G}^{i(2)}(\mathbf{x}, \tau, \xi, t) p_i(\xi, t) ds, \mathbf{n} \right).$$

После этого область контакта уточняется с помощью условий

$$w_0^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) = w_0^{(2)}(\mathbf{x}, \tau), \quad p_0(\mathbf{x}, \tau) = \sigma_{33,0} \Big|_{z=0} < 0. \quad (1.5.18)$$

Множество точек области контакта Ω_{T_1} , в которых выполняются условия (1.5.18) является областью контакта в первом приближении.

Затем на каждой итерации с номером $j \geq 1$ выполняются следующие операции: определяется распределение контактного давления \mathbf{p}_j в j -том

приближении из решения (1.5.14), в котором $\Omega_T = \Omega_{T_j}$ и проводится уточнение области контакта с помощью условий

$$w_j^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) = w_j^{(2)}(\mathbf{x}, \tau), \quad p_j(\mathbf{x}, \tau) = \sigma_{33,j} \Big|_{z=0} < 0. \quad (1.5.19)$$

По достижении заданной точности, которая может определяться, например, по норме $\|f(\mathbf{x}, \tau)\| = \sup_{\mathbf{x}} |f(\mathbf{x}, \tau)|$:

$$\varepsilon = \max_{k=1,2} \frac{\|w_j^{(k)}(\mathbf{x}, \tau) - w_{j-1}^{(k)}(\mathbf{x}, \tau)\|}{\|w_{j-1}^{(k)}(\mathbf{x}, \tau)\|}, \quad (1.5.20)$$

где ε – заданная точность, работа итерационной процедуры прекращается.

Описанный итерационный алгоритм уточнения области контакта позволяет учесть такие эффекты как частичное отслоение граничных поверхностей в зоне контакта, а также выход перемещений за её границы.

1.6. Нестационарные поверхностные функции влияния для упругого полупространства

Сначала рассмотрим двумерный вариант – плоскую задачу для полуплоскости $z \geq 0$, первоначально находящуюся в невозмущенном состоянии. Как указано в предыдущем параграфе, в случае свободного проскальзывания, который и будет рассмотрен в дальнейшем, для построения замкнутых систем уравнений нестационарных контактных задач из всего множества функций влияния понадобятся только две, а именно, $G(x, \tau)$ и $\Gamma(x, \tau)$, указанные в п. 1.5. Явные выражения для этих функций построены в работах [76, 80] и имеют следующий вид (точки над функцией означают её обобщённую производную по времени):

$$G(x, \tau) = \sum_{k=1}^2 G_k(x, \tau) H(\tau - \eta_k |x|), \quad (1.6.1)$$

$$\Gamma(x, \tau) = \ddot{\Gamma}_f(x, \tau), \quad \Gamma_f(x, \tau) = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{fk}(x, \tau) H(\tau - \eta_k |x|),$$

$$G_1(x, \tau) = \frac{\eta^2 (\eta^2 x^2 - 2\tau^2)^2}{\pi P_3(x^2, \tau^2)} \sqrt{\tau^2 - x^2},$$

$$G_2(x, \tau) = \frac{4\eta^2 \tau^2 (\tau^2 - x^2)}{\pi P_3(x^2, \tau^2)} \sqrt{\tau^2 - \eta^2 x^2}.$$

$$\Gamma_{f1}(x, \tau) = -\frac{1}{\pi \eta^4 x^4} \frac{(\eta^2 x^2 - 2\tau^2)^2}{\sqrt{\tau^2 - x^2}}, \quad \Gamma_{f2}(x, \tau) = \frac{4\tau^2}{\pi \eta^4 x^4} \sqrt{\tau^2 - \eta^2 x^2},$$

$$P_3(x, \tau) = \eta^6 (x - c_R^2 \tau) P_2(x, \tau), \quad P_2(x, \tau) = x^2 - 2\alpha^2 x\tau + \beta^2 \tau^2,$$

$$\alpha^2 = \frac{4}{\eta^2} - \frac{c_R^2}{2}, \quad \beta^2 = 16 \frac{\eta^2 - 1}{\eta^8 c_R^2}, \quad \eta_1 = 1, \quad \eta_2 = \eta.$$

Заметим, что функция влияния $G(x, \tau)$ является решением известной задачи Лэмба для полуплоскости [76]. С её помощью, нормальные перемещения границы полупространства можно представить в форме

интегрального соотношения свертки с нормальными напряжениями по пространственной координате и времени [76]:

$$u_{z0}(x, \tau) = G ** p = \int_0^{\tau} dt \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, \tau - t) \sigma_{zz0}(\xi, t) d\xi, \quad (1.6.2)$$

$$u_{z0}(x, \tau) = u_z \Big|_{z=0}, \quad \sigma_{zz0}(x, \tau) = \sigma_{zz} \Big|_{z=0}.$$

Для выражения нормальных напряжений через нормальные перемещения на границе полупространства используется функция влияния $\Gamma_f(x, \tau)$. При этом справедливо следующее граничное интегральное соотношение [76, 80]:

$$\sigma_{zz0}(x, \tau) = \Gamma ** u_{z0} = \int_0^{\tau} dt \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x - \xi, \tau - t) u_{z0}(\xi, 0, t) d\xi. \quad (1.6.3)$$

Заметим, что функция влияния $G(x, \tau)$ имеет сингулярную особенность порядка (-1) на фронте распространения волны Рэлея $|x| = c_R \tau$, поэтому интегралы в (1.6.2) следует понимать в смысле регуляризованного значения [80, 84-87].

В трёхмерном варианте рассматривается полупространство $z \geq 0$. В этом случае при решении контактных задач будут использованы функции влияния $G_a(r, \tau)$ и $\Gamma_a(r, \tau)$ (см. п. 1.5).

На основании принципа суперпозиции нормальные перемещения границы полупространства связаны с напряжениями $\sigma_{zz0}(x, y, \tau)$ посредством следующего интегрального соотношения [76]

$$u_{z0}(x, y, \tau) = \int_0^{\tau} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} G_a \left(\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \zeta)^2}, \tau - t \right) \sigma_{zz0}(\xi, \zeta, t) d\xi, \quad (1.6.4)$$

которое при переходе к полярной системе координат Ora ($r^2 = x^2 + y^2$, $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$, $\alpha \in [0, 2\pi)$), связанной с недеформированной поверхностью полупространства, принимает вид

$$\begin{aligned}
u_{z_0}(r, \alpha, \tau) &= \int_0^\tau dt \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^\infty \rho F(r, \rho, \alpha, \beta) d\rho, \\
F(r, \rho, \alpha, \beta) &= \\
&= G_a \left[\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\alpha - \beta)}, \tau - t \right] \sigma_{zz}(\rho \cos \beta, \rho \sin \beta, 0, t).
\end{aligned} \tag{1.6.5}$$

В случае осесимметричной постановки представление (1.6.5) с учетом периодичности функции влияния по угловой координате принимает вид

$$\begin{aligned}
u_{z_0}(r, \tau) &= \\
&= \int_0^\tau dt \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^\infty \rho G_a \left[\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\alpha - \beta)}, \tau - t \right] \sigma_{zz_0}(\rho, t) d\rho = \\
&= \int_0^\tau dt \int_0^\infty \rho \Lambda(r, \rho, \tau - t) \sigma_{zz_0}(\rho, t) d\rho,
\end{aligned} \tag{1.6.6}$$

где

$$\Lambda(r, \rho, \tau - t) = \int_0^{2\pi} G_a \left[r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\beta), \tau - t \right] d\beta. \tag{1.6.7}$$

Функция влияния $G_a(r, \tau)$ найдена и исследована в работе [80]. Она имеет вид

$$\begin{aligned}
G_a(r, \tau) &= \sum_{k=1}^2 G_{ak}(r, \tau) H(\tau - \eta_k r), \\
G_{ak}(r, \tau) &= \frac{\tau}{2\pi\eta^4} \left[a_k \sqrt{1 - c_R^2 \eta_k^2} (r^2 - c_R^2 \tau^2)^{-3/2} H(r - c_R \tau) + \chi_k(r^2, \tau^2) \right], \\
\chi_k(r, \tau) &= \frac{1}{P_2^{3/2}(r, \tau)} \left[(b_k r + c_k \tau) S_k(r, \tau) + (\tau - \eta_k^2 r) \right] \frac{Q_{1k}(r, \tau)}{2S_k(r, \tau)}, \\
Q_{1k}(r, \tau) &= (b_k \alpha^2 + c_k) r - (b_k \beta^2 + c_k \alpha^2) \tau, \\
S_k^2(r, \tau) &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{P_2(r, \tau) P_2(1, \eta_k^2)} + P_{1k}(r, \tau) \right], \\
P_{1k}(r^2, \tau^2) &= (1 - \alpha^2 \eta_k^2) r^2 + (\beta^2 \eta_k^2 - \alpha^2) \tau^2,
\end{aligned} \tag{1.6.8}$$

$$b_1 = \eta^4 - a_1, \quad a_1 = \frac{(2 - \eta^2 c_R^2)^2}{P_2(c_R^2, 1)}, \quad a_2 = -b_2 = 4 \frac{1 - c_R^2}{P_2(c_R^2, 1)},$$

$$P_2(x, y) = x^2 - 2\alpha^2 yx + \beta^2 y^2, \quad \alpha^2 = \frac{4}{\eta^2} - \frac{c_R^2}{2}, \quad \beta^2 = 16 \frac{\eta^2 - 1}{\eta^8 c_R^2},$$

$$c_k = \frac{\beta^2 a_k - 4}{c_R^2}, \quad \eta_1 = 1, \quad \eta_2 = \eta.$$

Из (1.6.8) видно, что функция влияния $G_a(r, \tau)$ обладает сингулярной особенностью порядка $(-3/2)$, носитель которой расположен за фронтом волны Рэлея.

Интегральное соотношение связи напряжений с нормальными перемещениями на границе полупространства записывается так [80]

$$\sigma_{zz0}(x, y, \tau) = \int_0^\tau dt \int_{-\infty}^\infty d\zeta \int_{-\infty}^\infty \Gamma_a \left(\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \zeta)^2}, \tau - t \right) \mu_{z0}(\xi, \zeta, t) d\xi, \quad (1.6.9)$$

где

$$\Gamma_a(r, \tau) = \ddot{\Gamma}_{af}(r, \tau),$$

$$\Gamma_{af}(r, \tau) = \Gamma_{af0}(r, \tau) \delta(\tau - r) + \sum_{k=1}^2 \Gamma_{afk}(r, \tau) H(\tau - \eta_k r), \quad (1.6.10)$$

$$\Gamma_{af0}(r, \tau) = -\frac{(\eta^2 - 2)^2}{2\pi\eta^4 r}, \quad \Gamma_{af1}(r, \tau) = -\frac{\tau}{\pi\eta^4 r^5} [3\tau^2 - (2\eta^2 - 1)r^2],$$

$$\Gamma_{af2}(r, \tau) = \frac{\tau}{\pi\eta^4 r^5} [3\tau^2 - \eta^2 r^2].$$

В (1.6.10) производные по времени понимаются в обобщенном смысле [121].

ГЛАВА II. ФУНКЦИИ ВЛИЯНИЯ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

2.1. Двумерная функция влияния (решение в тригонометрических рядах)

Здесь рассмотрим случай плоской постановки задачи о нестационарных функциях влияния для цилиндрической оболочки, включающей в себя уравнения движения (1.3.7) с нулевыми начальными условиями

$$u|_{\tau=0} = w|_{\tau=0} = \chi|_{\tau=0} = \dot{u}|_{\tau=0} = \dot{w}|_{\tau=0} = \dot{\chi}|_{\tau=0} = 0 \quad (2.1.1)$$

и нагрузками вида

$$q = 0, \quad p = \delta(\alpha)\delta(\tau). \quad (2.1.2)$$

Перемещения $u = G_u(\alpha, \tau)$, $w = G_w(\alpha, \tau)$ и угол поворота $\chi = G_\chi(\alpha, \tau)$ как решения задачи (1.3.7), (2.1.1) при нагрузках (2.1.2) являются искомыми функциями влияния.

С учётом периодичности поставленной задачи по угловой координате представим все заданные и искомые функции в виде комплексных рядов Фурье:

$$G_u(\alpha, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{un}(\tau)e^{in\alpha}, \quad G_w(\alpha, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{wn}(\tau)e^{in\alpha},$$

$$G_\chi(\alpha, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{\chi n}(\tau)e^{in\alpha}, \quad (2.1.3)$$

$$p(\alpha, \tau) = \delta(\alpha)\delta(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(\tau)e^{in\alpha},$$

$$p_n(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\alpha)\delta(\tau)e^{-in\alpha} d\alpha = \frac{\delta(\tau)}{2\pi}.$$

Подставляем (2.1.3) в (1.3.7) и применяем к полученным уравнениям интегральное преобразование Лапласа по времени. С учётом нулевых условий, приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно

изображений коэффициентов рядов (2.1.3) (\mathbf{E} – единичная матрица размерностью 3×3)

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}(n) - s^2 \mathbf{E}] \mathbf{g}_n &= \mathbf{b}, \quad \mathbf{g}_n = (G_{un}^L, G_{wn}^L, G_{\chi n}^L)^T, \\ \mathbf{A}(n) &= (A_{nij})_{3 \times 3}, \quad \mathbf{b} = (0, -1/2\pi, 0)^T, \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

$$\begin{aligned} A_{n11} &= -(n^2 \eta_1^2 + \eta_2^2 k^2), \quad A_{n12} = in(\eta_1^2 + \eta_2^2 k^2), \quad A_{n13} = \gamma^2 n^2 \eta_1^2 + \eta_2^2 k^2, \\ A_{n21} &= -A_{n12}, \quad A_{n22} = -n^2 \eta_2^2 k^2 - \eta_1^2, \quad A_{n23} = in \eta_2^2 k^2, \quad A_{n31} = \gamma^{-2} A_{n13}, \\ A_{n32} &= -i \gamma^{-2} n \eta_2^2 k^2 = -\gamma^{-2} A_{n23}, \quad A_{n33} = -\gamma^{-2} A_{n13}. \end{aligned}$$

Здесь и далее верхний индекс « L » у функции означает её трансформанту по Лапласу, а s – параметр преобразования Лапласа.

В дальнейшем понадобится только функция влияния $G_w(\alpha, \tau)$. Решая (2.1.4), получаем изображения по Лапласу коэффициентов G_{wn}^L

$$G_{wn}^L = -\frac{1}{2\pi} \frac{P(s^2, n^2)}{R(s^2, n^2)}, \quad (2.1.5)$$

$$P(s, n) = \sum_{k=1}^2 P_k(s, n), \quad R(s, n) = \sum_{k=1}^3 R_k(s, n),$$

$$P_k(s, n) = \sum_{m=0}^k a_{m, k-m} n^m s^{k-m}, \quad R_k(s, n) = \sum_{m=0}^k b_{m, k-m} n^m s^{k-m},$$

$$(a_{ij})_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & -k^2 \eta_2^2 (\gamma^2 + 1) & -\gamma^2 \\ -\eta_1^2 \eta_2^2 k^2 & -\eta_1^2 \gamma^2 (\gamma^2 + 2) & 0 \\ -\eta_1^4 \gamma^2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(b_{ij})_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & \eta_1^2 \eta_2^2 k^2 (\gamma^2 + 1)^2 & (\gamma^2 + 1)(\eta_2^2 k^2 + \gamma^2 \eta_1^2) & \gamma^2 \\ \eta_1^4 \eta_2^2 \gamma^2 k^2 & \eta_1^2 [(1 - 4\gamma^2 - 2\gamma^4)k^2 \eta_2^2 + \gamma^2 \eta_1^2] & \gamma^2 [k^2 \eta_2^2 + \eta_1^2 (\gamma^2 + 2)] & 0 \\ -2\eta_1^4 \eta_2^2 \gamma^2 k^2 & \eta_1^2 \gamma^2 [(\gamma^2 + 2)k^2 \eta_2^2 + \eta_1^2] & 0 & 0 \\ \eta_1^4 \eta_2^2 \gamma^2 k^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Структура изображений коэффициентов (2.1.5) позволяет применить вторую теорему разложения [76] для преобразования Лапласа с целью построения соответствующих оригиналов:

$$\begin{aligned} G_{wn}(\tau) &= \sum_m \operatorname{res}_{s_{nm}} G_{wn}^{Lc}(s) e^{s\tau} = \\ &= \sum_m \frac{1}{(l_{nm} - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_{nm}} \frac{d^{l_{nm}-1}}{ds^{l_{nm}-1}} (s - s_{nm})^{l_{nm}} G_{wn}^{Lc}(s) e^{s\tau}, \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

где сумма берётся по всем особым точкам (полюсам), которыми в данном случае являются нули знаменателя $s_{nm} : R(s_{nm}^2, n^2) = 0$, l_{nm} – кратности этих нулей.

В случае, когда полюс s_{nm} является простым ($l_{nm} = 1$), соответствующее слагаемое в сумме (2.1.6) принимает вид [172]:

$$\operatorname{res}_{s_{nm}} G_{wn}^L(s) e^{s\tau} = -\frac{1}{2\pi} \frac{P(s_{nm}^2, n^2)}{R'(s_{nm}^2, n^2)} e^{s_{nm}\tau}, \quad (2.1.7)$$

где штрих означает производную по параметру s .

Как видно, оригинал существенно зависит от характера нулей знаменателя $R(s^2, n^2)$.

Рассмотрим отдельно случай $n = 0$. Изображение $G_{w0}^L(s)$ имеет вид

$$G_{w0}^L(s) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\eta^2(\gamma^2 + 1) + s^2}. \quad (2.1.8)$$

Оригинал $G_{w0}^L(s)$ находится элементарно

$$G_{w0}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\eta_1 \tau \sqrt{\gamma^2 + 1})}{\eta_1 \sqrt{\gamma^2 + 1}}. \quad (2.1.9)$$

С учетом малости γ по сравнению с единицей выражение (2.1.9) можно упростить. Тогда окончательно

$$G_{w0}(\tau) = \frac{\sin(\eta_1 \tau)}{2\pi \eta_1}. \quad (2.1.10)$$

При $n = 1$, учитывая малость γ по сравнению с единицей, имеем

$$G_{w1}^L(s) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{s^2 + c^2}{s^4 + c^2 s^2 + 2c^2 \eta_1^2} \right), \quad c^2 = \gamma^{-2} \eta_2^2 k^2. \quad (2.1.11)$$

В этом случае также не представляет большой сложности получить выражение для соответствующего оригинала:

$$G_{w1}(\tau) = \frac{\tau}{4\pi} + \frac{1}{4\pi} \sum_{m=2}^3 C_{1m} \sin(\sqrt{|s_{1m}|} \tau), \quad (2.1.12)$$

$$C_{1m} = \frac{1}{\sqrt{|s_{1m}|}} \left(1 + \frac{|s_{1m}|}{c^2 - 2|s_{1m}|} \right), \quad m = 2, 3,$$

$$s_{12} = -\frac{c}{2} \left(c + \sqrt{c^2 - 8\eta_1^2} \right), \quad s_{13} = -\frac{c}{2} \left(c - \sqrt{c^2 - 8\eta_1^2} \right).$$

Обратим внимание на первое слагаемое в формуле (2.1.12). Покажем, что оно соответствует нормальным перемещениям оболочки как абсолютно твёрдого тела. Рассмотрим недеформируемое полое цилиндрическое тело, радиуса R и толщины h (недеформируемую оболочку), находящуюся под воздействием нормального давления вида $p = \delta(\alpha) \delta(\tau)$. Обозначим через h_T перемещение центра масс этого тела в направлении действия нормального давления. Тогда нормальные перемещения w_T поверхности тела в цилиндрической системе координат будут связаны с h_T так: $w_T = h_T \cos \alpha$.

Уравнение движения центра масс недеформируемой оболочки с учетом малости γ примет вид

$$\ddot{h}_T = \frac{1}{2\pi} \delta(\tau),$$

откуда следует

$$h_T = \frac{\tau}{2\pi}, \quad w_T = \frac{\tau}{2\pi} \cos \alpha.$$

В случае оболочки при учёте малости γ и только одного первого слагаемого в первом коэффициенте G_{w1} функция влияния G_{wT} имеет вид

$$G_{wT} = \frac{\tau}{4\pi} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) = \frac{\tau}{2\pi} \cos \alpha = w_T,$$

что и доказывает тот факт, что первое слагаемое в (2.1.12) характеризует перемещение оболочки как абсолютно твердого тела.

При $n > 1$ уравнение $R(s, n) = 0$ имеет вид

$$s^3 + b_n s^2 + c_n s + d_n = 0, \quad (2.1.13)$$

$$b_n = [(n+1)\gamma^2 + 2n+1]\eta_1^2 + (n+1+\gamma^{-2})k^2\eta_2^2,$$

$$c_n = (n^2 + n)\eta_1^4 + [(n-1)^2(\gamma^2 + 2) + (n+1)\gamma^{-2}]k^2\eta_2^2\eta_1^2,$$

$$d_n = n(n-1)^2 k^2\eta_2^2\eta_1^4.$$

Исследование характера его корней в общем случае основано на дискриминанте кубического уравнения. Однако, так как коэффициенты уравнения (2.1.13) являются много параметрическими (зависят от пяти параметров γ , η_1 , η_2 , k и n), то этот подход представляется сложной задачей. Кроме того, дискриминант не даёт информации о расположении этих корней на плоскости комплексного переменного s . Покажем, что все корни уравнения (2.1.13) являются чисто мнимыми (см. также [164, 172]).

Прежде всего заметим, что в (2.1.13) $b_n > 0$, $c_n > 0$, $d_n > 0$, а следовательно уравнение (2.1.13) не имеет положительных действительных корней. Покажем, что уравнение (2.1.13) не имеет комплексных корней. Положим, что существует такой корень s_*^2 , что $\text{Im}s_* \neq 0$. Тогда имеются 2 полюса $\pm s_*$, у одного из которых $\text{Re}s_* > 0$. При этом одно из слагаемых в (2.1.5) содержит множитель $e^{\text{Re}s_*\tau}$, что невозможно в силу физического смысла.

Таким образом, все полюсы функции (2.1.5) при любом n являются чисто мнимыми. Как показывают расчеты, все корни уравнения (2.1.13), и соответственно все полюса изображений коэффициентов при $n > 1$ будут простыми.

Таким образом, при $n > 1$ оригиналы коэффициентов (2.1.5) имеют вид

$$G_{wn} = \sum_{m=1}^3 C_{nm} \sin \mu_{nm} \tau, \quad \mu_{nm} = \sqrt{|s_{nm}|}, \quad (2.1.14)$$

$$C_{nm} = -\frac{1}{\pi} \frac{P(-\mu_{nm}^2, n^2)}{R'(-\mu_{nm}^2, n^2)},$$

где s_{nm} – корни уравнения (2.1.13).

В таблице 2.2.1 приведены значения коэффициентов C_{nm} и выражений μ_{nm} для $n=0,1,2,\dots,10$, при $n=50$ и при $n=100$. В качестве материала оболочки принята сталь с характеристиками: модуль Юнга – $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Н/м², коэффициент Пуассона – $\nu = 0.33$, плотность – $\rho = 7850$ кг/м³, чему соответствуют следующие безразмерные параметры $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 0.504$. Отношение радиуса к толщине оболочки принято равным 40, что соответствует $\gamma = 0.002$.

Таблица 2.2.1.

n	C_{n1}	C_{n2}	C_{n3}	μ_{n1}	μ_{n2}	μ_{n3}
0	0.16	–	–	1	–	–
1	0.079	0.056	$-1.167 \cdot 10^{-8}$	0	1.414	220.72
2	22.77	0.014	$-0.228 \cdot 10^{-8}$	$5.5 \cdot 10^{-3}$	2.236	220.73
3	9.06	0.005	$1.3 \cdot 10^{-8}$	0.016	3.16	220.74
4	4.94	0.002	$3.5 \cdot 10^{-8}$	0.03	4.12	220.76
5	3.12	0.0012	$6.3 \cdot 10^{-8}$	0.04	5.09	220.79
6	2.15	0.0007	$9.7 \cdot 10^{-8}$	0.071	6.08	220.82
7	1.57	0.0004	$13.8 \cdot 10^{-8}$	0.09	7.07	220.85
8	1.2	0.0003	$18.4 \cdot 10^{-8}$	0.13	8.06	220.89
9	0.949	0.0002	$23.7 \cdot 10^{-8}$	0.16	9.05	220.94
10	0.768	0.0001	$29.6 \cdot 10^{-8}$	0.2	10.04	220.99
50	0.03	$1.3 \cdot 10^{-6}$	$6.7 \cdot 10^{-6}$	5.05	50.01	227.42
100	0.0082	$1.7 \cdot 10^{-7}$	$18.9 \cdot 10^{-6}$	18.69	100	245.93

Из таблицы видно, что с увеличением n модуль коэффициентов C_{nm} уменьшается, за исключением C_{n3} . Однако, так как он изначально пренебрежимо мал, то это можно отнести к погрешности вычислений.

Заметим также, что так как $G_{w,-n}^L = G_{wn}^L$, то следовательно $G_{w,-n} = G_{wn}$ и ряд (2.1.3) для функции влияния $G_w(\alpha, \tau)$ может быть записан так

$$\begin{aligned} G_w(\alpha, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{wn}(\tau) e^{in\alpha} = G_{w0}(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} G_{wn}(\tau) (e^{in\alpha} + e^{-in\alpha}) = \\ &= G_{w0}(\tau) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} G_{wn}(\tau) \cos n\alpha. \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

При проведении расчетов ряд (2.1.15) заменяется конечной суммой

$$G_w(\alpha, \tau) \approx G_{w0}(\tau) + 2 \sum_{n=1}^N G_{wn}(\tau) \cos n\alpha. \quad (2.1.16)$$

При этом число удерживаемых членов ряда будет особо оговариваться.

На рис. 2.2.1 представлены зависимости функции влияния $G_w(\alpha, \tau)$ от времени в точке с координатой $\alpha = 0$ при $N = 10$ (пунктирная кривая), $N = 20$ (штриховая кривая), $N = 50$ (штрих-пунктирная кривая), $N = 100$ (сплошная кривая). Видно, что приемлемая точность достигается лишь с удержанием более 50 членов ряда (2.1.16).

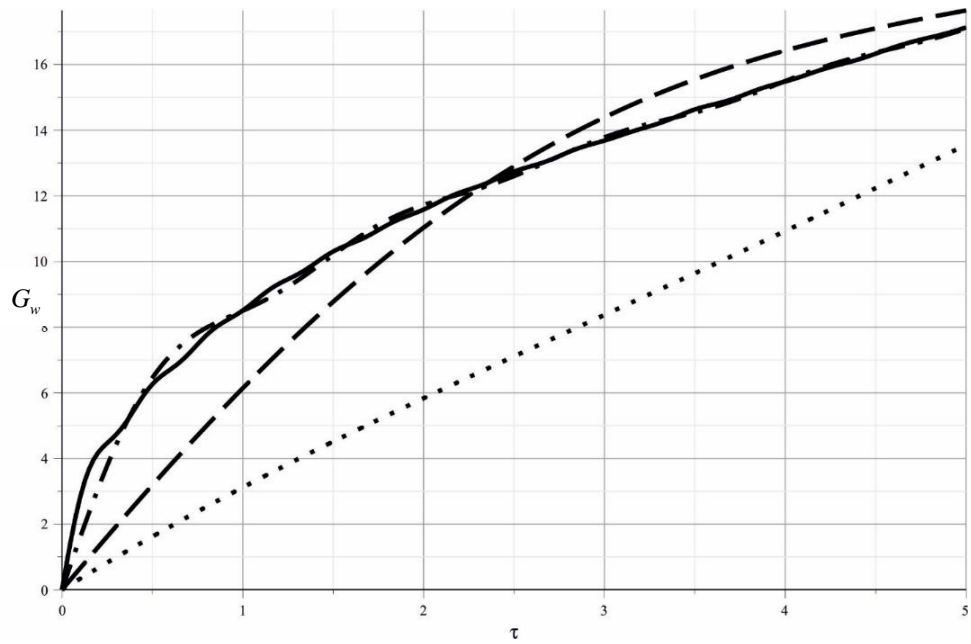
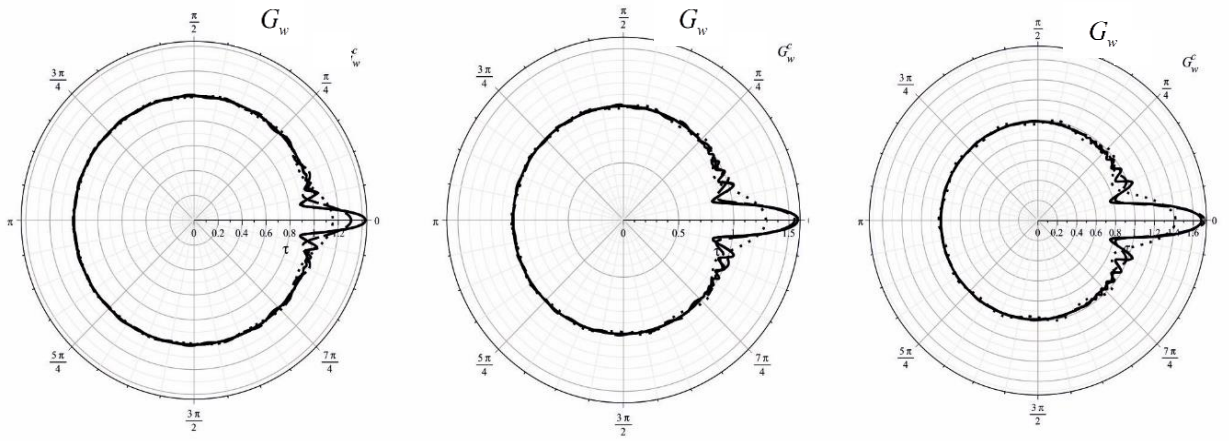


Рис. 2.2.1. Зависимость функции влияния от времени при учете различного числа членов ряда.

Это же подтверждают графические результаты, представленные на рисунках 2.2.2 а-в. Они иллюстрируют зависимость функции $1 + 0.01G_w$ от угловой координаты α в различные моменты времени. Здесь графики построены в полярной системе координат, связанной с поперечным сечением оболочки. Стили отображения кривых советуют тем же самым значениям N , что и на предыдущем рисунке. Рис. 2.2.2а соответствует моменту времени $\tau = 1$, рис. 2.2.2 б – $\tau = 2$, рис. 2.2.2 в – $\tau = 3$.



а). $\tau = 1$

б). $\tau = 2$

в). $\tau = 3$

Рис. 2.2.1. Зависимость функции влияния от координаты в разные моменты времени при учете различного числа членов ряда.

Сходимость ряда (2.1.15) можно улучшить, выделив его сингулярную часть [83].

Ввиду большой сложности получения точной зависимости корней уравнения (2.1.13) от n рассмотрим асимптотическую оценку при $n \rightarrow \infty$. Она будет определять сходимость соответствующего ряда Фурье. Очевидно, справедливо соотношение эквивалентности:

$$R(s, n) \sim R_3(s, n), \quad n \rightarrow \infty \quad (2.1.17)$$

Многочлен $R_3(s, n)$ легко раскладывается на множители

$$R_3(s, n) = \gamma^2 (k^2 m \eta_2^2 + s) (n \eta_1^2 + s)^2. \quad (2.1.18)$$

Отсюда сразу определяются нули этого многочлена

$$\tilde{s}_{n1} = -k^2 \eta_2^2 n, \quad \tilde{s}_{n2,3} = -n \eta_1^2. \quad (2.1.19)$$

Асимптотическая оценка корней уравнения (2.1.15) следует из соотношения (2.1.17) и формул (2.1.19):

$$s_{nm} = O(n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.1.20)$$

Замечая, что все полюсы функции (2.1.5) при $n > 1$ являются простыми и располагаются на мнимой оси, из формул (2.1.6) и (2.1.7), связывающих изображение с оригиналом, получим следующее утверждение [83].

Утверждение 2.1.1. Пусть

$$f_n^L(s) = \frac{P_l(s^2, n^2)}{Q_k(s^2, n^2)}, \quad Q_k(s^2, n^2) \Big|_{s=s_{nm}} = 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.1.21)$$

где многочлены $P_l(s^2, n^2)$ и $Q_k(s^2, n^2)$, являются суммами однородных многочленов со старшими степенями l и k соответственно, s_{nm} ($m=1, 2, \dots, 2k$) – простые полюсы (нули многочлена $Q_k(s^2, n^2)$), $\text{Re}(s_{nm}) \leq 0$.

Тогда

$$|f_n(\tau)| = O(n^{1-2(k-l)}), \quad n \rightarrow \infty. \quad \blacksquare \quad (2.1.22)$$

Отсюда для оригиналов коэффициентов ряда Фурье функции влияния $G_w(\alpha, \tau)$ вытекает следующая асимптотическая оценка:

$$|G_{wn}(\tau)| = O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.1.23)$$

Из (2.1.23) и признаков сходимости рядов [185] следует, что ряд, соответствующий $G_w(\alpha, \tau)$, сходится медленно, что обуславливается наличием разрывов первого рода у функции $G_w(\alpha, \tau)$ [186]. Одним из способов улучшения скорости сходимости рядов Фурье, соответствующих функциям со скачками как у самой функции, так и у её производных, является метод, сходный предложенному А.Н. Крыловым [186]. А именно, нужно преобразовать имеющийся ряд к сумме двух рядов, один из которых является плохо сходящимся, но его сумма находится аналитически, а другой – равномерно сходящийся ряд с коэффициентами порядка не выше чем n^{-2} .

Для реализации этого преобразования представим коэффициент (2.1.5) общего члена ряда в виде суммы двух слагаемых:

$$G_{wn}^L = G_{rwn}^L + G_{swn}^L, \quad (2.1.24)$$

$$G_{swn}^L = -\frac{1}{2\pi} \frac{P_2(s^2, n^2)}{R_3(s^2, n^2)}, \quad G_{rwn}^L = G_{wn}^L - G_{swn}^L = -\frac{1}{2\pi} \frac{P_4(s^2, n^2)}{R_6(s^2, n^2)},$$

$$P_4(s^2, n^2) = P_1(s^2, n^2)R_3(s^2, n^2) - P_2(s^2, n^2)[R_1(s^2, n^2) + R_2(s^2, n^2)],$$

$$R_6(s^2, n^2) = R_3(s^2, n^2)R(s^2, n^2).$$

Заметим, что согласно утверждению 2.1.1, оригинал коэффициента G_{swn}^L по-прежнему имеет порядок n^{-1} . В то же время оригинал функции G_{rwn}^L уже имеет порядок n^{-3} , а следовательно, можно ожидать, что соответствующий ряд будет быстро сходиться.

Что касается оригинала ряда с коэффициентами G_{swn}^L , то его сумма находится аналитически. Действительно, для функций в (2.1.24) имеют место равенства

$$\begin{aligned} P_2(s^2, n^2) &= -\gamma^2 (n\eta_1^2 + s)^2, \\ R_3(s, n) &= \gamma^2 (k^2 n\eta_2^2 + s)(n\eta_1^2 + s)^2; \\ G_{swn}^L &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{s^2 + k^2 \eta_2^2 n^2}, \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

Советующий оригинал определяется так:

$$G_{swn}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(nk\eta_2\tau)}{nk\eta_2} \quad (2.1.26)$$

Рассмотрим теперь ряд

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{swn}(\tau) e^{in\alpha} &= \frac{1}{2k\eta_2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(nk\eta_2\tau)}{n} e^{in\alpha} = \\ &= \frac{1}{2k\eta_2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in(\alpha+k\eta_2\tau)} - e^{in(\alpha-k\eta_2\tau)}}{n}. \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

Построим вспомогательный ряд, получаемый как разложение дельта-функции Дирака $\delta(\alpha + k\eta_2\tau)$ в ряд Фурье:

$$\begin{aligned} \delta(\alpha \pm k\eta_2\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n(\tau) e^{in\alpha}, \\ \delta_n(\tau) &= \int_0^{2\pi} \delta(\alpha \pm k\eta_2\tau) e^{-in\alpha} d\alpha = e^{\pm ink\eta_2\tau}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\delta(\alpha \pm k\eta_2\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\alpha \pm k\eta_2\tau)}. \quad (2.1.28)$$

Интегрируя левую и правую часть равенства (2.1.28) по α , получаем разложение в ряд Фурье функции Хевисайда

$$H(\alpha \pm k\eta_2\tau) = \frac{1}{i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in(\alpha \pm k\eta_2\tau)}}{n}. \quad (2.1.29)$$

Сравнивая (2.1.27) и (2.1.29), находим

$$\begin{aligned} G_{sw}(\alpha, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{sw_n}(\tau) e^{in\alpha} = \\ &= \frac{H(\alpha + k\eta_2\tau) - H(\alpha - k\eta_2\tau)}{2k\eta_2\pi} = \frac{1}{2} \frac{H(k\eta_2\tau - |\alpha|)}{k\eta_2\pi}. \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

Таким образом, функция $G_{sw}(\alpha, \tau)$ описывает волну нормальных перемещений, распространяющуюся по поверхности оболочки в окружном направлении со скоростью $k\eta_2$.

Оригиналы коэффициентов G_{rwn}^L находятся с помощью аналогичных (2.1.6) и (2.1.7) формул:

$$\begin{aligned} G_{rwn}(\tau) &= -\frac{1}{2\pi} \sum_m \frac{P_4(s_{nm}^2, n^2)}{R_6'(s_{nm}^2, n^2)} e^{s_{nm}\tau}, \quad l_{nm} = 1; \\ G_{rwn}(\tau) &= \sum_m \frac{1}{(l_{nm} - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_{nm}} \frac{d^{l_{nm}-1}}{ds^{l_{nm}-1}} (s - s_{nm})^{l_{nm}} G_{rwn}^L(s) e^{s\tau}, \quad l_{nm} > 1, \end{aligned} \quad (2.1.31)$$

где s_{nm} – нули знаменателя: $R_6(s_{nm}^2, n^2) = 0$, l_{nm} – их кратности.

Заметим [156], что система уравнений (1.3.7) имеет гиперболический тип. При этом нормальные перемещения распространяются по оболочке с конечной скоростью равной $\eta_2 k$, а касательные перемещения и угол поворота – со скоростью η_1 .

Вернёмся к исследованию сходимости оригинала преобразованного ряда (2.1.15) с коэффициентами (2.1.24). На рис. 2.2.2 представлены зависимости ряда для функции влияния $G_w(0, \tau)$, построенного с учетом

(2.1.24) от времени в лобовой точке при $N=5$ (пунктирная кривая), $N=10$ (штриховая кривая), $N=20$ (штрих-пунктирная кривая), $N=50$ (сплошная кривая).

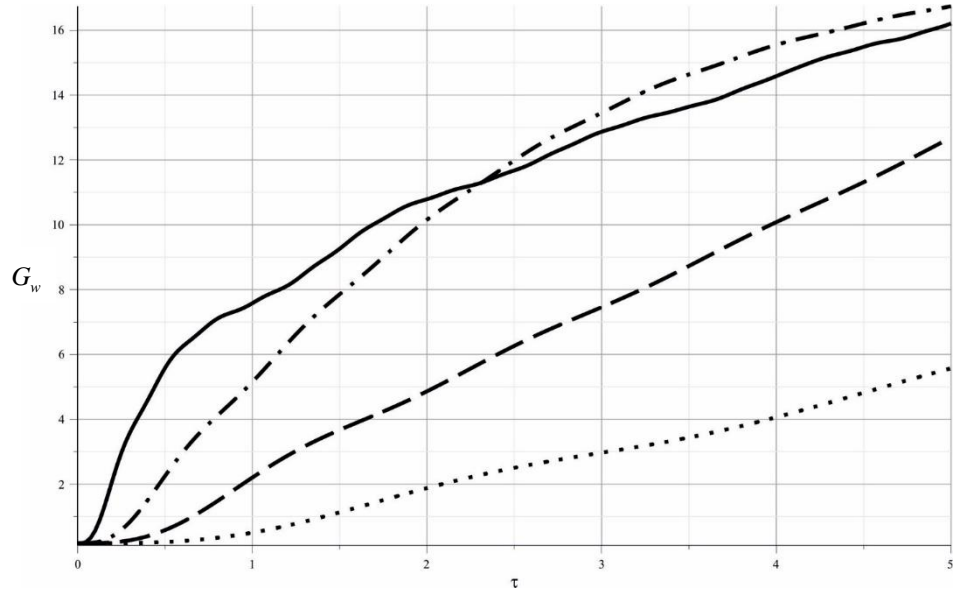


Рис. 2.2.3. Зависимость функции влияния от времени в лобовой точке.

Из рисунка видно, что практическая сходимость ряда не сильно улучшилась. Это произошло потому, что, к сожалению, у регулярной части коэффициента модифицированного ряда G_{rwn}^L появилось два полюса второго порядка. В этом случае приведённое выше утверждение не работает. Однако его можно обобщить на случай полюсов любого порядка.

Утверждение 2.1.2. Пусть

$$f_n^L(s) = \frac{P_l(s^2, n^2)}{Q_k(s^2, n^2)}, \quad Q_k(s^2, n^2)|_{s=s_{nm}} = 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.1.32)$$

где многочлены $P_l(s^2, n^2)$ и $Q_k(s^2, n^2)$, являются суммами однородных многочленов со старшими степенями l и k соответственно. Пусть полюс $s_{n\alpha}$ является полюсом наивысшего порядка, равного $l_{n\alpha}$, среди всех полюсов s_{nm} .

Тогда

$$|f_n(\tau)| = O\left(n^{l_{na} - 2(k-l)}\right), n \rightarrow \infty. \blacksquare \quad (2.1.33)$$

Доказательство этого утверждения непосредственно следует из формулы (2.1.6). ■

Применяя утверждение 2.1.2. к регулярной части G_{rwn}^L , получаем

$$|G_{rwn}(\tau)| = O(n^{-2}), n \rightarrow \infty. \quad (2.1.34)$$

Таким образом, применение этого способа, улучшило свойства регулярной части ряда в смысле того, что на основании признака Вейерштрасса [185] регулярная часть теперь сходится абсолютно и равномерно, однако это не улучшило скорость сходимости.

2.2. Двумерная функция влияния (разложение в ряды на переменном интервале)

Применим другой способ, основанный на связи интегрального преобразования Фурье с рядом Фурье при учёте конечной скорости распространения нормальных перемещений по оболочке.

Для этого нам понадобится предложение [160, 166].

Утверждение 2.2.1. Пусть задана такая функция $f(\alpha, \tau)$, что $f(\alpha, \tau) \equiv 0$ при $|\alpha| > T(\tau)$. Тогда она есть сумма ряда

$$f(\alpha, \tau) = \frac{H[T(\tau) - |\alpha|]}{2T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f^F\left(\frac{\pi n}{T}, \tau\right) e^{i\frac{\pi n}{T}\alpha}, \quad (2.2.1)$$

где $f^F\left(\frac{\pi n}{T}, \tau\right)$ – преобразование Фурье функции $f(\alpha, \tau)$ по переменной α , q – параметр этого преобразования:

$$f^F(q, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \tau) e^{-iq\alpha} d\alpha = \int_{-T}^T f(\alpha, \tau) e^{-iq\alpha} d\alpha. \quad (2.2.2)$$

Доказательство. Рассмотрим разложение функции $f(\alpha, \tau)$ в ряд Фурье на интервале $\alpha < L$ полагая, что $L \geq T(\tau)$:

$$f(\alpha, \tau) = \frac{1}{2T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{i\frac{\pi n}{T}\alpha} \int_{-T}^T f(\alpha, \tau) e^{-i\frac{\pi n}{T}\alpha} d\alpha \right]. \quad (2.2.3)$$

Сравнивая (2.2.3) с (2.2.2) видно, что коэффициенты этого ряда есть ни что иное как значения преобразования Фурье в точках $q_n = \frac{\pi n}{T}$. Отсюда и из того факта, что $f(\alpha, \tau) \equiv 0$ при $|\alpha| > T(\tau)$ и следует формула (2.2.1). ■

Замечание 2.2.1. Формула (2.2.1) является формулой обратного преобразования Фурье для функций, удовлетворяющих условию утверждения 2.2.1. ■

Замечание 2.2.2. Если к функции $f(\alpha, \tau)$, представленной в виде разложения (2.2.3), требуется применить интегральное преобразование Лапласа по времени τ , то полуширину интервала разложения $T(\tau)$ при этом следует полагать постоянной, т.к. сумма этого ряда не меняется при любом $L = \text{const} \geq T(\tau)$. Это же справедливо и в отношении операций почленного дифференцирования или интегрирования ряда (2.2.3) по времени. ■

Замечание 2.2.3. Неопределенность при $T=0$ в формуле (2.2.1) раскрывается следующим образом.

Преобразование Фурье функции $f(\alpha, \tau)$ в условиях утверждения 2.2.1 имеет вид

$$f^F(q, \tau) = \int_{-T}^T f(\alpha, \tau) e^{-iq\alpha} d\alpha \quad (2.2.4)$$

Применим к интегралу в (2.2.4) теорему о среднем

$$f^F(q, \tau) = f(\xi, \tau) \int_{-T}^T e^{-iq\alpha} d\alpha = 2 \frac{f(\xi, \tau)}{q} \sin qT, \quad \xi \in [-T, T]. \quad (2.2.5)$$

Подставляя (2.2.5) в (2.2.1), имеем

$$\begin{aligned} & f(\alpha, \tau) = \\ & = H[T(\tau) - |\alpha|] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \tau)}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{T}\right) e^{i\frac{\pi n}{T}\alpha} \leq H[T(\tau) - |\alpha|] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|f(\xi, \tau)|}{\pi n}. \end{aligned}$$

Следовательно

$$f(\alpha, 0) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{H(T - |\alpha|)}{2T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f^F\left(\frac{\pi n}{T}, \tau\right) e^{i\frac{\pi n}{T}\alpha} = 0. \quad (2.2.6) \blacksquare$$

Опираясь на доказанное утверждение, можно построить искомую функцию влияния для оболочки, не прибегая к аппарату рядов Фурье, а используя интегральное преобразование Фурье.

Применим к системе уравнений движения (1.3.7) интегральное преобразование Фурье по угловой координате α и интегральное преобразование Лапласа по времени τ . В результате получим следующую систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}(q) - s^2 \mathbf{E}] \mathbf{g} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{g} = (G_u^{FL}, G_w^{FL}, G_\chi^{FL})^T, \\ \mathbf{A}(q) = (A_{qij})_{3 \times 3}, \quad \mathbf{b} = (0, -1, 0)^T. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Матрица $\mathbf{A}(q)$ совпадает с матрицей $\mathbf{A}(n)$ из (2.1.4) с заменой n на q : $A_{nij} = A_{qij}$. Поэтому структура решения остаётся такой же как и в (2.1.5) с той же заменой n на q :

$$G_w^{FL}(q, s) = -\frac{P(s^2, q^2)}{R(s^2, q^2)}, \quad (2.2.8)$$

где $P(s^2, q^2)$, $R(s^2, q^2)$ – те же многочлены, что и в формулах (2.1.5).

Как следует из уравнений (1.3.7), скорость нормальных перемещений по оболочке в окружном направлении равна $\eta_2 k$. Поэтому в формуле (2.2.1) переменный интервал разложения T следует принять равным $\eta_2 k \tau$. Используя (2.2.1), имеем

$$\begin{aligned} G_w^L = \frac{H(\eta_2 k \tau - |\alpha|)}{2\eta_2 k \tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{wn}^L(s) e^{i \frac{\pi n}{\eta_2 k \tau} \alpha}, \\ G_{wn}^L(s) = G_w^{FL} \left(\frac{\pi n}{\eta_2 k \tau}, s \right). \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Оригинал коэффициента каждого слагаемого в (2.2.9), как и ранее, можно построить аналитически с применением второй теоремы разложения для преобразования Лапласа. Аналогично (2.1.15) оригинал этого ряда также приводится к виду

$$\begin{aligned} G_w(\alpha, \tau) = G_{w0}(\tau) H(\eta_2 k \tau - |\alpha|) + \\ + 2H(\eta_2 k \tau - |\alpha|) \sum_{n=1}^{\infty} G_{wn}(\tau) \cos \frac{\pi n}{\eta_2 k \tau} \alpha \approx \\ \approx G_{w0}(\tau) H(\eta_2 k \tau - |\alpha|) + 2H(\eta_2 k \tau - |\alpha|) \sum_{n=1}^N G_{wn}(\tau) \cos \frac{\pi n}{\eta_2 k \tau} \alpha, \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

где $G_{wn}(\tau)$ – оригиналы по Лапласу коэффициентов $G_{wn}^L(s)$.

На рис. 2.2.1 представлены зависимости от времени функции влияния, построенной по формуле (2.2.10) в точке $\alpha = 0$ при учёте различного числа членов ряда. Штриховая линия соответствует $N = 5$, штрихпунктирная – $N = 10$, сплошная – $N = 20$. Видно, что сходимость построенного ряда существенно улучшилась. Различий между второй и третьей кривой (при $N = 10$ и $N = 20$) почти не видно. В расчётах приняты те же значения геометрических параметров оболочки и материала, что и в п. 2.1 (см. стр. 71).

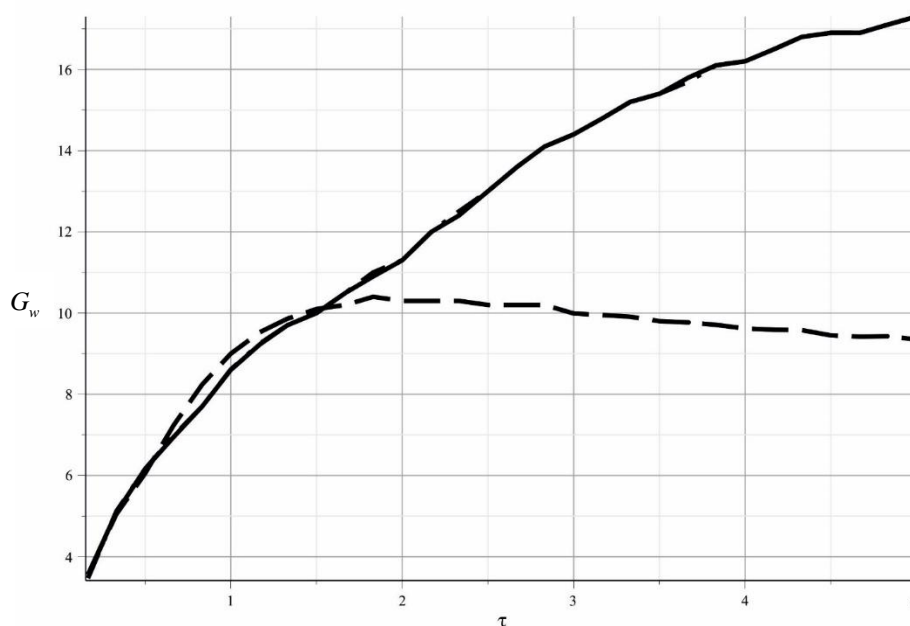


Рис. 2.2.1. Зависимость функции влияния от времени при учёте различного числа членов ряда (2.2.10).

На рис. 2.2.2. изображены распределения функции $1 + 10^{-2} G_w$ по угловой координате в различные моменты времени. Штриховая кривая соответствует $N = 10$, а сплошная – $N = 20$. Для наглядности графики построены в полярной системе координат, связанной с поперечным сечением оболочки. Рис. 2.2.2а соответствует моменту времени $\tau = 1$, 2.2.2б – $\tau = 2$, 2.2.2в – $\tau = 3$. Очевидно, что и здесь различие в результатах практически не заметно.

Следует также обратить внимание на рис. 2.2.3. Здесь представлено сравнение зависимости функции $1 + 10^{-2} G_w$, построенной по формулам (2.1.16) (штриховые кривые) и (2.2.10) (сплошные кривые) от угловой

координаты в различные моменты времени. В формуле (2.1.16) $N=200$, а в (2.2.10) – $N=10$. Рис. 2.2.3а соответствует моменту времени $\tau=1$, 2.2.3б – $\tau=2$, 2.2.3в – $\tau=3$. Видно, что различие в результатах практически отсутствует, что подтверждает высокую эффективность предложенного способа с позиции улучшения скорости сходимости соответствующего ряда.

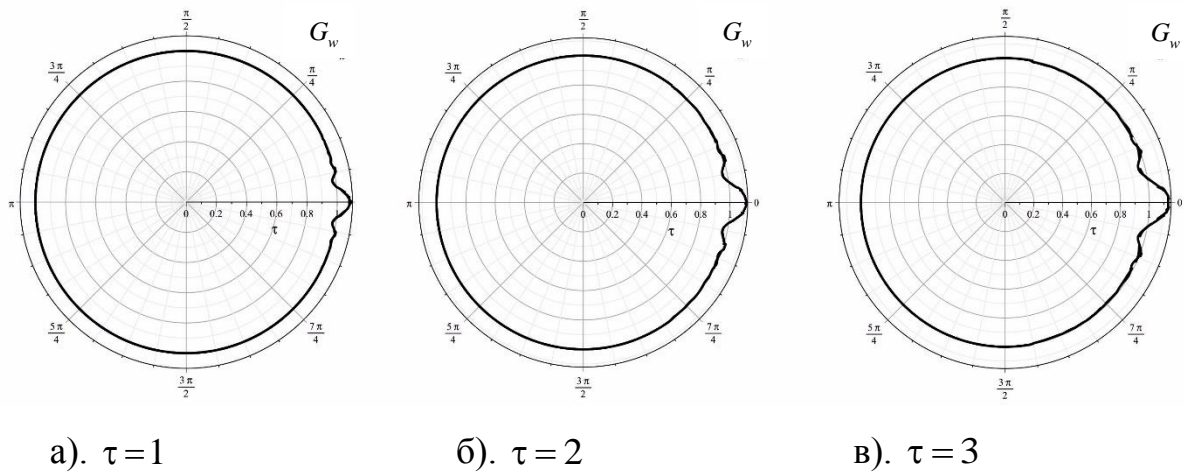


Рис. 2.2.2. Зависимость функции влияния от координаты в разные моменты времени при учете различного числа членов ряда.

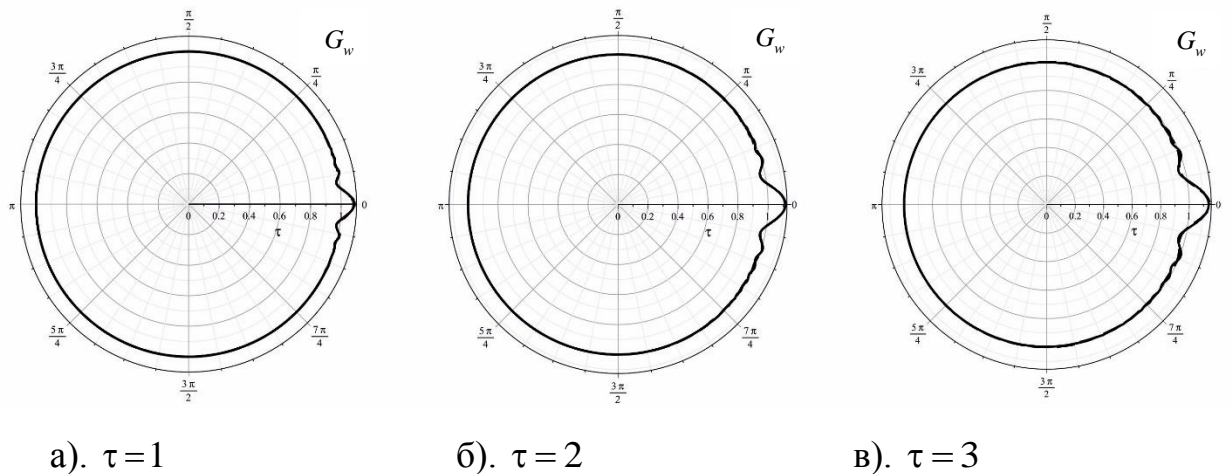


Рис. 2.2.3. Сравнение зависимостей функции влияния, построенной по формулам (2.1.16) (штриховые кривые, $N=200$) и (2.2.10) (сплошные кривые, $N=10$), от координаты в разные моменты времени.

Замечание 2.2.3. Отметим, что построенная функция влияния, хотя и раскрывает основные особенности распространения волновых возмущений в

оболочке, не является самоцелью. Она будет использована в дальнейшем при решении конкретных задач. В силу того, что она выступает в качестве ядра интегрального оператора, связывающего нормальное давление на оболочку с нормальными перемещениями, вообще сходимость соответствующих рядов (2.1.15) и (2.2.10) следует рассматривать не в классическом, а в обобщенном смысле [121], т.е. оценивать сходимость не самих рядов, а результатов решения конкретных задач, в которых эти ряды (функции влияния) использованы. Это будет представлено далее.

Замечание 2.2.4. Метод решения нестационарных задач на основе построенной функции влияния легко позволяет получить решение родственных, но более простых задач, в которых вместо оболочки фигурирует аналогичное по массовым и геометрическим характеристикам абсолютно твердое тело (недеформируемая оболочка). Для этого ряд (2.1.15) или (2.2.10) в соответствующих расчетах необходимо заменить первым слагаемым в формуле (2.1.12).

2.3. Плоская задача о динамике цилиндрической оболочки

Рассмотрим некоторые тестовые задачи, а именно, задачи о воздействии на оболочку заданного нестационарного нормального давления. Алгоритм их решения будет положен в основу методов реализации решений нестационарных контактных задач, кроме того, эти задачи помогут оценить сходимость соответствующих рядов в обобщенном смысле (см. замечание 2.2.3.).

Пусть на внешнюю поверхность первоначально покоящейся цилиндрической оболочки начинает действовать нестационарное давление $p(\alpha, \tau) [H(\alpha - \alpha_1) - H(\alpha - \alpha_2)]$, где α_1 и α_2 – границы носителя нормального давления по угловой координате, которые, в общем случае, могут зависеть от времени: $\alpha_1 = \alpha_1(\tau)$, $\alpha_2 = \alpha_2(\tau)$.

Согласно формуле (1.5.8) и с учетом того, что рассматриваемая задача инвариантна относительно сдвига как по угловой координате α , так и по времени τ (см. п. 1.5.), приходим к следующей связи нормальных перемещений с давлением $p(\alpha, \tau)$:

$$w(\alpha, \tau) = \int_0^\tau dt \int_{\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} G_w(\alpha - \xi, \tau - t) p(\xi, t) d\xi dt, \quad (2.3.1)$$

Таким образом, если задача состоит в определении нормальных перемещений, то её решение, при известной функции влияния, выражается в квадратуре (2.3.1), а соответствующий алгоритм фактически является лишь способом взятия соответствующего интеграла в её правой части.

Рассмотрим сначала такой пример. Пусть $p(\alpha, \tau) = H(\tau)H(\alpha_* - |\alpha|)$, где $0 < \alpha_* < \pi$, $\alpha_* = \text{const}$. Тогда в соответствии с (2.3.1) и (2.1.16) имеем

$$\begin{aligned} w(\alpha, \tau) &\approx w_N(\alpha, \tau) = \\ &= 2\alpha_* \int_0^\tau G_{w0}(\tau - t) dt + 4 \sum_{n=1}^N \frac{\sin n\alpha_* \cos n\alpha}{n} \int_0^\tau G_{wn}(\tau - t) dt, \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

где интегралы по времени также вычисляются аналитически.

На рис. 2.3.1 представлены зависимости нормальных перемещений от времени в точке с угловой координатой $\alpha = 0$ при $\alpha_* = \frac{\pi}{6}$. Штриховая кривая соответствует принятию в формуле (2.3.2) $N = 10$, штрих-пунктирная – $N = 20$, сплошная – $N = 30$. Видно, что сходимость существенно улучшилась в сравнении со сходимостью ряда для функции влияния. Это объясняется операцией интегрирования по времени и координате, что приводит к улучшению дифференциальных свойств суммы ряда и, как следствие, к ускорению сходимости. Параметры оболочки и материала те же, что и в пп. 2.1, 2.2 (см. стр. 71).

На рис. 2.3.2 представлены распределения функции $1 + 0.1w_N(\alpha, \tau)$ по угловой координате. Графики построены в полярной системе координат, связанной с поперечным сечением оболочки. Штриховая кривая соответствует $N = 10$, штрих-пунктирная – $N = 20$, сплошная – $N = 30$.

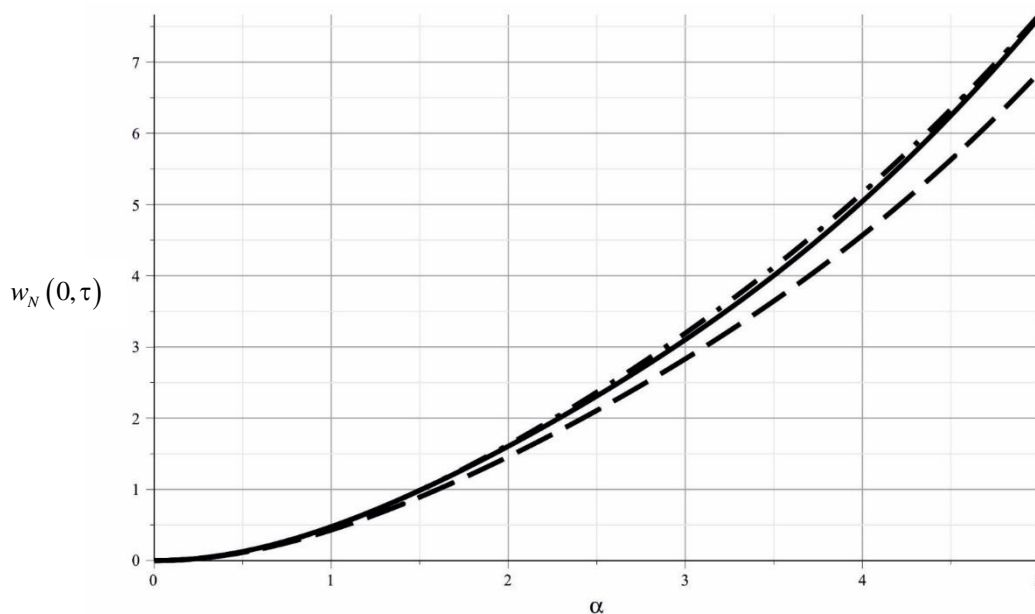


Рис. 2.3.1. Зависимость нормальных перемещений от времени при $\alpha = 0$.

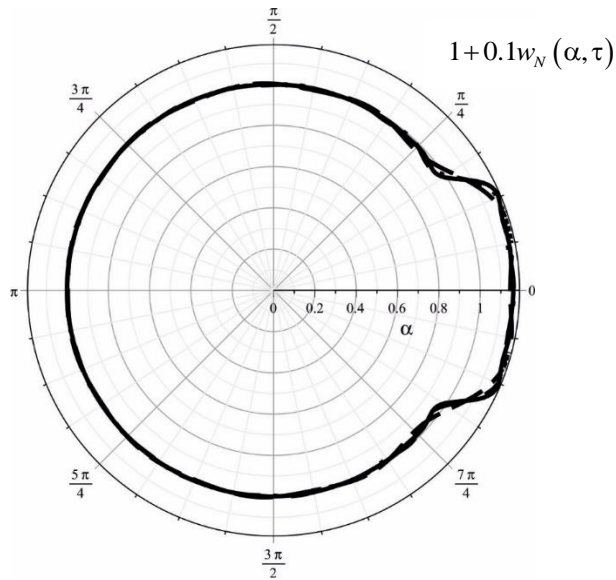


Рис. 2.3.2. Распределение нормальных перемещений по координате α при $\tau = 2$.

Если вместо (2.1.16) использовать выражение (2.2.10), то следует учесть также носитель функции влияния, который задаёт функция Хевисайда $H(\eta_2 k \tau - |\alpha|)$. Кроме того имея в виду, что в дальнейшем будет необходима общая численно-аналитическая формула для вычисления интегралов типа (2.3.1), построим общий алгоритм решения задачи при произвольной функции давления $p(\alpha, \tau)$. При этом предположим, что границы носителя нагрузки α_1 и α_2 зависят от времени (см. (2.3.1)).

Здесь и далее будем учитывать, что носитель функции влияния, вне зависимости от того, по какой из формул (2.1.16) или (2.2.10) она построена, задаётся функцией Хевисайда $H(\eta_2 k \tau - |\alpha|)$. Тогда интеграл в (2.3.1) примет следующий вид

$$w(\alpha, \tau) = \iint_{D_{\alpha, \tau}} G_w(\alpha - \xi, \tau - t) p(\xi, t) d\xi dt, \quad (2.3.3)$$

где $D_{\alpha, \tau} \in R_{\xi, t}^2$ – пространственно-временная область интегрирования, ограниченная кривыми $\xi = \alpha_1(t)$, $\xi = \alpha_2(t)$, $\beta_1(t) = \eta_2 k(t - \tau) + \alpha$, $\beta_2(t) = -\eta_2 k(t - \tau) + \alpha$ в декартовой прямоугольной системе координат $Ot\xi$ (см. рис. 2.3.3).

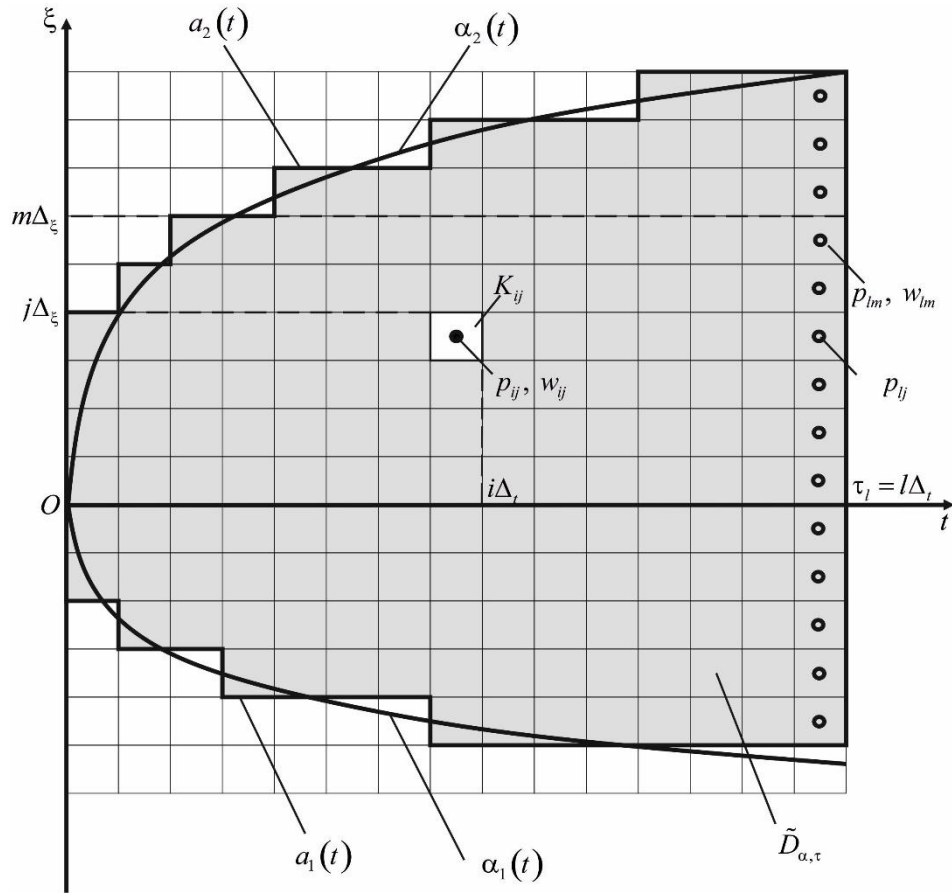


Рис. 2.3.3. Дискретизация пространственно-временной области интегрирования.

Заменим двумерное пространство $R_{\xi,t}^2$ сеткой с шагом Δ_t по времени и Δ_ξ по координате. Пространственной t и временной ξ переменным поставим в соответствие дискретные координаты $t_i = i\Delta_t$, $\xi_j = j\Delta_\xi$. Двумерную область интегрирования $D_{\alpha,\tau}$ заменим сеточной областью

$$\tilde{D}_{\alpha,\tau} = \left\{ (t_i, \xi_j) : 0 < t_i < \tau, a_{1i} \leq \xi_j \leq a_{2i} \right\}, \quad (2.3.4)$$

$$a_{1i} = a_1(t_i) = M_{1i}\Delta_\xi, \quad a_{2i} = a_2(t_i) = M_{2i}\Delta_\xi,$$

$$M_{1i} = \text{rd} \left[\frac{\alpha_1(t_i)}{\Delta_\xi} \right], \quad M_{2i} = \text{rd} \left[\frac{\alpha_2(t_i)}{\Delta_\xi} \right],$$

где $\text{rd}(x)$ – функция округления до ближайшего целого числа.

Функциям двух переменных $w(\xi, t)$, $p(\xi, t)$ поставим в соответствие сеточные аналоги (значения функций в центрах прямоугольников K_{ij})

$$\begin{aligned} w_{ij} &= w\left(\xi_j - \frac{\Delta_\xi}{2}, t_i - \frac{\Delta_t}{2}\right) = w\left(\frac{2j-1}{2}\Delta_\xi, \frac{2i-1}{2}\Delta_t\right), \\ p_{ij} &= p\left(\xi_j - \frac{\Delta_\xi}{2}, t_i - \frac{\Delta_t}{2}\right) = p\left(\frac{2j-1}{2}\Delta_\xi, \frac{2i-1}{2}\Delta_t\right). \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Тогда формулу (2.3.3) можно приближенно заменить следующим сеточным аналогом

$$\begin{aligned} w_{lm} &= \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{j=M_{1i}+1}^{M_{2i}} J_{ij}^{lm} p_{ij} + \sum_{j=M_{1l}+1}^{M_{2l}} J_{lj}^{lm} p_{lj}, \\ J_{ij}^{lm} &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} G_w(\alpha_m - \xi, \tau_l - t) d\xi dt, \\ \alpha_m &= m\Delta\xi, \tau_l = l\Delta t, m = \overline{M_{1l}+1, M_{2l}}. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

где J_{ij} – интегралы по элементарным прямоугольникам K_{ij} (см. рис. 2.2.9).

Заметим, что исходя из структуры функции влияния G_w все интегралы в (2.3.6) могут быть вычислены аналитически с использованием формулы Ньютона-Лейбница. Однако далее нам будут встречаться такие функции влияния, неопределенный интеграл от которых не выражается через элементарные функции. Поэтому, исходя из требования унификации предложенного метода, для вычисления интегралов J_{ij} будем использовать численную формулу, основанную на методе Симпсона. Для этого (см. рис. 2.3.4) удобно отобразить прямоугольник K_{ij} на «стандартный» квадрат $K_1 = \{(u, v) : u \in [-1, 1], v \in [-1, 1]\}$:

$$K_{ij} \rightarrow K_1 : \begin{cases} 2t = (u + 2i - 1)\Delta t, & |u| \leq 1; \\ 2\xi = (v + 2j - 1)\Delta \xi, & |v| \leq 1. \end{cases} \quad (2.3.7)$$

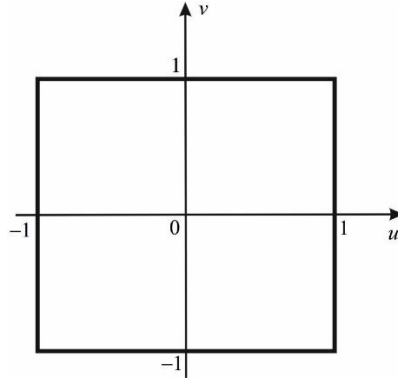


Рис. 2.3.4. Элементарный квадрат K_1 .

Тогда, для J_{ij}^{lm} получаем следующую формулу

$$\begin{aligned}
 J_{ij}^{lm} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G_w \left[\frac{2(m-j)-v+1}{2} \Delta_\xi, \frac{2(l-i)-u+1}{2} \Delta_t \right] dudv \approx \\
 &\approx \frac{\Delta_\xi \Delta_t}{36} \left[G_{w00} + G_{w22} + G_{w02} + G_{w20} + \right. \\
 &\quad \left. + 4(G_{w10} + G_{w21} + G_{w12} + G_{w01}) + 16G_{w11} \right], \tag{2.3.8}
 \end{aligned}$$

$$G_{w\alpha\beta} = G_w(v_\alpha, u_\beta), \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2,$$

$$u_0 = (n-i+1)\Delta_t, \quad u_1 = \frac{2(n-i)+1}{2}\Delta_t, \quad u_2 = (n-i)\Delta_t,$$

$$v_0 = (m-j+1)\Delta_\xi, \quad v_1 = \frac{2(m-j)+1}{2}\Delta_\xi, \quad v_2 = (m-j)\Delta_\xi.$$

На рис. 2.3.5 представлены нормальные перемещения оболочки в ответ на действие нестационарного давления вида

$$p = 0.5e^{-\tau} H(\tau) [H(\alpha + 0.5\tau) - H(\alpha - \tau)].$$

Расчёт проводился по формуле (2.3.6). Параметры оболочки и материала те же, что и в пп. 2.1, 2.2 (см. стр. 71). Размер шагов по времени и по координате: $\Delta_t = 0.1$, $\Delta_\xi = 0.06$. Сплошная кривая соответствует моменту времени $\tau = 0.5$, штриховая – $\tau = 1$, штрих-пунктирная – $\tau = 2$.

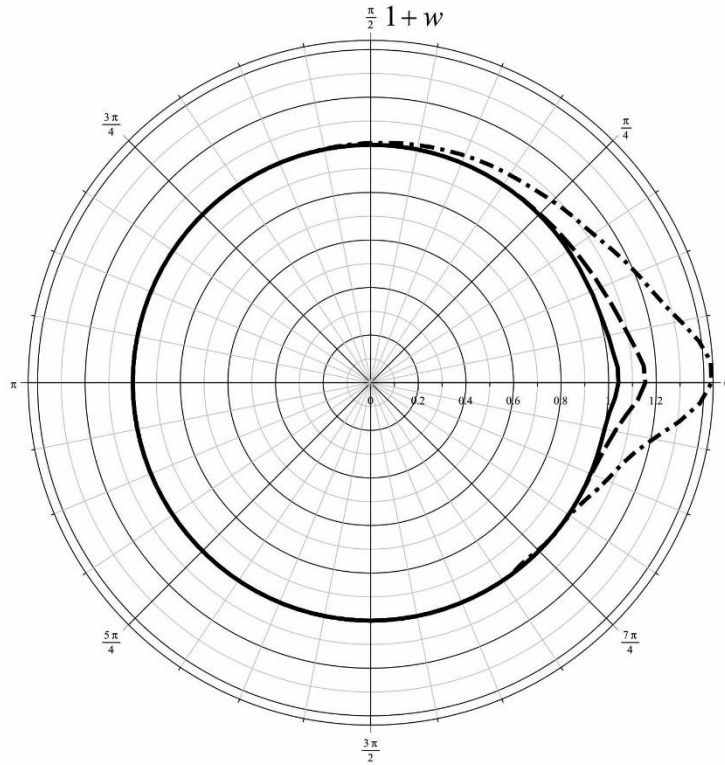


Рис. 2.3.5. Нормальные перемещения оболочки.

Отметим, что в случае контактных задач, когда неизвестным является контактное давление $p(\alpha, \tau)$, из формулы (2.3.6) формируется система алгебраических уравнений, неизвестными в которой являются значения давления p_{lj} , $j = \overline{M_{1l} + 1, M_{2l}}$ на текущем временном слое τ_l . В векторно-матричной форме записи указанная система уравнений имеет вид

$$\mathbf{W}_l = \mathbf{J}_l \mathbf{p}_l, \quad (2.3.9)$$

$$\mathbf{W}_l = (\tilde{w}_{lm})_{M_l \times 1}, \quad \tilde{w}_{lm} = w_{lm} - \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{j=M_{i+1}}^{M_{2i}} J_{ij}^{lm} p_{ij},$$

$$\mathbf{J}_l = (J_{lj}^{lm})_{M_l \times M_l}, \quad \mathbf{p}_l = (p_{lj})_{M_l \times 1}, \quad M_l = M_{2l} - M_{1l}.$$

Решение этой системы

$$\mathbf{p}_l = \mathbf{J}_l^{-1} \mathbf{W}_l \quad (2.3.10)$$

представляет собой вектор \mathbf{p}_l значений давления в центрах элементарных квадратов K_{lj} (в момент времени τ_l).

Предложенная приближенная сеточная схема аппроксимации интегрального уравнения (2.3.3) является неявной, что имеет определенные преимущества над явными схемами решения. В частности, она является абсолютно устойчивой [132], в то время как явные схемы – условно устойчивы (для обеспечения сходимости требуется выполнение дополнительных условий типа условия Куранта-Фридрихса-Леви [132]).

2.4. Пространственная нестационарная функция влияния для цилиндрической оболочки

Пространственная функция влияния для цилиндрической оболочки представляет собой нормальные перемещения как решение системы уравнений (1.3.3) с нулевыми начальными условиями при воздействии на поверхность упругой оболочки вектора давления вида

$$\mathbf{p} = (0, 0, \delta(\alpha)\delta(z)\delta(\tau), 0, 0)^T.$$

При этом будем использовать аналогичные п. 2.1 обозначения:

$$\begin{aligned} u(\alpha, z, \tau) &= G_u(\alpha, z, \tau), \quad v(\alpha, z, \tau) = G_v(\alpha, z, \tau), \\ w(\alpha, z, \tau) &= G_w(\alpha, z, \tau), \quad \chi_\alpha = G_{\chi_1}(\alpha, z, \tau), \quad \chi_z = G_{\chi_2}(\alpha, z, \tau). \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

В дальнейшем будет использована только функция влияния $G_w(\alpha, z, \tau)$, построение которой и рассмотрено далее. Другие функции влияния могут быть построены аналогично.

Для решения задачи разложим искомые и заданные функции в тригонометрические ряды Фурье по угловой координате α .

$$\begin{aligned} G_u(\alpha, z, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{un}(z, \tau) \sin n\alpha, \quad G_v(\alpha, z, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{vn}(z, \tau) \cos n\alpha, \\ G_w(\alpha, z, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_{wn}(z, \tau) \cos n\alpha, \quad G_{\chi_1}(\alpha, z, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{\chi_{1n}}(z, \tau) \sin n\alpha, \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

$$G_{\chi_2}(\alpha, z, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{\chi_{2n}}(z, \tau) \cos n\alpha, \quad \delta(\alpha) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\alpha,$$

Подставляя разложения (2.4.2) в (1.3.3) и приравнивая коэффициенты получим:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{G}_n}{\partial \tau^2} = L_n \cdot \mathbf{G}_n + \delta_n, L_n = (L_{nij})_{5 \times 5}, \mathbf{G}_n = (G_{un}, G_{vn}, G_{wn}, G_{\chi 1n}, G_{\chi 2n})^T,$$

$$\delta_0 = \left[0, 0, \frac{\delta(z)\delta(\tau)}{2\pi}, 0, 0 \right]^T, \delta_n = \left[0, 0, \frac{\delta(z)\delta(\tau)}{\pi}, 0, 0 \right]^T \quad (n > 0), \quad (2.4.3)$$

$$\mathbf{G}_n|_{\tau=0} = \dot{\mathbf{G}}_n|_{\tau=0} = \mathbf{0},$$

$$L_{n11} = -n^2 + \eta^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right), L_{n12} = -n(1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial z}, L_{n13} = -n(1 + k\eta^2),$$

$$L_{n14} = n^2 \gamma^2 + \eta^2 k^2, L_{n15} = n\gamma^2(1 - 2\eta^2) \frac{\partial}{\partial z}, L_{n21} = -L_{n12},$$

$$L_{n22} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - n^2 \eta^2, L_{n23} = (1 - 2\eta^2) \frac{\partial}{\partial z}, L_{n24} = -n\gamma^2 \eta^2 \frac{\partial}{\partial z},$$

$$L_{n25} = n^2 \gamma^2 \eta^2, L_{n31} = L_{n13}, L_{n32} = -L_{n23}, L_{n33} = \eta^2 k^2 \left(-n^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - 1,$$

$$L_{n34} = m\eta^2 k^2, L_{n35} = \eta^2 k^2 \frac{\partial}{\partial z}, L_{n41} = \gamma^{-2} L_{n14}, L_{n42} = -\gamma^{-2} L_{n24}, L_{n43} = \gamma^{-2} L_{n34},$$

$$L_{n44} = -n^2 + \eta^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \gamma^{-2} \right), L_{n45} = L_{n12}, L_{n51} = -\gamma^{-2} L_{n15}, L_{n52} = \gamma^{-2} L_{n25},$$

$$L_{n53} = -\gamma^{-2} L_{n35}, L_{n54} = -L_{n12}, L_{n55} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \eta^2 (n^2 + k^2 \gamma^{-2}), \eta_1 = 1, \eta_2 = \eta.$$

В системе (2.4.3) при $n = 0$ из пяти уравнений нетривиальными являются только второе, третье и пятое.

Применяем к (2.4.3) интегральные преобразования Фурье по координате z и Лапласа по времени (значок « F » у функции обозначает ее трансформанту по Фурье, « L » – трансформанту по Лапласу, q и s – параметры преобразования Фурье и Лапласа).

После преобразования приходим к системе алгебраических уравнений относительно изображений по Фурье и Лапласу коэффициентов разложений (2.4.2):

$$\mathbf{B}(n) \cdot \mathbf{G}_n^{FL} + \delta_n^{FL} = 0, \mathbf{B}(n) = (B_{nij})_{5 \times 5}, \quad (2.4.4)$$

$$\delta_0 = \left[0, 0, \frac{1}{2\pi}, 0, 0 \right]^T, \delta_n = \left[0, 0, \frac{1}{\pi}, 0, 0 \right]^T \quad (n > 0),$$

$$B_{n11} = -n^2 - \eta^2(q^2 - k^2) - s^2, B_{n12} = iqn(1 - \eta^2), B_{n13} = -n(1 + k^2\eta^2),$$

$$B_{n14} = n^2\gamma^2 + \eta^2k^2, B_{n15} = -iqn\gamma^2(1 - 2\eta^2), B_{n21} = -B_{n12},$$

$$B_{n22} = -q^2 - n^2\eta^2 - s^2, B_{n23} = -iq(1 - 2\eta^2), B_{n24} = -iqn\gamma^2\eta^2,$$

$$B_{n25} = n^2\gamma^2\eta^2, B_{n31} = B_{n13}, B_{n32} = -B_{n23}, B_{n33} = -\eta^2k^2(n^2 + q^2) - 1 - s^2,$$

$$B_{n34} = m\eta^2k^2, B_{n35} = -iq\eta^2k^2, B_{n41} = \gamma^{-2}B_{n14}, B_{n42} = -\gamma^{-2}B_{n24}, B_{n43} = \gamma^{-2}B_{n34},$$

$$B_{n44} = -n^2 - \eta^2(q^2 + k^2\gamma^{-2}) - s^2, B_{n45} = B_{n12}, B_{n51} = -\gamma^{-2}B_{n15}, B_{n52} = \gamma^{-2}B_{n25},$$

$$B_{n53} = -\gamma^{-2}B_{n35}, B_{n54} = -B_{n12}, B_{n55} = -q^2 - \eta^2(n^2 + k^2\gamma^{-2}) - s^2.$$

Изображения коэффициентов разложений искомой функции влияния G_{wn}^{FL} , как решения (2.4.4) обладают следующей структурой

$$G_{wn}^{FL}(q, s) = \frac{\sum_{j=1}^4 P_j(q^2, s^2, n^2)}{\sum_{l=1}^5 R_l(q^2, s^2, n^2)}, \quad (2.4.5)$$

где $P_j(q, s, n)$ и $R_l(q, s, n)$ – однородные многочлены степени j и l соответственно с коэффициентами, зависящими от безразмерных параметров η , γ , k и номера члена ряда n . Их конкретный вид не приводится ввиду их громоздкости.

Для построения оригиналов коэффициентов (2.4.5) применим аналитический способ построения оригиналов, основанный на разложении в ряд Фурье на переменном интервале. Аналогично (2.2.10) получаем формулу обращения:

$$G_{wn}(z, \tau) = \frac{1}{2l(\tau)} G_{wn}^{FL^{-1}}(0, s) H[l(\tau) - |z|] + \quad (2.4.6)$$

$$+ \frac{1}{l(\tau)} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ G_{wn}^{FL^{-1}} \left[\frac{\pi m}{l(\tau)}, s \right] \cos \left[\frac{\pi m z}{l(\tau)} \right] \right\} H[l(\tau) - |z|], \quad l(\tau) = \eta k \tau.$$

Обратное преобразование Лапласа в (2.4.6) строится с помощью вычетов.

Рассмотрим цилиндрическую оболочку радиуса $R=1$ м, и толщины $h=5$ мм, выполненную из стали: $\rho=7800$ кг/м³, $\lambda=1.15 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu=7.69 \cdot 10^{10}$ Па. Этим характеристикам соответствуют следующие безразмерные параметры: $\eta=0.53$, $\gamma=0.005$.

Оригиналы коэффициентов ряда разложения функции влияния определяются формулой (2.4.6). Как следует из (2.4.5), они имеют порядок $O(n^{-2})$ при $n \rightarrow \infty$, поэтому можно ожидать хорошую сходимость.

Для практической оценки сходимости ряда исследуем функцию влияния $G_w(\alpha, z, \tau)$, ограничиваясь первыми десятью и двадцатью членами ряда (2.4.6) и с учетом первых одиннадцати членов ряда (2.4.2):

$$G_{w,10,10}(\alpha, z, \tau) = \sum_{n=0}^{10} G_{wn}^{(10)}(z, \tau) \cos n\alpha, \quad G_{w,10,20}^{(20)}(\alpha, z, \tau) = \sum_{n=0}^{10} G_{wn}^{(20)}(z, \tau) \cos n\alpha.$$

На рисунках 2.4.1 изображены графики функций $1+10^{-2}G_{w,10,10}$ и $1+10^{-2}G_{w,10,20}$ в моменты времени $\tau=1, \tau=3$ и $\tau=5$. Штриховые кривые соответствуют функции $1+10^{-2}G_{w,10,10}$, а сплошные кривые соответствуют функции $1+10^{-2}G_{w,10,20}$. Графики построены в полярной системе координат, связанной с сечением оболочки $z=0$. На графиках заметно небольшое отличие лишь в момент времени $\tau=5$.

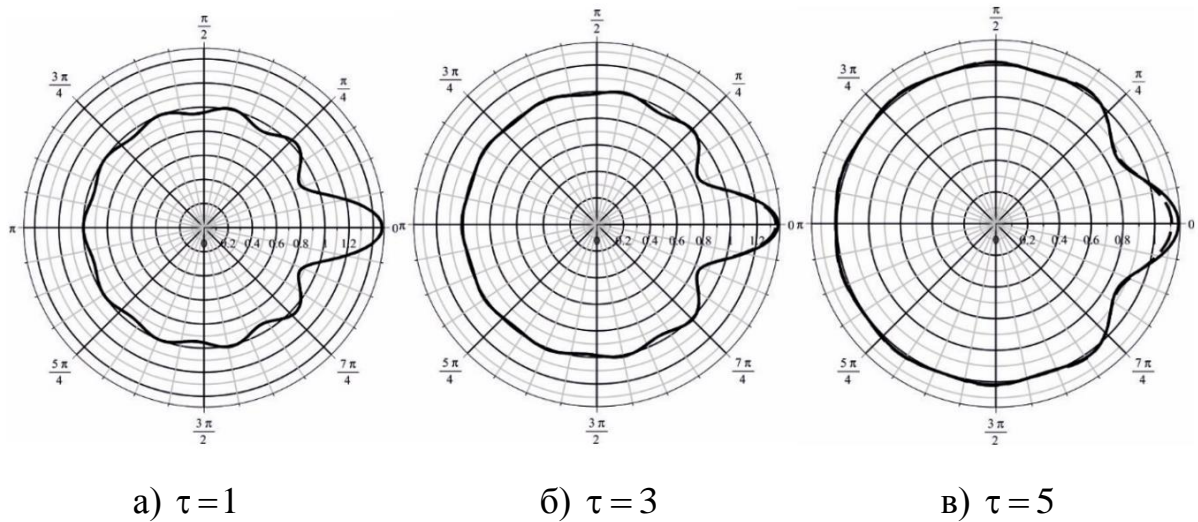


Рис. 2.4.1. Функция влияния в различные моменты времени.

Ограничиваясь первыми десятью членами ряда (2.4.6), исследуем поведение построенной функции влияния при учете различного числа членов ряда (2.4.2). Рассмотрим функции $G_{w,30,10}(\alpha, z, \tau) = \sum_0^{30} G_{wn}^{(10)}(z, \tau) \cos n\alpha$ и $G_{w,40,10}(\alpha, z, \tau) = \sum_0^{40} G_{wn}^{(10)}(z, \tau) \cos n\alpha$ которые соответствуют учету первых 31 и 41 первых членов ряда (2.4.2) с учетом первых десяти членов ряда (2.4.6).

На рисунке 2.4.2 отображены графики функций $1 + 10^{-2} G_{w,30,10}(\alpha, z, \tau)$ и $1 + 10^{-2} G_{w,40,10}(\alpha, z, \tau)$ в моменты времени $\tau = 1, \tau = 4, \tau = 6$ в полярной системе координат, связанной с сечением оболочки $z = 0$. Штриховые кривые соответствуют функции $1 + 10^{-2} G_{w,30,10}(\alpha, z, \tau)$, а сплошные кривые функции $1 + 10^{-2} G_{w,40,10}(\alpha, z, \tau)$. Видно, что различий в результатах практически не наблюдается. Относительная погрешность при вычислениях функций $1 + 10^{-2} G_{w,30,10}(\alpha, z, \tau)$ и $1 + 10^{-2} G_{w,40,10}(\alpha, z, \tau)$ была равна 0.08% по норме

Чебышёва. Аналогичные результаты получаются и при построении двумерных пространственно–временных графиков функции влияния.

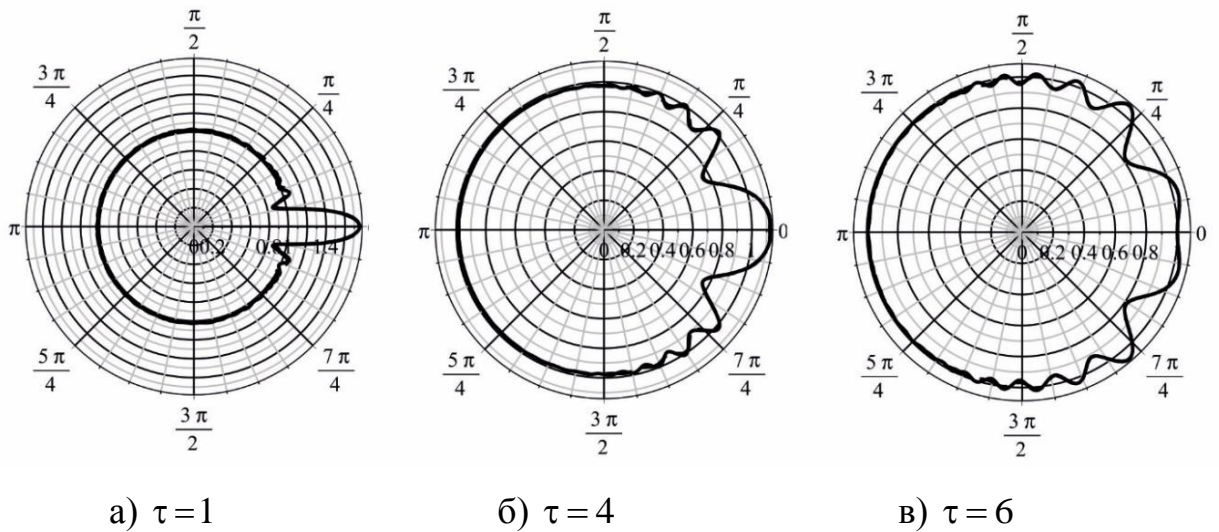
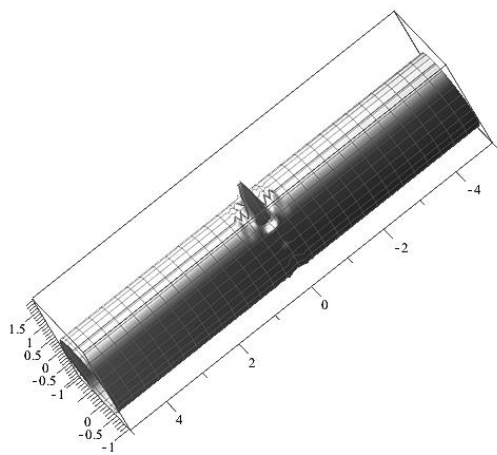


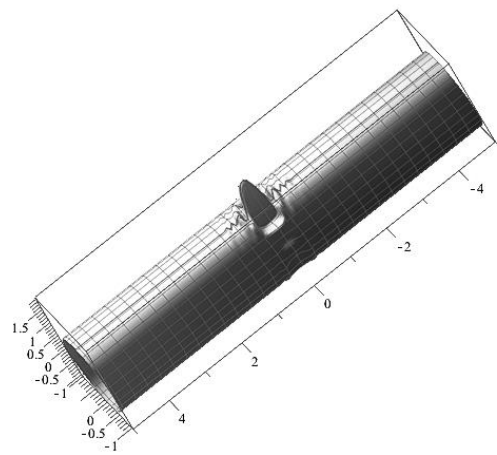
Рис. 2.4.2. Анализ практической сходимости ряда (2.4.2).

Исходя из проведенного анализа сходимости, в дальнейших расчетах в качестве функции влияния для оболочки примем функцию $G_{w,30,10}(\alpha, z, \tau)$. В дальнейшем числовые индексы для сокращения записи опускаем, считая что $G_w(\alpha, z, \tau) = G_{w,30,10}(\alpha, z, \tau)$.

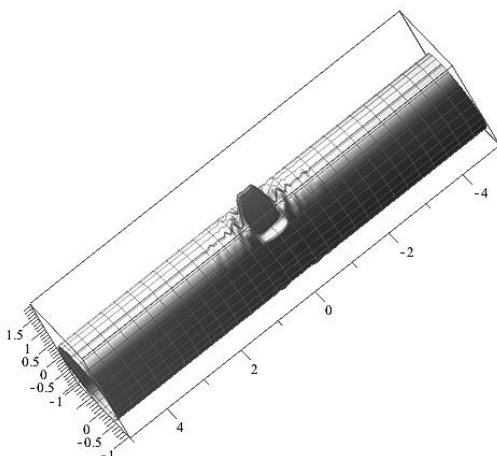
На рисунке 2.4.3 приведены пространственные графики для функции влияния $G_w(\alpha, z, \tau)$ в различные моменты времени.



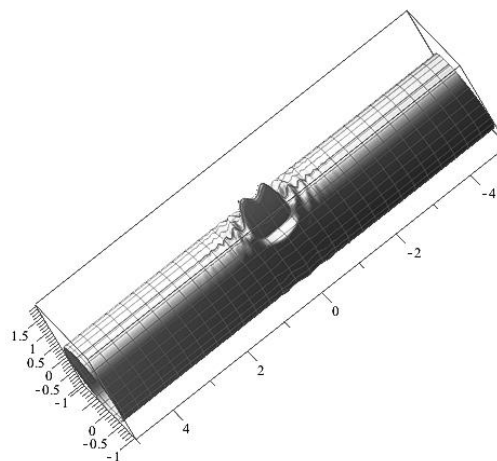
$\tau = 1$



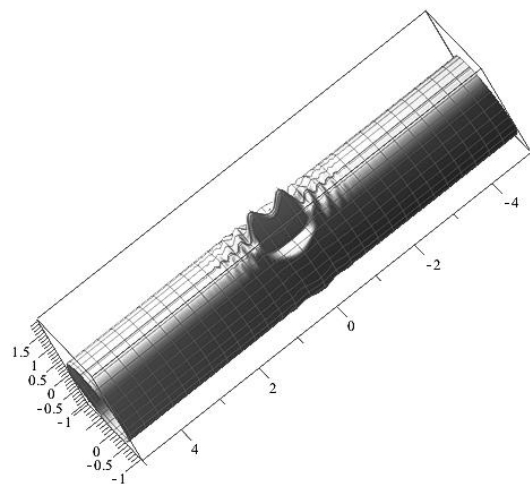
$\tau = 2$



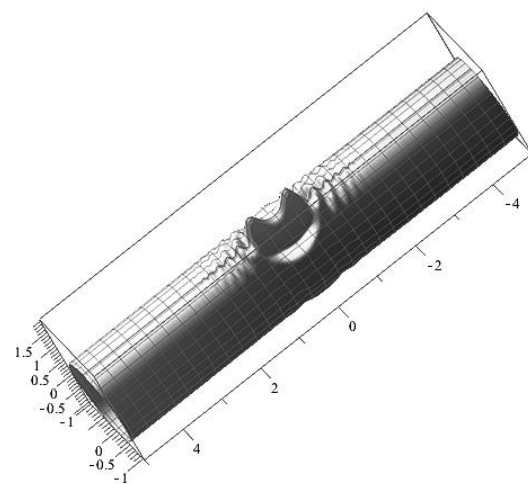
$\tau = 3$



$\tau = 4$



$\tau = 5$



$\tau = 6$

Рис. 2.4.3. Пространственные распределения функции влияния.

2.5. Пространственная задача о динамике цилиндрической оболочки

Аналогично п. 2.3 рассмотрим нестационарную задачу о воздействии распределённого давления на боковую поверхность оболочки.

Пусть на покоящуюся оболочку в начальный момент времени начинает воздействовать нестационарное давление вида:

$$\begin{aligned}
 P(\alpha, z, \tau) = & \\
 = \sin\left(\frac{\pi\alpha}{\alpha_*}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{z_*}\right) \cdot [H(z) - H(z - z_*)] \times & \quad (2.5.1) \\
 \times [H(\alpha) - H(\alpha - \alpha_*)] \cdot H(\tau), &
 \end{aligned}$$

что соответствует внезапному приложению к оболочке давления, распределенного по области $D = \{(\alpha, z) : 0 \leq \alpha \leq \alpha_*, 0 \leq z \leq z_*\}$ по закону

$$\sin\left(\frac{\pi\alpha}{\alpha_*}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{z_*}\right).$$

Согласно п. 1.5, нормальные перемещения оболочки определяются по формуле

$$w(\alpha, z, \tau) = \int_0^\tau dt \iint_D G_w(\alpha - \xi, z - \zeta, \tau - t) p(\xi, \zeta, t) dS, \quad (2.5.2)$$

в которой поверхностный интеграл с учетом геометрии области D заменяется повторным интегралом:

$$w(\alpha, z, \tau) = \int_0^\tau dt \int_0^{\alpha_*} d\beta \int_0^{z_*} G_w(z - \xi, \alpha - \beta, \tau - t) P(\xi, \beta, t) d\xi. \quad (2.5.3)$$

Для вычисления интеграла (2.5.3) используем квадратурную формулу метода прямоугольников:

$$w(\alpha, z, \tau) \approx \Delta_t \Delta_\xi \Delta_\beta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^K G_{ijk}(\alpha, z, \tau) P_{ijk},$$

$$K = \left[\frac{\tau}{\Delta_t} \right], \quad \Delta_\xi = \frac{z_*}{M}, \quad \Delta_\beta = \frac{\alpha_*}{N},$$

$$G_{ijk}(\alpha, z, \tau) = G_w(\alpha - i\Delta_\beta, z - j\Delta_\xi, \tau - k\Delta_t), \quad P_{ijk} = (i\Delta_\beta, j\Delta_\xi, k\Delta_t),$$

где $\left[\frac{\tau}{\Delta_t} \right]$ – обозначает целую часть числа.

В расчетах примем $\alpha_* = \frac{\pi}{6}$, $z_* = 1$. Параметры материала и оболочки те же, что и в предыдущем пункте. На рисунке 2.5.1а показаны графики распределений нормальных перемещений по угловой координате α в момент времени $\tau = 2$ при различных значениях N и M . Сплошная кривая соответствует случаю $N = 10, M = 10$; штриховая – $N = 20, M = 20$; штрих–пунктирная – $N = 30, M = 30$. Графики построены в полярной системе координат, связанной с сечением оболочки $z = 0.5$. На рисунке 2.5.1б представлены аналогичные распределения нормальных перемещений по координате z при $\alpha = 0$. Из анализа результатов видно, что во втором и третьем случаях результаты практически идентичны, поэтому в дальнейших расчетах по формуле (2.4.6) принимается $N = 20, M = 20$.

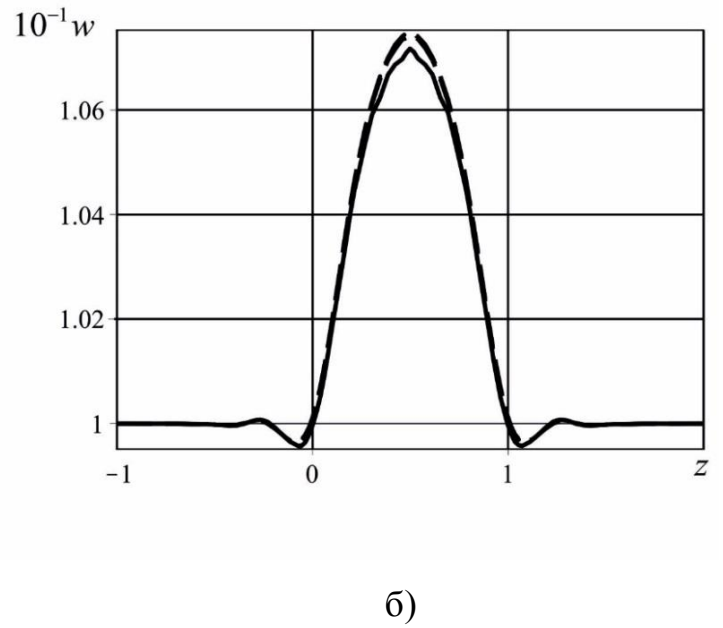
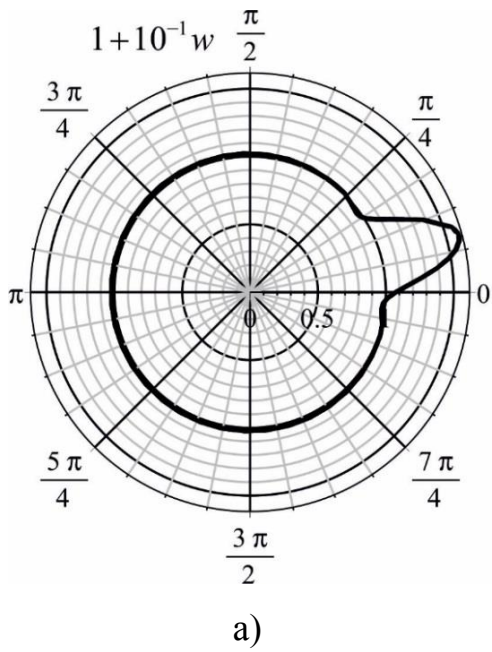


Рис. 2.5.1.

На рисунке 2.5.2а представлены распределения нормальных перемещений оболочки в сечении $z=0.5$ в различные моменты времени. Сплошная кривая соответствует моменту времени $\tau=1$, штриховая – $\tau=1.5$, штрих–пунктирная – $\tau=2$. Распределения нормальных перемещений по координате z при $\alpha=0$ приведено на рисунке 2.5.5б.

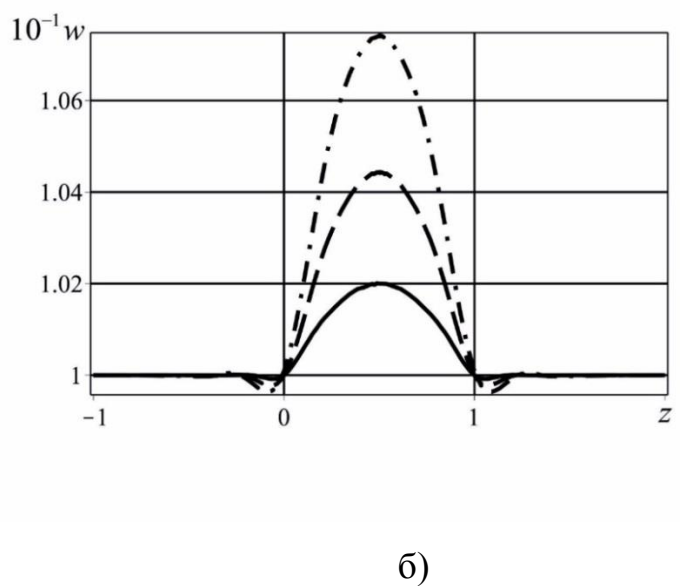
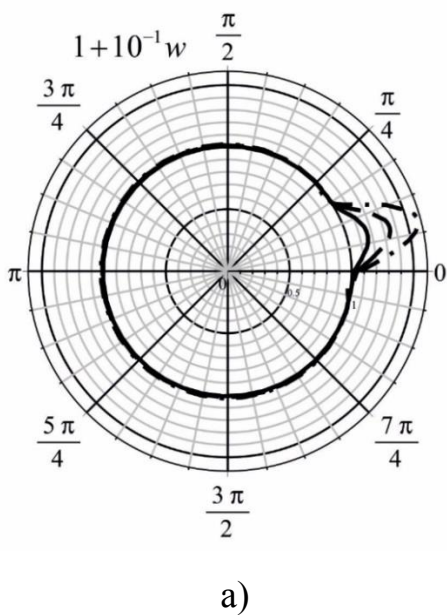
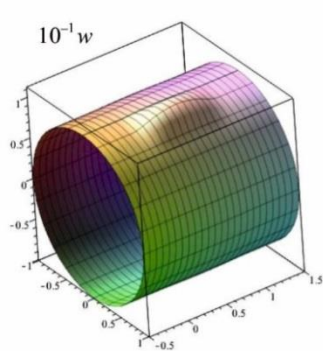
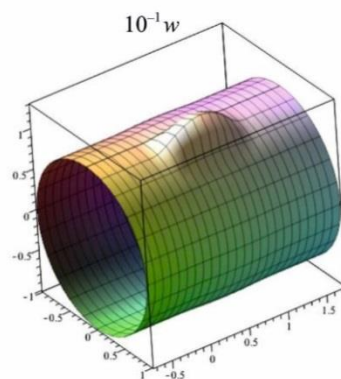


Рис. 2.5.2.

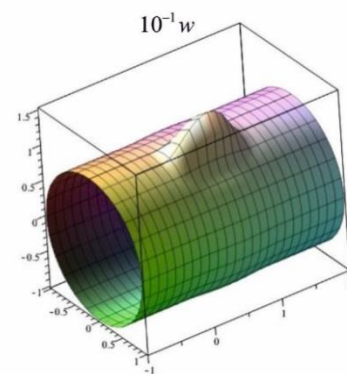
Пространственные распределения нормальных перемещений по поверхности оболочки в различные моменты времени представлены на рисунках 2.5.3а, 2.5.3б, 2.5.3в. Рисунок 2.5.3а соответствует моменту времени $\tau=1$, 2.5.3б – $\tau=1.5$, 2.5.3в – $\tau=2$.



а)



б)



в)

Рис. 2.5.3.

2.6. Сравнение методов обращения интегральных преобразований

Наряду с предложенным методом обращения интегральных преобразований Фурье и Лапласа с помощью разложения в ряд Фурье на переменном интервале, рассмотрим некоторые другие численно-аналитические методы и на примере пространственной функции влияния (п. 2.5) проведем сравнение результатов.

1. *Метод численного обращения преобразования Фурье, основанный на квадратурной формуле средних прямоугольников, в сочетании с аналитическим обращением преобразования Лапласа.*

Пусть $f^{FL}(q, s)$ – изображение вида (2.4.5) (зависимость от n опущена).

При заданном значении $q = q_*$ обратное преобразование Лапласа $f^{FL^{-1}}(q_*, \tau)$ строится с помощью вычетов.

В силу симметрии по координате z , задача сводится к вычислению интеграла обратного косинус–преобразования Фурье:

$$f(z, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f^{FL^{-1}}(q, \tau) \cos qz dq. \quad (2.6.1)$$

Представим интеграл (2.6.1) в виде суммы

$$f(z, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 f^{FL^{-1}}(q, \tau) \cos qz dq + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} f^{FL^{-1}}(q, \tau) \cos qz dq.$$

Во втором интеграле сделаем замену $p = 1 - q^{-1}$:

$$f(z, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 F(q, \tau) dq,$$

$$F(q, \tau) = f^{FL^{-1}}(q, \tau) \cos qz + \frac{1}{(1-q)^2} f^{FL^{-1}}\left(\frac{1}{1-q}, \tau\right) \cos \frac{1}{1-q} z.$$

Теперь заменим последний интеграл квадратурной формулой метода средних прямоугольников

$$f(z, \tau) \approx \frac{h}{\pi} \sum_{k=1}^K F(q_{k-1/2}, \tau), \quad h = \frac{1}{K}, \quad q_{k-1/2} = h \left(k - \frac{1}{2} \right). \quad (2.6.2)$$

2. Метод численного обращения преобразования Фурье, основанный на квадратурной формуле Филона, в сочетании с аналитическим обращением преобразования Лапласа.

Зададимся некоторым большим положительным числом Q . Несобственный интеграл (2.6.1) приближено заменим определенным интегралом

$$f(z, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f^{FL^{-1}}(q, \tau) \cos qz dq \approx \frac{1}{\pi} \int_0^Q f^{FL^{-1}}(q, \tau) \cos qz dq. \quad (2.6.3)$$

Представим определённый интеграл (2.6.3) в виде суммы интегралов по отрезкам действительной полуоси q

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^Q f^{FL^{-1}}(q, \tau) \cos qz dq = \\ & = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^K \int_{q_{k-1}}^{q_k} f^{FL^{-1}}(q, \tau) \cos qz dq, \quad q_k = kh, \quad h = \frac{Q}{K}. \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

На каждом отрезке функцию $f^{FL^{-1}}(q, \tau)$ заменим линейной аппроксимацией

$$f^{FL^{-1}}(q, \tau) \approx f_{k-1} + \frac{f_k - f_{k-1}}{q_k - q_{k-1}}(q - q_{k-1}), \quad f_k = f^{FL^{-1}}(q_k, \tau). \quad (2.6.5)$$

Подставляя (2.6.5) в (2.6.4) и выполняя интегрирование, приходим к приближенной формуле

$$f(z, \tau) \approx \frac{1}{\pi} \frac{f^{FL^{-1}}(Q, \tau) \sin Qz}{z} + \frac{1}{\pi h z^2} \sum_{k=1}^K \Delta f_k (\cos q_k x - \cos q_{k-1} x), \quad (2.6.6)$$

$$\Delta f_k = f_k - f_{k-1}.$$

Приведем сравнение результатов построения оригиналов коэффициентов ряда (2.4.2), полученных с помощью трёх предложенных методов на примере $G_{w,3}(z, \tau)$

Результат применения метода численного обращения преобразования Фурье, основанный на квадратурной формуле средних прямоугольников, в сочетании с аналитическим обращением преобразования Лапласа представлен на рисунке 2.6.1.

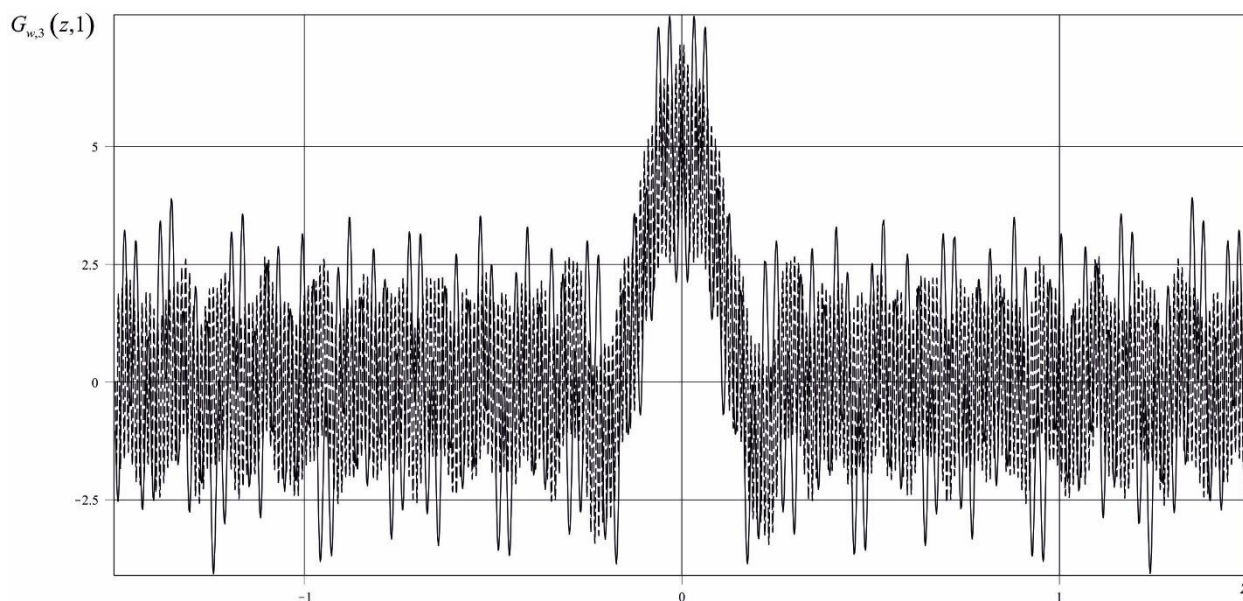


Рис. 2.6.1. Сплошная кривая – 100 шагов, штриховая – 300 шагов разбиения отрезка интегрирования.

Результат применения метода численного обращения преобразования Фурье, основанный на квадратурной формуле Филона, в сочетании с аналитическим обращением преобразования Лапласа представлен на рисунках 2.6.2, 2.6.2. Отметим, что кривые на рис. 2.6.3, построенные при $Q=60$, $K=120$ (сплошная кривая) и при $Q=60$, $K=240$ (пунктирная кривая) практически неотличимы друг от друга.

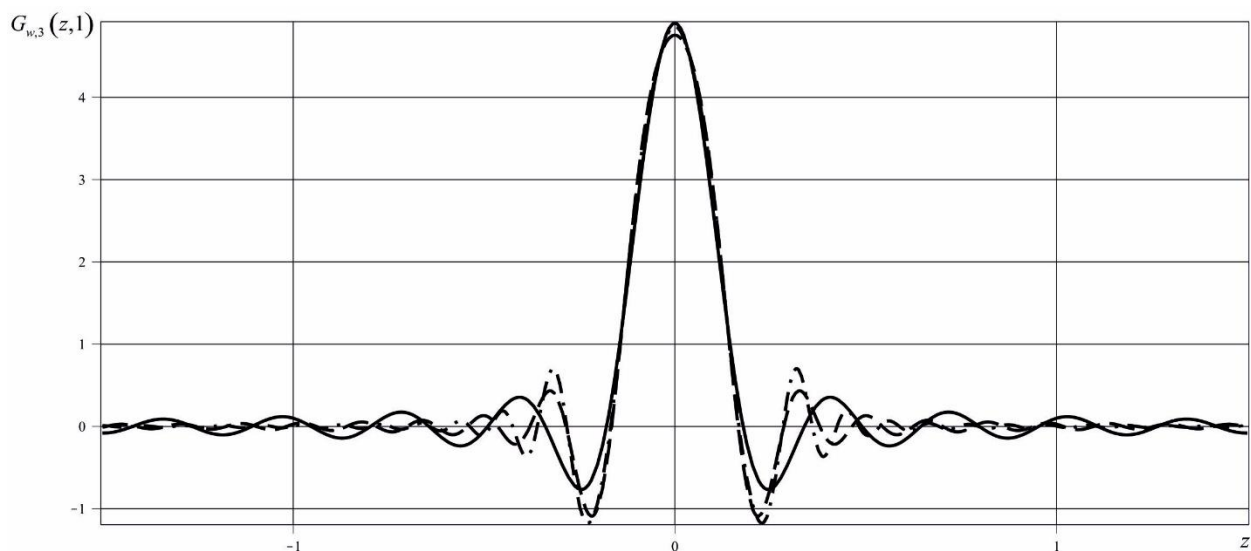


Рис. 2.6.2. Сплошная кривая – $Q = 20, 40$ шагов; штриховая – $Q = 40, 80$ шагов; штрих-пунктирная – $Q = 60, 120$ шагов.

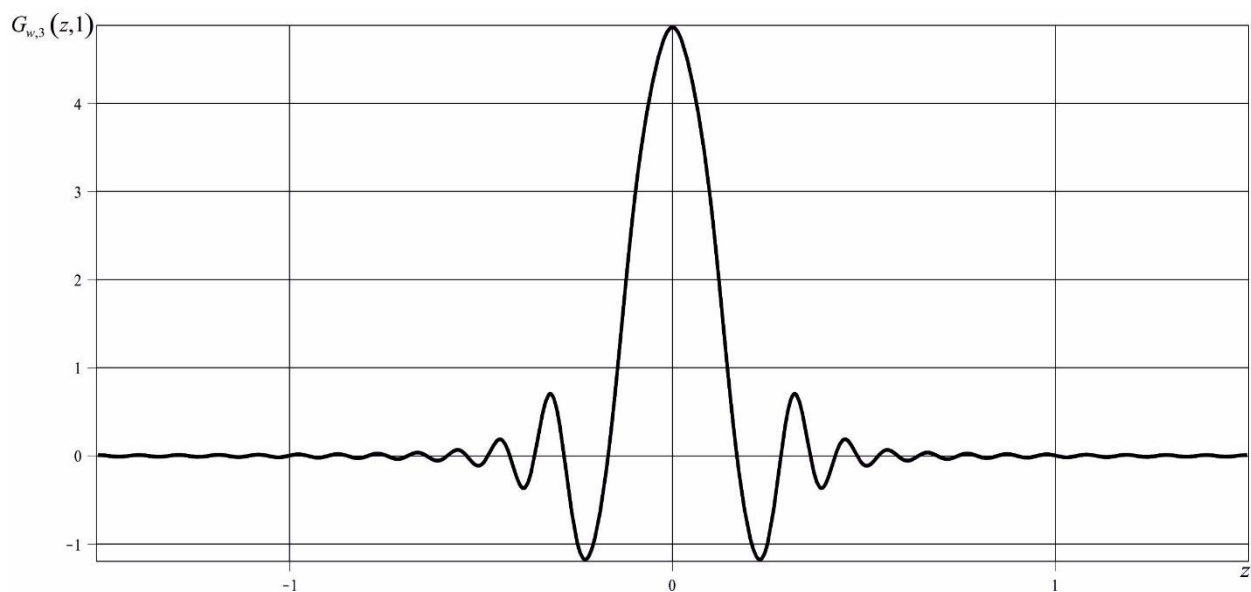


Рис. 2.6.3. Сплошная кривая – $Q = 60, 120$ шагов; штриховая кривая – $Q = 60, 240$ шагов.

Результаты, полученные с помощью аналитического метода обращения, основанного на разложении в ряд Фурье на переменном интервале представлен на рисунке 2.6.4.

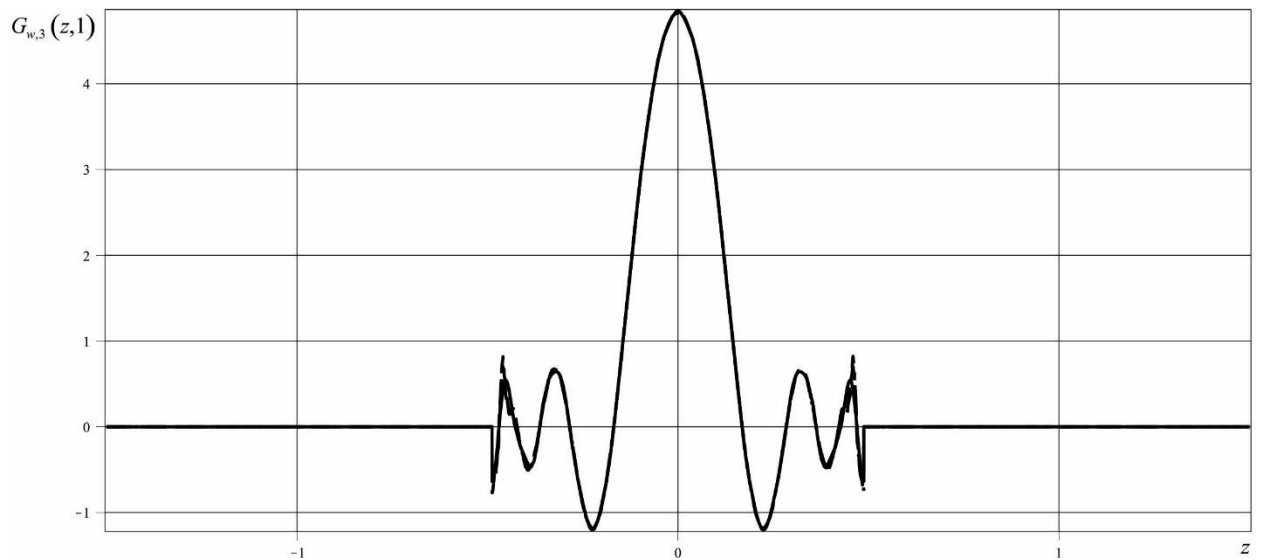


Рис. 2.6.4. Сплошная кривая – 20 членов ряда (2.4.2); пунктирная – 40; штрих-пунктирная – 60.

Сравнение результатов построения оригиналов коэффициентов ряда (2.4.2) представлено на рисунке 2.6.5. Штрих-пунктирная кривая – численное интегрирование методом прямоугольников ($N = 100$), штриховая – формула Филона ($Q = 60, K = 240$); сплошная – аналитический метод на основе разложения в ряд Фурье на переменном интервале ($N = 40$).

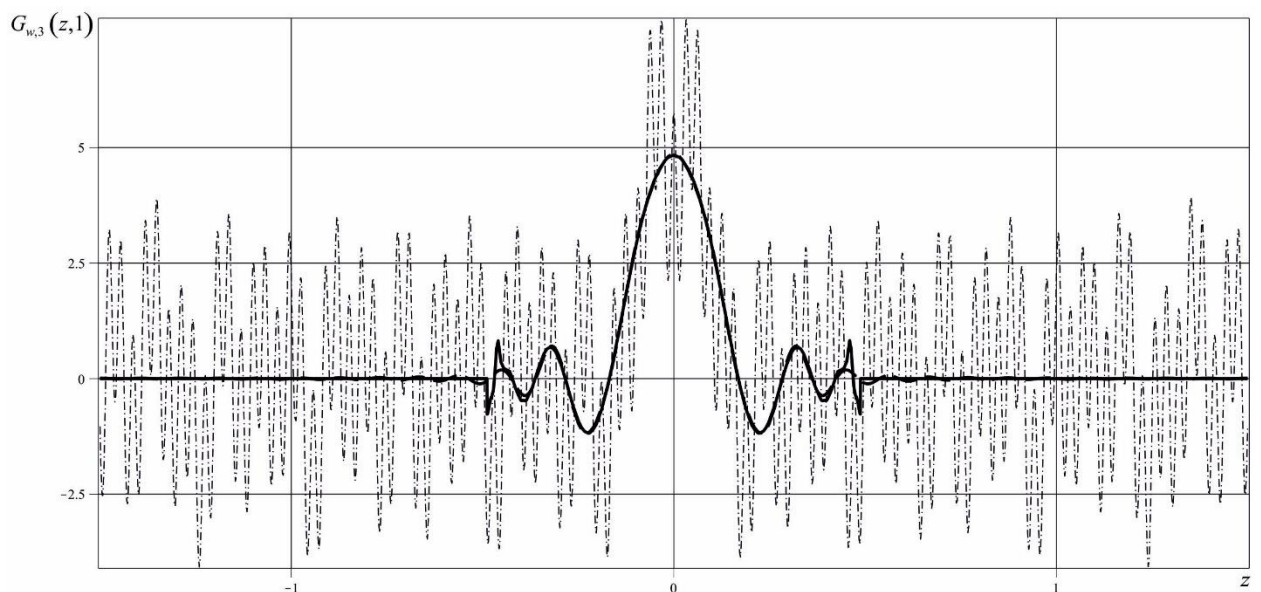


Рис. 2.6.5. Сравнение результатов, полученных с помощью различных методов обращения

Различие результатов метода Филона и метода разложения в ряд Фурье в окрестности фронта объясняется тем, что при использовании метода Филона перемещения выходят за фронт волны, унося с собой и часть её энергии (фронта как такового при использовании этого метода наблюдать невозможно).

На основании приведенных результатов можно сделать следующие выводы.

1. Для данного типа изображений метод прямоугольников не пригоден (однако можно показать его удовлетворительную работу, в случае если давление является гладкой функцией от координат и времени).

2. Метод Филона даёт удовлетворительный результат, однако является слишком ресурсоёмким.

3. Аналитический метод на основе разложения в ряд Фурье на переменном интервале наименее ресурсоёмкий и наиболее точный и быстро сходящийся.

В дальнейшем при решении контактных задач будет использована функция $G_w = G_{w,10,10}(\alpha, z, \tau)$ (см п. 2.5), построенная с помощью разложения в ряд Фурье на переменном интервале.

2.7. Функция влияния для цилиндрической оболочки с упругим наполнителем

Функция влияния для тонкой круговой цилиндрической оболочки с наполнителем представляет собой нормальные перемещения оболочки $w = G_w(\alpha, \tau)$ как решение нестационарной задачи о воздействии на оболочку с наполнителем внешнего давления вида

$$p_0 = \delta(\alpha)\delta(\tau). \quad (2.7.1)$$

Для наполнителя используется модель упругого тела. Соответствующие уравнения и соотношения в полярной системе координат $O\alpha$ с центром на оси оболочки имеют вид (1.2.22)-(1.2.25).

Движение оболочки описывается уравнениями (1.3.7), в которых

$$\mathbf{w} = (G_u, G_w, G_\chi)^T, \quad \mathbf{p} = [0, p_0 - \sigma_r, 0]^T, \quad \sigma_r = \sigma_{rr}|_{r=1}, \quad (2.7.2)$$

где σ_{rr} – радиальные напряжения в упругом наполнителе.

Связь этих двух моделей, кроме второго равенства в (2.7.2), осуществляется ещё и через условия контакта внутренней поверхности оболочки с упругим наполнителем, в качестве которых примем условия свободного проскальзывания:

$$u_r|_{r=1} = G_w, \quad \alpha \in (-\pi, \pi]; \quad \sigma_{r\alpha}|_{r=1} = 0, \quad \alpha \in (-\pi, \pi]. \quad (2.7.3)$$

Решение разыскиваем в классе ограниченных функций.

Задача замыкается однородными начальными условиями:

$$\begin{aligned} G_u|_{\tau=0} = G_w|_{\tau=0} = G_\chi|_{\tau=0} = \phi|_{\tau=0} = \psi|_{\tau=0} = 0, \\ \dot{G}_u|_{\tau=0} = \dot{G}_w|_{\tau=0} = \dot{G}_\chi|_{\tau=0} = \dot{\phi}|_{\tau=0} = \dot{\psi}|_{\tau=0} = 0. \end{aligned} \quad (2.7.4)$$

Точка над идентификатором функции, как и ранее, означает частную производную по времени.

Для решения задачи представим искомые функции в виде тригонометрических рядов Фурье:

$$\begin{aligned}
G_u &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{un}(\tau) \sin n\alpha, \quad G_w = \sum_{n=0}^{\infty} G_{wn}(\tau) \cos n\alpha, \\
G_\chi &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{\chi n}(\tau) \sin n\alpha, \\
\varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(r, \tau) \cos n\alpha, \quad \psi = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(r, \tau) \sin n\alpha, \\
u_r &= \sum_{n=0}^{\infty} u_{rn}(r, \tau) \cos n\alpha, \quad u_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} u_{\alpha n}(r, \tau) \sin n\alpha, \\
\sigma_{rr} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{rn}(r, \tau) \cos n\alpha, \quad \sigma_{r\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{r\alpha n}(r, \tau) \sin n\alpha.
\end{aligned} \tag{2.7.5}$$

Разложение дельта функции $\delta(\alpha)$ в ряд Фурье имеет вид:

$$\delta(\alpha) = \frac{\delta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \cos n\alpha, \quad \delta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\alpha) \cos n\alpha = \frac{1}{\pi}. \tag{2.7.6}$$

Как следует из соотношений (1.2.23)-(1.2.25), коэффициенты разложений (2.7.5) связаны между собой так (в качестве характерной скорости c_* принята скорость волн растяжения-сжатия в заполнителе, в качестве характерных упругих постоянных Ламе λ_* , μ_* приняты упругие постоянные Ламе заполнителя)

$$\begin{aligned}
u_{rn} &= \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} + \frac{n}{r} \psi_n, \quad \sigma_{rn} = \frac{\partial u_{rn}}{\partial r} + \frac{1-2\eta^{-2}}{r} (u_{rn} + nu_{\alpha n}), \\
u_{\alpha n} &= -\frac{n}{r} \varphi_n - \frac{\partial \psi_n}{\partial r}, \quad \sigma_{r\alpha n} = \eta^{-2} \left(\frac{\partial u_{\alpha n}}{\partial r} - \frac{nu_{rn} + u_{\alpha n}}{r} \right).
\end{aligned} \tag{2.7.7}$$

Подставляя (2.7.5) и (2.7.6) в уравнения (1.3.7) и (1.2.22), при $n \geq 1$ получаем

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{G}}_n &= \mathbf{M}\mathbf{G}_n + \mathbf{p}_n, \quad \mathbf{G}_n = (G_{un}, G_{wn}, G_{\chi n})^T, \quad \mathbf{p} = (0, p_n, 0)^T, \\ p_n &= \frac{1}{\pi} \delta(\tau) - \sigma_m, \quad \sigma_m = \sigma_{rm}|_{r=1}, \\ G_{\omega n}|_{\tau=0} &= \dot{G}_{\omega n}|_{\tau=0} = 0 \quad (k = \overline{1,3}, \quad \omega = u, w, \chi),\end{aligned}\tag{2.7.8}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -(\eta_1^2 n^2 + \eta_2^2 k^2) & -n(\eta_1^2 + \eta_2^2 k^2) & \gamma^2 \eta_1^2 n^2 + \eta_2^2 k^2 \\ -n(\eta_1^2 + \eta_2^2 k^2) & -(\eta_1^2 + n^2 \eta_2^2 k^2) & n\eta_2^2 k^2 \\ \eta_1^2 n^2 + \eta_2^2 k^2 \gamma^{-2} & -n\eta_2^2 k^2 \gamma^{-2} & -(\eta_1^2 n^2 + \eta_2^2 k^2 \gamma^{-2}) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}\ddot{\phi}_n &= \Delta_m \phi_n, \quad \ddot{\psi}_n = \eta^2 \Delta_m \psi_n, \quad \Delta_m = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2}, \\ u_m|_{r=1} &= \tilde{G}_{wn}^c, \quad \sigma_{ran}|_{r=1} = 0, \\ \phi_n|_{\tau=0} &= \dot{\phi}_n|_{\tau=0} = \psi_n|_{\tau=0} = \dot{\psi}_n|_{\tau=0} = 0.\end{aligned}\tag{2.7.9}$$

Случай $n = 0$ соответствует осесимметричной задаче ($\sigma_{r\alpha} \equiv 0$). При этом имеем

$$\begin{aligned}\ddot{G}_{w0} &= -G_{w0} + \frac{1}{2\pi} \delta(\tau) - \sigma_{r0}, \\ G_{w0}|_{\tau=0} &= \dot{G}_{w0}|_{\tau=0} = 0.\end{aligned}\tag{2.7.10}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\phi}_0 &= \Delta_{r0} \phi_0, \quad \Delta_{r0} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \\ u_{r0}|_{r=1} &= \tilde{G}_{w0}, \quad \phi_0|_{\tau=0} = \dot{\phi}_0|_{\tau=0} = 0.\end{aligned}\tag{2.7.11}$$

Кроме того следует учесть ограниченность коэффициентов ϕ_n и ψ_n при $r \rightarrow 0$.

Применяя к (2.7.8)-(2.7.11) преобразование Лапласа по времени, получаем (верхний индекс « L » у функции означает ее изображение Лапласа, s - параметр преобразования, δ_{ij} - символ Кронекера):

При $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{M} - s^2 \mathbf{E})\mathbf{G}_n^L + \mathbf{p}_n^L &= 0, \\ \mathbf{G}_n^L &= (G_{un}^L, G_{wn}^L, G_{\chi n}^L)^T, \quad \mathbf{p}_n^L = \left(0, \frac{1}{\pi} - \sigma_m^L, 0\right)^T, \quad \mathbf{E} = (\delta_{ij})_{3 \times 3}.\end{aligned}\tag{2.7.12}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_n^L}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_n^L}{\partial r} - \left(\frac{n^2}{r^2} + s^2 \right) \varphi_n^L &= 0, \\ \frac{\partial^2 \psi_n^L}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_n^L}{\partial r} - \left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{s^2}{\eta^2} \right) \psi_n^L &= 0, \\ u_m|_{r=1} &= G_{wn}, \quad \sigma_{ran}|_{r=1} = 0. \end{aligned} \quad (2.7.13)$$

При $n = 0$:

$$G_{w0}^L = \frac{1}{s^2 + 1} \left(\frac{1}{2\pi} - \sigma_{r0}^L \right). \quad (2.7.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_0^L}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0^L}{\partial r} - s^2 \varphi_0^L &= 0, \\ u_{r0}^L|_{r=1} &= G_{w0}^L. \end{aligned} \quad (2.7.15)$$

Ограниченные при $r \rightarrow 0$ решения уравнений (2.7.13) и (2.7.15) имеют вид [76]:

$$\begin{aligned} \varphi_n^L &= C_n(s) I_n(\xi), \quad \psi_n^L = D_n(s) I_n(\zeta), \\ \xi &= rs, \quad \zeta = \frac{rs}{\eta}, \quad D_0 = 0, \end{aligned} \quad (2.7.16)$$

где $I_n(z)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода (функция Инфельда) [76].

Решение G_{wn}^L уравнений (2.7.12) имеет вид

$$G_{wn}^L = \left(\frac{1}{\pi} - \sigma_m^L \right) Q(s, n), \quad Q(s, n) = \frac{\sum_{j=1}^2 P_j(s^2, n^2)}{\sum_{j=1}^3 R_j(s^2, n^2)}, \quad (2.7.17)$$

$$\begin{aligned}
P_1(s, n) &= k^2 \eta_2^2 \left[m \eta_1^2 (\gamma^2 - 1) - s (\gamma^2 + 1) \right], \\
P_2(s, n) &= \gamma^2 \left[m \eta_1^2 (\gamma - 1) - s \right] \left[m \eta_1^2 (\gamma + 1) + s \right], \\
R_1(s, n) &= k^2 \eta_1^2 \eta_2^2 (\gamma^2 + 1) s + k^2 \eta_2^2 \left[\eta_1^4 (\gamma^2 - 1) - k^4 \eta_2^4 \right] n, \\
R_2(s, n) &= - \left[\gamma^2 \eta_1^2 + (\gamma^2 + 1) k^2 \eta_2^2 \right] s^2 + \\
&+ \left[(\gamma^2 - 1) k^2 \eta_2^2 \eta_1^2 - 2 \gamma^2 \eta_1^4 - (\gamma^2 + 2) k^4 \eta_2^4 \right] n s + \\
&+ \eta_1^2 \left[\gamma^2 (\gamma^2 - 1) \eta_1^4 + (\gamma^2 - 2) k^4 \eta_2^4 \right] n^2, \\
R_3(s, n) &= (k^2 m \eta_2^2 + s) P_2(s, n).
\end{aligned}$$

Коэффициенты полиномов P_j и R_j с учётом малости γ можно упростить, приближённо полагая:

$$\begin{aligned}
P_1(s, n) &= k^2 \eta_2^2 (\eta_1^2 n + s), \quad P_2(s, n) = \gamma^2 (\eta_1^2 n + s)^2, \\
R_1(s, n) &= -k^2 \eta_1^2 \eta_2^2 s + k^2 \eta_2^2 (\eta_1^4 - k^4 \eta_2^4) n, \\
R_2(s, n) &= -k^2 \eta_2^2 s^2 - \eta_2^2 k^2 (\eta_1^2 + 2k^2 \eta_2^2) n s - 2k^4 \eta_1^2 \eta_2^4 n^2, \\
R_3(s, n) &= -(k^2 m \eta_2^2 + s) P_2(s, n).
\end{aligned}$$

Подставляя (2.7.16) в формулы (2.7.7), для изображений коэффициентов рядов разложений перемещений и напряжений в заполнителе находим:

$$\begin{aligned}
u_m^L &= \frac{1}{r} \left[C_n \xi I_n'(\xi) + n D_n I_n(\zeta) \right], \quad u_{\omega n}^L = -\frac{1}{r} \left[n C_n I_n(\xi) + D_n \zeta I_n'(\zeta) \right], \\
\sigma_{rrn}^L &= \frac{1}{r^2} \left\{ C_n \left[\xi^2 I_n''(\xi) + (1 - 2\eta^{-2}) \left[\xi I_n'(\xi) - n^2 I_n(\xi) \right] \right] + \right. \\
&\quad \left. + 2\eta^{-2} n D_n \left[\zeta I_n'(\zeta) - I_n(\zeta) \right] \right\}, \quad (2.7.18) \\
\sigma_{r\omega n}^L &= -\frac{\eta^{-2}}{r^2} \left\{ 2n C_n \left[\xi I_n'(\xi) - I_n(\xi) \right] + \right. \\
&\quad \left. + D_n \left[\zeta^2 I_n''(\zeta) - \zeta I_n'(\zeta) + n^2 I_n(\zeta) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Из граничных условий задачи (2.7.13) и соотношений (2.7.18) для C_n и D_n получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned}
& C_n \left\{ \xi_0 I'_n(\xi_0) + \right. \\
& \left. + Q(s, n) \left[\xi_0^2 I''_n(\xi_0) + (1 - 2\eta^{-2}) \left[\xi_0 I'_n(\xi_0) - n^2 I_n(\xi_0) \right] \right] \right\} + \\
& + n D_n \left\{ I_n(\zeta_0) - 2\eta^{-2} Q(s, n) \left[\zeta_0 I'_n(\zeta_0) - I_n(\zeta_0) \right] \right\} = \frac{Q(s, n)}{\pi}, \quad (2.7.19) \\
& 2nC_n \left[\xi_0 I'_n(\xi_0) - I_n(\xi_0) \right] + \\
& + D_n \left[\zeta_0^2 I''_n(\zeta_0) - \zeta_0 I'_n(\zeta_0) + n^2 I_n(\zeta_0) \right] = 0, \\
& \xi_0 = s, \quad \zeta_0 = s/\eta.
\end{aligned}$$

Для модифицированных функций Бесселя справедливы следующие рекуррентные соотношения [194]:

$$\begin{aligned}
I'_n(z) &= \frac{n}{z} I_n(z) - I_{n+1}(z), \\
I''_n(z) &= -I_n(z) + \frac{I_{n+1}(z)}{z}.
\end{aligned} \quad (2.7.20)$$

Тогда (2.7.19) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
& C_n \left\{ \frac{nI_n(\xi_0) - \xi_0 I_{n+1}(\xi_0)}{Q(s, n)} + \right. \\
& \left. + I_n(\xi_0) \left(\xi_0^2 + n(1 - 2\eta^{-2})(n - 1) \right) + 2\eta^{-2} \xi_0 I_{n+1}(\xi_0) \right\} + \\
& + n D_n \left\{ \frac{I_n(\zeta_0)}{Q(s, n)} - 2\eta^{-2} \left[I_n(\zeta_0)(n - 1) - \zeta_0 I_{n+1}(\zeta_0) \right] \right\} = \frac{1}{\pi}, \quad (2.7.21) \\
& 2nC_n \left[I_n(\xi_0)(n - 1) - \xi_0 I_{n+1}(\xi_0) \right] + \\
& + D_n \left[I_n(\zeta_0)(n^2 - \zeta_0^2 - n) + 2\zeta_0 I_{n+1}(\zeta_0) \right] = 0.
\end{aligned}$$

Далее ограничимся исследованием процесса нестационарного контактного взаимодействия на начальном временном этапе. При этом используем асимптотики для модифицированных функций Бесселя [194] и функции $Q(s, n)$ при $s \rightarrow \infty$, что согласно предельной теореме для изображений [76] соответствует асимптотическим представлениям вышеупомянутых функций при $\tau \rightarrow 0$:

$$I_n(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, \quad z \rightarrow \infty; \quad Q(s, n) \sim \frac{1}{\eta^2 k^2 n^2 + s^2}, \quad s \rightarrow \infty. \quad (2.7.22)$$

Тогда из (2.7.22) и (2.7.21) получаем выражения для C_n и D_n справедливые при больших s :

$$C_n \sim \frac{\eta^2}{J(\xi_0)\pi} \frac{\eta n(1-n) - s}{P_{n4}(s)},$$

$$D_n \sim \frac{2\eta^3}{J(\xi_0)\pi} \frac{n(n-s-1)}{P_{n4}(s)}, \quad D_0 = 0,$$
(2.7.23)

$$P_{n4}(s) = \sum_{k=0}^4 a_{nk} s^k, \quad J(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}},$$

$$a_{n4} = \eta^2,$$

$$a_{n3} = -\eta^3 n^2 - (\eta + 1)\eta^2 n - \eta^2,$$

$$a_{n2} = \eta^3 n^3 + \left[\eta^2 (\eta_2^2 k^2 - 2\eta) - 4 \right] n^2 + \eta^3 n,$$

$$a_{n1} = -\eta^3 \eta_2^2 k^2 n^4 + (\eta + 1)(4 - \eta^2 \eta_2^2 k^2) n^3 - (\eta^2 + 4\eta + 2)n^2 + (\eta^2 - 2)n - 2,$$

$$a_{n0} = \eta^3 \eta_2^2 k^2 n^5 - \left[(1 + \eta_2^2 k^2) \eta^2 + 2 \right] \eta n^4 + 2(\eta^2 + 2)\eta n^3 - (\eta^2 + 4)\eta n^2 + 2n\eta.$$

Из (2.7.18), (2.7.20) и (2.7.23) находим граничные значения изображений коэффициентов $\sigma_{rm}^L = \sigma_{rm}^L \Big|_{r=1}$ ряда разложения для напряжений в заполнителе при больших s :

$$\sigma_{rm}^L = \frac{1}{\pi} \frac{R_{n3}(s)}{P_{n4}(s)}, \quad R_{n3}(s) = \sum_{k=0}^3 b_{nk} s^k,$$
(2.7.24)

$$b_{n3} = \eta^2,$$

$$b_{n2} = (\eta^3 + 4)n^2 - \eta^3 n + \eta^2 - 2,$$

$$b_{n1} = 4n^3 + (\eta - 1)(\eta^2 - 6)n^2 + \eta(\eta^2 - 2)n,$$

$$b_{n0} = (2 - \eta^2)\eta n^4 + (2 + \eta^2)\eta n^3 - 4n^2\eta.$$

Подставляя (2.7.24) в (2.7.17) с учётом (2.7.22), а затем в (2.7.5), приходим к выражению для изображения по Лапласу искомой функции влияния для цилиндрической оболочки с упругим заполнителем

$$G_w^L = G_{w1}^L(\alpha, s) + G_{w2}^L(\alpha, s),$$

$$G_{w1}^L(\alpha, s) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{w1n}^L \cos n\alpha, \quad G_{w2}^L(\alpha, s) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{w2n}^L(s) \cos n\alpha,$$
(2.7.25)

$$G_{2n2}^L = -\sigma_m^L, \quad G_{201}^L = \frac{1}{2\pi(s^2 + \eta_1^2)},$$

$$G_{2n1}^L = \frac{1}{\pi(s^2 + \eta_2^2 k^2 n^2)}, \quad n > 0.$$

Отметим, что первое слагаемое в правой части выражения (2.7.25) соответствует изображению функции влияния для оболочки без заполнителя, а второе характеризует влияние заполнителя.

Оригиналы коэффициентов G_{2n1}^L определяются элементарно:

$$G_{2n1}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sin \eta_1 \tau & n = 0, \\ \frac{1}{\pi \eta_2 k n} \sin \eta_2 k n \tau & n > 0. \end{cases}$$

При этом сумма соответствующего ряда определяется так [11,12]:

$$\begin{aligned} G_{21}(\alpha, \tau) &= \frac{\sin \eta_1 \tau}{2\pi} + \frac{1}{\pi \eta_2 k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \eta_2 k n \tau}{n} \cos n\alpha = \\ &= \frac{\sin \eta_1 \tau}{2\pi} + \frac{1}{2\pi \eta_2 k} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(\alpha + \eta_2 k \tau)}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(\alpha - \eta_2 k \tau)}{n} \right) = \\ &= \frac{\sin \eta_1 \tau}{2\pi} + \frac{1}{2\pi \eta_2 k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [f(\alpha, \eta_2 k \tau + 2\pi n) - f(\alpha, -\eta_2 k \tau + 2\pi n)], \\ f(\alpha, \tau) &= \frac{\pi - \alpha - \tau}{2} [H(\alpha + \tau) - H(\alpha + \tau + 2\pi n)], \end{aligned}$$

где при определенных значениях $\alpha \in (-\pi, \pi]$ и $\tau \in [0, \infty)$ в сумме остается только одно ненулевое слагаемое.

Оригиналы коэффициентов G_{2n2}^L при каждом $n = 0, 1, 2, \dots$ и при задании свойств материалов оболочки и заполнителя определяются аналитически с помощью вычетов.

На рис. 2.7.1 представлены графики функции влияния $G_w(\alpha, \tau)$ в момент времени $\tau=0.1$ при учёте 11-ти первых членов ряда (2.7.5). Материал оболочки – сталь, а заполнителя – алюминий. Соответствующие безразмерные параметры: $\eta = 0.492$, $\eta_1 = 9.87$, $\eta_2 = 5.28$. Геометрический параметр оболочки $\gamma = 0.025$. Сплошная кривая соответствует оболочке с заполнителем, а пунктирная – оболочке без заполнителя.

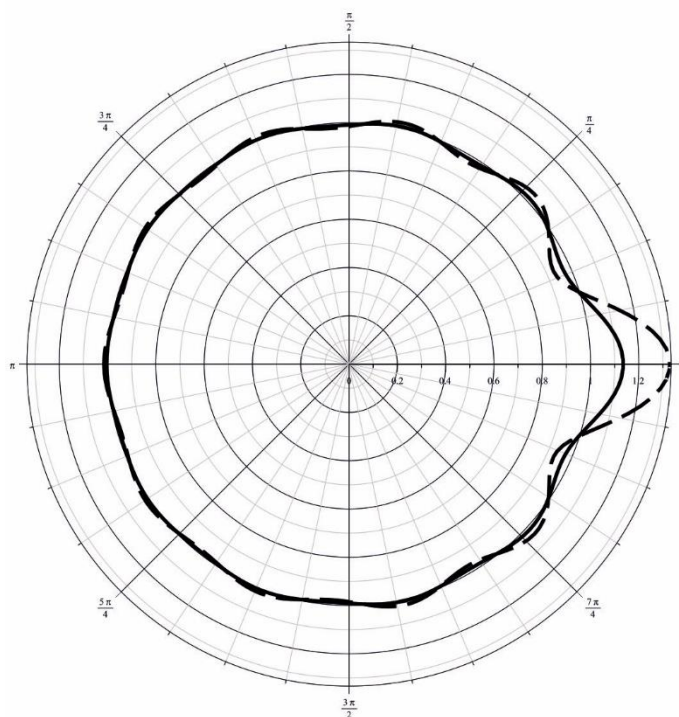


Рис. 2.7.1. Распределение функции влияния по угловой координате.

2.8. Нестационарное движение цилиндрической оболочки с упругим наполнителем

Пусть в начальный момент времени $\tau = 0$ на покоящуюся цилиндрическую оболочку с упругим наполнителем начинает действовать внешнее нестационарное давление $p(\alpha, \tau)$.

С использованием принципа суперпозиции (см. п. 1.5) нормальные перемещения оболочки представляются в виде

$$w(\alpha, \tau) = \int_0^\tau \int_{-b(t)}^{b(t)} G_w(\alpha - \xi, \tau - t) p(\xi, t) d\xi dt, \quad (2.8.1)$$

где $G_w(\alpha, \tau)$ – функция влияния для оболочки с наполнителем.

Рассмотрим два варианта внешней нагрузки:

$$p_1 = -H(\tau)H\left(\frac{\pi}{3} - |\alpha|\right)\cos(\alpha), \quad p_2 = -H(\tau)H\left(\frac{\pi}{30} - |\alpha|\right)\cos(\alpha).$$

В качестве материала оболочки принята сталь, а для наполнителя алюминий, что соответствует следующим значениям безразмерных параметров: $\eta = 0.492$, $\eta_1 = 9.87$, $\eta_2 = 5.28$. Геометрический параметр оболочки $\gamma = 0.025$. В расчетах удерживалось 11 членов ряда для функции $G_w(\alpha, \tau)$.

Для получения результатов использовалось представление (2.8.1). При этом входящие в него интегралы вычислялись аналитически с использованием формулы Ньютона-Лейбница.

На рис. 2.8.1 представлены распределения нормальных перемещений по углу в полярной системе координат с центром на оси оболочки и углом α в момент времени $\tau = 0.08$. Сплошная кривая соответствует нагрузке p_1 , а штриховая – p_2 .

На рис. 2.8.2 представлено сравнение распределений по углу α нормальных перемещений, соответствующих нагрузке p_1 . Сплошная кривая

соответствует оболочке с наполнителем, а штриховая – пустой оболочке. Распределения построены в момент времени $\tau = 0.08$.

Динамика развития нормальных перемещений представлена на рис. 2.8.3. Здесь распределения соответствуют первому варианту нагрузки в моменты времени $\tau = 0.02$, $\tau = 0.04$, $\tau = 0.06$, $\tau = 0.08$.

Сравнение результатов при учете различного числа членов ряда для функции $G_w(\alpha, \tau)$ показано на рис. 2.8.4. Здесь представлены распределения нормальных перемещений, соответствующих нагрузке p_1 , по углу α в момент времени $\tau = 0.08$. Сплошная кривая построена при учете 11 членов ряда, а штриховая – при учете 6 членов. Видно, что отличие в результатах незначительное.

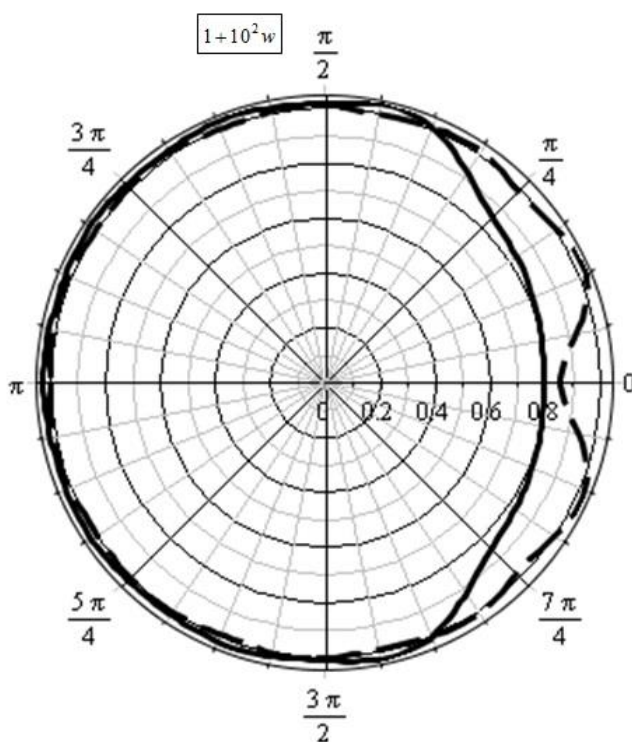


Рис. 2.8.1. Распределения нормальных перемещений по углу в момент времени $\tau = 0.08$. Сплошная кривая соответствует нагрузке p_1 , а штриховая - p_2 .

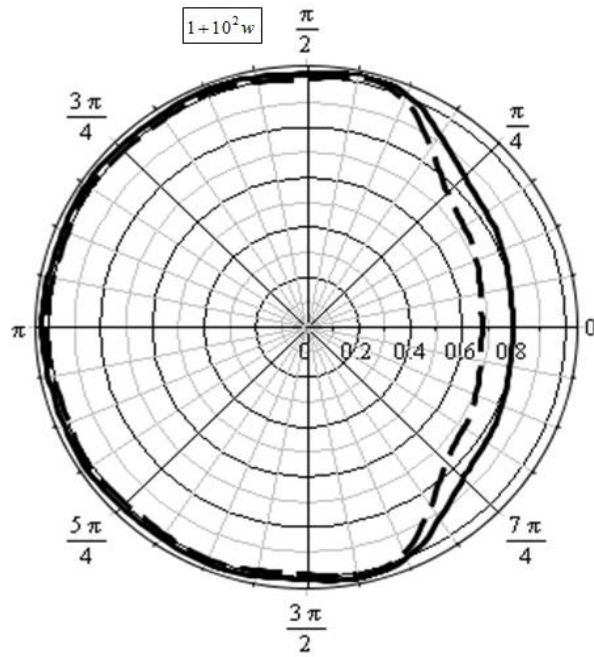


Рис. 2.8.2. Распределения нормальных перемещений, соответствующих нагрузке p_1 в момент времени $\tau = 0.08$. Сплошная кривая соответствует оболочке с наполнителем, а штриховая – пустой оболочке.

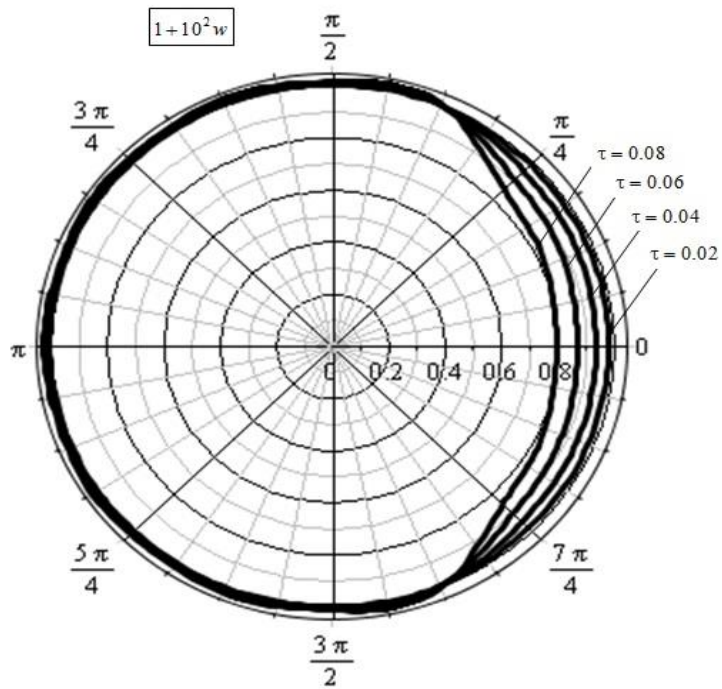


Рис. 2.8.3. Распределения нормальных перемещений, соответствующих нагрузке p_1 в различные моменты времени.

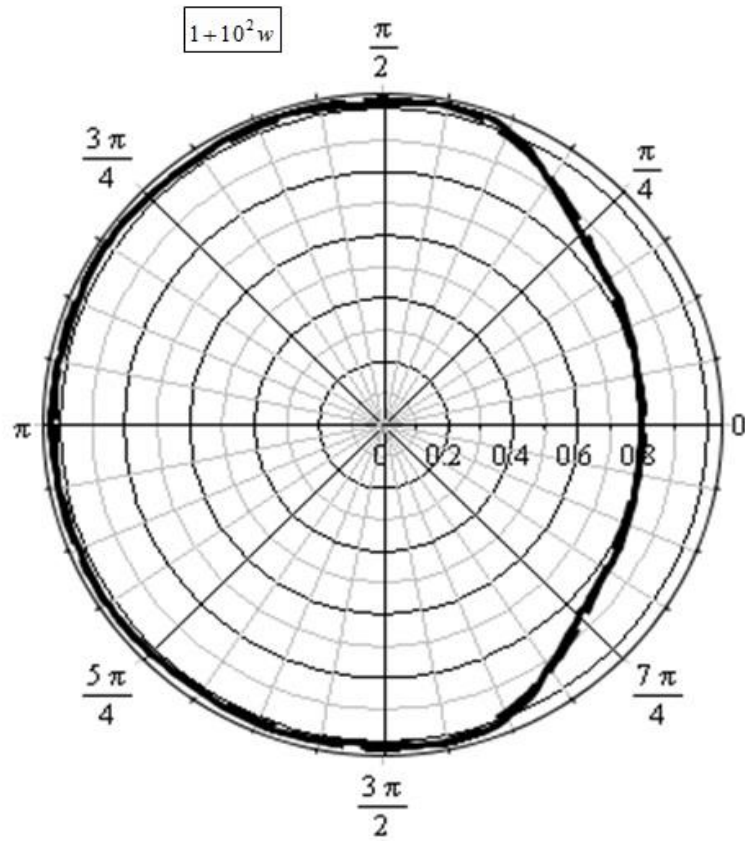


Рис. 2.8.4. Сравнение перемещений при учете различного числа членов ряда. Сплошная кривая построена при учете 11 членов ряда, а штриховая – при учете 6 членов.

ГЛАВА III. ФУНКЦИИ ВЛИЯНИЯ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

3.1. Расщепление уравнений движения сферической оболочки

Пространственное движение сферической оболочки описывается уравнениями модели С.П. Тимошенко в перемещениях (1.3.6). Отметим, что дифференциальные операторы по пространственным переменным, порождающие систему уравнений (1.3.6), не обладают свойством инвариантности по угловой координате β вследствие наличия переменных коэффициентов, зависящих от этой координаты. Также отметим, что ввиду многообразия дифференциальных операторов по пространственным переменным, порождающих систему (1.3.6), использование аппарата разложений в ряды Фурье представляет значительные трудности, связанные с определением полных систем ортогональных собственных функций.

С целью преодоления указанных выше сложностей предлагается [213] использовать специальные представления для перемещений и углов поворота сферической оболочки. По своему предназначению они аналогичны известным представлениям решений в теории упругости – цель их использования состоит в приведении исходных уравнений, не разрешимых с помощью традиционных методов математической физики, к уравнениям, поддающимся решению с применением известных методов. В случае сферической оболочки, как будет видно далее, использование предлагаемых представлений приводит исходные уравнения движения к новой эквивалентной системе уравнений, которая поддается решению с помощью разложений в ряды по сферическим функциям.

Введем следующие представления для функций u , v , χ_β и χ_α :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial U}{\partial \beta} - \varphi \sin \beta, \quad v = \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial U}{\partial \alpha}, \\ \chi_\beta &= \frac{\partial X}{\partial \beta} - \psi \sin \beta, \quad \chi_\alpha = \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial X}{\partial \alpha}. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Здесь $U(\beta, \alpha, \tau)$, $X(\beta, \alpha, \tau)$, $\varphi(\beta, \alpha, \tau)$ и $\psi(\beta, \alpha, \tau)$ – новые неизвестные функции, которые удовлетворяют начальным условиям

$$\begin{aligned} U(\beta, \alpha, 0) = \dot{U}(\beta, \alpha, 0) = X(\beta, \alpha, 0) = \dot{X}(\beta, \alpha, 0) = \\ = \varphi(\beta, \alpha, 0) = \dot{\varphi}(\beta, \alpha, 0) = \psi(\beta, \alpha, 0) = \dot{\psi}(\beta, \alpha, 0) = 0, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

условиям периодичности по координате α и условию ограниченности в полюсах.

Подставляя (3.1.1) во второе уравнение системы (1.3.6) и интегрируя его по переменной α , приходим к такому уравнению

$$\begin{aligned} \ddot{U} = \eta_1^2 M(U) - \eta_1^2 M(X) - K_1(\varphi - \gamma^2 \psi) + \eta_2^2(2 - k^2)U + \eta_2^2 k^2 X + \\ + [\eta_2^2 k^2 + 2(\eta_1^2 - \eta_2^2)]w + Q, \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

$$M = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{\partial}{\partial \beta} \operatorname{ctg} \beta + \frac{1}{\sin^2 \beta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2},$$

$$K_1 = \sin \beta \left[(\eta_1^2 - \eta_2^2) \frac{\partial}{\partial \beta} + 2\eta_1^2 \operatorname{ctg} \beta \right], \quad Q = \sin \beta \int q_\alpha d\alpha.$$

Дифференцируем (3.1.3) по β и вычитаем результат из первого уравнения системы (1.3.6). С учетом представлений (3.1.2) это приводит к уравнению

$$\ddot{\varphi} = \eta_2^2 M(\varphi) + (2 - k^2)\eta_2^2 \varphi - \eta_2^2 \gamma^2 M(\psi) + \eta_2^2 k^2 \psi + T, \quad (3.1.4)$$

$$T = \frac{1}{\sin \beta} \left(\frac{\partial Q}{\partial \beta} - q_\beta \right)$$

Выполняя аналогичные действия с пятым и четвертым уравнением системы (1.3.6), получаем еще два уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{X} = -\eta_1^2 M(U) + \eta_1^2 M(X) + K_1(\varphi - \psi) + \\ + \gamma^{-2} \eta_2^2 k^2 U - \gamma^{-2} \eta_2^2 k^2 X - \gamma^{-2} \eta_2^2 k^2 w, \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

$$\ddot{\psi} = -\eta_2^2 M(\varphi) + \eta_2^2 M(\psi) + \gamma^{-2} \eta_2^2 k^2 (\varphi - \psi). \quad (3.1.6)$$

Подставляя теперь (3.1.2) в третье уравнение системы (1.3.6), приходим к такому уравнению

$$\begin{aligned}
\ddot{w} = & -\left[2(\eta_1^2 - \eta_2^2)M(U)\right] + \eta_2^2 k^2 M(w) + \eta_2^2 k^2 M(X) + \\
& + \left[2(\eta_1^2 - \eta_2^2) + \eta_2^2 k^2\right] K_2(\varphi) - \\
& - \eta_2^2 k^2 K_2(\psi) - 4(\eta_1^2 - \eta_2^2)w + p,
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

$$K_2 = \sin\beta \left(\frac{\partial}{\partial\beta} + 2\operatorname{ctg}\beta \right).$$

Таким образом, с использованием представлений (3.1.1) задача распадается на две подсистемы: первая состоит из уравнений (3.1.4) и (3.1.6) относительно неизвестных функций φ и ψ , а вторая – из уравнений (3.1.3), (3.1.5) и (3.1.7).

Отметим, что первая подсистема (3.1.4), (3.1.6) содержит только один дифференциальный оператор M , собственными функциями которого являются сферические функции $Y_{nm}(\beta, \alpha)$ [213]

$$M(Y_{nm}) = \frac{\partial^2 Y_{nm}}{\partial\beta^2} + \operatorname{ctg}\beta \frac{\partial Y_{nm}}{\partial\beta} + \frac{1}{\sin^2\beta} \frac{\partial^2 Y_{nm}}{\partial\alpha^2} = -NY_{nm}, \quad N = n(n+1), \tag{3.1.8}$$

$$Y_{nm}(\beta, \alpha) = P_n^{m|}(\cos\beta) e^{im\alpha},$$

где $P_n^m(\cos\beta)$ – присоединенные функции Лежандра I рода.

Это позволяет при построении решений уравнений (3.1.3)-(3.1.7) использовать разложения в ряды по этой системе функций, что и будет сделано далее.

3.2. Представление решения в виде рядов

Как было показано в предыдущем параграфе, поставленная задача эквивалента решению системы уравнений (3.1.3)-(3.1.7). Представим входящие в эту систему функции в виде разложений в ряды по системе сферических функций $Y_{nm}(\beta, \alpha)$:

$$\begin{aligned}
 \varphi(\beta, \alpha, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \varphi_{nm}(\tau) Y_{nm}(\beta, \alpha), \quad \psi(\beta, \alpha, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \psi_{nm}(\tau) Y_{nm}(\beta, \alpha), \\
 U(\beta, \alpha, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n U_{nm}(\tau) Y_{nm}(\beta, \alpha), \quad X(\beta, \alpha, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n X_{nm}(\tau) Y_{nm}(\beta, \alpha), \\
 w(\beta, \alpha, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n w_{nm}(\tau) Y_{nm}(\beta, \alpha), \quad p(\beta, \alpha, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n p_{nm}(\tau) Y_{nm}(\beta, \alpha), \\
 T(\beta, \alpha, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n T_{nm}(\tau) Y_{nm}(\beta, \alpha), \quad Q(\beta, \alpha, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Q_{nm}(\tau) Y_{nm}(\beta, \alpha), \\
 w_{nm}(\tau) &= \bar{w}_{n,-m}(\tau) = \frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} e^{im\vartheta} d\vartheta \int_0^{\pi} w(\beta, \alpha, \tau) P_n^m(\cos\beta) \sin\beta d\beta, \\
 & \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Здесь для краткости приведены формулы только для коэффициентов w_{nm} . Остальные коэффициенты рядов определяются аналогично.

Подставляя (3.2.1) в (3.1.4), (3.1.6) и учитывая (3.1.8), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов φ_{nm} и ψ_{nm} :

$$\begin{aligned}
 \ddot{\varphi}_{nm} &= \eta_2^2 (2 - k^2 - N) \varphi_{nm} + \eta_2^2 (k^2 + N\gamma^2) \psi_{nm} + T_{nm}, \\
 \ddot{\psi}_{nm} &= \eta_2^2 (k^2 \gamma^{-2} + N) (\varphi_{nm} - \psi_{nm}).
 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

с однородными начальными условиями

$$\varphi_{nm}(0) = \dot{\varphi}_{nm}(0) = \psi_{nm}(0) = \dot{\psi}_{nm}(0) = 0$$

Решения системы (3.2.2) можно построить независимо и тем самым получить функции $\varphi(\beta, \alpha, \tau)$ и $\psi(\beta, \alpha, \tau)$ в виде разложений (3.2.1).

Подстановка (3.2.1) в уравнения (3.1.3), (3.1.5), (3.1.7) и учет рекуррентных соотношений для присоединенных функций Лежандра [213]

$$\begin{aligned} K_1 [P_n^m(\cos\beta)] &= a_{nm} P_{n-1}^m(\cos\beta) + b_{nm} P_{n+1}^m(\cos\beta) \\ K_2 [P_n^m(\cos\beta)] &= c_{nm} P_{n-1}^m(\cos\beta) + d_{nm} P_{n+1}^m(\cos\beta) \\ a_{nm} &= \frac{(n+m)(2-\eta^2-n-m)}{2n+1}, \quad b_{nm} = \frac{(n-m+1)(3-\eta^2+n-m)}{2n+1} \\ c_{nm} &= \frac{(n+m)(2-n-m)}{2n+1}, \quad d_{nm} = \frac{(n-m+1)(3+n-m)}{2n+1} \end{aligned}$$

приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{U}_{nm} &= \left((2-k^2)\eta_2^2 - N \right) U_{nm} + \left(\eta_2^2 k^2 + \gamma^2 N \right) X_{nm} + \\ &\quad + \left[2 - (2-k^2)\eta_2^2 \right] w_{nm} + R_{nm}^1, \\ \ddot{X}_{nm} &= \left(N + \eta_2^2 k^2 \gamma^{-2} \right) U_{nm} - \left(N + \eta_2^2 k^2 \gamma^{-2} \right) X_{nm} - \\ &\quad - \eta_2^2 k^2 \gamma^{-2} w_{nm} + R_{nm}^2, \\ \ddot{w}_{nm} &= \left[2 - (2-k^2)\eta_2^2 \right] N U_{nm} - \eta_2^2 k^2 N X_{nm} + \\ &\quad + \left[4(\eta_1^2 - \eta_2^2) - \eta_2^2 k^2 N \right] w_{nm} + R_{nm}^3. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

где

$$\begin{aligned} R_{nm}^1 &= Q_{nm} - \left(\varphi_{n+1,m} - \gamma^2 \psi_{n+1,m} \right) a_{n+1,m} - \left(\varphi_{n-1,m} - \gamma^2 \psi_{n-1,m} \right) b_{n-1,m}, \\ R_{nm}^2 &= \left(\varphi_{n+1,m} - \psi_{n+1,m} \right) a_{n+1,m} + \left(\varphi_{n-1,m} - \gamma^2 \psi_{n-1,m} \right) b_{n-1,m}, \\ R_{nm}^3 &= p_{nm} + \left(2 - b^2 \right) \left(\varphi_{n+1,m} c_{n+1,m} + \varphi_{n-1,m} d_{n-1,m} \right) - a^2 \left(\psi_{n+1,m} c_{n+1,m} + \psi_{n-1,m} d_{n-1,m} \right). \end{aligned}$$

Система уравнений (3.2.3) дополняется начальными условиями

$$U_{nm}(0) = \dot{U}_{nm}(0) = X_{nm}(0) = \dot{X}_{nm}(0) = w_{nm}(0) = \dot{w}_{nm}(0) = 0. \quad (3.2.4)$$

Построив решения (3.2.3) получаем функции $U(\beta, \alpha, \tau)$, $X(\beta, \alpha, \tau)$ и $w(\beta, \alpha, \tau)$ в виде разложений (3.2.1), а затем по формулам (3.1.1) определяем тангенциальные перемещения и углы поворота нормального к срединной поверхности волокна.

3.3. Пространственные нестационарные функции влияния для сферической оболочки

Пространственными функциями влияния для сферической оболочки являются вектор-столбцы \mathbf{g}^k ($k=1,2,3$) как решения системы уравнений (1.3.6)

$$\mathbf{L}\mathbf{g}^k + \mathbf{p}^k = \frac{\partial^2 \mathbf{g}^k}{\partial \tau^2}, \quad \mathbf{L} = (L_{ij})_{5 \times 5},$$

$$\mathbf{g}^k = (g_1^k, g_2^k, g_3^k, g_4^k, g_5^k)^T, \quad \mathbf{p}^k = (q\delta_{1k}, q\delta_{2k}, q\delta_{3k}, 0, 0)^T, \quad (3.3.1)$$

$$q = \delta(\beta - \xi)\delta(\alpha - \zeta)\delta(\tau).$$

с нулевыми начальными условиями, удовлетворяющие условию периодичности по угловой координате α и условию ограниченности в полюсах. При этом вектор давления \mathbf{p}^k представляет собой сосредоточенную нагрузку, δ_{nk} – символ Кронекера.

Далее ограничимся построением только одной функции влияния, а именно, $g_3^3(\beta, \alpha, \tau, \xi, \zeta) = G_w(\beta, \alpha, \tau, \xi, \zeta)$.

В этом случае начально-краевая задача (3.1.4), (3.1.6) с соответствующими равенствами из (3.1.2) относительно периодических по α и ограниченных функций φ и ψ является однородной. Следовательно $\varphi(\beta, \alpha, \tau) = \psi(\beta, \alpha, \tau) = 0$. Во второй подсистеме (3.1.3), (3.1.5), (3.1.7) $w = G_w$, $Q = 0$, $p = \delta(\beta - \xi)\delta(\alpha - \zeta)\delta(\tau)$.

Представляем функцию G_w аналогично (3.2.1) в виде

$$G_w = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n G_{nm}(\tau, \xi, \zeta) Y_{nm}(\beta, \alpha). \quad (3.3.2)$$

Нормальное давление раскладываем в ряд по сферическим функциям

$$p = \delta(\tau) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \delta_{nm}(\xi, \zeta) Y_{nm}(\beta, \alpha),$$

$$\delta_{nm}(\xi, \zeta) = \bar{\delta}_{n,-m}(\xi, \zeta) = e^{im\zeta} \frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \sin \xi P_n^m(\cos \xi)$$

С учётом (3.1.1) и (3.2.1) приходим к системе дифференциальных уравнений относительно коэффициентов рядов разложений

$$\begin{aligned}\ddot{U}_{nm} &= \left[(2 - k^2)\eta_2^2 - N \right] U_{nm} + (k^2\eta_2^2 + \gamma^2 N) X_{nm} + \\ &\quad + \left[2 - (2 - k^2)\eta_2^2 \right] G_{nm}, \\ \ddot{X}_{nm} &= (N + k^2\eta_2^2\gamma^{-2}) U_{nm} - (N + k^2\eta_2^2\gamma^{-2}) X_{nm} - k^2\eta_2^2\gamma^{-2} G_{nm}, \\ \ddot{G}_{nm} &= \left[2 - (2 - k^2)\eta_2^2 \right] N U_{nm} - k^2\eta_2^2 N X_{nm} + \\ &\quad + \left[4(\eta_1^2 - \eta_2^2) - k^2\eta_2^2 N \right] G_{nm} + \delta(\tau)\delta_{nm}.\end{aligned}\quad (3.3.3)$$

Система (3.3.3) дополняется однородными начальными условиями (3.2.4) с заменой $w_{nm} = G_{nm}$.

Для решения этой начальной задачи применим интегральное преобразование Лапласа по времени. В результате переходим к системе алгебраических уравнений относительно изображений коэффициентов, решая которую находим (верхний индекс « L » у функции, как и ранее, обозначает её трансформанту по Лапласу, s – параметр преобразования Лапласа)

$$G_{nm}^L(s, \xi, \zeta) = F_n^L(s) \delta_{nm}(\xi, \zeta), \quad F_n^L(s) = \frac{P_{2n}(s^2, N)}{P_{3n}(s^2, N)}, \quad (3.3.4)$$

$$P_{2n}(s, N) = \sum_{r=0}^2 a_{2nr} s^{2-r}, \quad P_{3n}(s, N) = \sum_{r=0}^3 a_{3nr} s^{3-r}$$

$$a_{2n0} = a_{3n0} = -\gamma^2, \quad a_{2n1} = -(2N\gamma^2 + \eta_2^2 k^2),$$

$$a_{2n2} = -N^2\gamma^2 - \eta_2^2 k^2 (N - 2\eta_2^2),$$

$$a_{3n1} = a_{2n1} - \eta_2^2 k^2 \gamma^2 N, \quad a_{3n2} = a_{2n2} + \eta_2^2 k^2 \left[4(\eta_1^2 - \eta_2^2) - 2\gamma^2 N^2 \right],$$

$$a_{3n3} = -\eta_2^2 k^2 \gamma^2 N^3 + \left[2\eta_2^2 (2a^2 + b^2 - 4) + c^2 + 4 \right] \gamma^2 N^2 +$$

$$+ \eta_2^2 k^2 \left[2\eta_2^2 (2\eta_2^2 - 4) + 4(\eta_1^2 - \eta_2^2) + 4 \right] N -$$

$$- 4\eta_2^2 k^2 (\eta_1^2 - \eta_2^2) \left[\eta_2^2 k^2 + 4(\eta_1^2 - \eta_2^2) \right].$$

Здесь учтена малость коэффициента γ по сравнению с единицей.

Поскольку изображение $F_n^L(s)$ – правильная рациональная дробь, то соответствующий оригинал при каждом n определяется аналитически с помощью вычетов.

На рис. 3.3.1 и 3.3.2 изображены зависимости функции влияния $G_w(\beta, \alpha, \tau, \xi, \zeta)$ от угла β и α соответственно в различные моменты времени при учете первых 20 членов ряда (3.3.2). Сплошная кривая соответствует моменту времени $\tau = 0.1$, штриховая – $\tau = 0.5$, штрихпунктирная – $\tau = 1$. При этом графики на фиг. 2.3.1 построены при $\alpha = \pi/3$, $\xi = \zeta = \pi/4$, а на фиг. 2 – при $\beta = \pi/3$, $\xi = \zeta = \pi/4$. Материал оболочки – сталь. Соответствующие безразмерные параметры: $\gamma = 1/40$, $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 0.588$.

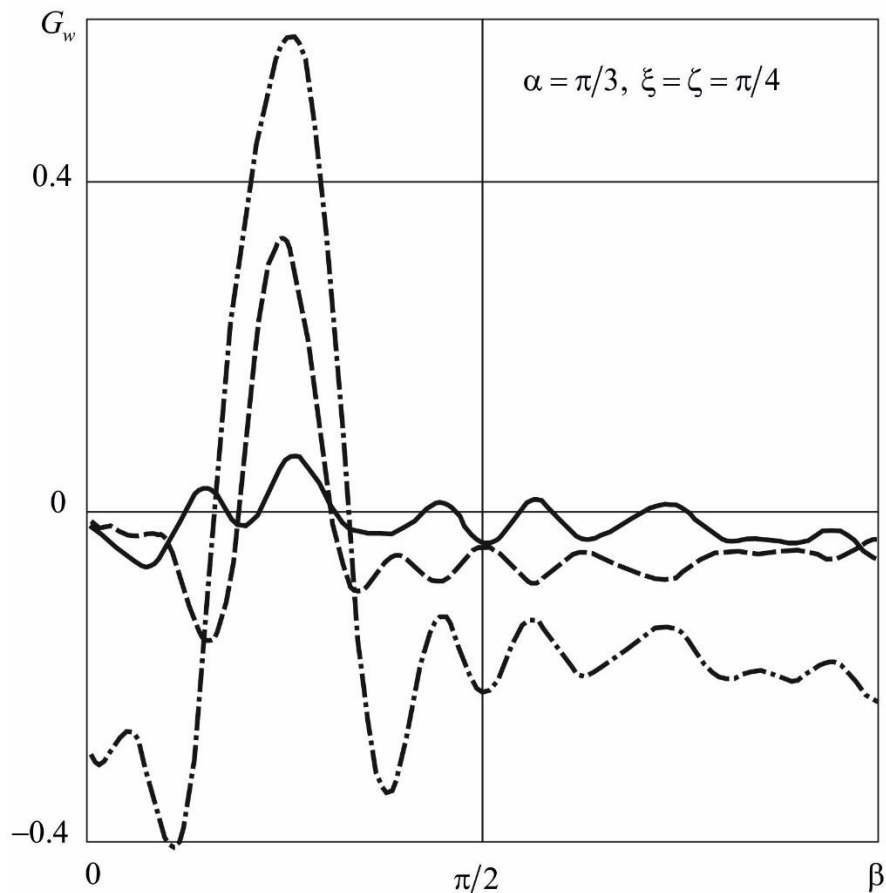


Рис. 3.3.1. Зависимость функции влияния от угла β .

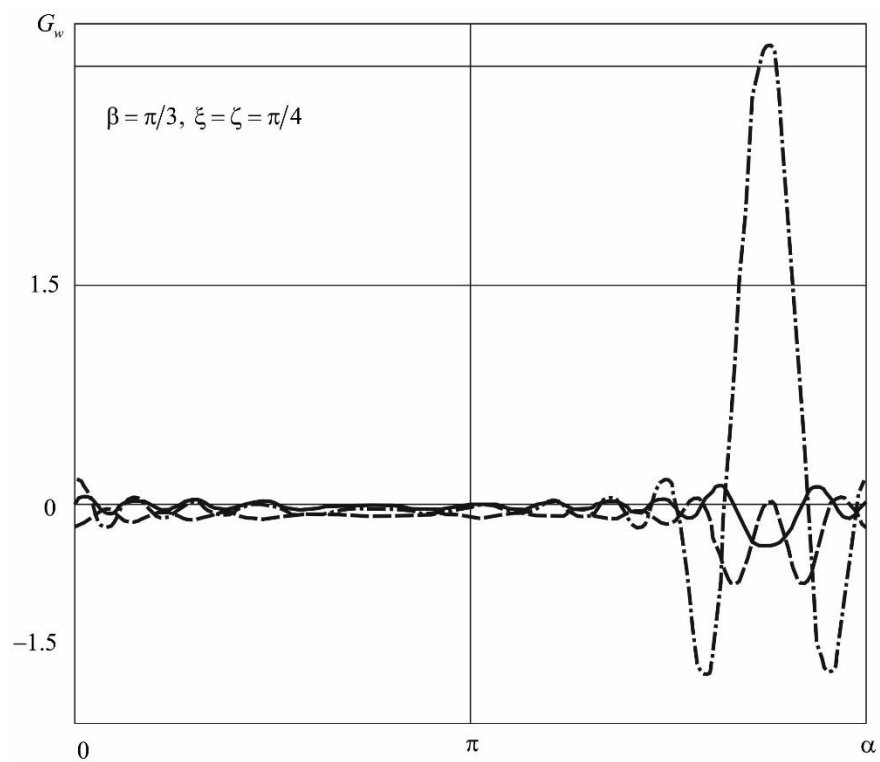


Рис. 3.3.2. Зависимость функции влияния от угла α .

3.4. Пространственная динамика сферической оболочки

Рассмотрим процесс нестационарного пространственного движения сферической оболочки типа Тимошенко под воздействием внешнего давления. Как следует из п. 1.5, с использованием построенной в предыдущем параграфе функции влияния $G_w(\beta, \alpha, \tau, \xi, \zeta)$ нормальные перемещения оболочки даются формулой

$$w(\beta, \alpha, \tau) = \int_0^\tau dt \iint_{\Omega} G_w(\beta, \alpha, \tau - t, \xi, \zeta) p(\xi, \zeta, t) dS. \quad (3.4.1)$$

Для вычисления интеграла (3.4.1) используем метод квадратур. На трехмерную пространственно-временную область $[0, \tau] \times \Omega$ наносим сетку с шагом Δ_t по времени и шагами Δ_ξ, Δ_ζ по угловым переменным. Самим переменным и функции давления ставим в соответствие дискретные аналоги:

$$t_k = k\Delta_t, \quad \xi_i = \beta_1 + i\Delta_\xi, \quad \zeta_l = \alpha_1(\xi_i) + l\Delta_\zeta, \quad p_{ilk} = p(\xi_i, \zeta_l, t_k).$$

Область Ω приближенно заменяем объединением элементарных прямоугольников D_{il} : $\Omega \approx \bigcup_{i,l} D_{il}$ (рис. 3.4.1). При этом граница области Γ заменяется кусочно-постоянной ломаной линией Σ .

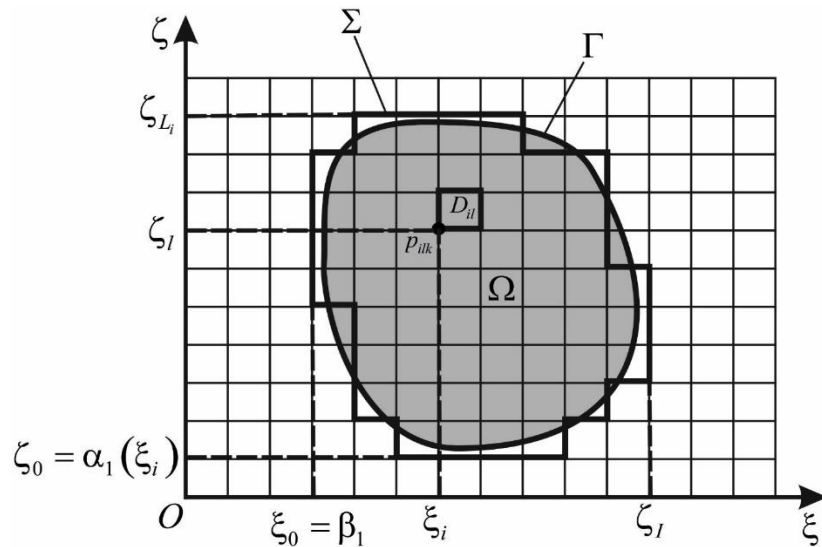


Рис. 3.4.1. Дискретизация трехмерной пространственно-временной области интегрирования

Интеграл (3.4.1) приближенно заменяем кубатурной формулой метода весовых коэффициентов

$$w(\beta, \alpha, \tau) \approx \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{l=0}^{L_i-1} p_{ilk} J_{ilk}, \quad (3.4.2)$$

$$J_{ilk} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt \iint_{D_{il}} G(\beta, \alpha, \tau - t, \xi, \zeta) \sin \xi d\xi d\zeta.$$

Интегралы J_{ilk} вычисляем аналитически с использованием первообразной $\tilde{G}_w(\beta, \alpha, \tau, \xi, \zeta)$ функции $G_w(\beta, \alpha, \tau, \xi, \zeta) \sin \xi$ по переменным ξ , ζ и τ :

$$\begin{aligned} \tilde{G}_w(\beta, \alpha, \tau, \xi, \zeta) &= \int dt \int d\xi \int G_w(\beta, \alpha, \tau - t, \xi, \zeta) \sin \xi d\zeta, \\ J_{ilk} &= \tilde{G}_w(\beta, \alpha, \tau_{k+1}, \xi_{i+1}, \zeta_{l+1}) + \tilde{G}_w(\beta, \alpha, \tau_k, \xi_i, \zeta_{l+1}) + \tilde{G}_w(\beta, \alpha, \tau_k, \xi_{i+1}, \zeta_l) + \\ &+ \tilde{G}_w(\beta, \alpha, \tau_{k+1}, \xi_i, \zeta_l) - \tilde{G}_w(\beta, \alpha, \tau_k, \xi_{i+1}, \zeta_{l+1}) - \tilde{G}_w(\beta, \alpha, \tau_{k+1}, \xi_{i+1}, \zeta_l) - \\ &- \tilde{G}_w(\beta, \alpha, \tau_{k+1}, \xi_i, \zeta_{l+1}) - \tilde{G}_w(\beta, \alpha, \tau_k, \xi_i, \zeta_l), \\ \tau_k &= \tau - t_k, \quad \tau = K\Delta_t. \end{aligned}$$

Отметим, что при вычислении перемещений с использованием описанного алгоритма нет необходимости в дискретизации угловых переменных β и α .

Замечание 3.4.1. Указанный алгоритм расчета применим, если контур области Γ пересекается параллелями оси ординат $O\zeta$ лишь в двух точках. В случае более сложного контура область Ω необходимо представить в виде объединения конечного числа областей рассмотренного типа. ■

В качестве примера рассмотрим воздействие на оболочку давления $p = H(\Omega)H(\tau)$, где $H(\tau)$ – функция Хевисайда, $H(\Omega)$ – характеристическая функция области. В расчетах полагаем, $\Omega = [\pi/6, \pi/3] \times [0, \pi/6]$, а материал оболочки – сталь, чему соответствуют параметры $\gamma = 1/40$, $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 0.588$.

На рис. 3.4.1 и 3.4.2 изображены распределения нормальных перемещений по меридиональной координате β при $\alpha = \pi/12$ и осевой координате α при $\beta = \pi/4$ соответственно в различные моменты времени:

сплошные кривые соответствуют времени $\tau=0.1$, штриховые – $\tau=0.3$, а штрихпунктирные – $\tau=0.5$. Графики построены в полярных системах координат с углами β и α относительно недеформированных сечений с учетом 10 первых членов ряда (3.3.2). Учет 15 первых членов приводит к относительной погрешности менее одного процента.

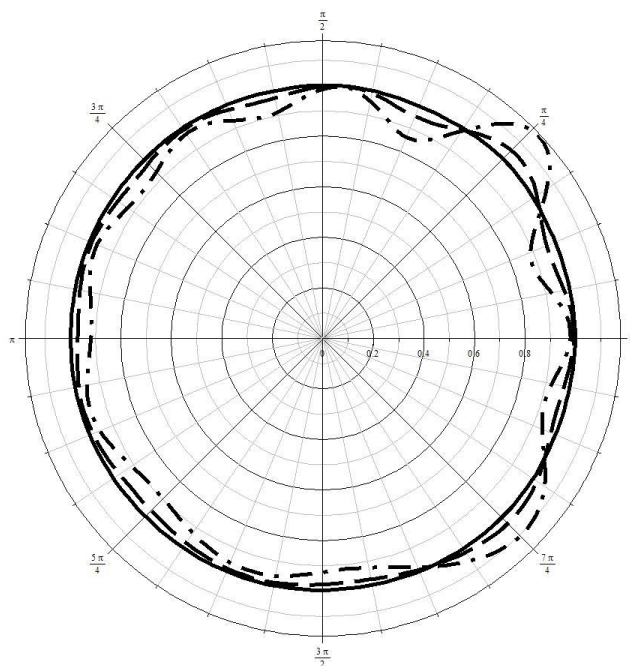


Рис. 3.4.1. Распределения нормальных перемещений по меридиональной координате β при $\alpha = \pi/12$. Сплошные кривые соответствуют времени $\tau = 0.1$, штриховые – $\tau = 0.3$, а штрихпунктирные – $\tau = 0.5$.

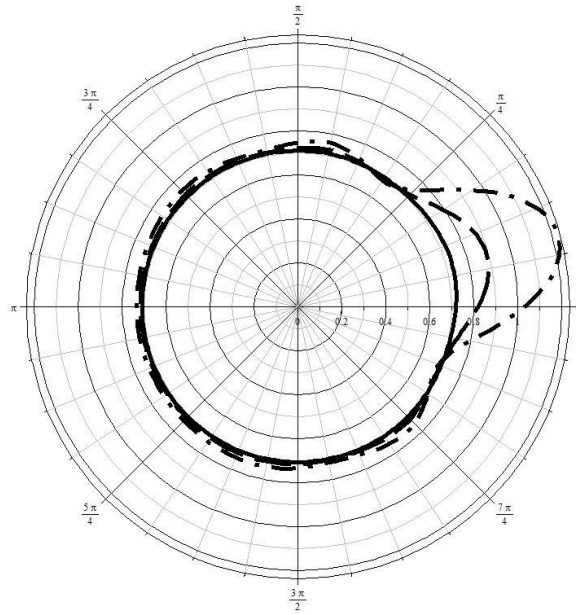


Рис. 3.4.2. Распределения нормальных перемещений по осевой координате α при $\beta = \pi/4$. Сплошные кривые соответствуют времени $\tau = 0.1$, штриховые – $\tau = 0.3$, а штрихпунктирные – $\tau = 0.5$.

3.5. Осесимметричная функция влияния для сферической оболочки

Для решения практически важных нестационарных задач с участием сферических оболочек во многих случаях бывает достаточно построить решение в случае осесимметричной постановке задачи. С этой целью необходимо в данном параграфе построим нестационарную функцию влияния для сферической оболочки в предположении её зависимости только от меридиональной координаты β и времени τ . Как отмечалось выше, уравнения движения сферической оболочки (1.3.8) не инвариантны относительно сдвига по угловой координате β , так как в них присутствуют коэффициенты, зависящие от угловой координаты.

Соответствующая постановка задачи включает в себя уравнения (1.3.8) осесимметричного движения сферической оболочки типа Тимошенко, в которых вектор нормального давления имеет вид

$$\mathbf{p} = (0, \delta(\beta - \xi)\delta(\tau), 0)^T. \quad (3.5.1)$$

Функции $u = G_u(\beta, \xi, \tau)$, $w = G_w(\beta, \xi, \tau)$, $\chi = G_\chi(\beta, \xi, \tau)$ как решения задачи (1.3.8), (3.5.1) являются осесимметричными функция влияния для сферической оболочки.

Граничные условия в задаче об определении функций влияния состоят в требовании ограниченности решения в полюсах оболочки $\beta = 0$ и $\beta = \pi$. Начальные условия полагаются нулевыми:

$$\begin{aligned} G_u(\beta, \xi, 0) &= G_w(\beta, \xi, 0) = G_\chi(\beta, \xi, 0) = \\ &= \dot{G}_u(\beta, \xi, 0) = \dot{G}_w(\beta, \xi, 0) = \dot{G}_\chi(\beta, \xi, 0) = 0. \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

Для решения поставленной задачи воспользуемся разложениями функций G_u , G_w , G_χ и $\delta(\beta - \xi)$ в ряды по полиномам Лежандра $P_n(\cos\beta)$ и Гегенбауэра $C_{n-1}^{3/2}(x) = dP_n(x)/dx$ [76]:

$$\begin{pmatrix} G_u(\beta, \xi, \tau) \\ G_\chi(\beta, \xi, \tau) \end{pmatrix} = -\sin\beta \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} G_{un}(\xi, \tau) \\ G_{\chi n}(\xi, \tau) \end{pmatrix} C_{n-1}^{3/2}(\cos\beta), \quad (3.5.3)$$

$$\begin{pmatrix} G_w(\beta, \xi, \tau) \\ \delta(\beta - \xi) \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} G_{wn}(\xi, \tau) \\ \delta_n(\xi) \end{pmatrix} P_n(\cos\beta).$$

Коэффициенты $\delta_n(\xi)$ находятся так:

$$\delta_n(\xi) = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi \delta(\beta - \xi) P_n(\cos\beta) \sin\beta d\beta = \frac{2n+1}{2} P_n(\cos\xi) \sin\xi. \quad (3.5.4)$$

Подставляем (3.5.3) с учетом (3.5.4) в (1.3.8). Используем известные соотношения для полиномов Лежандра и Гегенбауэра [76]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P_n(\cos\beta)}{d\beta^2} + \operatorname{ctg}\beta \frac{dP_n(\cos\beta)}{d\beta} &= -n(n+1)P_n(\cos\beta), \\ -\sin\beta C_{n-1}^{3/2}(\cos\beta) &= dP_n(\cos\beta)/d\beta, \\ \frac{d^2 \tilde{C}_{n-1}^{3/2}(\cos\beta)}{d\beta^2} + \operatorname{ctg}\beta \frac{d\tilde{C}_{n-1}^{3/2}(\cos\beta)}{d\beta} - \frac{\tilde{C}_{n-1}^{3/2}(\cos\beta)}{\sin^2\beta} &= -n(n+1)\tilde{C}_{n-1}^{3/2}(\cos\beta), \\ \tilde{C}_{n-1}^{3/2}(\cos\beta) &= -\sin\beta C_{n-1}^{3/2}(\cos\beta). \end{aligned}$$

В результате приходим к системе уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложений (3.5.3), зависящих от времени τ и угловой координаты ξ :

$$\mathbf{L}_n \mathbf{G}_n + \mathbf{p}_n = \frac{\partial^2 \mathbf{G}_n}{\partial \tau^2}, \quad \mathbf{L}_n = (L_{nij})_{3 \times 3}, \quad (3.5.5)$$

$$\mathbf{G}_n = (G_{un}, G_{wn}, G_{\varphi n})^T, \quad \mathbf{p}_n = [0, \delta_n(\xi)\delta(\tau), 0]^T,$$

$$L_{n11} = \eta_2^2(2 - k^2) - \eta_1^2 n(n+1),$$

$$L_{n12} = 2(\eta_1^2 - \eta_2^2) + \eta_2^2 k^2, \quad L_{n13} = \gamma^2 \eta_1^2 n(n+1) + \eta_2^2 k^2,$$

$$L_{n21} = [2(\eta_1^2 - \eta_2^2) + \eta_2^2 k^2] n(n+1), \quad L_{n22} = -\eta_2^2 k^2 n(n+1) - 4(\eta_1^2 - \eta_2^2),$$

$$L_{n23} = -\eta_2^2 k^2 n(n+1), \quad L_{n31} = \gamma^{-2} L_{n13}, \quad L_{n32} = -\eta_2^2 k^2 \gamma^{-2}, \quad L_{n33} = -\gamma^{-2} L_{n13}.$$

В пространстве преобразований Лапласа уравнения (3.5.5) с учетом нулевых начальных условий принимают следующий вид (значок "L", как и ранее означает трансформанту по Лапласу, а s – параметр преобразования):

$$\mathbf{A}(n)\mathbf{G}_n^L + \mathbf{p}_n^L = s^2\mathbf{G}_n^L, \quad \mathbf{A}(n) = (A_{nij})_{3 \times 3}, \quad (3.5.6)$$

$$\mathbf{G}_n^L = (G_{un}^L, G_{wn}^L, G_{\chi n}^L)^T, \quad \mathbf{p}_n^L = [0, \delta_n(\xi), 0]^T,$$

$$A_{nij} = \begin{cases} L_{nij}, & i \neq j; \\ L_{nij} - s^2, & i = j. \end{cases}$$

Далее ограничимся построением только функцией влияния G_w , которая понадобится нам в дальнейшем.

Решая систему уравнений (3.5.6), находим изображения коэффициентов G_{wn}^L разложения функции влияния G_w

$$G_{wn}^L = Q(s^2, m^2)\delta_n(\xi), \quad Q(s, m) = \frac{\sum_{j=0}^2 S_j(s, m)}{\sum_{j=0}^3 T_j(s, m)} \quad (3.5.7)$$

Здесь обозначено $m^2 = n(n+1)$. $S_j(s, m)$, $T_j(s, m)$ – однородные многочлены степени j , которые имеют вид

$$S_0 = 2k^2\eta_2^4,$$

$$S_1(s, m) = \eta_2^2 \left[(2-k^2)\gamma^2 - k^2 \right] s + \eta_1^2 \eta_2^2 \left[(k^2 + 2)\gamma^2 - k^2 \right] m,$$

$$S_2(s, m) = \gamma^2 \left[(\gamma + 1)m\eta_1^2 + s \right] \left[(\gamma - 1)m\eta_1^2 - s \right],$$

$$T_0 = 8k^2\eta_2^4 (\eta_1^2 - \eta_2^2),$$

$$T_1(s^2, m^2) = 2\eta_2^2 \left[2 \left([2-k^2]\gamma^2 - k^2 \right) \eta_1^2 + \left([2k^2 - 4]\gamma^2 + 3k^2 \right) \eta_2^2 \right] s +$$

$$+ 4\eta_2^2 \left[(k^2 + 2)\gamma^2 \eta_1^4 - \left([k^2 + 2]\gamma^2 + k^2 \right) \eta_2^2 \eta_1^2 + k^2 \eta_2^4 \right] m,$$

$$T_2(s^2, m^2) = \left[\left([6-k^2]\gamma^2 - k^2 \right) \eta_2^2 - 4\gamma^2 \eta_1^2 \right] s^2 +$$

$$+ \left[-4\gamma^2 \eta_1^4 + \left([5k^2 + 2]\gamma^2 - k^2 \right) \eta_2^2 \eta_1^2 + 2(2-k^2)\gamma^2 \eta_2^4 \right] sm +$$

$$+ 2\gamma^2 \left[2\gamma^2 \eta_1^6 - 2(\gamma^2 + 1)\eta_2^2 \eta_1^4 + (k^2 + 2)\eta_2^4 \eta_1^2 \right] m^2,$$

$$T_3(s^2, m^2) = (k^2 \eta_2^2 m + s) S_2(s, m).$$

С учетом малости γ выражения для некоторых коэффициентов приведённых выше многочленов возможно упростить. В результате получим

$$\begin{aligned}
S_1(s, m) &= -k^2 \eta_2^2 (s + m \eta_1^2), \\
S_2(s, m) &= -\gamma^2 (m \eta_1^2 + s)^2, \\
T_1(s^2, m^2) &= 2 \eta_2^2 k^2 (3 \eta_2^2 - 2 \eta_1^2) s + 4 \eta_2^4 k^2 (\eta_2^2 - \eta_1^2) m, \\
T_2(s^2, m^2) &= -k^2 \eta_2^2 s^2 - k^2 \eta_2^2 \eta_1^2 s m + 2 \gamma^2 \eta_2^2 \eta_1^2 [(k^2 + 2) \eta_2^2 - 2 \eta_1^2] m^2, \\
T_3(s^2, m^2) &= -\gamma^2 (k^2 \eta_2^2 m + s) (m \eta_1^2 + s)^2 = (k^2 \eta_2^2 m + s) S_2(s, m).
\end{aligned}$$

Поскольку изображения коэффициентов G_{wn}^L представляют собой правильную рациональную дробь относительно параметра s , то соответствующие оригиналы при каждом n можно построить аналитически, аналогично (2.1.6) с помощью вычетов:

$$\begin{aligned}
G_{wn}(\tau) &= \sum_m \operatorname{res}_{s_{nm}} G_{wn}^L(s) e^{s\tau} = \\
&= \sum_m \frac{1}{(l_{nm} - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_{nm}} \frac{d^{l_{nm}-1}}{ds^{l_{nm}-1}} (s - s_{nm})^{l_{nm}} G_{wn}^L(s) e^{s\tau}.
\end{aligned} \tag{3.5.8}$$

Сумма берётся по всем особым точкам (полюсам), которыми являются нули знаменателя $s_{nm} : \sum_{j=0}^3 T_j(s_{nm}^2, m^2) = 0$, l_{nm} – кратности этих нулей.

При проведении практических расчётов следует определённым числом N первых членов ряда (3.5.3):

$$G_w(\beta, \xi, \tau) \approx \sum_{n=0}^N G_{wn}(\xi, \tau) P_n(\cos \beta). \tag{3.5.9}$$

В дальнейшем, если не оговорено особо, под функцией влияния для сферической оболочки будем понимать выражение (3.5.9). При этом знак приближённого равенства отождествляется со знаком обычного равенства. Количество N удерживаемых первых членов должно быть определено из анализа практической сходимости ряда (3.5.3).

На рис. 3.5.1 представлены распределения функции влияния $G_w(\beta, 0.1, \tau)$ по угловой координате β в момент времени $\tau = 1$ при учёте различного числа членов ряда (3.5.3). Сплошная кривая соответствует $N = 10$, пунктирная – $N = 20$, штрихпунктирная – $N = 25$. Графики построены в полярной системе

координат, связанной с меридиональным сечением сферической оболочки. Анализ результатов показывает, что для проведения практических расчётов достаточно учесть 21 первых членов, поэтому в дальнейшем в формуле (3.5.9) примем $N = 20$. При этом, как видно на рис. 3.5.1, отличие результата от случая $N = 25$ практически отсутствует. Безразмерные параметры приняты равными: $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 0.504$, $\gamma = 2 \cdot 10^{-3}$.

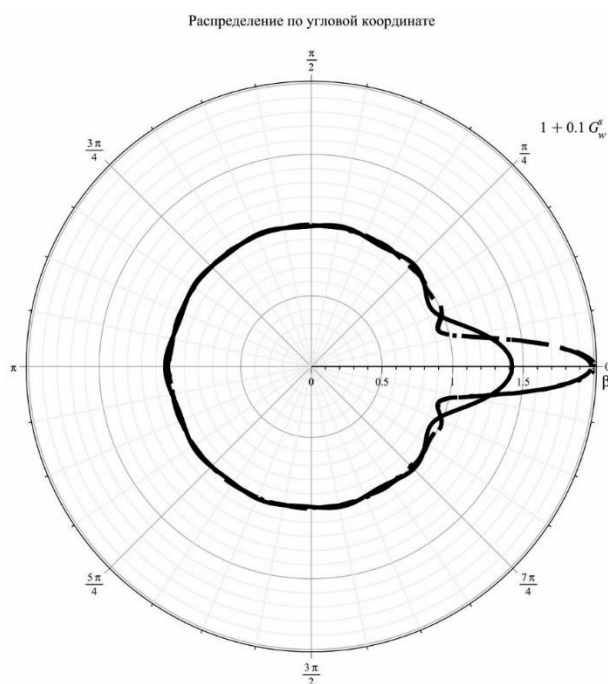


Рис. 3.5.1. Распределения функции влияния $G_w(\beta, 0.1, \tau)$ по угловой координате β при учёте различного числа членов ряда.

На рис. 3.5.2 представлены распределения функции влияния $G_w(\beta, 0.1, \tau)$ по угловой координате β в различные моменты времени. Сплошная кривая соответствует $\tau = 0.5$, пунктирная – $\tau = 1$, штрихпунктирная – $\tau = 1.5$.

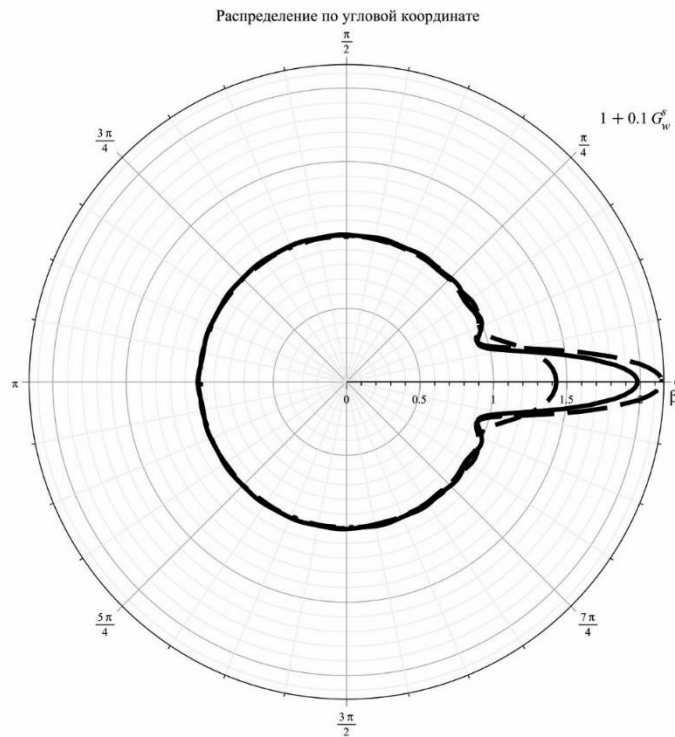


Рис. 3.5.2. Распределения функции влияния $G_w(\beta, 0.1, \tau)$ по угловой координате β в различные моменты времени.

Как следует из п. 1.5, нормальные перемещения $w(\beta, \tau)$ оболочки связаны с нормальным давлением $p(\beta, \tau)$ посредством интегрального соотношения

$$w(\beta, \tau) = \int_0^\tau \int_0^\pi G_w(\beta, \xi, \tau - t) p(\xi, t) d\xi dt. \quad (3.5.10)$$

Отметим, что к этому интегральному соотношению можно прийти также и непосредственным образом, минуя задачу о функции влияния. Поясним это. Пусть ставится задача об определении нормальных перемещений оболочки $w(\beta, \tau)$, как решения уравнений (1.3.8), при воздействии на неё нормального давления $p(\beta, \tau)$. Представляя аналогично (3.5.3) $u(\beta, \tau)$, $w(\beta, \tau)$ и $\chi(\beta, \tau)$ в виде рядов Фурье

$$\begin{pmatrix} u(\beta, \tau) \\ \chi(\beta, \xi, \tau) \end{pmatrix} = -\sin \beta \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} u_n(\tau) \\ \chi_n(\tau) \end{pmatrix} C_{n-1}^{3/2}(\cos \beta), \quad (3.5.11)$$

$$w(\beta, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\tau) P_n(\cos \beta),$$

раскладывая $p(\beta, \tau)$ в ряд по полиномам Лежандра

$$p(\beta, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\tau) P_n(\cos \beta), \quad (3.5.12)$$

$$p_n(\tau) = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} p(\xi, \tau) P_n(\cos \xi) \sin \xi d\xi$$

и подставляя полученные разложения в (1.3.8), приходим к системе уравнений в коэффициентах рядов Фурье

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_n \mathbf{w}_n + \mathbf{p}_n &= \frac{\partial^2 \mathbf{w}_n}{\partial \tau^2}, \quad \mathbf{L}_n = (L_{nij})_{3 \times 3}, \\ \mathbf{w}_n &= (u_n, w_n, \chi_n)^T, \quad \mathbf{p}_n = [0, p_n(\tau), 0]^T, \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

где L_{nij} имеют вид (3.5.5).

Применяя к (3.5.13) интегральное преобразование по времени, приходим к системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(n) \mathbf{w}_n^L + \mathbf{p}_n^L &= s^2 \mathbf{w}_n^L, \quad \mathbf{A}(n) = (A_{nij})_{3 \times 3}, \\ \mathbf{w}_n^L &= (u_n^L, w_n^L, \chi_n^L)^T, \quad \mathbf{p}_n^L = (0, p_n^L, 0)^T, \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

в которой коэффициенты A_{nij} имеют вид (3.5.6).

Решая систему (3.5.14) относительно w_n^L , находим

$$w_n^L = Q(s^2, m^2) p_n^L(s). \quad (3.5.15)$$

Теперь подставим выражение (3.5.15) в (3.5.11). С учётом (3.5.12) и учитывая равномерную сходимость рядов в обобщённых функциях, получаем

$$\begin{aligned}
w^L(\beta, s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\pi} G_{wn}^L(\xi, s) p^L(\xi, s) d\xi \right) P_n(\cos \beta) = \\
&= \int_0^{\pi} p^L(\xi, s) \sum_{n=0}^{\infty} [G_{wn}^L(\xi, s) P_n(\cos \beta)] d\xi = \int_0^{\pi} G_w^{Ls}(\beta, \xi, s) p^L(\xi, s) d\xi, \quad (3.5.16) \\
G_{wn}^L(\xi, s) &= Q(s^2, m^2) \frac{2n+1}{2} P_n(\cos \xi) \sin \xi = \\
&= Q(s^2, m^2) \delta_n(\xi).
\end{aligned}$$

Выполняя теперь обращение интегрального преобразования, с учётом теоремы о свертке для преобразования Лапласа вновь получаем формулу (3.5.10)

$$w(\beta, \tau) = \int_0^{\tau} \int_0^{\pi} G_w(\beta, \xi, \tau - t) p(\xi, t) d\xi dt.$$

Покажем ещё, что двумерное интегральное представление (3.5.10) сводится к одномерным интегральным представлениям в коэффициентах рядов по полиномам Лежандра. Для этого заменим все функции в (3.5.10) их разложениями в ряды:

$$\begin{aligned}
w(\beta, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\tau) P_n(\cos \beta), \quad p(\xi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) P_n(\cos \xi), \\
G_w(\beta, \xi, \tau - t) &= \sum_{m=0}^{\infty} G_{wm}(\xi, \tau - t) P_m(\cos \beta), \quad (3.5.17) \\
G_{wm}(\xi, \tau) &= \frac{2n+1}{2} g_{wm}(\tau) \sin \xi P_m(\cos \xi),
\end{aligned}$$

где $g_{wk}^s(\tau)$ – оригинал функции $Q[s^2, k(k+1)]$.

Тогда, с учётом свойства ортогональности полиномов Лежандра

$$\frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} \sin \xi P_m(\cos \xi) P_n(\cos \xi) d\xi = \begin{cases} 1, & m = n; \\ 0, & m \neq n, \end{cases} \quad (3.5.18)$$

приходим к одномерным интегральным представлениям типа свёртки в коэффициентах рядов (3.5.17)

$$w_n(\tau) = \int_0^{\tau} g_{wn}(\tau - t) p_n(t) dt. \quad (3.5.19)$$

Отметим, что в изображениях по Лапласу представление (3.5.19) переходит в алгебраическое уравнение

$$w_n^L(s) = g_{wn}^L(s) p_n^L(s), \quad (3.5.20)$$

$$g_{wn}^L(s) = Q[s^2, k(k+1)].$$

Таким образом, интегральное представление (3.5.10) можно записать так

$$w(\beta, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\beta) \int_0^{\tau} g_{wn}(\tau-t) p_n(t) dt. \quad (3.5.21)$$

В качестве примера рассмотрим воздействие нестационарного давления вида $p = \tau e^{-10\tau} H\left(\frac{\pi}{20} - \beta\right)$ на сферическую оболочку, характеризуемую параметрами $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 0.504$, $\gamma = 2 \cdot 10^{-3}$. При этом интеграл в правой части формулы (3.5.10) вычисляется точно.

На рис. 3.5.3 представлена зависимость нормальных перемещений в лобовой точке оболочки от времени.

Распределения нормальных перемещений по угловой координате представлены на рис. 3.5.4. Сплошная кривая соответствует моменту времени $\tau = 1$, штриховая – $\tau = 2$, штрихпунктирная – $\tau = 3$.

Рис. 3.5.5 иллюстрирует зависимость нормальных перемещений от количества удерживаемых членов ряда разложения для функции влияния. Здесь изображены распределения нормальных перемещений по угловой координате в момент времени $\tau = 2$ при различном значении N . Сплошная кривая соответствует $N = 15$, пунктирная – $N = 20$, штрихпунктирная – $N = 25$.

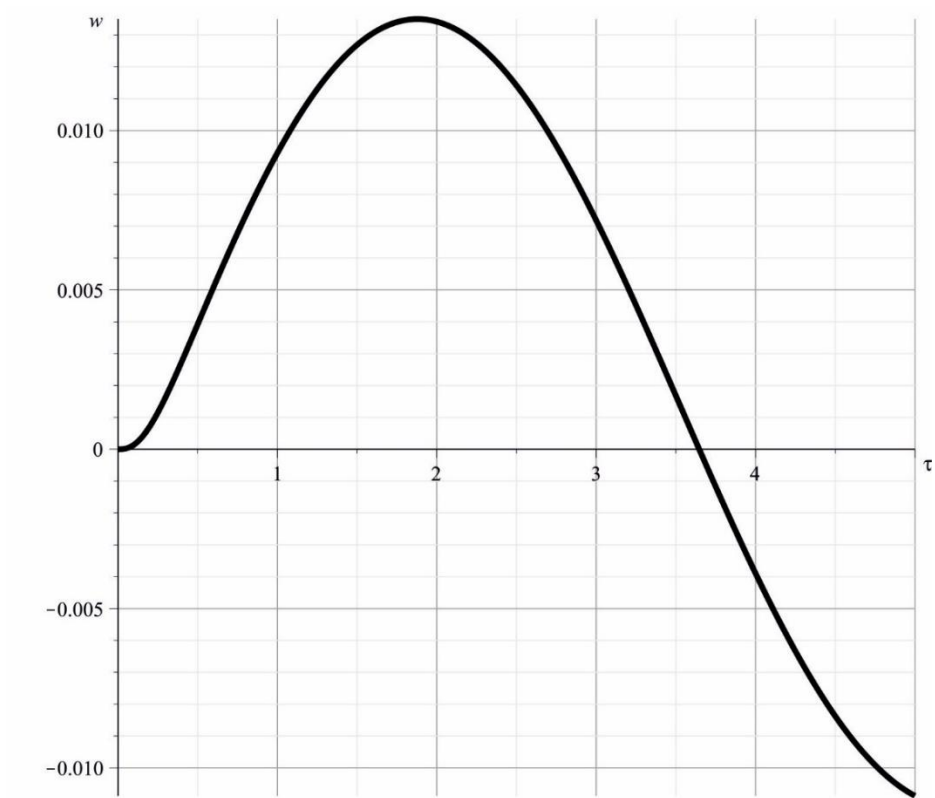


Рис. 3.5.3. Зависимость нормальных перемещений от времени в лобовой точке оболочки.

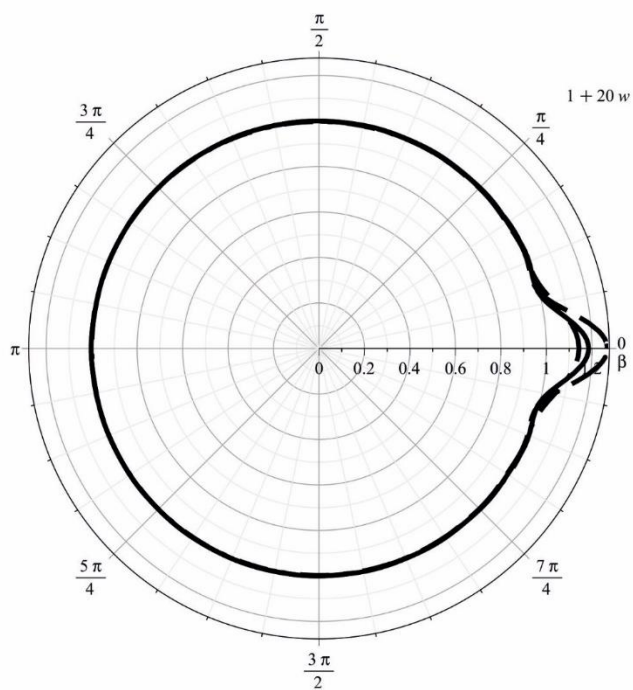


Рис. 3.5.4. Распределения нормальных перемещений по координате в различные моменты времени.

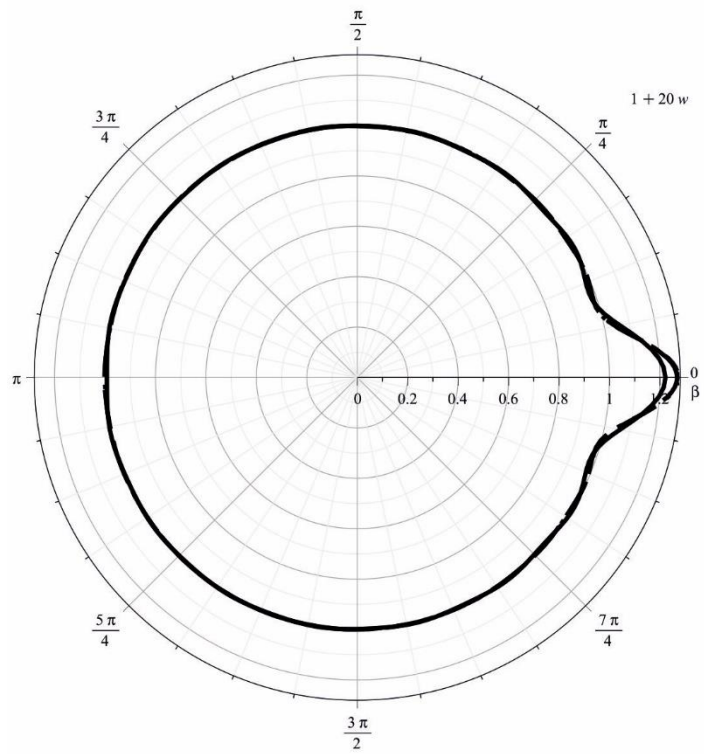


Рис. 3.5.5. Зависимость нормальных перемещений от количества удерживаемых членов ряда разложения для функции влияния.

3.6. Функция влияния для сферической оболочки с упругим наполнителем

В этом параграфе в предположении об осесимметричной постановке задачи построим функцию влияния для сферической оболочки с упругим наполнителем. Будем полагать, что контакт между оболочкой и наполнителем происходит в условиях свободного проскальзывания. Функция влияния представляет собой нормальные перемещения оболочки $w = G_w(\beta, \xi, \tau)$ как решение задачи (1.3.8), (1.2.30)-(1.2.35) с нулевыми начальными условиями, условиями контакта между оболочкой и наполнителем

$$u_r|_{r=1} = w, \sigma_{r\beta}|_{r=1} = 0, \beta \in [0, \pi] \quad (3.6.1)$$

при воздействии внешнего давления $p_0 = \delta(\tau)\delta(\beta - \xi)$ и с учетом внутреннего давления со стороны наполнителя.

Таким образом, в (1.3.8) следует положить

$$p = p_0 - p_r, p_r = \sigma_{rr}|_{r=1}, \quad (3.6.2)$$

где p_r – реакция наполнителя.

Для тангенциальных перемещений оболочки и угла поворота нормали к срединной поверхности, как и ранее, введем обозначения $u = G_u(\beta, \xi, \tau)$, $\chi = G_\chi(\beta, \xi, \tau)$.

Ограничимся построением функции влияния G_w .

Представим заданные и искомые функции в виде рядов Фурье по полиномам Лежандра и Гегенбауэра:

$$\begin{pmatrix} G_u \\ G_\chi \\ \Psi \\ u_\beta \\ \sigma_{r\beta} \end{pmatrix} = -\sin\beta \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} G_{un}(\xi, \tau) \\ G_{\chi n}(\xi, \tau) \\ \Psi_n(r, \xi, \tau) \\ u_{\beta n}(r, \xi, \tau) \\ \sigma_{r\beta n}(r, \xi, \tau) \end{pmatrix} C_{n-1}^{3/2}(\cos\beta), \quad (3.6.3)$$

$$\begin{pmatrix} G_w \\ p_0 \\ \varphi \\ u_r \\ \sigma_{rr} \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} G_{wn}(\xi, \tau) \\ p_{0n}(\xi, \tau) \\ \varphi_n(r, \xi, \tau) \\ u_{rn}(r, \xi, \tau) \\ \sigma_{rm}(r, \xi, \tau) \end{pmatrix} P_n(\cos\beta), \quad p_{0n} = \frac{2n+1}{2} P_n(\cos\xi) \delta(\tau).$$

Как следует из соотношений (1.2.31)-(1.2.33), коэффициенты разложений (3.6.3) связаны между собой так (в качестве характерной скорости c_* принята скорость волн растяжения-сжатия в заполнителе, в качестве характерных упругих постоянных Ламе λ_* , μ_* приняты упругие постоянные Ламе заполнителя, при этом $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = \eta^{-1}$)

$$\begin{aligned} u_{rn} &= \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r} \Psi_n, \quad u_{\beta n} = \frac{\varphi_n - \Psi_n}{r} - \frac{\partial \Psi_n}{\partial r}, \\ \sigma_{rm} &= \frac{\partial u_{rn}}{\partial r} + \frac{1-2\eta^{-2}}{r} [2u_{rn} - n(n+1)u_{\beta n}], \\ \sigma_{r\beta n} &= \eta^{-2} \left(\frac{\partial u_{\beta n}}{\partial r} + \frac{u_{rn} - u_{\beta n}}{r} \right). \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

Подставляя (3.6.3) в (1.3.8) и применяя к полученным уравнениям преобразование Лапласа по времени, приходим к системе алгебраических уравнений относительно изображений $G_{un}^L(\xi, s)$, $G_{wn}^L(\xi, s)$, $G_{\chi n}^L(\xi, s)$. Из её решение находим решая которую находим функцию G_{wn}^L :

$$G_{wn}^L = G_{wn0}^L - Q(s^2, m^2) p_m^L, \quad (3.6.5)$$

где G_{wn0}^L совпадает с функцией G_{wn}^L в (3.5.7).

Отметим, что второе слагаемое в (3.6.5) характеризует вклад заполнителя.

Подстановка (3.6.3) в (1.2.30) и применение преобразования Лапласа по времени приводит к следующей задаче для заполнителя относительно коэффициентов рядов (3.6.3):

$$s^2 \varphi_n^L = \Delta_n \varphi_n^L, \quad \frac{s^2}{\eta^2} \psi_n^L = \Delta_n \psi_n^L, \quad \Delta_n = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2}, \quad (3.6.6)$$

$$u_m^L \Big|_{r=1} = G_{2n}^L, \quad \sigma_{r\beta n}^L \Big|_{r=1} = 0. \quad (3.6.7)$$

Ограниченные решения уравнений (3.6.6) имеют вид [76]:

$$\varphi_n^L = \frac{f_n(s)}{\sqrt{r}} I_{n+1/2}(rs), \quad \psi_n^L = \frac{q_n(s)}{\sqrt{r}} I_{n+1/2}(rs/\eta). \quad (3.6.8)$$

Здесь $f_n(s)$, $q_n(s)$ – произвольные функции, а $I_\nu(z)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода, которая при $\nu = n + 1/2$ выражается через элементарные функции [194]:

$$I_{n+1/2}(z) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi z}^{n+1/2}} \left[e^z R_{n0}(-z) - e^{-z} R_{n0}(z) \right], \quad (3.6.9)$$

$$R_{n0}(z) = \sum_{k=0}^n A_{nk} z^{n-k}, \quad A_{nk} = \frac{(n+k)!}{2^k k! (n-k)!} \quad (0 \leq k \leq n), \quad A_{nk} = 0 \quad (k < 0, k > n).$$

Из (3.6.4) и (3.6.8) следуют выражения для u_m^L и $\sigma_{r\alpha n}^L$. Подставляя их в граничные условия (3.6.1) и решая соответствующую систему уравнений, находим функции $f_n(s)$ и $q_n(s)$. Их подстановка в выражение для σ_{rm} из (3.6.4), в котором полагаем $r = 1$, приводит к следующему изображению p_m^L :

$$p_m^L = \frac{2n+1}{2} Q(s^2, m^2) \frac{D_n(s)}{\Delta_n(s)} P_n(\cos \vartheta), \quad (3.6.10)$$

$$\Delta_n(s) = 1 + M_{1n}(s) e^{-2\omega_1 s} + M_{2n}(s) e^{-(\omega_1 + \omega_2) s} + M_{3n}(s) e^{-(\omega_1 - \omega_2) s},$$

$$D_n(s) = L_{1n}(s) + L_{2n}(s) e^{-2\omega_1 s} - L_{3n}(s) e^{-(\omega_1 + \omega_2) s} - L_{4n}(s) e^{-(\omega_1 - \omega_2) s},$$

$$M_{1n}(s) = \frac{M_n(\xi_0, \zeta_0)}{M_n(-\xi_0, -\zeta_0)}, \quad M_{2n}(s) = -\frac{M_n(-\xi_0, \zeta_0)}{M_n(-\xi_0, -\zeta_0)}, \quad M_{3n}(s) = -\frac{M_n(\xi_0, -\zeta_0)}{M_n(-\xi_0, -\zeta_0)},$$

$$\begin{aligned}
L_{1n}(s) &= \frac{L_n(-\xi_0, -\zeta_0)}{M_n(-\xi_0, -\zeta_0)}, \quad L_{2n}(s) = \frac{L_n(\xi_0, \zeta_0)}{M_n(-\xi_0, -\zeta_0)}, \\
L_{3n}(s) &= \frac{L_n(-\xi_0, \zeta_0)}{M_n(-\xi_0, -\zeta_0)}, \quad L_{4n}(s) = \frac{L_n(\xi_0, -\zeta_0)}{M_n(-\xi_0, -\zeta_0)}, \\
L_n(x, y) &= R_{n2}(y)\tilde{R}_{n2}(x) - 2R_{n1}(x)\tilde{R}_{n1}(y), \\
M_n(x, y) &= R_{n4}(x)R_{n2}(y) - 2R_{n1}(x)R_{n3}(y), \\
R_{n1}(s) &= R_{n+1,0}(s) - nR_{n0}(s), \\
R_{n2}(s) &= R_{n+2,0}(s) - (2n+1)R_{n+1,0}(s) + 2n(n+1)R_{n0}(s), \\
\tilde{R}_{n1}(s) &= \frac{\eta-1}{\eta} \left[n(n+1)R_{n+1,0}(s) - n(n^2-1)R_{n0}(s) \right], \\
\tilde{R}_{n2}(s) &= R_{n+2,0}(s) - (2n+1+2\eta^{-1})R_{n+1,0}(s) + \frac{\eta+1}{\eta}n(n-1)R_{n0}(s), \\
R_{n3}(s) &= Q(s^2, n_1^2)\tilde{R}_{n1}(s) - R_{n0}(s), \quad R_{n4}(s) = Q(s^2, n_1^2)\tilde{R}_{n2}(s) - R_{n1}(s), \\
\omega_1 &= \frac{\eta+1}{\eta} > \omega_2 = \frac{1-\eta}{\eta} > 0, \quad \xi_0 = s, \quad \zeta_0 = s/\eta.
\end{aligned}$$

Для последующего аналитического вычисления оригиналов, принимая во внимание, что в некоторой правой полуплоскости $\operatorname{Re} s > \alpha_*$ имеет место неравенство

$$M_{1n}(s)e^{-2\omega_1 s} + M_{2n}(s)e^{-(\omega_1+\omega_2)s} + M_{3n}(s)e^{-(\omega_1-\omega_2)s} < 1,$$

используем следующее разложение в степенной ряд по экспонентам:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta_n(s)} &= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{|z|=l} (l; z) M_{zn}(s) e^{-n_z s} \\
n_z &= \left[(2z_1 + z_2 + z_3)\omega_1 + (z_2 - z_3)\omega_2 \right] > 0, \quad z = (z_1, z_2, z_3), \\
M_{zn}(s) &= M_{1n}^{z_1}(s) M_{2n}^{z_2}(s) M_{3n}^{z_3}(s), \quad (l; z) = \frac{l!}{z_1! z_2! z_3!},
\end{aligned}$$

где z – мультииндекс, $|z| = z_1 + z_2 + z_3$ – его модуль, $(l; z)$ – мультиномиальный коэффициент.

Тогда изображение p_m^L предстает в виде:

$$p_m^L = \frac{2n+1}{2} P_n(\cos \xi) \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \sum_{|z|=l} (l; z) \sum_{k=1}^4 M_{kzn}(s) e^{-n_{kz}s},$$

$$n_{kz} > 0, M_{kzn}(s) = Q(s^2, m^2) L_{kn}(s) M_{zn}(s), \quad (3.6.11)$$

$$n_{1z} = n_z, n_{2z} = n_z + 2\omega_1, n_{3z} = n_z + \omega_1 + \omega_2, n_{4z} = n_z + \omega_1 - \omega_2.$$

Отметим, что функции $M_{kzn}(s)$ являются правильными рациональными дробями, и поэтому оригиналы каждого из слагаемых в (3.6.11) определяются точно с помощью вычетов. При этом в пространстве оригиналов на конечном промежутке времени вследствие наличия экспоненциальных множителей ряд (3.6.11) является конечной суммой.

На рис. 3.6.1 представлены графики функции влияния $G_w(\beta, 0, \tau)$ в момент времени $\tau = 0.1$ при учёте 11-ти первых членов ряда (3.6.3). Материал оболочки – сталь, а заполнителя – алюминий. Соответствующие безразмерные параметры: $\eta = 0.504$, $\eta_1 = 0.98$, $\eta_2 = 0.476$. Геометрический параметр оболочки $\gamma = 0.025$. Сплошная кривая соответствует оболочке с заполнителем, а пунктирная – оболочке без заполнителя.

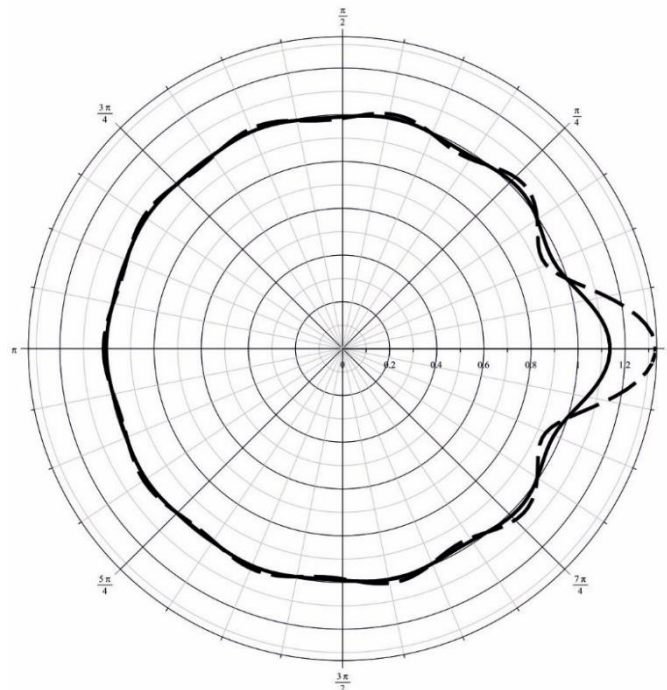


Рис. 3.6.1. Распределение функции влияния по угловой координате.

3.7. Нестационарное движение сферической оболочки с упругим наполнителем

Пусть в начальный момент времени $\tau = 0$ на покоящуюся сферическую оболочку с упругим наполнителем начинает действовать внешнее нестационарное давление $p(\beta, \tau)$ и требуется определить нормальные перемещения $w(\beta, \tau)$

С использованием принципа суперпозиции) решение этой задачи даётся формулой (3.5.10), в которой в качестве ядра интегрального оператора следует использовать функцию влияния сферической оболочки с упругим наполнителем, построенную в предыдущем пункте.

Рассмотрим воздействие на оболочку внезапно приложенного в момент времени $\tau = 0$ внешнего давления вида

$$p = -H(\tau)H\left(\frac{\pi}{8} - |\alpha|\right)\cos(\alpha).$$

Для получения графических результатов использовано представление (3.5.10). При этом входящие в него интегралы вычислялись аналитически. В расчетах удерживалось 11 членов ряда (3.6.3) для функции $G_w(\beta, \xi, \tau)$.

В качестве материала для оболочки принята сталь, а для наполнителя – сталь, алюминий или медь, что соответствует значениям безразмерных параметров, приведенным в таблице 3.7.1.

Таблица 3.7.1. Значения безразмерных параметров

Материал: оболочка- заполнитель	Безразмерные параметры			
	γ	η	η_1	η_2
Сталь-сталь	0,025	0,504	0,1	0,504
Сталь- алюминий	0,025	0,504	0,98	0,476
Сталь-медь	0,025	0,504	0,6763	0,373

На рис. 3.7.1 представлены зависимости нормальных перемещений в лобовой точке оболочки от времени. Сплошная кривая соответствует принятию в качестве материала заполнителя стали, пунктирная – алюминия, штриховая пунктирная – меди.

Сравнение результатов при учете различного числа членов ряда (3.6.3) показано на рис. 3.7.2. Здесь представлены зависимости нормальных перемещений в лобовой точке оболочки от времени. Штриховая пунктирная кривая построена при учете 6 первых членов ряда, штриховая – 7 членов, а сплошная – 8 членов. При оценке погрешности использована практическая сходимость метода по числу удерживаемых членов ряда. При этом, как показали расчеты, относительные расстояния между функциями перемещений по норме в пространстве $L_2[0,1.5]$ составляют в процентном отношении:

$$\Delta_{6,7} = \frac{\|w_7 - w_6\|}{\|w_6\|} 100\% = 1,65\%;$$

$$\Delta_{7,8} = \frac{\|w_8 - w_7\|}{\|w_7\|} 100\% = 0,57\%;$$

$$\|f\| = \left(\int_0^{0.3} f(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $w_6(\tau)$, $w_7(\tau)$ и $w_8(\tau)$ – нормальные перемещения в лобовой точке при учете шести, семи и восьми первых членов ряда для функции $G_w(\beta, \xi, \tau)$.

Распределения нормальных перемещений по углу в полярной системе координат с центром на оси оболочки и углом β в момент времени $\tau = 0.15$ показаны на рис. 3.7.3. Здесь, как и ранее кривая соответствует принятию в качестве материала заполнителя стали, пунктирная – алюминия, штриховая пунктирная – меди.

На рис. 3.7.4 проиллюстрировано сравнение распределений нормальных перемещений по углу β в момент времени $\tau = 0.5$. Сплошная кривая соответствует оболочке с заполнителем, а штриховая – пустой оболочке. В качестве материала заполнителя здесь использован алюминий.

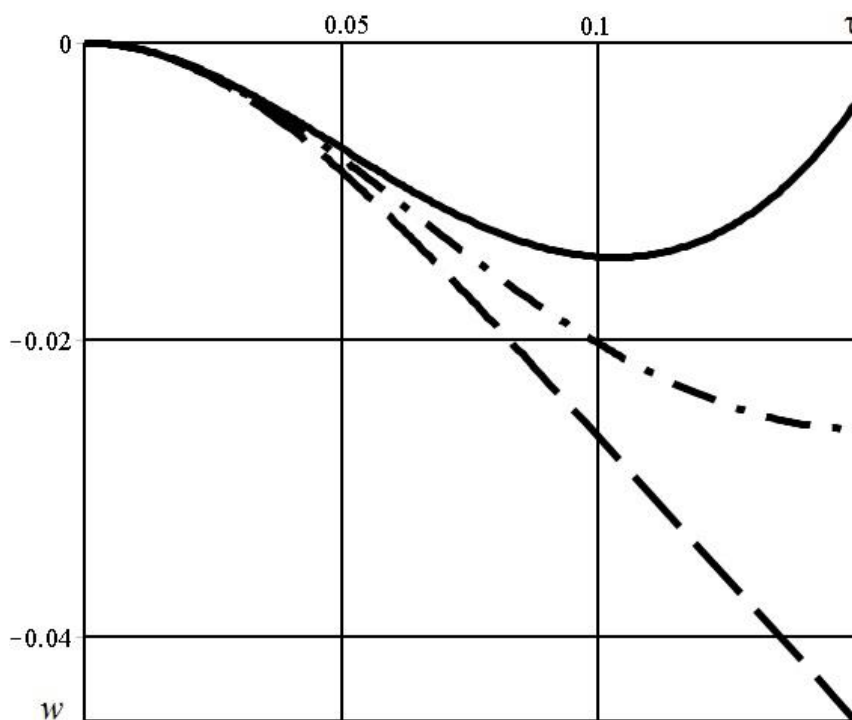


Рис. 3.7.1. Зависимости нормальных перемещений в лобовой точке от времени

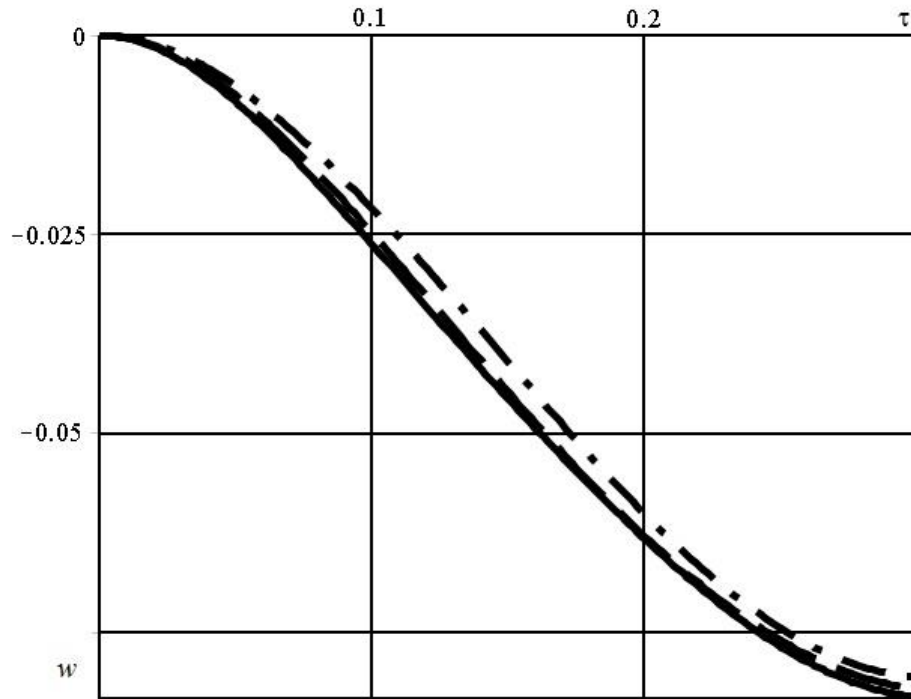


Рис. 3.7.2. Сравнение результатов при учете различного числа членов ряда для функции влияния.

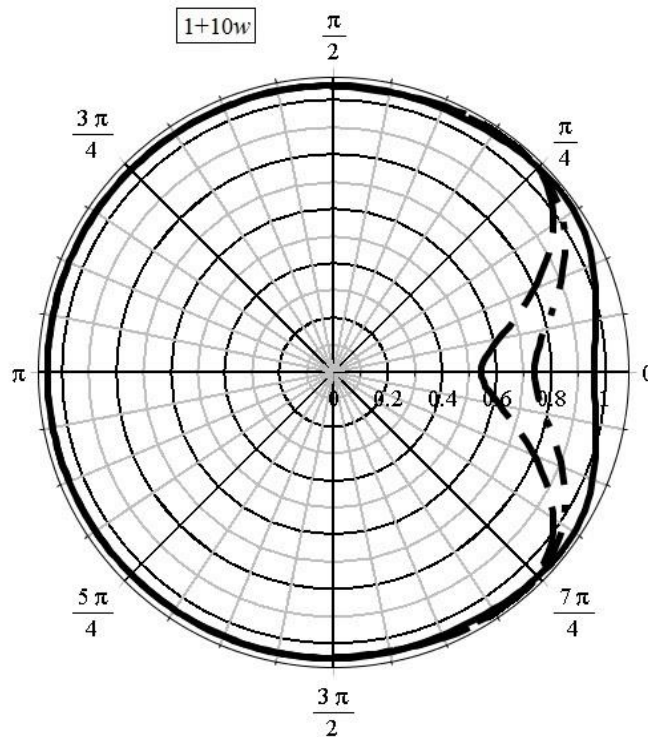


Рис. 3.7.3. Распределения нормальных перемещений по углу.

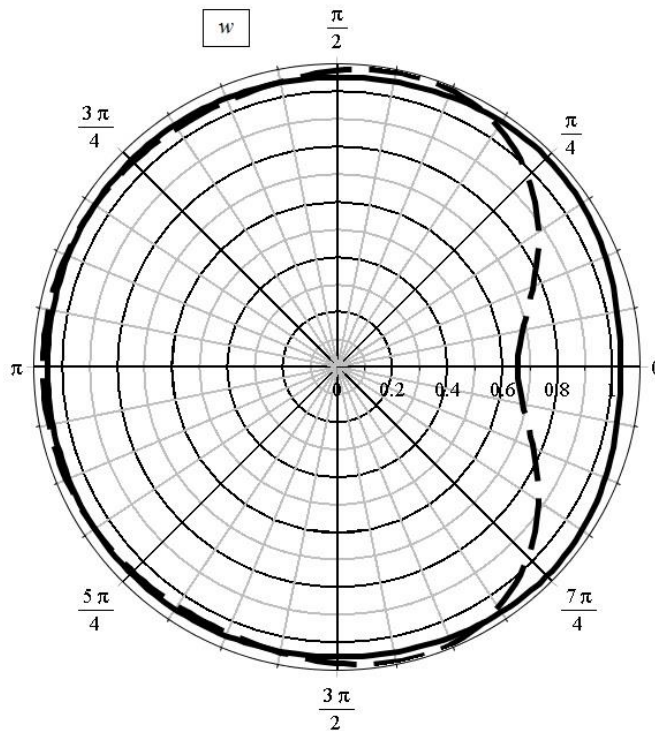


Рис. 3.7.4. Сравнение распределений нормальных перемещений пустой оболочки и оболочки с наполнителем.

Следует отметить, что разработанная методика решения нестационарных задач для оболочек обладает существенными преимуществами по сравнению с широко применяемыми на сегодняшний день численными методами конечных разностей и конечных элементов. Это обусловлено тем, что соответствующие интегралы в разрешающих интегральных представлениях для достаточно широкого класса внешних нагрузок могут быть вычислены аналитически, что существенно снижает время вычислений. В приведенных примерах, расчеты происходят практически мгновенно, т.к. фактически используются аналитические выражения для нормальных перемещений. Приближение к точному решению ограничено только числом членов разложения в ряд функции влияния. В случаях, когда заданное давление таково, что соответствующие интегралы не удается взять аналитически, имеется возможность построения аппроксимации функции давления, которая позволит опять применить аналитические

вычисления или приближенной замены интегралов квадратурными формулами, построенными, например, на основе метода весовых коэффициентов (2.3.6). При этом коэффициенты этих формул можно вычислить аналитически. При решении более сложных проблем, когда само давление является искомой функцией, например, в нестационарных контактных задачах для оболочек с наполнителем, на основе полученных результатов можно построить высокоэффективные численно-аналитические алгоритмы решения с использованием метода весовых коэффициентов или разложения искомого контактного давления в ряд.

ГЛАВА IV. ДВУМЕРНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОЛОЧЕК

4.1. Взаимодействие цилиндрической оболочки и упругой полуплоскости (сверхзвуковой этап)

Здесь ограничимся плоской постановкой задачи в предположении, что цилиндрическая оболочка имеет бесконечную протяженность по длине. В качестве характерного линейного размера выберем радиус оболочки $L = R$, в качестве характерной скорости – скорость волн растяжения-сжатия в материале полупространства.

Заметим, что в зависимости от скоростного режима движения границ области взаимодействия существует возможность применить к решению различные методы.

Известно [80], что в случае, когда поверхность ударника является гладкой и выпуклой всегда существует начальный этап взаимодействия, на котором скорость расширения области контакта (скорость движения её границ) превышает максимальную скорость распространения волн возмущений, как в упругой среде, так и в оболочке. Этот начальный этап взаимодействия является сверхзвуковым и характеризуется тем, что никакие поверхностные возмущения не успевают выйти за границы области контактного взаимодействия. Следовательно, на этом этапе носители контактного давления и поверхностных перемещений ударника и основания совпадают.

Далее в процессе взаимодействия скорость движения границ области контакта уменьшается и в определённый момент достигает значения максимальной скорости распространения упругих волн. Начиная с этого момента возмущения начинают выходить за границы области контакта. При этом носители перемещений границ и контактного давления не совпадают. Этот этап контактного взаимодействия является дозвуковым.

В начальный момент времени $\tau=0$ бесконечно длинная круговая цилиндрическая оболочка толщиной h и радиуса R двигаясь с некоторой начальной скоростью V_0 входит в контакт с упругим полупространством $z \geq 0$. Первоначально контакт происходит по образующей граничной поверхности оболочки. Вектор начальной скорости направлен ортогонально к поверхности полупространства $z=0$. Полагаем, что до начала взаимодействия полупространство находилось в невозмущённом состоянии (рис. 4.1.1).

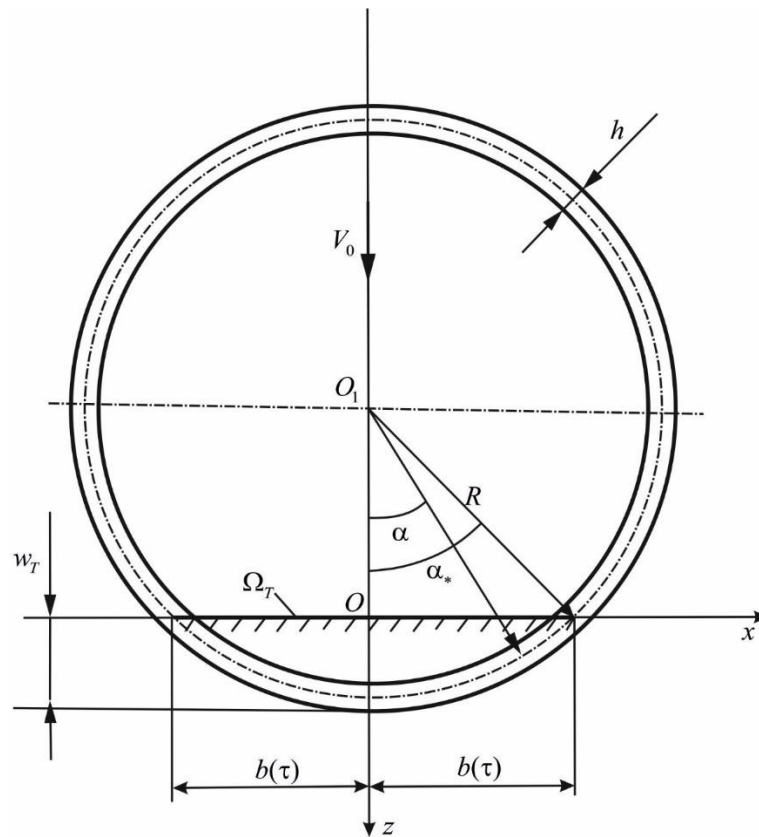


Рис. 4.1.1. Постановка контактной задачи.

Для всех переменных, функций и параметров задействованы безразмерные системы величин (1.2.5) и (1.3.4).

Для оболочки, как и ранее, будем использовать систему координат, связанную с линиями главных кривизн. В плоском случае она характеризуется

лишь угловой координатой $\alpha \in [-\pi, \pi]$. Для полупространства используем прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$, ось Ox которой направлена вдоль невозмущенной поверхности полупространства, а Oz – вглубь полупространства. Так как все компоненты напряженно-деформированного состояния и перемещений не зависят от координаты y , то в данном случае полупространство можно отождествить с упругой полуплоскостью Oxz , $z \geq 0$.

Движение оболочки описывается системой уравнений (1.3.7). Для полупространства используем уравнения и соотношения (1.2.18)-(1.2.21).

Следуя п. 1.4, в нулевом приближении область контакта заменяем плоской областью Ω_T , принадлежащей недеформированной поверхности полупространства $z = 0$. С учетом плоской постановки задачи она определяется отрезком $[-b(\tau), b(\tau)] \in Ox$, положения границ которого, точки $x = -b(\tau)$ и $x = b(\tau)$, зависят от времени τ (см. рис. 4.1.1). Выражение для определения полуширины $b(\tau)$ области контакта Ω_T вытекает из условия пересечения недеформированных границ оболочки и полуплоскости:

$$b(\tau) = \sqrt{w_T(\tau)[2 - w_T(\tau)]}, \quad (4.1.1)$$

где $w_T(\tau)$ – отнесенная к радиусу глубина проникания оболочки в полупространство как абсолютно твердого тела, совпадающая с перемещением центра масс O_1 оболочки. Для её определения в постановку задачи необходимо привлечь уравнение движения оболочки как абсолютно твёрдого тела:

$$m_0 \ddot{w}_T = R(\tau) = \int_{-\alpha_*(\tau)}^{\alpha_*(\tau)} p(\sin \alpha, \tau) d\vartheta = \int_{-b(\tau)}^{b(\tau)} \frac{p(\xi, \tau)}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi, \quad (4.1.2)$$

m_0 – безразмерная погонная масса оболочки ($m_0 = \frac{m'_0}{\rho_0 R h}$, m'_0 – размерная погонная масса), $R(\tau)$ – результирующая контактного давления $p(x, \tau)$, $\alpha_*(\tau)$ – угловая координата положения границы области контакта (рис. 4.1.1).

Полагаем, что контакт между оболочкой и полупространством происходит в условиях свободного проскальзывания и вне зоны контакта поверхности оболочки и полупространства свободны от напряжений. Это приводит к следующим граничным условиям смешанного типа:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}|_{z=0} &= 0, \quad x \in (-\infty, \infty); \\ \sigma_{zz}|_{z=0} &= 0, \quad |x| > b(\tau); \\ \sigma_{zz}|_{z=0} &= \tilde{\gamma}^2 p(x, \tau), \quad u_z|_{z=0} = w + \sqrt{1-x^2} - 1, \quad |x| \leq b(\tau), \quad |\alpha| \leq \alpha_*(\tau). \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Сверхзвуковой этап взаимодействия характеризуется условием $\dot{b}(\tau) \geq 1$. Это неравенство выполняется на некотором начальном этапе взаимодействия. При этом возмущения не выходят за пределы области контакта. Использование этого факта и граничных условий (4.1.3) позволяет, опираясь на представление (1.6.3), свойства операции дифференцирования свёртки и обобщённых функций с ограниченным носителем, в явном виде связать контактное давление и скорости движения оболочки [80]:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}^2 p(x, \tau) &= -\dot{w}(x, \tau) H(\tau) H(b - |x|) + \\ &+ \int_0^\tau \dot{w}(b, \tau) \frac{x - b(t)}{\tau - t} \Gamma(x - b, \tau - t) dt - \\ &- \int_0^\tau \dot{w}(b, \tau) \frac{x + b(t)}{\tau - t} \Gamma(x + b, \tau - t) dt - \\ &- \int_0^\tau dt \int_{-b(t)}^{b(t)} \frac{\partial \dot{w}(\xi, t)}{\partial \xi} \frac{x - \xi}{\tau - t} \Gamma(x - \xi, \tau - t) d\xi, \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Уравнения движения оболочки (1.3.7), кинематическое соотношение (4.1.1), уравнение движения оболочки как твёрдого тела, интегральная формула для контактного давления (4.1.4) совместно с начальными условиями

$$\begin{aligned}
w_T \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \dot{w}_T \Big|_{\tau=0} = V_0, \quad u \Big|_{\tau=0} = w \Big|_{\tau=0} = \chi \Big|_{\tau=0} = \dot{\chi} \Big|_{\tau=0} = 0, \\
\dot{u} \Big|_{\tau=0} = -V_0 \sin \alpha, \quad \dot{w} \Big|_{\tau=0} = V_0 \cos \alpha
\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

образуют замкнутую систему разрешающих функциональных уравнений относительно перемещений оболочки.

Решения системы разрешающих уравнений будем искать в виде тригонометрических рядов Фурье.

С учетом симметрии относительно оси Oz , разложения кинематических параметров оболочки и давления имеют вид:

$$\begin{pmatrix} u \\ \chi \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} u_n(\tau) \\ \chi_n(\tau) \end{pmatrix} \sin n\alpha, \quad \begin{pmatrix} w \\ p \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} w_n(\tau) \\ p_n(\tau) \end{pmatrix} \cos n\alpha. \tag{4.1.6}$$

Подстановка (4.1.6) в (1.3.7) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов рядов Фурье:

$$\mathbf{L}_n \mathbf{w}_n + \mathbf{p}_n = \frac{\partial^2 \mathbf{w}_n}{\partial \tau^2}, \quad \mathbf{L}_n = (L_{ij})_{3 \times 3}, \tag{4.1.7}$$

$$\mathbf{w}_n = (u_n, w_n, \chi_n)^T, \quad \mathbf{p} = (0, p_n, 0)^T,$$

$$L_{11}^n = -\eta_1^2 n^2 - \eta_2^2 k^2, \quad L_{12}^n = -n(\eta_1^2 + k^2 \eta_2^2), \quad L_{13}^n = \eta_1^2 \gamma^2 n^2 + \eta_2^2 k^2,$$

$$L_{21}^n = -L_{12}^n, \quad L_{22}^n = -\eta_2^2 k^2 n^2 - \eta_1^2, \quad L_{23}^n = \eta_2^2 k^2 n,$$

$$L_{31}^n = \gamma^{-2} L_{13}^n, \quad L_{32}^n = -\gamma^{-2} L_{23}^n, \quad L_{33}^n = -\gamma^{-2} L_{13}^n.$$

До замкнутой системы уравнений она дополняется уравнением (4.1.2), кинематическим соотношением (4.1.1) и начальными условиями

$$\begin{aligned}
u_n(0) = w_n(0) = \chi_n(0) = w_T(0) = b(0) = 0, \\
\dot{u}_n(0) = \dot{w}_n(0) = 0 \quad (n \neq 1); \quad \dot{w}_1(0) = \dot{w}_T(0) = V_0, \quad \dot{u}_1(0) = -V_0.
\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

Используя представление (4.1.4), разложения (4.1.6) и замену $x = \sin \alpha$, приходим к следующей связи $p_n(\tau)$ и $w_n(\tau)$:

$$p_n(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[-\dot{w}_j(\tau) f_{nj} [b(\tau)] + \int_0^{\tau} \dot{w}_j g_{nj} [b(\tau), b(t), \tau - t] dt \right], \tag{4.1.9}$$

$$f_{nj}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{T_j(\sqrt{1-\xi^2})}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi, & n=0, \\ \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{T_j(\sqrt{1-\xi^2}) T_n(\sqrt{1-\xi^2})}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi, & n \neq 0; \end{cases}$$

$$g_{nj}(x, y, z) = g_{nj}^{(1)}(x; -y; z) - g_{nj}^{(1)}(x; y; z) - g_{nj}^{(2)}(x; y; z), \quad (4.1.10)$$

$$g_{nj}^{(1)}(x; y; z) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{T_j(\sqrt{1-y^2})}{z} \int_0^x \frac{(\xi+y)\Gamma(\xi+y, z)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi, & n=0, \\ \frac{2}{\pi} \frac{T_j(\sqrt{1-y^2})}{z} \int_0^x \frac{T_n(\sqrt{1-\xi^2})}{\sqrt{1-\xi^2}} (\xi+y)\Gamma(\xi+y, z) d\xi, & n \neq 0; \end{cases}$$

$$g_{nj}^{(2)}(x; y; z) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{1}{z\sqrt{1-\xi^2}} \int_0^y T_j'(\sqrt{1-\zeta^2}) (\xi-\zeta)\Gamma(\xi-\zeta, z) d\zeta d\xi, & n=0, \\ \frac{4}{\pi} \int_0^x \frac{T_n(\sqrt{1-\xi^2})}{z\sqrt{1-\xi^2}} \int_0^y T_j'(\sqrt{1-\zeta^2}) (\xi-\zeta)\Gamma(\xi-\zeta, z) d\zeta d\xi, & n \neq 0. \end{cases}$$

Интегралы в (4.1.9) вычисляются аналитически:

$$f_{nj}(x) = \frac{2}{\pi} \begin{cases} \frac{\arcsin x}{2}, & n, j = 0, \\ \frac{\sin(j \arcsin x)}{2j}, & n = 0, j \neq 0, \\ \frac{1}{2n} [\cos(n \arcsin x) \sin(n \arcsin x) + n \arcsin x], & n = j \neq 0, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{j-n} \sin[(j-n) \arcsin x] + \frac{1}{j+n} \sin[(j+n) \arcsin x] \right), & n \neq j \neq 0. \end{cases} \quad (4.1.11)$$

Интегралы $g_{nj}^{(1)}(x; y; z)$ и $g_{nj}^{(2)}(x; y; z)$ в общем случае сводятся к эллиптическим. Однако такое их выражение приводит к определенным

трудностям при численной реализации. Поэтому их удобнее находить численно.

Исходную систему уравнений (4.1.1), (4.1.2), (4.1.7) с учетом (4.1.9) приведем к бесконечной системе интегро-дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{w}}_n &= \mathbf{L}_n \bar{w}_n + \mathbf{p}_n, \quad \dot{u}_n = \bar{u}_n(\tau), \quad \dot{w}_n = \bar{w}_n, \quad \dot{\chi}_n = \bar{\chi}_n, \quad (n=0,1,2\dots); \\ \dot{b} &= (1-w_T)\bar{w}_T/b, \quad \dot{w}_T = R/m_0, \quad \dot{w}_T = \bar{w}_T, \\ p_n(\tau) &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[-\bar{w}_j(\tau) f_{nj}[b(\tau)] + \int_0^{\tau} \bar{w}_j(t) g_{nj}[b(\tau), b(t), \tau-t] dt \right], \quad (4.1.12) \\ R(\tau) &= \sum_{j=0}^{\infty} p_j(\tau) e_j[b(\tau)], \quad e_j(x) = 2 \int_0^x \frac{T_j(\sqrt{1-\xi^2})}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi, \end{aligned}$$

где $T_j(x)$ – полиномы Чебышева [194].

Систему (4.1.12) замыкаем начальными условиями:

$$\begin{aligned} u_n(0) &= w_n(0) = \chi_n(0) = w_T(0) = b(0) = 0; \\ \bar{u}_n(0) &= \bar{w}_n(0) = 0 \quad (n \neq 1); \quad \bar{w}_1(0) = \bar{w}_T(0) = V_0, \quad \bar{u}_1(0) = -V_0. \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Для решения системы уравнений (4.1.12) используется модифицированный метод Рунге-Кутты четвертого порядка [85, 86]. При этом временной интервал $[0, \tau]$ разбивается на конечное число отрезков с шагом Δ_t :

$$t_i = i\Delta_t, \quad \tau = t_m = m\Delta_t, \quad (i = \overline{0, m})$$

Неизвестные коэффициенты рядов разложения (4.1.6) и их первые производные, зависящие от времени, заменяются сеточными аналогами:

$$\begin{aligned} u_{ni} &= u_n(t_i), \quad w_{ni} = w_n(t_i), \quad \chi_{ni} = \chi_n(t_i), \quad p_{ni} = p_n(t_i), \\ \bar{u}_{ni} &= \bar{u}_n(t_i), \quad \bar{w}_{ni} = \bar{w}_n(t_i), \quad \bar{\chi}_{ni} = \bar{\chi}_n(t_i), \quad w_{Ti} = w_T(t_i), \quad b_i = b(t_i). \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

Для вычисления интегралов в (4.1.12) используется квадратурная формула метода весовых коэффициентов [85, 86]:

$$p_{ni} = \sum_{j=0}^{\infty} \left[-\bar{w}_{ji} f_{nj}(b_i) + \sum_{k=1}^i a_{nik} \bar{w}_{jk} \right], \quad (4.1.15)$$

$$a_{nijk} = a_{nijk}^{(1)} - a_{nijk}^{(2)} - a_{nijk}^{(3)},$$

$$a_{nijk}^{(1)} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} g_{nj}^{(1)}(b_i; -b_k; in - t) dt, \quad a_{nijk}^{(2)} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} g_{nj}^{(1)}(b_i; b_k; in - t) dt,$$

$$a_{nijk}^{(3)} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} g_{nj}^{(2)}(b_i; b_k; in - t) dt.$$

Интегралы в (4.1.15) вычисляются численно-аналитически [85, 86].

В качестве примера рассмотрен вертикальный удар круговой цилиндрической оболочки, выполненной из стали, по стальному упругому полупространству ($\eta = 0.492$, $\eta_1 = 1.034$, $\eta_2 = 0.552$, $m_0 = 0.3$, $V_0 = 0.05$).

На рис. 4.1.2 и 4.1.3 приведены зависимости полуширины области контакта b и скорости ее расширения от времени. Из рис. 4.1.3 видно, что при определённом критическом $\tau = \tau_{kr}$, а именно $\tau_{kr} = 0.014$, скорость расширения области контакта снижается до скорости распространения волн растяжения-сжатия в полупространстве. Именно на интервале $\tau \in [0, \tau_{kr}]$ справедливо решение задачи, полученное данным методом.

На рис. 4.1.4 и 4.1.5 представлено распределение контактного давления по области взаимодействия в разные моменты времени и зависимость от времени контактного давления в лобовой точке.

Распределение нормальных перемещений по координате x в разные моменты времени представлены на рис. 4.1.6. Кривая на рис. 4.1.7 соответствует зависимости нормальных перемещений в лобовой точке оболочки от времени.

На рис. 4.1.8 представлены распределения касательных перемещений по координате x в различные моменты времени. Анализ результатов показывает, что в процессе ударного взаимодействия оболочки и полупространства нормальные перемещения оболочки значительно превосходят касательные перемещения. Характер распределений контактного давления хорошо согласуется с аналитическими результатами, полученными в [80] при

исследовании нестационарного контактного взаимодействия абсолютно твердых ударников с упругим полупространством.

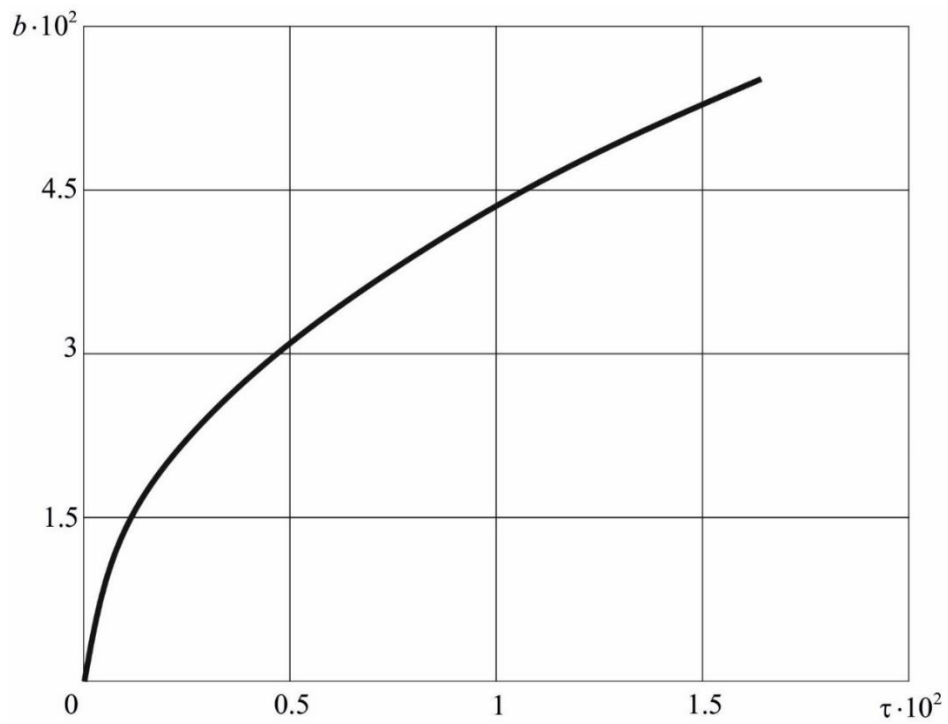


Рис. 4.1.2. Граница области контакта.

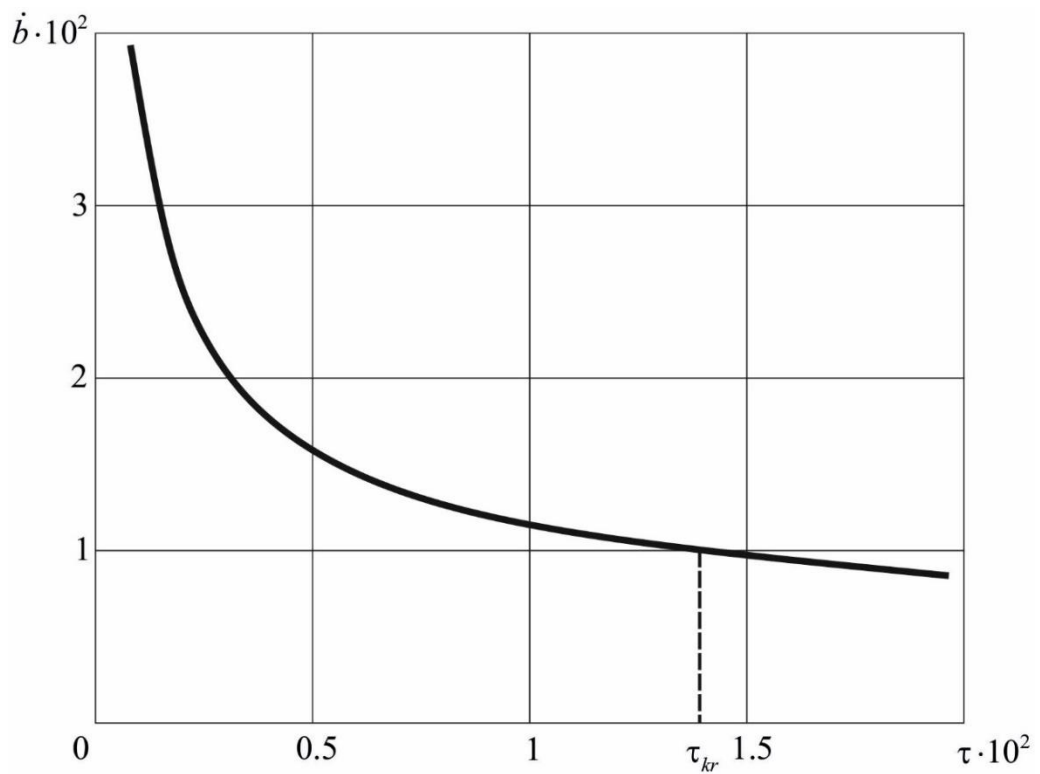


Рис. 4.1.3. Скорость расширения границы области контакта.

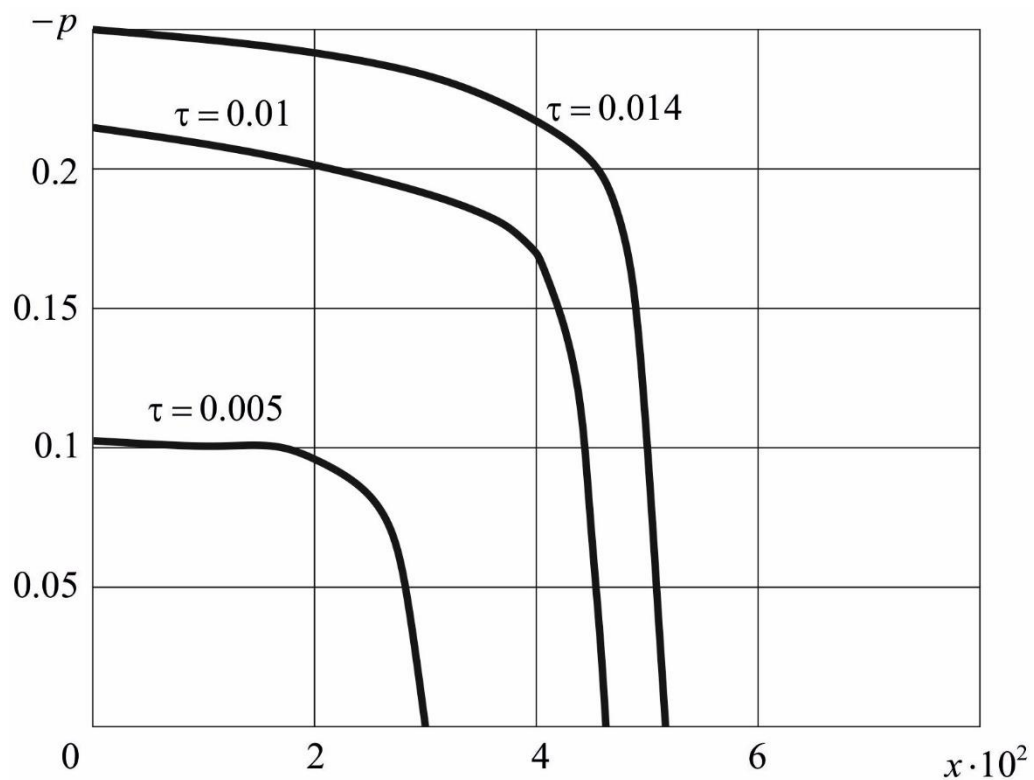


Рис. 4.1.4. Распределение контактного давления в различные моменты времени.

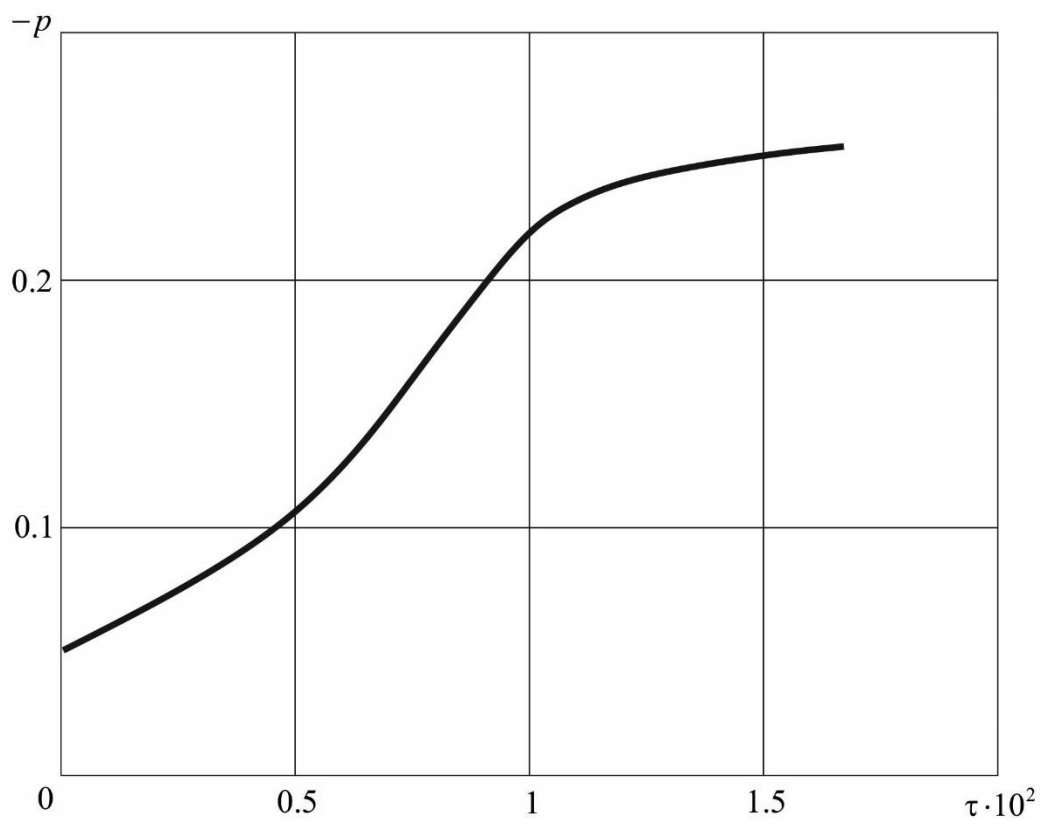


Рис. 4.1.5. Зависимость контактного давления от времени в лобовой точке.

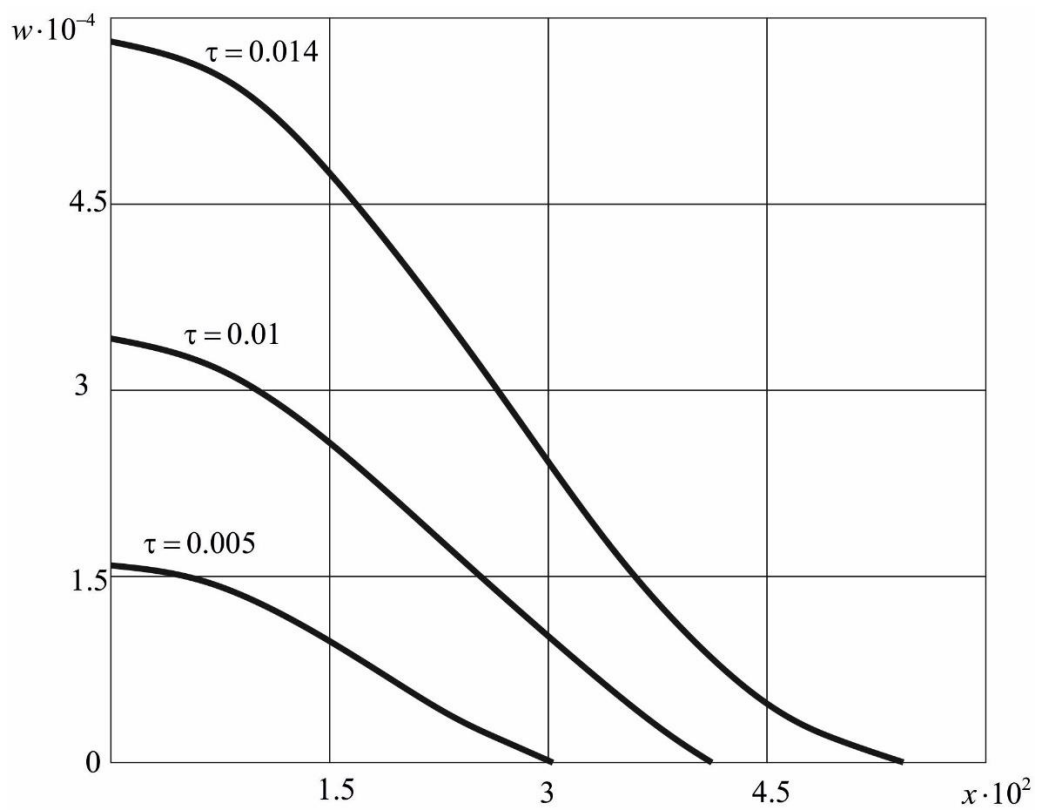


Рис. 4.1.6. Распределение нормальных перемещений в различные моменты времени.

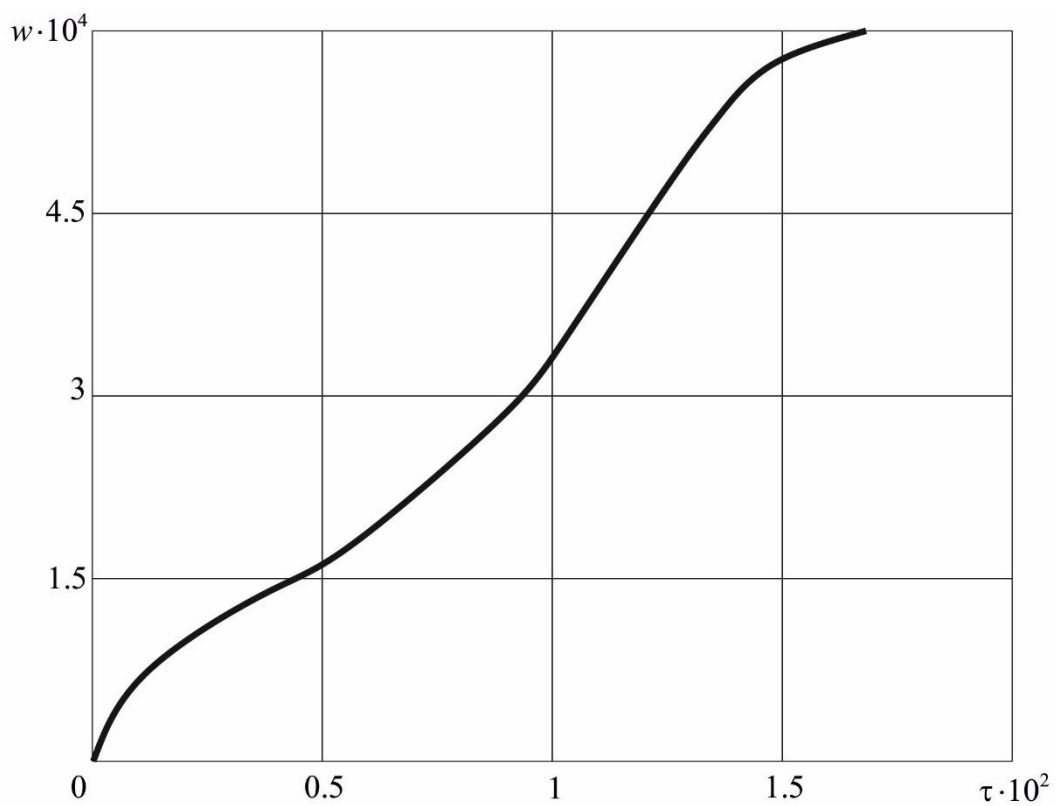


Рис. 4.1.7. Зависимость нормальных перемещений от времени в лобовой точке.

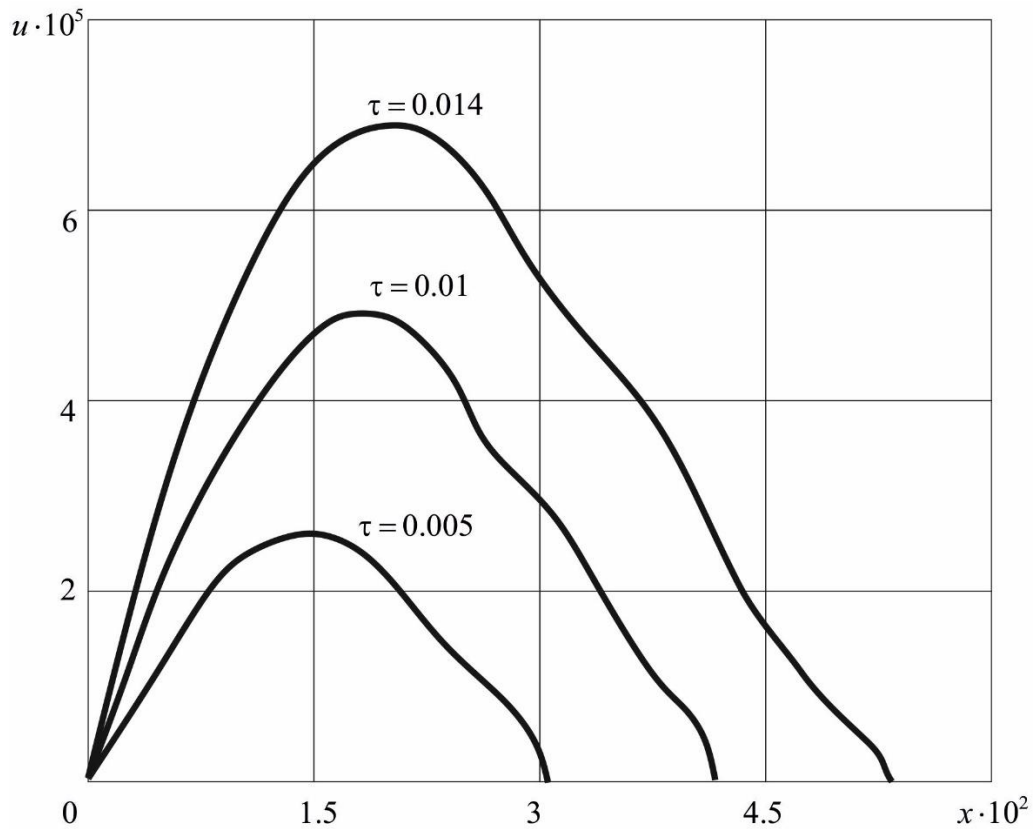


Рис. 4.1.8. Распределение касательных перемещений в различные моменты времени.

Для оценки сходимости алгоритма будем использовать норму Чебышёва (учитывается симметрия задачи относительно оси Oz):

$$\|w(x, \tau)\| = \sup_{x, \tau \geq 0} |w(x, \tau)| \quad (4.1.16)$$

Для сеточных функций эквивалентом этой нормы является следующая:

$$\|w_{ij}\| = \sup_{i, j \in N_0} |w_{ij}|, \quad N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

На рис. 4.1.9 представлено распределение перемещений оболочки по области контакта в нормальном направлении в момент времени $\tau = 0.01$ при учете четырёх первых членов рядов разложения искомым функций (пунктирная кривая) в сравнении с результатом, полученным при учете пяти первых членов (сплошная кривая). Относительная погрешность результата в процентном отношении составляет (верхний индекс указывает на число учитываемых членов ряда):

$$\varepsilon = \frac{\|w_0^{(5)} - w_0^{(4)}\|}{\|w_0^{(5)}\|} 100\% = 3.7\%$$

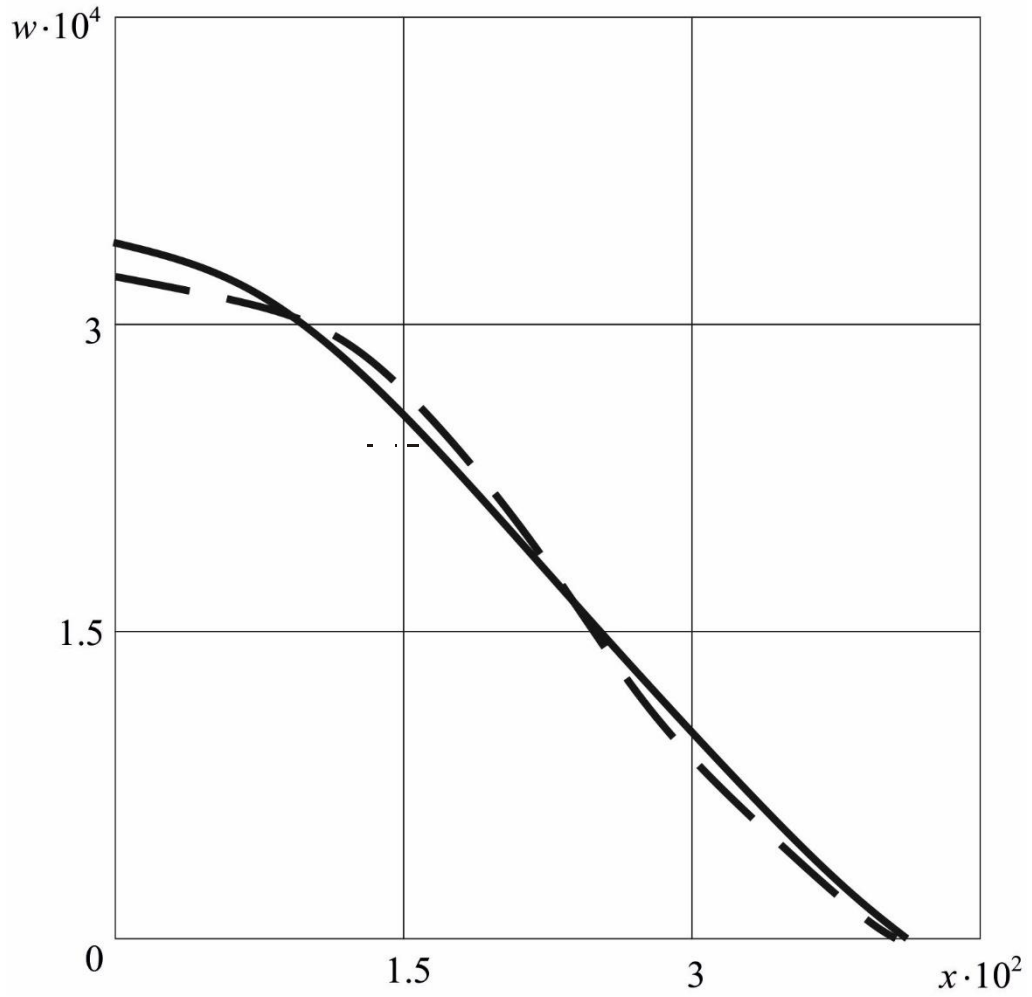


Рис. 4.1.9. Оценка сходимости результатов.

4.2. Взаимодействие цилиндрической оболочки и упругой полуплоскости (произвольный временной интервал)

На произвольном временном интервале взаимодействия для решения задачи используются функции влияния для упругого полупространства $G(x, \tau)$ (см. (1.6.1)) и для оболочки $G_w(\alpha, \tau)$ (см. (2.2.10)) при $N=10$. С учетом малости размера области контакта $b(\tau) \ll 1$, полагаем, что $\alpha \approx x$.

Алгоритм решения задачи базируется на интегральных соотношениях связи контактного давления с нормальными перемещениями границ полупространства и оболочки. В основе системы разрешающих уравнений лежит интегральное уравнение (1.5.14), которое в данном случае приобретает вид

$$J[x, \tau, b(\tau)] - J_0[x, \tau, b(\tau)] = (1 + V_0\tau)\sqrt{1 - x^2} - 1 \quad (4.2.1)$$

$$J(x, \tau, y) = \int_0^\tau \int_{-y}^y G(x - \xi, \tau - t) p(\xi, t) dt d\xi,$$

$$J_0(x, \tau, y) = \int_0^\tau \int_{-y}^y G_w(x - \xi, \tau - t) p(\xi, t) dt d\xi.$$

Нормальные перемещения границ полуплоскости и оболочки определяются следующими интегральными связями

$$\begin{aligned} u_z(x, \tau) &= J[x, \tau, b(\tau)], \quad w(x, \tau) = \tilde{w}_0(x, \tau) + V_0\tau, \\ \tilde{w}_0(x, \tau) &= J_0[x, \tau, b(\tau)]. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

В нулевом приближении при определении ширины пятна контакта $b(\tau)$ пренебрегаем деформациями свободных поверхностей полупространства и ударника. В этом случае она определяется кинематическим уравнением (4.1.1). Совместно с уравнением движения оболочки как абсолютно твердого тела (4.1.2), записанным в интегральной форме:

$$w_s = V_0\tau + \frac{1}{m_0} J_T[\tau, b(\tau)] \quad (4.2.3)$$

$$J_T(\tau, y) = 2 \int_0^\tau \int_0^y (\tau - t) p(\xi, t) dt d\xi,$$

(4.1.1) и (4.2.1) образуют замкнутую систему разрешающих уравнений.

Функция влияния для полупространства $G(x, \tau)$ имеет сингулярную особенность порядка -1 фронтах волн Рэлея $x = \pm c_R \tau$. Следовательно соответствующий интеграл в (4.2.1) является сингулярным, и его необходимо понимать в смысле регуляризованного значения. Для этого выделим из ядра интегрального оператора $J(x, \tau, y)$ сингулярную составляющую. Заметим, что $c_R < 1/\eta$, поэтому при $x = \pm c_R \tau$ функция влияния для полупространства будет представлять собой сумму $G_3(x, \tau) = G_1(x, \tau) + G_2(x, \tau)$. Следовательно, выделяем сингулярную составляющую из функции $G_3(x, \tau)$. Представим $G_3(x, \tau)$ в следующем виде:

$$G_3(x, \tau) = \frac{1}{\pi \eta^4} \frac{f(x, \tau)}{(x^2 - c_R^2 \tau^2)},$$

$$f(x, \tau) = \frac{(\eta^2 x^2 - 2\tau^2)^2 \sqrt{\tau^2 - x^2} + 4\tau^2 (\tau^2 - x^2) \sqrt{\tau^2 - \eta^2 x^2}}{P_2(x^2, \tau^2)}.$$

Функция $f(x, \tau)$ не имеет особых точек, так как многочлен $P_2(x^2, \tau^2)$ не имеет вещественных корней. Разложим $f(x, \tau)$ в ряд Тейлора в окрестностях точек $x = \pm c_R \tau$:

$$f(x, \tau) = f(x, \tau)|_{x=c_R \tau} + \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(x, \tau)|_{x=c_R \tau} (x^2 - c_R^2 \tau^2)^k$$

$$f(x, \tau)|_{x=c_R \tau} = \frac{\tau \left[(\eta^2 c_R^2 - 2)^2 \sqrt{1 - c_R^2} + 4(1 - c_R^2) \sqrt{1 - \eta^2 c_R^2} \right]}{P_2(c_R^2, 1)}.$$

Тогда сингулярное слагаемое функции влияния $G(x, \tau)$ для полупространства предстает в следующем виде:

$$G_s(x, \tau) = \frac{a_s \tau}{x^2 - c_R^2 \tau^2},$$

$$a_s = \frac{(\eta^2 c_R^2 - 2)^2 \sqrt{1 - c_R^2} + 4(1 - c_R^2) \sqrt{1 - \eta^2 c_R^2}}{P_2(c_R^2, 1)}$$

Регулярная часть функции влияния полупространства находится так:

$$G_r(x, \tau) = G_3(x, \tau) - G_s(x, \tau).$$

Заметим также, что $G(x, \tau)$ является однородной функцией порядка (-1):

$$G(\lambda x, \lambda t) = \frac{1}{\lambda} G(x, t), \lambda \in R.$$

Наличие этого факта, как будет видно ниже, существенно облегчает численную операцию вычисления интегралов, ядрами которых являются данные функции.

Для решения системы разрешающих уравнений (4.1.1), (4.2.1) и (4.2.3) используем модифицированную явно-неявную схему метода сеток. Соответствующие интегральные операторы заменяем численными аналогами. При этом, для аппроксимации интеграла $J_0(x, \tau, y)$ используем неявную схему (2.3.6). Интегральный оператор $J(x, \tau, y)$ аппроксимируем с использованием явной схемы. Для этого на пространственно-временную область $R_{t\xi}^2$ наносим ортогональную сетку с равномерным шагом $\Delta_\xi = \Delta_t = \Delta$ (рис. 4.1.10):

$$t_i = i\Delta, \xi_j = j\Delta, R_{t\xi}^2 = \bigcup_i \bigcup_j K_{ij} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, j \in Z),$$

$$K_{ij} = \{(t, \xi) \mid t_{i-1} \leq t \leq t_i, \xi_{j-1} \leq \xi \leq \xi_j\}.$$

Функциям одного и двух переменных $w_T(t)$, $b(t)$, $w(\xi, t)$, $p(\xi, t)$, $G(\xi, t)$, $G_w(\xi, t)$ ставим в соответствие сеточные функции:

$$w_{sn} = w_s(t_n), \quad w_{0nm} = w_0(\xi_m, t_n), \quad b_n = b(t_n), \\ p_{nm} = p(\xi_m, t_n), \quad G_{nm} = G(\xi_m, t_n), \quad G_{wnm}^c = G_w^c(\xi_m, t_n).$$

Границу области $\partial D(\tau) = \{\pm b(t) \mid t \in [0, \tau]\}$ приближенно заменяем кусочно-постоянными функциями $\pm b(t)$, определяемыми по формуле:

$$\pm\beta(t) = \pm \left[\left[b(t)/\Delta \right] \Delta \right],$$

где $[\cdot]$ означает округление до ближайшего целого числа.

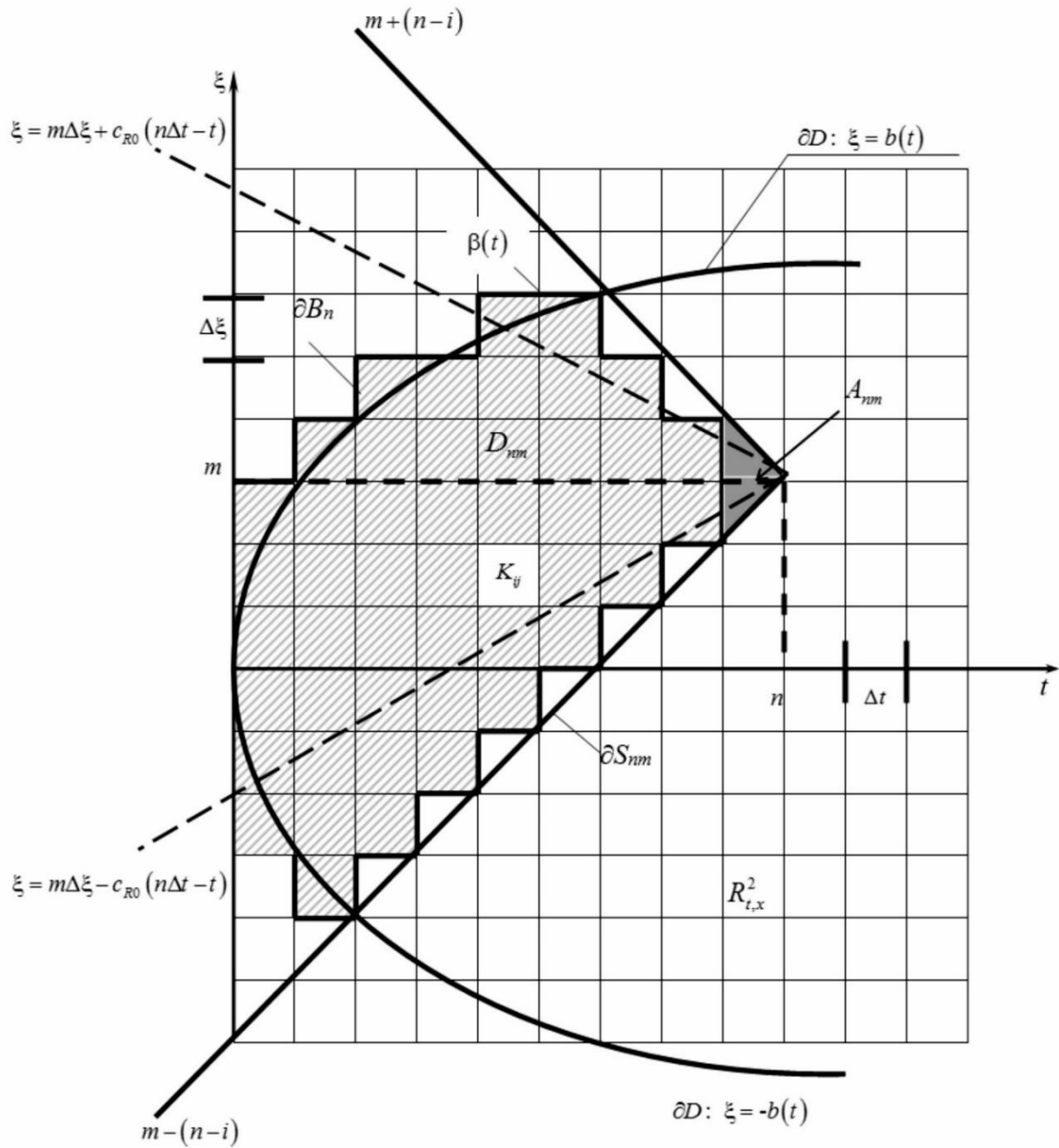


Рис. 4.1.10. Аппроксимация пространственно-временной области контакта

Пространственно-временная область контакта $D_n = \{(t, \xi) \mid 0 \leq t \leq t_n, |\xi| \leq b(t)\}$ в этом случае в момент времени $\tau = t_n$ аппроксимируется выпуклым многоугольником B_n , состоящим из объединения элементарных вертикальных полос:

$$B_n = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{l_i}^{l_{2i-1}} K_{ij}, \quad l_{1i} = -\frac{\beta_i}{\Delta}, \quad l_{2i} = \frac{\beta_i}{\Delta}.$$

Для интегралов $J[x, \tau, b(\tau)]$ и $J_T[\tau, b(\tau)]$ используем основанные на методе весовых коэффициентов разностные аналоги.

Аналогом $J_T[\tau, b(\tau)]$ является следующая квадратурная формула:

$$J_T[\tau, b(\tau)] \approx J_{T, n-1, m} = 2\Delta^3 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{[b_i]} (n-i) p_{ij}.$$

Заметим, что в силу вида ядра интегрального оператора $J_T[\tau, b(\tau)]$ значение подынтегральной функции при $t = t_n$ не войдет в разностное соотношение. Поэтому суммирование по i ведется до $n-1$.

Носитель ядра интегрального оператора $J[x, \tau, b(\tau)]$ представляет собой равнобедренный прямоугольный треугольник:

$$S_{nm} = \text{supp}G_k(m\Delta - \xi, n\Delta - t) = \{(t, \xi) \mid 0 \leq t \leq n\Delta, \gamma_k \mid m\Delta - \xi \mid \leq n\Delta - t\}.$$

Следовательно, в операторе $J[x, \tau, b(\tau)]$ интегрирование по области $D_n \cap S_{nm}$ ($D_n = D \cap \{(t, \xi) \mid t \leq t_n\}$) можно свести к интегрированию по B_{nm} (см. рис. 4.1.10):

$$B_{nm} = \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \bigcup_{p_i}^{p_{2i-1}} K_{ij} \right) \cup A_{nm}, \quad A_{nm} = K_n \cap \text{supp}G(m\Delta - \xi, n\Delta - t),$$

$$K_i = \bigcup_{j=k_i}^{k_{2i}-1} K_{ij}, \quad k_{1i} = \max[l_{1i}, m - (n-i)], \quad k_{2i} = \min[l_{2i} - 1, m + (n-i)].$$

Ядро интегрального оператора $J[x, \tau, b(\tau)]$ помимо неинтегрируемой особенности на прямых $|m\Delta - \xi| = c_R(n\Delta - t)$ имеет интегрируемую особенность в точке $(m\Delta, n\Delta)$. Поэтому разностный аналог интегрального оператора $J(x, \tau, b(\tau))$ представляем в следующем виде:

$$J[x, \tau, b(\tau)] \cong J_{nm} = J_{n-1, m} + b_{nm} P_{nm},$$

$$J_{n-1, m} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=k_{1i}}^{k_{2i}} a_{n-i, m-j} P_{ij}.$$

Коэффициенты этой квадратурной формулы определяются так:

$$\begin{aligned} a_{nm} &= \iint_{K_{ij}} G(m\Delta - \xi, n\Delta - t) dt d\xi, \\ b_{nm} &= \iint_{A_{nm}} G(m\Delta - \xi, n\Delta - t) d\xi = \\ &= \int_{(n-1)\Delta}^{n\Delta} dt \int_{(m-n)\Delta+t}^{(m+n)\Delta-t} G(m\Delta - \xi, n\Delta - t) d\xi. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

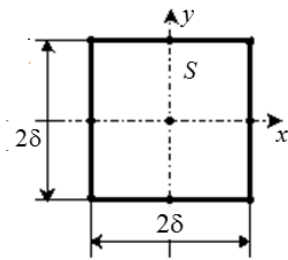
Выражение для коэффициентов a_{nm} на элементарных квадратах K_{ij} , которые не пересекаются прямыми $|m\Delta - \xi| = c_R(n\Delta - t)$, находим с использованием следующего численного метода. Отображаем квадрат K_{ij} на «стандартный» квадрат K_1 :

$$K_{ij} \rightarrow K_1: \begin{cases} 2t = (u + 2i - 1)h, & |u| \leq 1; \\ 2\xi = (v + 2j - 1)h, & |v| \leq 1. \end{cases}$$

Тогда, с учетом однородности функции влияния (3.30), получаем:

$$a_{nm} = \iint_{K_{ij}} G_{kr}(m\Delta - \xi, n\Delta - t) d\mu = \frac{\Delta}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G_{kr}(2m+1-v, 2n+1-u) dudv.$$

Двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области S , представляющей собой квадрат со сторонами равными 2δ , вычисляется по следующей квадратурной формуле [38]:



$$\begin{aligned} \frac{1}{4\delta^2} \iint_S f(x, y) dx dy &= \sum_{i=1}^n w_i f(x_i, y_i) + R, \\ R &= o(\delta^4), \delta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае $\delta=1$, т.к. квадрат – «стандартный»:
 $S = K_1 = \{x \in [-1, 1], y \in [-1, 1]\}$.

Воспользовавшись этой формулой для a_{nm} , имеем:

$$a_{nm} = 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_{ij} G(2n+1-x_i, 2m+1-y_j), \quad (4.2.5)$$

где

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = (w_{ij})_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 4/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/36 & 1/36 \\ 1/9 & 1/36 & 1/36 \end{pmatrix}.$$

В случае, когда прямые $|m\Delta - \xi| = c_R(n\Delta - t)$ пересекают элементарный квадрат K_{ij} , необходимо использовать регуляризацию коэффициентов a_{nm} . Для этого в окрестностях прямых $|m\Delta - \xi| = c_R(n\Delta - t)$ представляем a_{nm} в виде суммы регулярного и сингулярного интегралов:

$$a_{nm} = a_{nm}^{(r)} + a_{nm}^{(s)}, \quad a_{nm}^{(r)} = \iint_{K_{ij}} G_r(m\Delta - \xi, n\Delta - t) dt d\xi, \quad a_{nm}^{(s)} = \iint_{K_{ij}} G_s(m\Delta - \xi, n\Delta - t) dt d\xi.$$

Регулярные коэффициенты $a_{nm}^{(r)}$ вычисляются по формуле (4.2.5) с заменой $G(2n+1-x_i, 2m+1-y_j)$ на $G_r(2n+1-x_i, 2m+1-y_j)$.

Сингулярные коэффициенты находятся точно (интегралы понимаются в смысле регуляризованного значения):

$$\begin{aligned} a_{nm}^{(s)} &= \frac{a_s}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{2n+1-u}{(2m+1-v)^2 - c_R^2(2n+1-u)^2} dudv = \\ &= \frac{a_s}{2c_R^2} \sum_{i,j,k=0}^1 (-1)^{i+k+1} v_{m+k,n+i}^j \ln |v_{m+k,n+i}^j|, \\ & \quad v_{m,n}^j = m + (-1)^j n c_R. \end{aligned}$$

Определим коэффициент b_{nm} . Для этого сделаем замену переменных $\eta = m\Delta - \xi$, $\zeta = n\Delta - t$. С учетом чётности и однородности функции влияния $G(x, \tau)$ из (4.2.4) имеем:

$$b_{nm} = \int_0^{\Delta} d\eta \int_{-\eta}^{\eta} G(\zeta, \eta) d\zeta. \quad (4.2.6)$$

Принимая во внимание вид носителей подынтегральных функций $G_k(x, \tau)$, интеграл (4.2.6) переписываем так:

$$\begin{aligned} b_{nm} &= \int_0^{\Delta} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} G(\zeta, \eta) d\zeta = \int_0^{\Delta} d\eta \left(\lim_{q \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} G(\zeta, \eta) e^{iq\zeta} d\zeta \right) = \\ &= \int_0^{\Delta} G^F(0, \eta) d\eta = G^F(0, \Delta) * H(\Delta), \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

где $G^F(0, \Delta)$ – изображение по Фурье, $H(\Delta)$ – функция Хевисайда. Применяя к (4.2.7) преобразование Лапласа по Δ , имеем:

$$b_{nm}^L = \frac{1}{s} G^{FL}(0, s). \quad (4.2.8)$$

Изображение по Фурье и Лапласу функции влияния $G^{FL}(q, s)$ имеет вид [80]:

$$G^{FL}(q, s) = -\frac{\eta^4 s^2 \sqrt{q^2 + s^2}}{(2q^2 + s^2 \eta^2)^2 - 4q^2 \sqrt{(q^2 + s^2)(q^2 + s^2 \eta^2)}}. \quad (4.2.9)$$

Подставляя (4.2.9) в формулу (4.2.8), получаем следующее равенство:

$$b_{nm}^L = -1/s^2. \quad (4.2.10)$$

Применяя к (4.2.10) обратное преобразование Лапласа, получаем выражение для коэффициента b_{nm} :

$$b_{nm} = -\Delta.$$

Интегральный оператор $J_0[x, \tau, b(\tau)]$ аппроксимируем по неявной схеме, следуя (2.3.6)

$$J_0[x, \tau, b(\tau)] \cong J_{0, nm} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=M_{i+1}}^{M_{2i}} J_{ij}^{nm} p_{ij} + \sum_{j=M_{1n}+1}^{M_{2n}} J_{lj}^{nm} p_{nj}, \quad (4.2.11)$$

$$J_{ij}^{nm} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} G_w^c(x_m - \xi, \tau_n - t) d\xi dt,$$

$$x_m = m\Delta, \tau_n = n\Delta, m = \overline{M_{1n}, M_{2n}},$$

$$M_{1i} = \left[\frac{-b(t_i)}{\Delta} \right], M_{2i} = \left[\frac{b(t_i)}{\Delta} \right],$$

где $[\cdot]$ означает округление до ближайшего целого числа.

Коэффициенты J_{ij}^{nm} вследствие структуры функции влияния G_w^c вычисляются аналитически.

Таким образом, на каждом шаге по времени с номером n , мы получаем $M_n = M_{2n} - M_{1n} = 2M_{2n}$ уравнений относительно M_n искомым значений контактного давления p_{nm} , $m = \overline{1, M_n}$ и ещё одно уравнение для определения положения границы области контакта в момент времени t_n :

$$\mathbf{W}_n = \mathbf{J}_n \mathbf{p}_n,$$

$$b_n = \sqrt{1 - \left(1 - V_0 n \Delta - \frac{J_{T,n-1,m}}{m_0} \right)^2} \quad (4.2.12)$$

$$\mathbf{W}_n = (w_{nm})_{M_n \times 1}, w_{nm} = 1 - (1 - V_0 n h) \sqrt{1 - m^2 h^2} + J_{n-1,m} - J_{0,n-1,m},$$

$$\mathbf{J}_n = (\tilde{J}_{nj}^{nm})_{M_1 \times M_1}, \tilde{J}_{nj}^{nm} = J_{nj}^{nm} + \Delta \delta_{nm}, \mathbf{p}_n = (p_{nj})_{M_n \times 1}, M_n = M_{2n} - M_{1n}.$$

Решение этой системы

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{J}_n^{-1} \mathbf{W}_n \quad (4.2.13)$$

представляет собой вектор \mathbf{p}_n искомым сеточных значений контактного давления в момент времени t_n .

Следует отметить, что матрица \mathbf{J}_n системы (4.2.12) обладает свойством диагонального преобладания, вследствие чего схема (4.2.12) является устойчивой и хорошо сходящейся. Отметим также, что система уравнений (4.2.12) решается в два этапа. На каждом шаге по времени сначала определяется граница области контакта b_n , а затем из первой подсистемы находятся сеточные значения контактного давления p_{nj} .

Предложенный метод решения можно рассматривать как некий компромисс между явным и неявным подходом. Он обладает достоинствами неявных методов (сходимостью и устойчивостью) и также достаточной экономичностью, присущей явным схемам решения. Кроме того, экономичность обеспечивается аналитическими выражениями для коэффициентов J_{nj}^{nm} , вследствие чего, предложенную схему можно охарактеризовать как численно-аналитическую.

Для иллюстрации предложенной методики решения рассмотрена аналогичная исследованной в предыдущем пункте задача. Временной интервал взаимодействия $\tau \in [0, 0.1]$. Шаг разбиения пространственно-временной области $\Delta = 0.002$.

На рис. 4.2.1 и 4.2.2 представлены зависимости от времени полуширины области контакта и скорости ее расширения. На рис. 4.2.2 сплошная кривая отвечает скорости расширения области контакта, рассчитанной по алгоритму п. 4.2, а пунктирная – решению на сверхзвуковом этапе взаимодействия (см. п. 4.1).

Рис. 4.2.3 и 4.2.4 отображают распределение контактного давления по области взаимодействия в различные моменты времени и его зависимость от времени в точках границы полуплоскости с различными координатами x .

Видно, что на дозвуковом режиме взаимодействия, вблизи границы области контакта, напряжения резко возрастают.

Кривые на рис. 4.2.5 представляют распределение нормальных перемещений по координате x в различные моменты времени. Сплошные кривые соответствуют решению, полученному по алгоритму п. 4.2, пунктирные – решения, полученные интегрированием системы интегро-дифференциальных уравнений (см. п. 4.1). Дальнейшая эволюция перемещений оболочки показана на рис. 4.2.6.

Сходимость алгоритма исследуется по норме (4.1.16) перемещений оболочки w в нормальном направлении в зависимости от значений шагов

значениях шага разбиения пространственно-временной области. На рис. 4.2.7 изображена зависимость нормы разности сеточных функций $w_{ij}(n)$, полученных при $h = (h_0/2)^n$ и $h = (h_0/2)^{n+1}$ ($h_0 = 0.01$).

$$\Delta(n) = \|w_{0ij}(n) - w_{0ij}(n+1)\|.$$

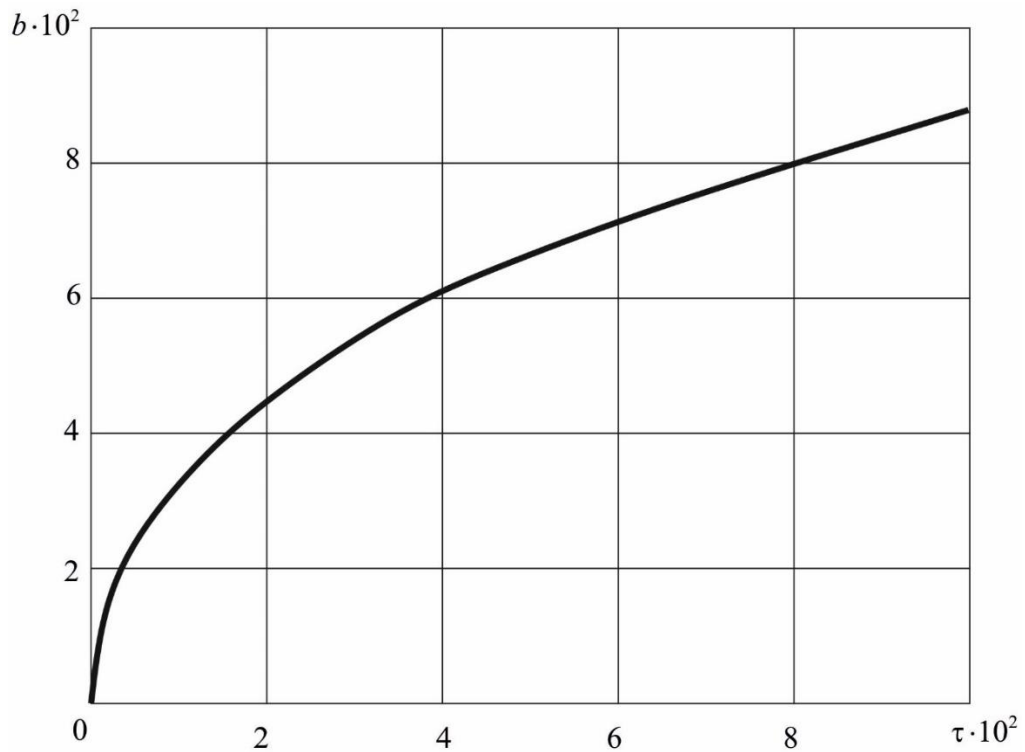


Рис. 4.2.1. Зависимость положения границы области контакта от времени.

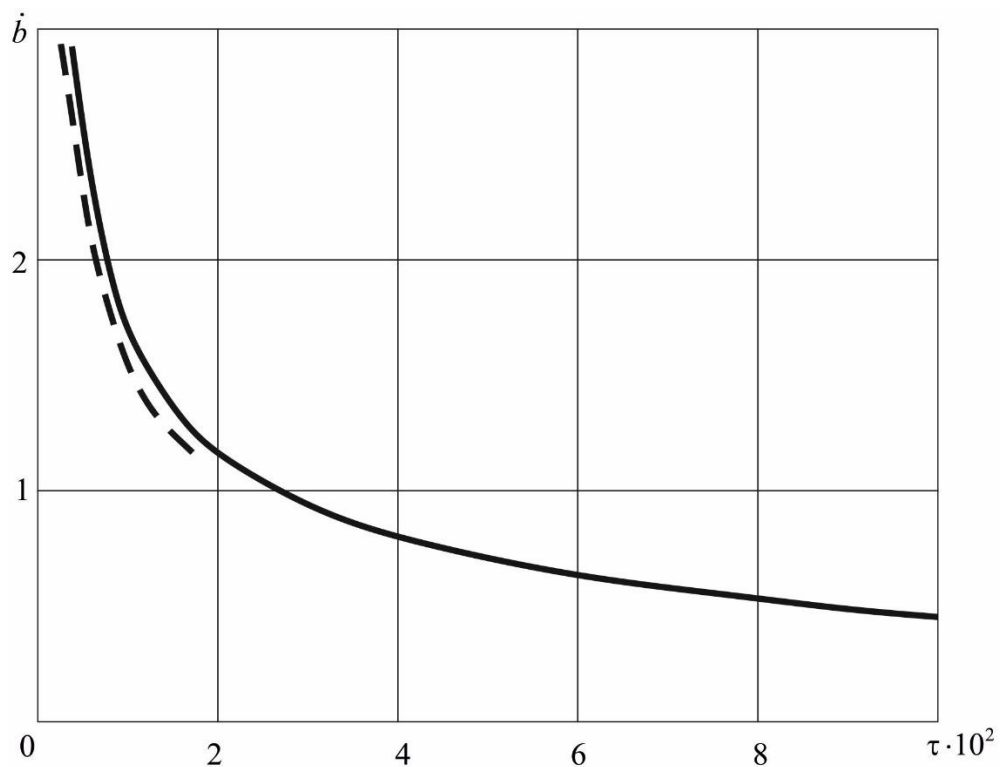


Рис. 4.2.2. Зависимость скорости границы области контакта от времени.

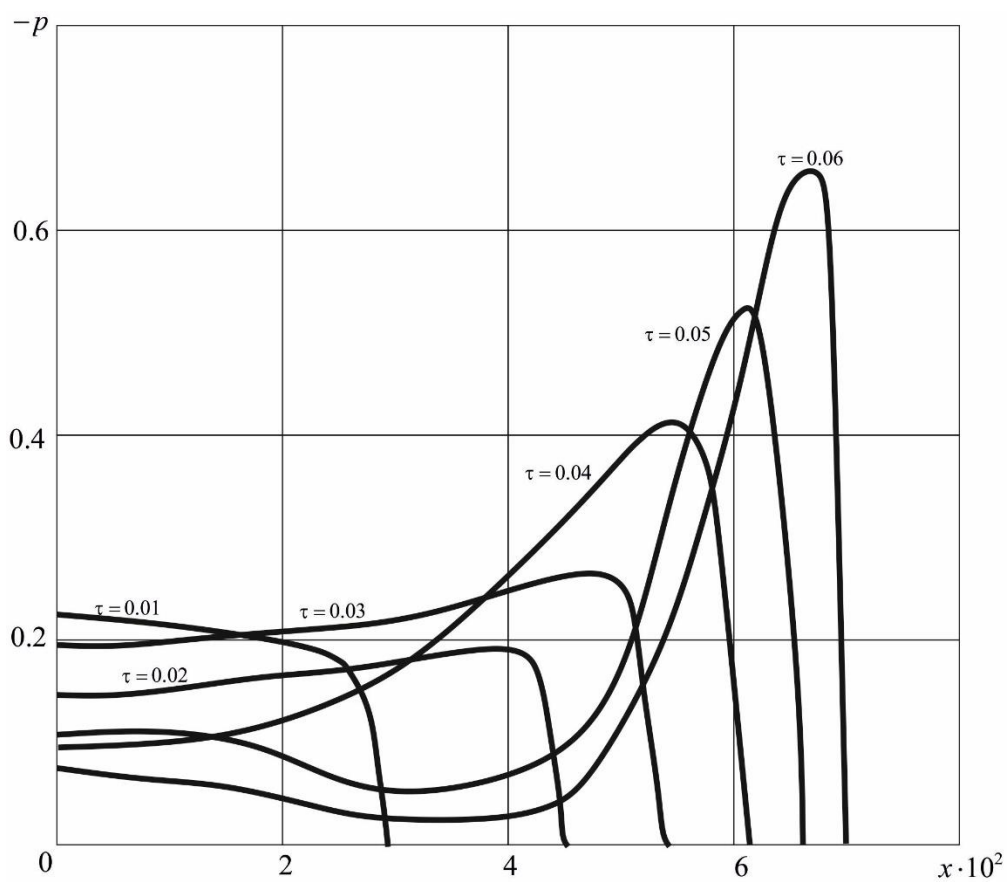


Рис. 4.2.3. Распределение контактного давления в различные моменты времени.

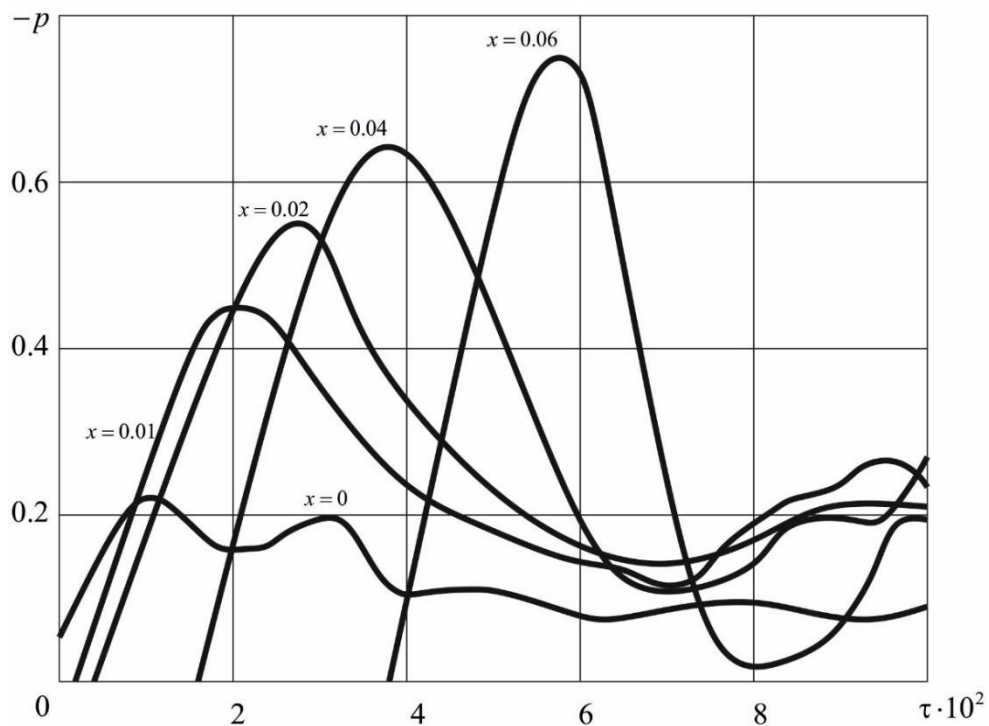


Рис. 4.2.4. Зависимость контактного давления от времени в разных точках границы полуплоскости.

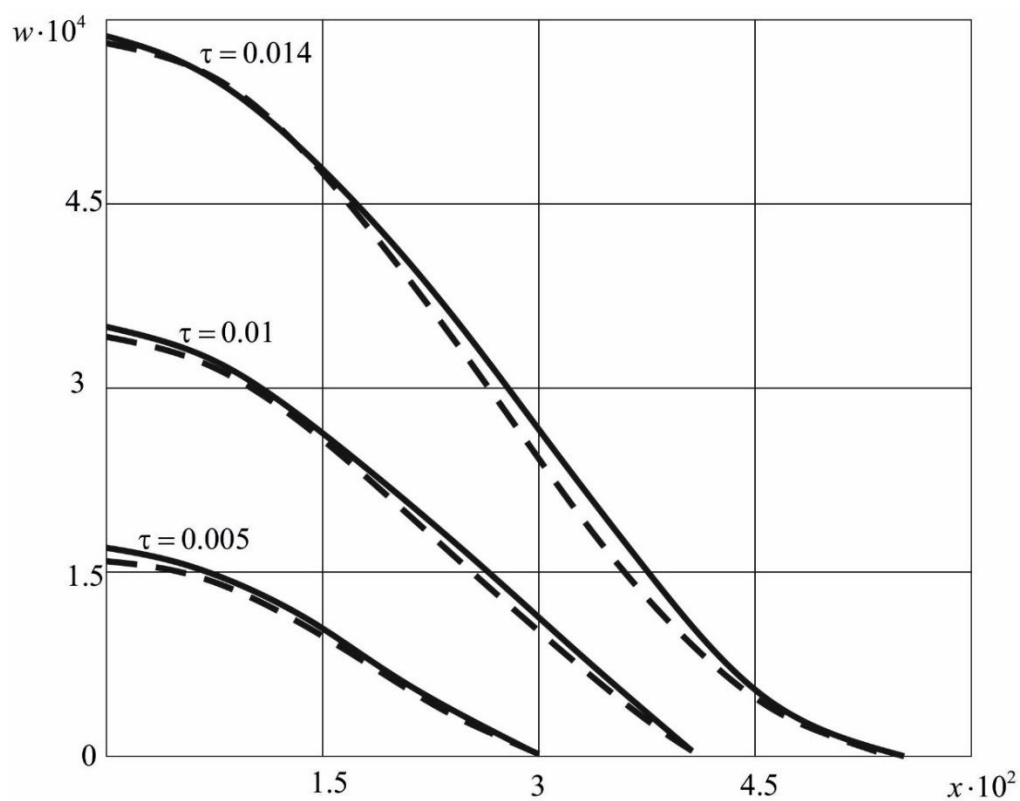


Рис. 4.2.5. Сравнение распределений нормальных перемещений в различные моменты времени.

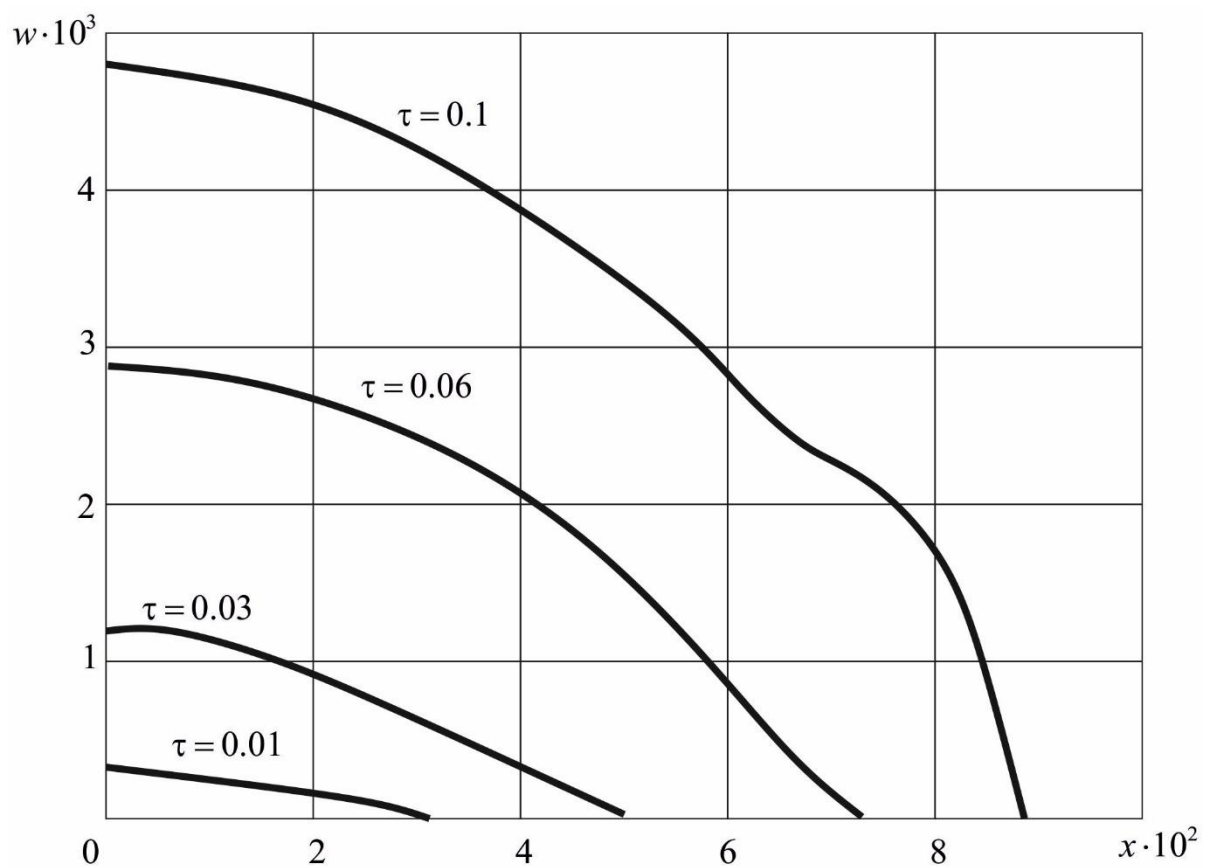


Рис. 4.2.6. Распределение нормальных перемещений в различные моменты времени.

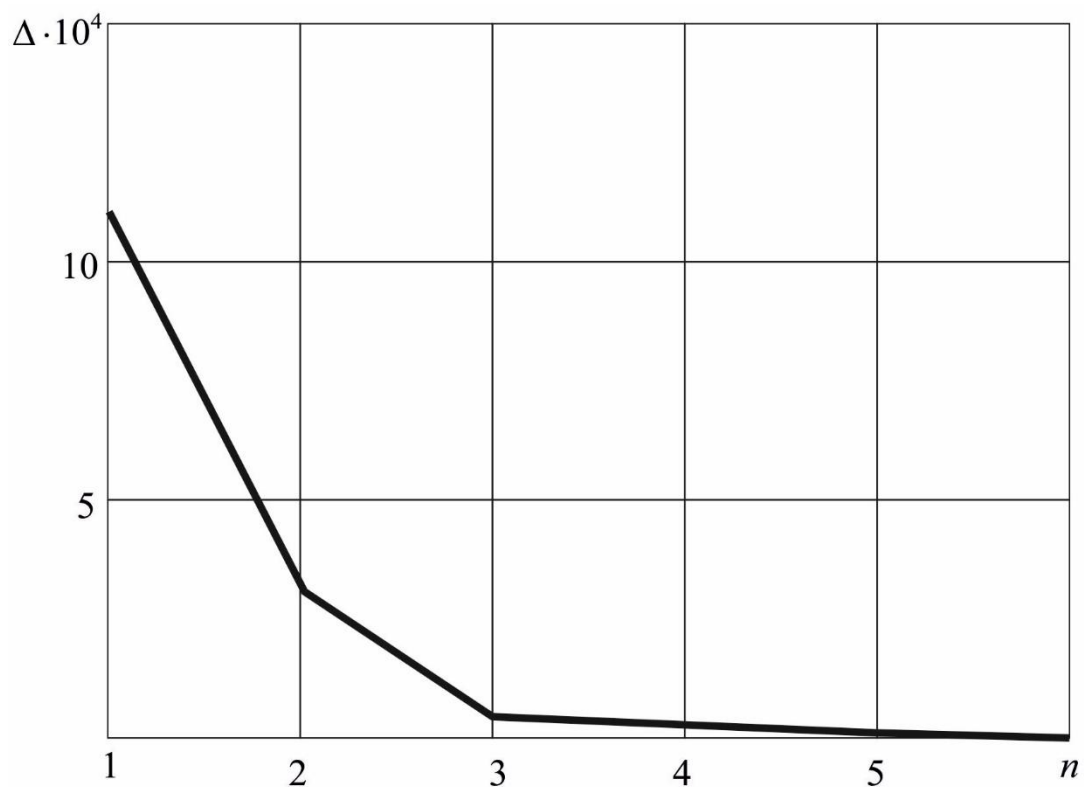


Рис. 4.2.7. Оценка сходимости по норме.

4.3. Учёт многосвязности области контакта

При учете деформации граничных поверхностей полупространства и оболочки проводится уточнение ширины области взаимодействия, а также принимается во внимание возможная её многосвязность. За поверхность, на которой ставятся граничные условия, по-прежнему принимается недеформированная граница полупространства.

При построении итерационного алгоритма решения задачи в качестве нулевого приближения принимается решение, полученное с помощью алгоритма, описанного в п. 4.2. Для учета деформируемости граничных поверхностей к алгоритму п. 4.2 добавляется итерационная процедура, выполняемая на каждом шаге по времени при реализации алгоритма (см. п. 1.5), которая состоит в следующем.

Область контактного взаимодействия на нулевой итерации предполагается односвязной. Ее граница определяется из кинематического уравнения (4.1.1) при реализации алгоритма п. 4.1. Также с помощью этого алгоритма определяется распределение контактного давления по области взаимодействия на текущем временном шаге $t_i = i\Delta$. С использованием интегральных связей контактного давления с нормальными перемещениями (4.2.2) находятся нормальные перемещения границ полупространства и оболочки. Определяется разность нормальных перемещений Δ_{wij} :

$$\begin{aligned} \Delta_{wij} &= \Delta_w(x_j, t_j), \\ \Delta_w(x, \tau) &= w(x, \tau) - w_0(x, \tau) + \sqrt{1 - x^2} - 1. \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Если на текущем временном шаге t_i для некоторой области, принадлежащей свободной поверхности полупространства, разность перемещений Δ_{wij} отлична от нуля, то данная область исключается из расчета на следующей итерации. Также из расчета исключаются области с наличием неотрицательного контактного давления. После уточнения зоны контакта с учетом возможной ее многосвязности и выхода перемещений за ее границу

производится повторный расчет распределения контактного давления по уточненной области контакта.

Анализ сходимости итерационного процесса поводится по норме (4.1.16) разности между двумя сеточными функциями нормальных перемещений, определенных на текущей и на предыдущей итерации. Если ее величина не превышает одной сотой шага разбиения пространственно-временной области Δ , то итерационный процесс останавливается, и алгоритм переходит к выполнению расчетов на следующем временном шаге.

При этом, на нулевой итерации определяется решение системы разрешающих уравнений (4.2.12).

Разностная схема итерационного алгоритма следующая.

1. Нулевая итерация:

$$\mathbf{W}_n^{(0)} = \mathbf{J}_n^{(0)} \mathbf{p}_n^{(0)}, \quad b_n^{(0)} = \sqrt{1 - \left(1 - V_0 n \Delta - \frac{J_{T,n-1,m}^{(0)}}{m_0}\right)^2},$$

$$\mathbf{W}_n^{(0)} = \left(w_{nm}^{(0)}\right)_{M_n \times 1}, \quad w_{nm}^{(0)} = 1 - (1 - V_0 n h) \sqrt{1 - m^2 h^2} + J_{n-1,m} - J_{0,n-1,m},$$

$$\mathbf{J}_n = \left(\tilde{J}_{nj}^{nm}\right)_{M_1 \times M_1}, \quad \tilde{J}_{nj}^{nm} = J_{nj}^{nm} + \Delta \delta_{nm}, \quad \mathbf{p}_n^{(0)} = \left(p_{nj}^{(0)}\right)_{M_n \times 1}, \quad M_n = M_{2n} - M_{1n}.$$

2. k -я итерация ($k = 1, 2, 3, \dots$):

$$\Delta_{wnm}^{(k)} = w_{nm}^{(k)} - w_{0nm}^{(k)} + \sqrt{1 - m^2 \Delta^2} - 1, \quad \Omega_{*ij}^{(k)} = \{(i, j) \mid \Delta_{ij}^{(k)} = 0, p_{ij}^{(k)} < 0\},$$

$$\mathbf{W}_n^{(k)} = \mathbf{J}_n^{(k)} \mathbf{p}_n^{(k)}, \quad b_n^{(k)} = \sqrt{1 - \left(1 - V_0 n \Delta - \frac{J_{T,n-1,m}^{(k)}}{m_0}\right)^2},$$

$$\mathbf{W}_n^{(k)} = \left(w_{nm}^{(k)}\right), \quad w_{nm}^{(k)} = 1 - (1 - V_0 n h) \sqrt{1 - m^2 h^2} + J_{n-1,m}^{(k)} - J_{0,n-1,m}^{(k)},$$

$$\mathbf{J}_n^{(k)} = \left(\tilde{J}_{nj}^{(k),nm}\right), \quad \tilde{J}_{nj}^{(k),nm} = J_{nj}^{(k),nm} + \Delta \delta_{nm}, \quad \mathbf{p}_n^{(k)} = \left(p_{nj}^{(k)}\right),$$

$$J_{0,nm}^{(k)} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=M_{1i}+1}^{M_{2i}} J_{ij}^{(k),nm} p_{ij}^{(k)} + \sum_{j=M_{1n}+1}^{M_{2n}} J_{lj}^{(k),nm} p_{nj}^{(k)}, \quad (i, j \in \Omega_{*ij}^{(k)}),$$

$$J_{T,n-1,m}^{(k)} = 2\Delta^3 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{[b_i]} (n-i) p_{ij}^{(k)}, \quad (i, j \in \Omega_{*ij}^{(k)}),$$

$$J_{nm}^{(k)} = J_{n-1,m}^{(k)} + b_{nm} p_{nm}^{(k)}, J_{n-1,m}^{(k)} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=k_{1i}}^{k_{2i}} a_{n-i,m-j} p_{ij}^{(k)}, \quad (i, j \in \Omega_{*ij}^{(k)}).$$

3. Анализ сходимости:

$$\Delta(k) = \|w_{0ij}^{(k)} - w_{0ij}^{(k-1)}\| < h \cdot 10^{-2}.$$

В качестве примера использования предложенного алгоритма рассмотрим задачу с теми же условиями, что и в пп. 4.1, 4.2.

Кривые на рис. 4.3.1 представляют зависимость полуширины области контакта b от времени. Сплошная кривая отвечает результату, полученному с помощью итерационного алгоритма п. 4.3, пунктирная – метода п. 4.2. Из этих графиков видно, что при использовании итерационного метода уточнения области контакта ее ширина при $\tau > 0.2$ превышает ширину области, полученную при решении задачи по алгоритму п. 4.1.2 (на нулевой итерации).

На рис. 4.3.2 представлено сравнение распределений контактного давления по области взаимодействия для момента времени $\tau = 0.06$. Сплошная кривая соответствует итерационному методу, пунктирная – нулевой итерации.

Процесс внедрения оболочки в полупространство изображен на рис. 4.3.3. Хорошо видно, что при достаточно большом τ начинают появляться зоны отслоения граничных поверхностей оболочки и полупространства (кавитация). Также имеет место выход перемещений за границу области контакта.

Кривые на рис. 4.3.4 показывают распределение нормальных перемещений оболочки по координате x при принятии в качестве материала полупространства меди ($\eta = 0.488$, $\eta_1 = 1.347$, $\eta_2 = 0.72$, $m_0 = 0.3$, $V_0 = 0.05$). Сплошные кривые относятся к оболочке, пунктирные – к полупространству. Аналогичные графики представлены на рис. 4.3.5. Здесь материал полупространства – алюминий ($\eta = 0.486$, $\eta_1 = 1.049$, $\eta_2 = 0.561$, $m_0 = 0.3$, $V_0 = 0.05$). Из этих результатов видно качественное соответствие в характере

протекания процесса динамического контактного взаимодействия незначительное.

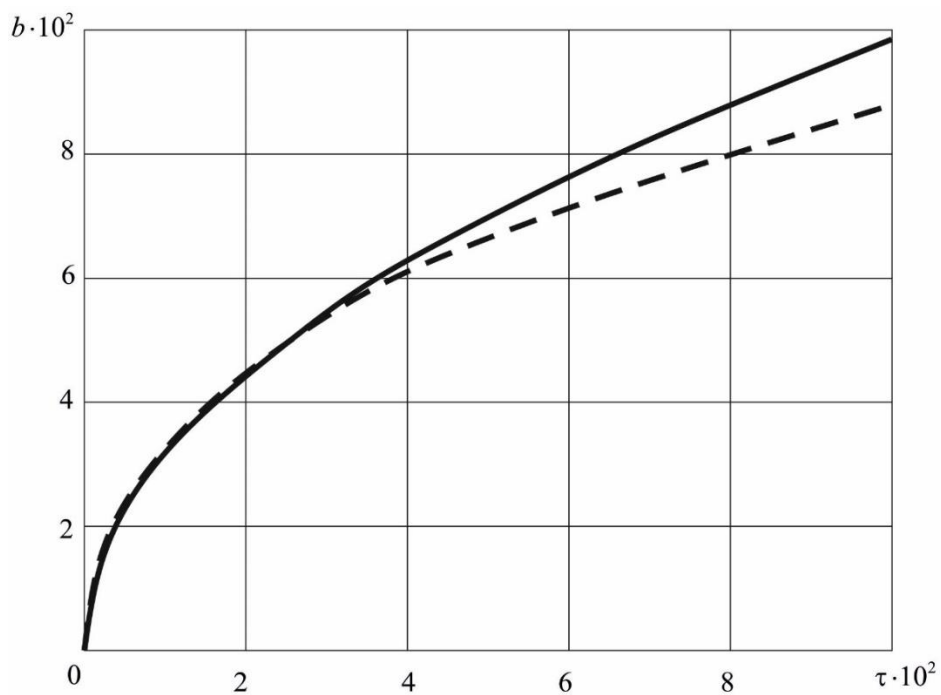


Рис. 4.3.1. Граница области контакта.

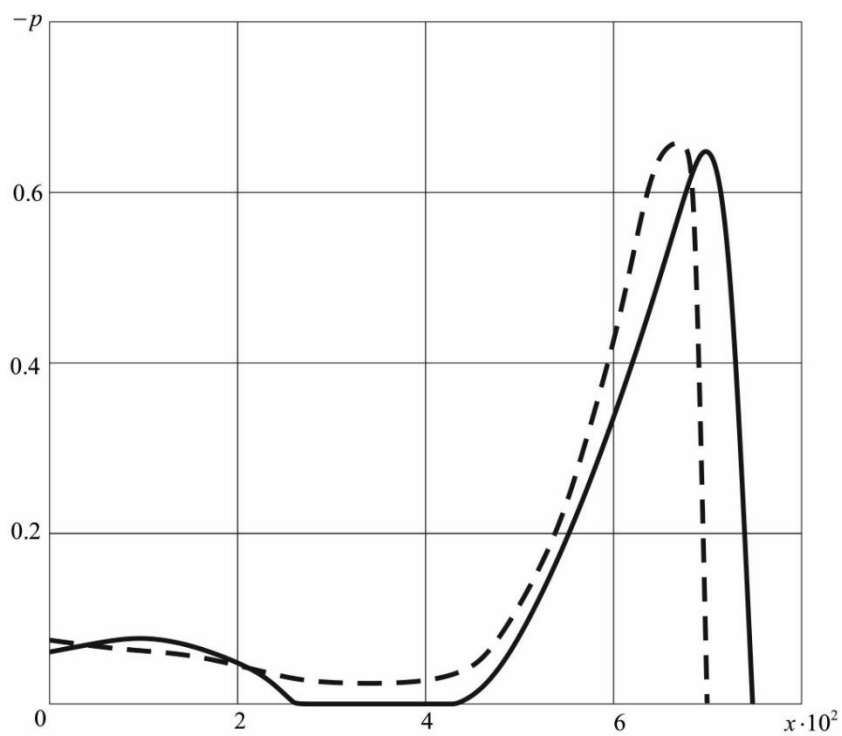


Рис. 4.3.2. Распределение контактного давления.

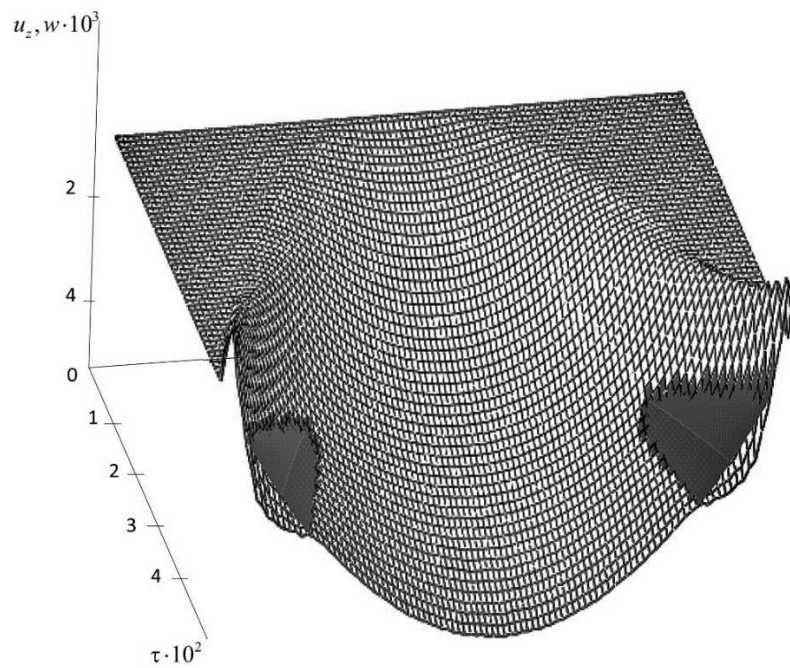


Рис. 4.3.3. Пространственно-временное распределение нормальных перемещений.

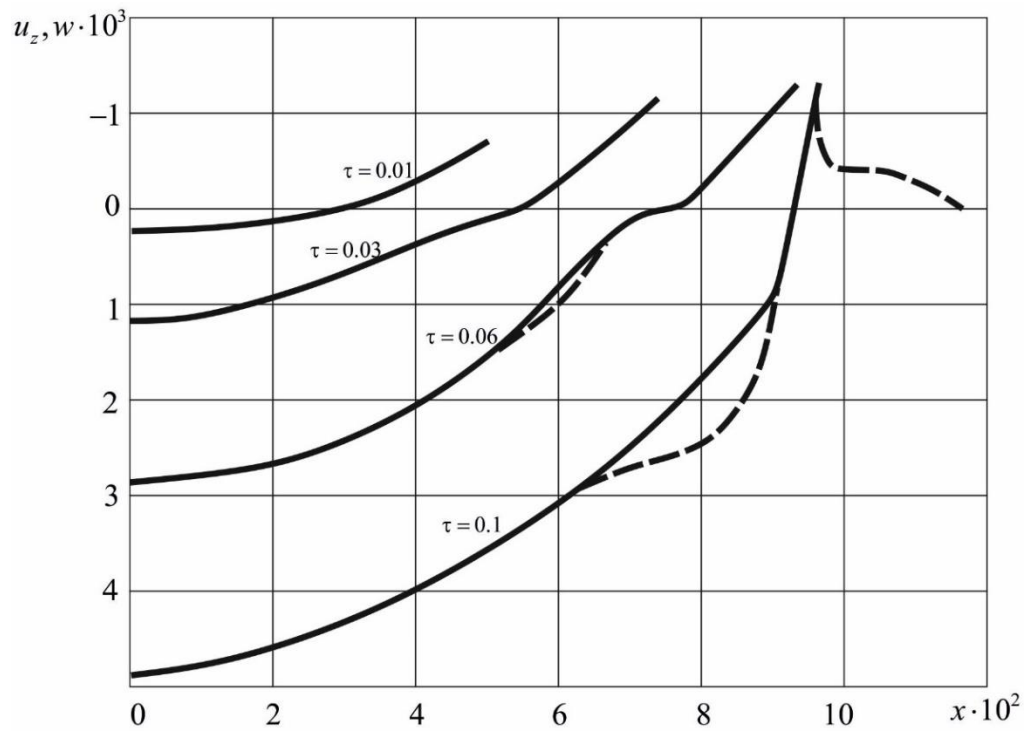


Рис. 4.3.4. Распределение нормальных перемещений в различные моменты времени (материал полупространства – медь).

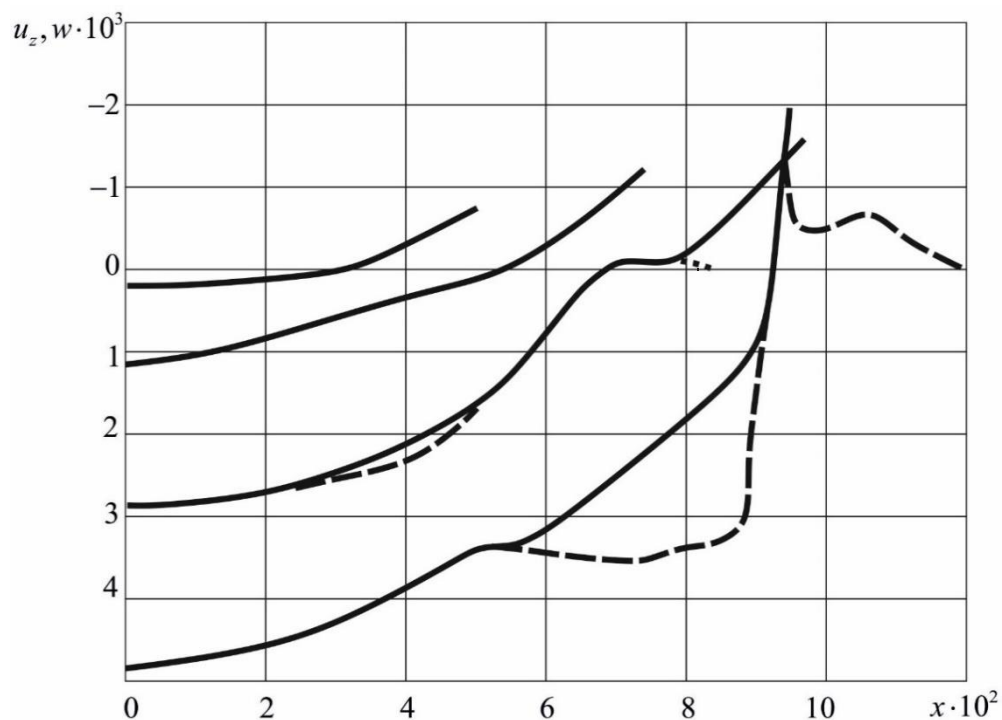


Рис. 4.3.5. Распределение нормальных перемещений в различные моменты времени (материал полупространства – алюминий).

Анализ сходимости итерационного алгоритма показывает, что для обеспечения необходимой точности порядка $0.01\Delta = 2 \cdot 10^{-5}$ достаточно двух итераций. В таблице 4.3.1 представлены результаты сравнения сеточных функций $w_{ij}^{(k)}$ после первой и второй итерации.

Таблица 4.3.1.

Номер итерации k	$\Delta(k)$
0	-
1	$1.265 \cdot 10^{-4}$
2	$1.872 \cdot 10^{-5}$

4.4. Взаимодействие сферической оболочки и упругого полупространства (сверхзвуковой этап)

Рассмотрим процесс вертикального удара сферической оболочки по упругому полупространству. В начальный момент оболочка, двигаясь с начальной скоростью V_0 , входит в контакт с упругим полупространством. Вектор начальной скорости коллинеарен нормали к невозмущенной поверхности полупространства. Первоначально оболочка и полупространство находятся в недеформированном состоянии (рис. 4.2.1).

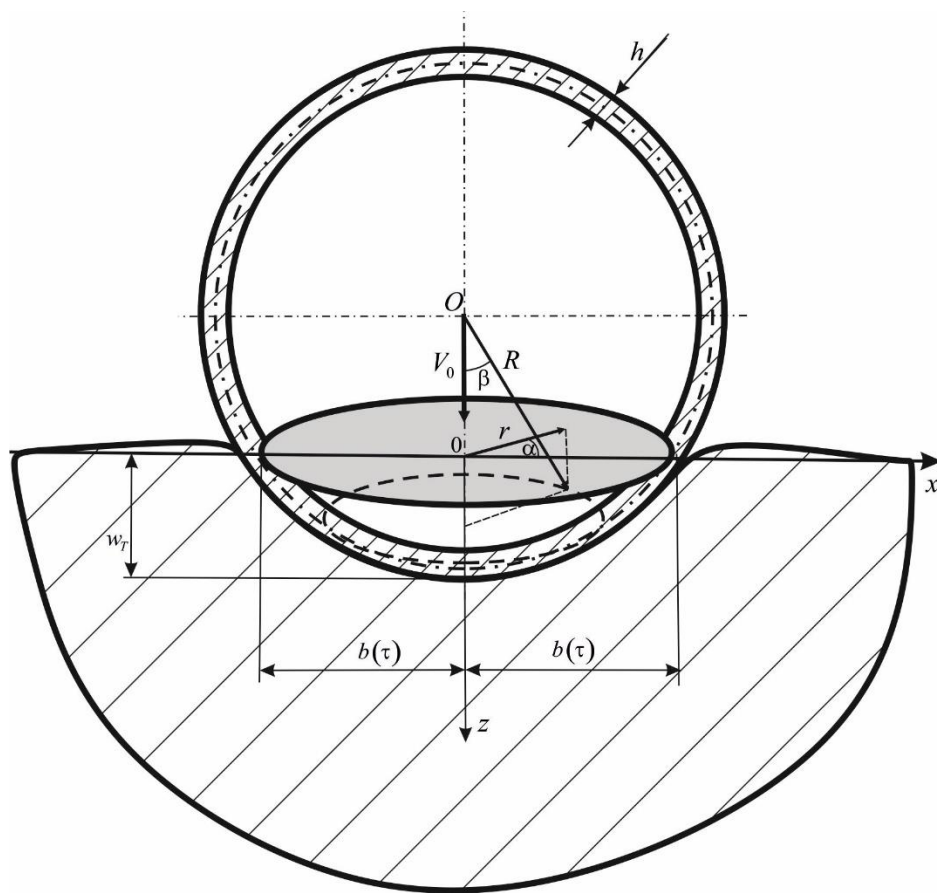


Рис. 4.2.1. Постановка задачи.

Движение упругой среды, заполняющей полупространство, подчиняется системе уравнений осесимметричного движения (1.2.26)-(1.2.29), а для оболочки справедливы уравнения в перемещениях (1.3.8). В качестве

характерной длины в системе безразмерных величин (1.2.5) принимается радиус оболочки: $L = R$, а в качестве характерной скорости c_* – скорость волн растяжения-сжатия в упругом полупространстве.

Полагая, что контакт происходит в условиях свободного проскальзывания, а также учитывая, что вне зоны взаимодействия поверхности полупространства и оболочки свободны от напряжений, приходим к следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}|_{z=0} &= \tilde{\gamma}^2 p, \quad [r \leq b(\tau)]; \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = 0, \quad [r > b(\tau)]; \\ \sigma_{z\vartheta}|_{z=0} &= 0, \quad [r \in (-\infty, \infty)]; \quad u_z = w \cos \theta \approx w \quad [r \leq b(\tau)]. \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

При этом область контакта представляет собой круг, принадлежащий недеформированной поверхности полупространства с радиусом $b(\tau)$, зависящим от времени. Последнее условие в (4.4.1) записано с учетом предположения о малости углового размера области контакта по отношению к радиусу оболочки.

В нулевом приближении радиус области контакта связан с глубиной проникания $w_T(\tau)$ условием пересечения недеформированных поверхностей оболочки и полупространства:

$$b(\tau) = \sqrt{w_T(2 - w_T)}. \quad (4.4.2)$$

Для определения глубины проникания привлекается уравнение движения оболочки как абсолютно твердого тела

$$m_0 \ddot{w}_T = R_a, \quad R_a(\tau) = 2\pi \int_0^{b(\tau)} p(r, \tau) r dr. \quad (4.4.3)$$

Соотношения (1.2.26)-(1.2.29), (1.3.8), (4.4.1)-(4.4.3) совместно с начальными условиями

$$\varphi|_{\tau=0} = \dot{\varphi}|_{\tau=0} = \psi|_{\tau=0} = \dot{\psi}|_{\tau=0} = 0, \quad (4.4.4)$$

$$\begin{aligned} w_T|_{\tau=0} &= 0, \quad \dot{w}_T|_{\tau=0} = V_0, \quad u|_{\tau=0} = 0, \quad w|_{\tau=0} = 0, \quad \chi|_{\tau=0} = 0, \\ \dot{\chi}|_{\tau=0} &= 0, \quad \dot{u}|_{\tau=0} = -V_0 \sin \beta, \quad \dot{w}|_{\tau=0} = V_0 \cos \beta. \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

образуют замкнутую постановку нестационарной контактной задачи о вертикальном ударе сферической оболочки по упругому полупространству.

Рассмотрим начальный сверхзвуковой этап взаимодействия, при котором скорость расширения области контакта превышает скорость звука в упругой среде, т.е. $\dot{b} \geq 1$, поэтому перемещения граничных поверхностей ударника и полупространства не выходят за границу области взаимодействия.

Контактные напряжения $\sigma_{zz}|_{z=0} = \sigma_{zz0}(r, \tau)$ связаны с нормальными перемещениями $u_z|_{z=0} = u_{z0}(r, \tau)$ формулой (1.6.9).

С использованием свойств однородности функции $\Gamma_a(r, \tau)$ и того, что носитель нормальных перемещений совпадает с областью контакта, интегральное представление (1.6.9) приводится к виду [80]:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz0}(r, \tau) = & -\dot{u}_{z0}(r, \tau)H(\tau)H[b(\tau) - r] + \\ & + \int_0^\tau dt \int_0^{b(t)} \frac{\partial \dot{u}_{z0}(\rho, t)}{\partial \rho} v(r, \rho, \tau - t) d\rho - \int_0^\tau \dot{u}_{z0}[b(t), t] v[r, b(t), \tau - t] dt, \quad (4.4.6) \\ v(r, \rho, \tau) = & \sum_{q=1}^2 v_{rq}(r, \rho, \tau) + \frac{1}{\tau} v_s(r, \rho, \tau). \end{aligned}$$

При $r > 0$ функции v_{rq} и v_s таковы [80]:

$$\begin{aligned} v_{rq}(r, \rho, \tau) = & \frac{1}{r - \rho} v_{rq1}(r, \rho, \tau) + \frac{1}{(r - \rho)^3} v_{rq2}(r, \rho, \tau) + \frac{1}{\tau} \frac{1}{r - \rho} v_{rq3}(r, \rho, \tau), \\ v_{rq1}(r, \rho, \tau) = & \frac{d_q}{\pi \eta^4} \left\{ F(\delta_q, m) H[\varphi_{1q}(r, \rho, \tau)] + K(m) H[\varphi_{2q}(r, \rho, \tau)] \right\} H[\varphi_q(r, \rho, \tau)], \\ v_{rq2}(r, \rho, \tau) = & \frac{b_q}{\pi \eta^4} \left\{ E(\delta_q, m) H[\varphi_{1q}(r, \rho, \tau)] + E(m) H[\varphi_{2q}(r, \rho, \tau)] \right\} H[\varphi_q(r, \rho, \tau)], \\ v_{rq3}(r, \rho, \tau) = & \frac{1}{\pi \eta^4} c_q H[\varphi_{1q}(r, \rho, \tau)] H[\varphi_q(r, \rho, \tau)], \\ v_s(r, \rho, \tau) = & v_{s0}(r, \rho, \tau) H[\varphi_{s1}(r, \rho, \tau)] H[\varphi_{s2}(r, \rho, \tau)], \\ v_{s0}(r, \rho, \tau) = & -\frac{(\eta^2 - 2)^2}{\pi \eta^4} \frac{c_0}{\sqrt{r + \rho - \tau} \sqrt{\tau^2 - (r - \rho)^2}}, \end{aligned}$$

$$c_0 = \frac{r^2 - \rho^2 - \tau^2}{\sqrt{r + \rho + \tau}}, \quad m = \frac{4r\rho}{(r + \rho)^2}, \quad \sin^2 \delta_q = \frac{(r + \rho)^2 \left[(\tau/\eta_q)^2 - (r - \rho)^2 \right]}{4r\rho(\tau/\eta_q)^2},$$

$$\sin^2 \delta_q = \frac{(r + \rho)^2 \left[(\tau/\eta_q)^2 - (r - \rho)^2 \right]}{4r\rho(\tau/\eta_q)^2},$$

$$\varphi_q(r, \rho, \tau) = \tau - \eta_q |r - \rho|, \quad \varphi_{1q}(r, \rho, \tau) = \eta_q(r + \rho) - \tau, \quad \varphi_{2q}(r, \rho, \tau) = \tau - \eta_q(r + \rho),$$

$$\varphi_{s1}(r, \rho, \tau) = r + \rho - \tau, \quad \varphi_{s2}(r, \rho, \tau) = \tau - |r - \rho|,$$

$$d_1 = \frac{2}{r + \rho} \left[\frac{\tau^2}{r + \rho} - (r - \rho)(2\eta^2 - 1) \right], \quad d_2 = \frac{2}{r + \rho} \left[(r - \rho)\eta^2 - \frac{\tau^2}{r + \rho} \right],$$

$$c_1 = -2 \frac{\sqrt{(r + \rho)^2 - \tau^2} \sqrt{\tau^2 - (r - \rho)^2}}{r + \rho},$$

$$c_2 = -2\eta \frac{\sqrt{\eta^2(r + \rho)^2 - \tau^2} \sqrt{\tau^2 - \eta^2(r - \rho)^2}}{r + \rho},$$

$$b_1 = 2 \left\{ \tau^2 \left[\frac{3(r - \rho)}{r + \rho} - \frac{2(r - \rho)^2}{(r + \rho)^2} - 2 \right] + (2\eta^2 - 1)(r - \rho)^2 \right\},$$

$$b_2 = 2 \left\{ \tau^2 \left[-\frac{3(r - \rho)}{r + \rho} + \frac{2(r - \rho)^2}{(r + \rho)^2} + 2 \right] - \eta^2(r - \rho)^2 \right\},$$

а при $r = 0$ они имеют вид:

$$v_{r1}(0, \rho, \tau) = \frac{2}{\eta^4 \rho^3} [3\tau^2 - (2\eta^2 - 1)\rho^2], \quad v_{r2}(0, \rho, \tau) = -\frac{2}{\eta^4 \rho^3} [3\tau^2 - \eta^2 \rho^2],$$

$$v_s(0, \rho, \tau) = \frac{(\eta^2 - 2)^2}{\eta^4} \delta(\tau - \rho).$$

В этих формулах $F(\delta_q, m)$, $E(\delta_q, m)$, $K(m)$, $E(m)$ – неполные и полные эллиптические интегралы первого и второго рода [194].

Исходя из первого и последнего граничных условий в (4.4.1) и учитывая (4.4.6), получаем следующее выражение для контактного давления p [80, 157]:

$$p(r, \tau) = \frac{1}{\tilde{\gamma}^2} [p_1(r, \tau) + p_2(r, \tau) + p_3(r, \tau)], \quad (4.4.7)$$

$$\begin{aligned}
p_1(r, \tau) &= -\dot{w}H(\tau)H[b(\tau) - r], \\
p_2(r, \tau) &= \int_0^\tau \dot{w}[b(t), t] \upsilon[r, b(t), \tau - t] dt, \\
p_3(r, \tau) &= -\int_0^\tau dt \int_0^{b(\tau)} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \rho} \upsilon(r, \rho, \tau - t) d\rho.
\end{aligned}$$

Выражение совместно с уравнениями движения оболочки (1.3.8), уравнениями (4.4.2), (4.4.3) и начальными условиями (4.4.5) образуют замкнутую систему разрешающих уравнений сверхзвукового этапа контактного взаимодействия сферической оболочки и упругого полупространства.

Как видно, с помощью принципа суперпозиции и функции влияния для упругого полупространства задачу удалось свести к решению системы уравнений движения оболочки совместно с дополнительными уравнениями для определения зоны контакта. При этом вся информация о воздействии со стороны полупространства содержится в интегральном представлении (4.4.7) для контактного давления p . Граничными условиями при этом выступают условия ограниченности перемещений оболочки в полюсах. Условие периодичности по окружной координате выполняется автоматически в силу осевой симметрии задачи. Принимая во внимание малость угла β , полагаем, что $r = \sin \beta \approx \beta$, $\rho = \sin \beta \approx \beta$.

Для решения системы разрешающих уравнений используем метод разделения переменных. Все заданные и искомые функции, зависящие от радиальной β и временной τ переменных, аналогично (3.5.3) представим в виде разложений в ряды по полиномам Лежандра и Гегенбауэра:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u(\beta, \tau) \\ \chi(\beta, \tau) \end{pmatrix} &= -\sin \beta \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} u_n(\tau) \\ \chi_n(\tau) \end{pmatrix} C_{n-1}^{3/2}(\cos \beta), \\
\begin{pmatrix} w(\beta, \tau) \\ p(\beta, \tau) \end{pmatrix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} w_n(\tau) \\ p_n(\tau) \end{pmatrix} P_n(\cos \beta), \quad p_n(\tau) = \tilde{\gamma}^{-2} \sum_{i=1}^3 p_{in}(\tau),
\end{aligned} \tag{4.4.8}$$

где

$$p_{in} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 p_i P_n(x) dx \quad (i=1,2,3). \quad (4.4.9)$$

Проводя замену переменной $x = \cos \beta$ в интеграле (4.4.9) и используя представление (4.4.7), получаем следующие выражения для $p_{in}(\tau)$:

$$p_{1n}(\tau) = -\frac{2n+1}{2} H(\tau) \sum_{k=0}^{\infty} \dot{w}_k(\tau) I_{nk}[b(\tau)], \quad (4.4.10)$$

$$p_{2n}(\tau) = \frac{2n+1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\tau} \dot{w}_k(t) P_k[\cos b(t)] dt \int_0^{\pi} \upsilon[\theta, b(t), \tau-t] P_n(\cos \beta) \sin \beta d\beta,$$

$$p_{3n}(\tau) = -\frac{2n+1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\tau} \dot{w}_k(t) dt \int_0^{\arcsin b(\tau)} \frac{dP_k(\cos \beta_*)}{d\beta_*} d\beta_* \int_0^{\pi} \upsilon(\beta, \beta_*, \tau-t) P_n(\cos \beta) \sin \beta d\beta,$$

где $I_{nk}(x) = \int_0^{\arcsin x} P_k(\cos \beta) P_n(\cos \beta) \sin \beta d\beta$.

Подстановка (4.4.8) в (1.3.8) приводит к бесконечной системе интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов рядов (4.4.8), зависящих от времени:

$$\ddot{\mathbf{U}}_n = \mathbf{L}_n \mathbf{U}_n + \mathbf{P}_n, \quad (4.4.11)$$

$$\mathbf{L}_n = (L_{ijn})_{3 \times 3}, \mathbf{U}_n = (u_n(\tau), w_n(\tau), \chi_n(\tau))^T, \mathbf{P}_n = \frac{1}{\tilde{\gamma}^2} \left(0, \sum_{i=1}^3 p_{in}(\tau), 0 \right)^T.$$

Элементы L_{ijn} матрицы \mathbf{L}_n даются формулами (3.5.5)

С использованием разложения (4.4.8) для $p(\beta, \tau)$, выражений (4.4.10) и подстановки $r = \sin \theta$, уравнение движения оболочки как абсолютно твердого тела (4.4.3) запишется так:

$$m_0 \ddot{w}_T = \pi \sum_{i=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} p_{in}(\tau) I_n[b(\tau)]. \quad (4.4.12)$$

Здесь $I_n(x) = \int_0^{\arcsin x} P_n(\cos \theta) \sin(2\theta) d\theta$.

Разрешающая система уравнений в коэффициентах рядов включает в себя систему уравнений (4.4.11) с учетом (4.4.10), уравнение (4.4.12) и

геометрическое соотношение (4.4.2) для определения радиуса области контакта. При этом неизвестными являются коэффициенты $u_n(\tau)$, $w_n(\tau)$, $\chi_n(\tau)$ рядов (4.4.8) для перемещений оболочки и угла поворота нормальных до деформации к срединной поверхности сечений за счет сдвига, глубина проникания оболочки в полупространство $w_T(\tau)$ и радиус границы области контакта $b(\tau)$.

Начальные условия для разрешающей системы уравнений имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} b|_{\tau=0} = w_T|_{\tau=0} = u_n|_{\tau=0} = w_n|_{\tau=0} = \chi_n|_{\tau=0} = \dot{\chi}_n|_{\tau=0} = 0, \\ \dot{u}_n|_{\tau=0} = \dot{w}_n|_{\tau=0} = 0 \quad (n \neq 1), \quad \dot{w}_T|_{\tau=0} = \dot{u}_1|_{\tau=0} = \dot{w}_1|_{\tau=0} = V_0. \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

Учитывая явное представление для полиномов Лежандра [194]:

$$P_n(x) = 2^{-n} \sum_{m=0}^{rd[n/2]} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m},$$

функции $I_{nk}(x)$ в (4.4.10) и $I_n(x)$ в (4.4.12) находятся так:

$$\begin{aligned} I_{nk}(x) = 2^{-n-k} \sum_{m_3=0}^{rd[k/2]} \sum_{m_2=0}^{rd[n/2]} (-1)^{m_2+m_3} \frac{(2k-2m_3)!(2n-2m_2)!}{m_3!(k-m_3)!(k-2m_3)!m_2!(n-m_2)!} \times \\ \times \frac{1 - (1-x^2)^{\frac{k+n-2(m_2+m_3)+1}{2}}}{(n-2m_2)!(k+n-2(m_2+m_3)+1)}, \\ I_n(x) = 2^{-n+1} \sum_{m_1=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^{m_1} \frac{(2n-2m_1)!}{m_1!(n-m_1)!(n-2m_1)!} \left(1 - (1-x^2)^{\frac{n-2m_1+2}{2}} \right). \end{aligned}$$

Здесь символ $\lfloor \cdot \rfloor$ обозначает целую часть числа.

Из формул (4.4.6) следует, что $p_{2n}(\tau)$ и $p_{3n}(\tau)$ содержат интегралы с сингулярными особенностями порядка (-1) и (-3) при $\tau = 0$, $\sin\beta = \sin\beta_*$ ($m=1$), а также с интегрируемыми особенностями порядка $(-1/2)$ при $\tau = \sin\beta + \sin\beta_*$, $\tau = |\sin\beta - \sin\beta_*|$. Поэтому для вычисления их конечных значений используются квадратурные формулы, при этом к

интегралам с сингулярными особенностями применяется каноническая регуляризация [69, 157].

В основе алгоритма решения системы разрешающих уравнений (4.4.2), (4.4.10)-(4.4.12) лежит модифицированный метод Рунге-Кутты четвертого порядка и принцип редукции.

Согласно принципу редукции заменяем ряды (4.4.8) конечными суммами, ограничиваясь в разложениях первыми членами с номерами $n = 0, 1, \dots, N$:

$$\begin{pmatrix} u(\beta, \tau) \\ \chi(\beta, \tau) \end{pmatrix} = -\sin\beta \sum_{n=1}^N \begin{pmatrix} u_n(\tau) \\ \chi_n(\tau) \end{pmatrix} C_{n-1}^{3/2}(\cos\beta), \quad \begin{pmatrix} w(\beta, \tau) \\ p(\beta, \tau) \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^N \begin{pmatrix} w_n(\tau) \\ p_n(\tau) \end{pmatrix} P_n(\cos\beta).$$

Приведем систему разрешающих уравнений к нормальной форме Коши, т.е. приведем к системе первого порядка. С учётом выражений (4.4.10), получаем систему, содержащую $6(N+1)+3$ обыкновенных дифференциальных уравнений, которая дополняется алгебраическим уравнением (4.4.2). Первые $6(N+1)$ уравнений можно представить в матричной форме, имеющей блочную структуру:

$$\dot{\mathbf{W}} = \mathbf{M}\mathbf{W} + \mathbf{Q}, \quad (4.4.14)$$

$$\mathbf{W} = (\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_N)^T, \quad \mathbf{W}_n = (u_n, w_n, \chi_n, \tilde{u}_n, \tilde{w}_n, \tilde{\chi}_n)^T, \\ \tilde{u}_n = \dot{u}_n, \quad \tilde{w}_n = \dot{w}_n, \quad \tilde{\chi}_n = \dot{\chi}_n,$$

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_N)^T, \quad \mathbf{Q}_n = \frac{1}{\tilde{\gamma}^2} \left(0, 0, 0, 0, \sum_{i=1}^3 p_{in}, 0 \right)^T,$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_0 & & & & & \\ & \mathbf{M}_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & & & \\ & & & & & \mathbf{M}_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_n = (M_{ijn})_{6 \times 6} = \begin{pmatrix} & & & & \gamma^2 & 0 & 0 \\ & \mathbf{0} & & & 0 & \gamma^2 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & \gamma^2 \\ & & & & - & - & - \\ L_{11n} & L_{12n} & L_{13n} & | & & & \\ L_{21n} & L_{22n} & L_{23n} & | & & \mathbf{0} & \\ L_{31n} & L_{32n} & L_{33n} & | & & & \end{pmatrix}$$

К ним добавляется система уравнений движения оболочки как абсолютно твердого тела:

$$\begin{aligned} \dot{w}_T &= \tilde{w}_T, \\ \tilde{w}_T &= \frac{\pi}{m_0} \sum_{i=1}^3 \sum_{n=0}^N p_{in}(\tau) I_n[b(\tau)], \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

уравнение для определения радиуса области контакта (4.4.2) и начальные условия:

$$\mathbf{W}_n(0) = \begin{cases} \|0, 0, 0, 0, 0, 0\|^T, & n \neq 1 \\ \|0, 0, 0, V_0, V_0, 0\|^T, & n = 1 \end{cases}, \quad u_c(0) = 0, \quad \tilde{u}_c(0) = V_0, \quad b(0) = 0. \quad (4.4.16)$$

Пятое уравнение системы (4.4.14) в каждом блоке с номером n является интегро-дифференциальным, т.к. его правая часть содержит слагаемые $\sum_{i=1}^3 p_{in}$ в виде интегралов от неизвестных функций (см. формулы (4.4.10) с заменой $\dot{w}_k(\tau) = \tilde{w}_k(\tau)$). При этом в правую часть входят все $N+1$ функции $\tilde{w}_n(\tau)$, $n = \overline{0, N}$, поэтому система решается совместно для всех $6(N+1)+3$ уравнений.

Отличие модифицированного метода Рунге-Кутты от классического заключается в том, что наряду с применением классической схемы [38] необходимо построение и использование квадратурных формул для вычисления интегралов в интегро-дифференциальных уравнениях системы (4.4.14).

Квадратурные формулы для интегралов, входящих в выражения для определения $p_{1n}(\tau)$, $p_{2n}(\tau)$, $p_{3n}(\tau)$ (см. (4.4.10)), строятся с использованием метода весовых коэффициентов и канонической регуляризации для сингулярных интегралов [69].

Значения полных эллиптических интегралов 1-го и 2-го рода вычисляются с помощью аппроксимации многочленами [157, 194].

Неполные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода вычисляются с помощью метода Симпсона [38].

Предложенный алгоритм расчета реализован в среде Си++ [283, 284].

В качестве примера рассмотрим вертикальный удар стальной сферической оболочки по полупространству, заполненному сталью. Соответствующие безразмерные параметры имеют следующие значения: $\gamma = 2 \cdot 10^{-4}$, $V_0 = 0.1$, $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 0.534$.

На рис. 4.4.2. и 4.4.3. представлены зависимости положения границы области контакта и ее скорости расширения в зависимости от времени.

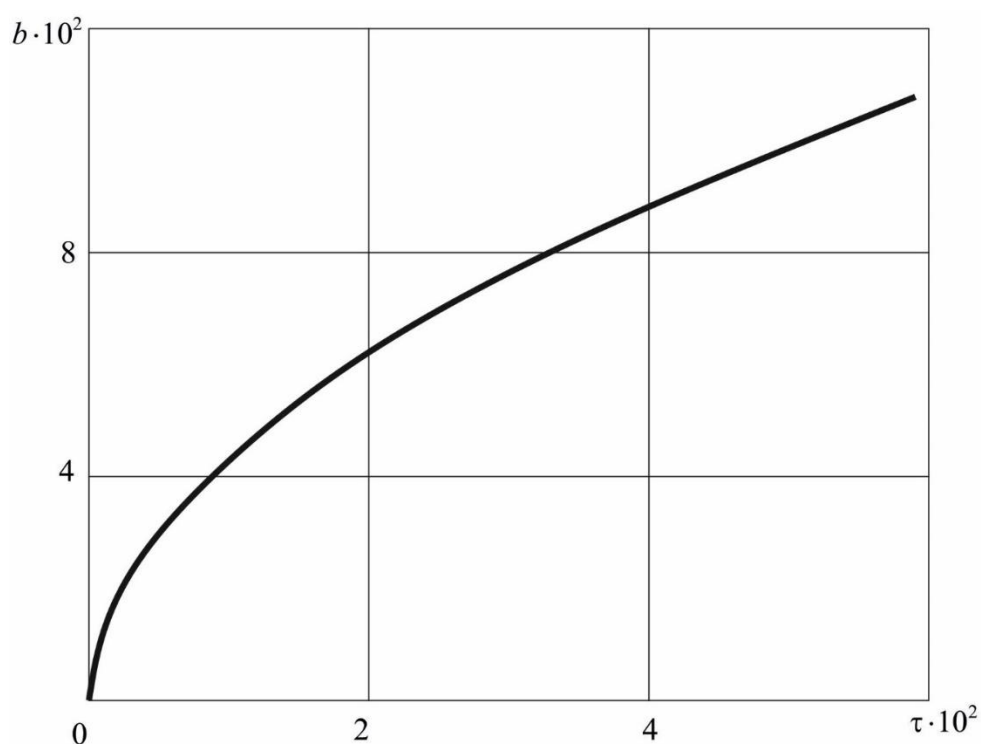


Рис. 4.4.2. Зависимость радиуса области контакта от времени.

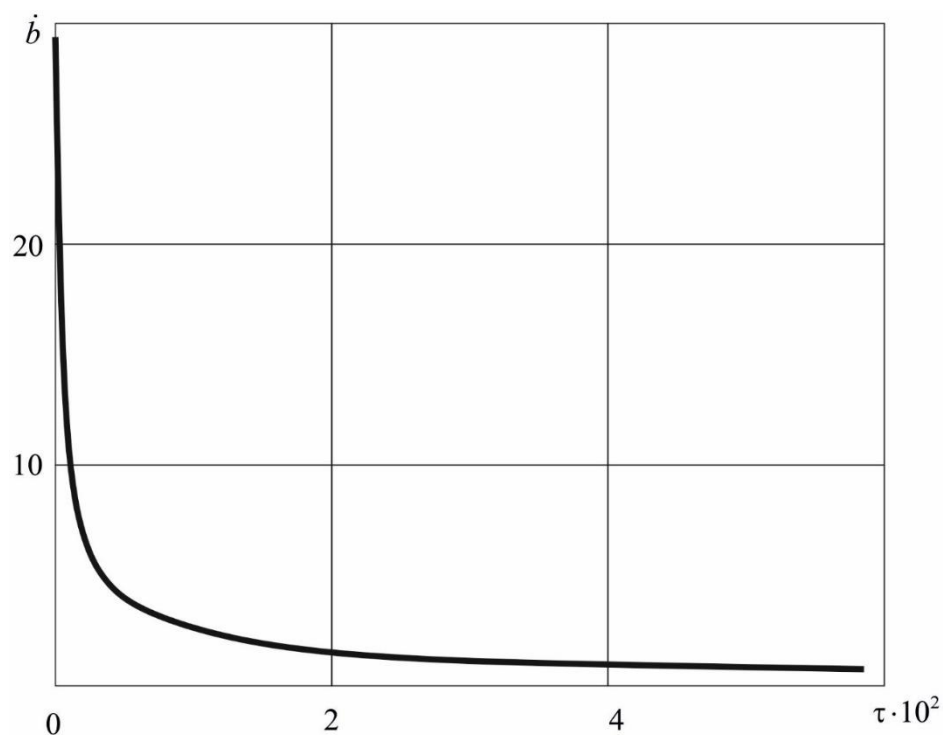


Рис. 4.4.3. Зависимость скорости расширения радиуса области контакта от времени.

Зависимости контактного давления от времени в разных точках области контакта представлены на рис. 4.4.4. Сплошная кривая соответствует лобовой точке оболочки, штриховая – точке с координатой $\beta = 0.04$, штриховая пунктирная – $\beta = 0.08$. Положения скачков на графиках соответствуют моментам времени, при которых радиус расширяющейся области контакта $b(\tau)$ достигает соответствующей точки.

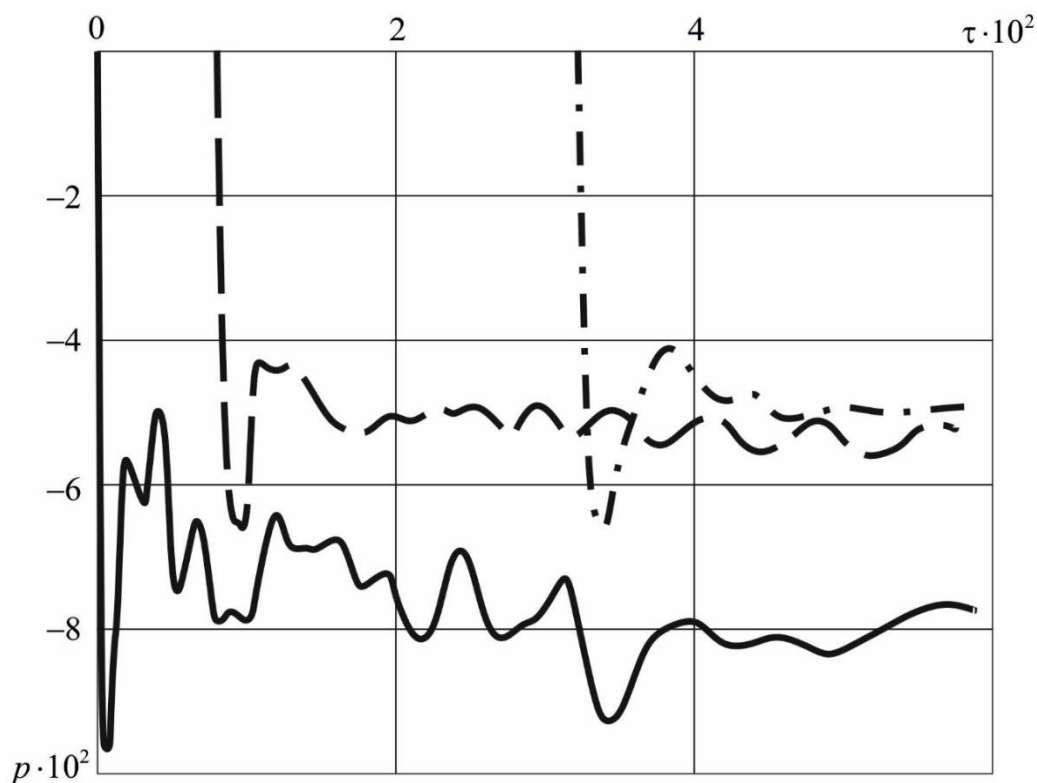


Рис. 4.4.4. Зависимости контактного давления от времени в разных точках.

На рис. 4.4.5. представлены распределения контактного давления по угловой координате β в различные моменты времени. Сплошная кривая соответствует моменту времени $\tau = 0.01$, штриховая – $\tau = 0.03$, штриховая пунктирная – $\tau = 0.06$. Скачки на графиках соответствуют положению границы области контакта в соответствующий момент времени. Как видно, на подвижной границе области взаимодействия контактное давление имеет разрыв первого рода. Этот результат согласуется с соответствующим аналитическим исследованием поведения контактного давления в нестационарных контактных задачах на сверхзвуковом этапе расширения области контакта, проведенным в работе [80].

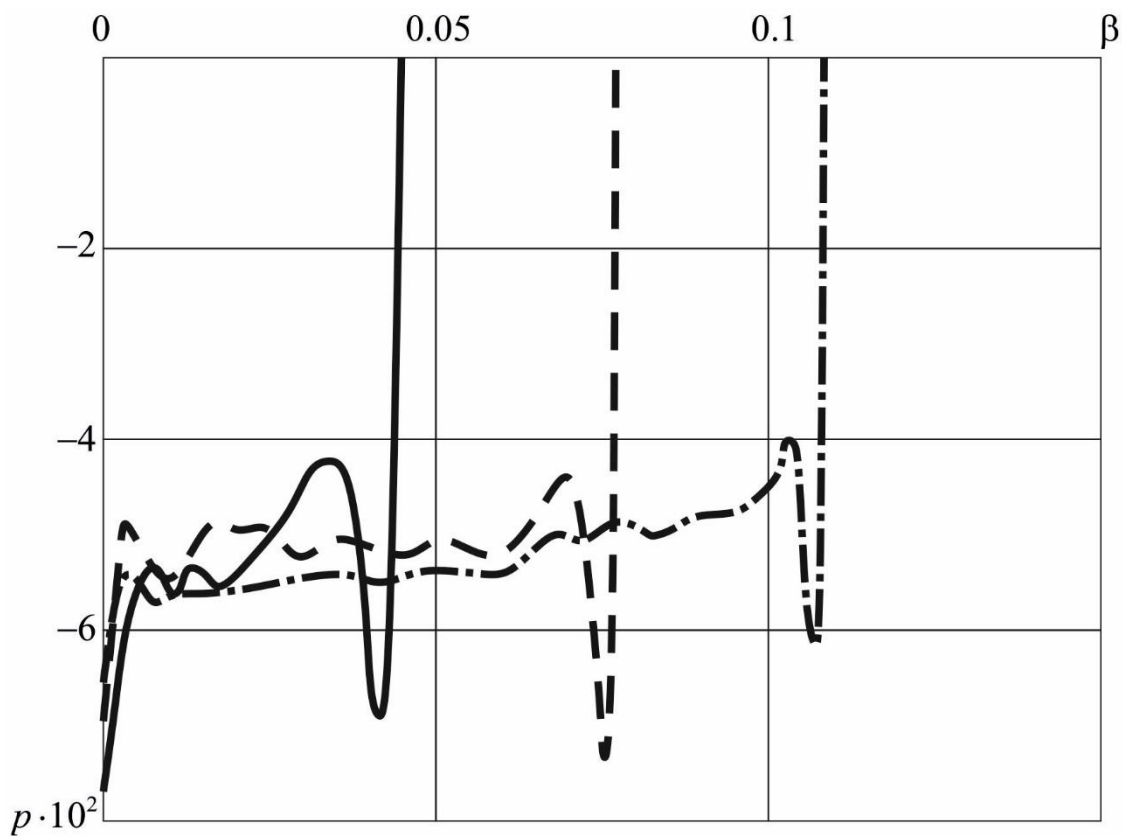


Рис. 4.4.5. Распределения контактного давления по угловой координате.

Распределения нормальных перемещений оболочки по угловой координате β в различные моменты времени представлено на рис. 4.4.6. Сплошная кривая соответствует моменту времени $\tau = 0.01$, штриховая – $\tau = 0.03$, штриховая пунктирная – $\tau = 0.06$. Точки на графике, в которых нормальные перемещения обращаются в нуль, соответствуют положению границы области контакта в соответствующий момент времени.

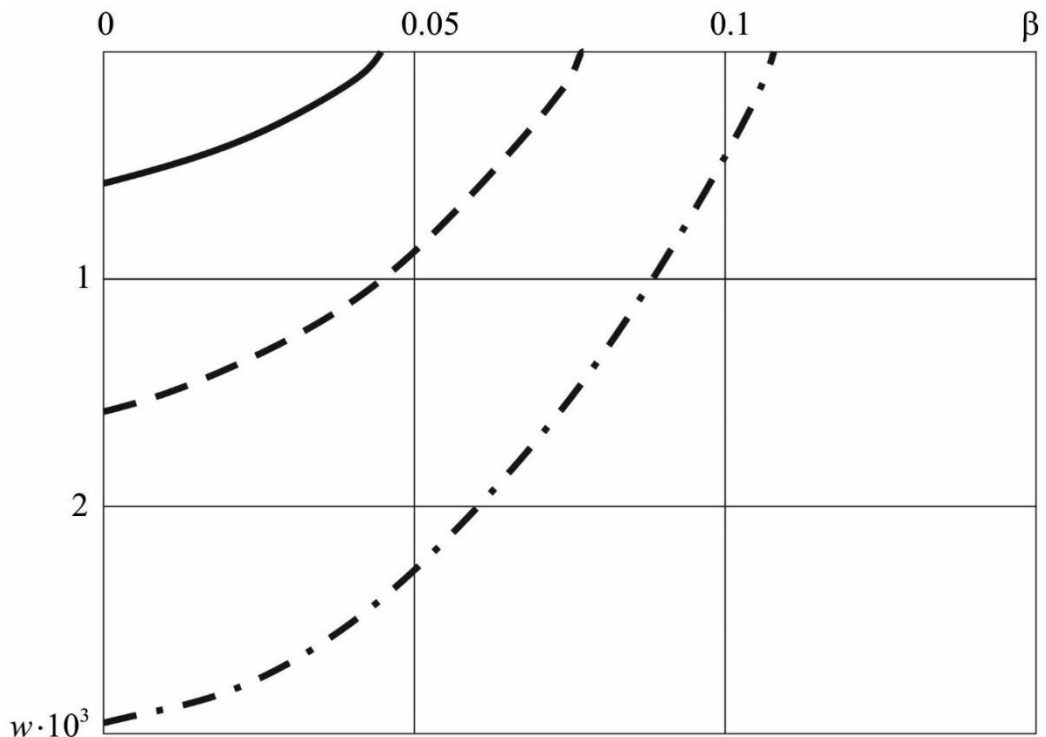


Рис. 4.4.6. Распределения нормальных перемещений оболочки по угловой координате.

Для оценки сходимости по числу удерживаемых при расчете членов рядов используется норма

$$\|w(\beta, \tau)\| = \sup_{\beta, \tau \geq 0} |w(\beta, \tau)|.$$

Дискретный аналог этой нормы имеет вид (верхний индекс указывает на число учитываемых членов ряда):

$$\|w^{(N)}\| = \|w_{ij}^{(N)}\| = \sup_{i, j \in N} |w_{ij}|, \quad N = \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (4.4.17)$$

Относительная погрешность представленных выше результатов в процентном отношении по норме (4.4.17) составляет

$$\varepsilon = \frac{\|w^{(4)} - w^{(5)}\|}{\|w^{(4)}\|} 100\% = 2.7\%.$$

В расчетах удерживалось четыре члена рядов в разложениях по полиномам Лежандра и их производным, так как учет большего числа членов приводит к относительной погрешности менее 3% .

4.5. Взаимодействие сферической оболочки и упругого полупространства (произвольный временной интервал)

Разработанный в предыдущем разделе алгоритм решения нестационарной контактной задачи для сферической оболочки и упругого полупространства не применим в случае дозвукового этапа контактного взаимодействия. Это объясняется тем, что носитель нормальных перемещений оболочки на дозвуковом этапе не совпадает с областью контакта. Следовательно, в этом случае соотношение (4.4.7) не справедливо и необходимо использовать другой подход к решению задачи. Он, также как и в п 4.2, основан на интегральных соотношениях между нормальными перемещениями и контактным давлением. При этом, как и в случае сверхзвукового этапа взаимодействия, процесс построения решения осложняется неизвестное заранее положение границы области контакта. Однако, если использовать линеаризованное соотношение (4.4.2), которое позволяет определить положение границы в нулевом приближении, становится возможным построить разрешающее задачу интегральное уравнение, которое вытекает из граничных условий. При этом используются две функции влияния: поверхностная функция влияния для полупространства (1.6.8) и функция влияния для сферической оболочки (3.5.9).

Следует отметить, что функция влияния (3.5.9) для оболочки соответствует однородным начальным условиям, поэтому, для построения разрешающих уравнений необходимо преобразовать неоднородные начальные условия (4.4.5) к однородным. Для этого представим тангенциальные и нормальные перемещения оболочки так

$$u = \tilde{u} - V_0 \tau \sin \beta, \quad w = \tilde{w} + V_0 \tau \cos \beta. \quad (4.5.1)$$

При этом новые функции \tilde{u} и \tilde{w} удовлетворяют нулевым начальным условиям. Подстановка (4.5.1) в уравнения движения оболочки (1.3.8) не изменяет последние.

Основное интегральное уравнение системы разрешающих уравнений вытекает из последнего граничного условия в группе (4.4.1), которое при учете (4.5.1) преобразуется к виду

$$u_z = (\tilde{w} + V_0 \tau \cos \beta) \cos \beta, \quad |r| \leq b(\tau). \quad (4.5.2)$$

Нормальные перемещения оболочки и полупространства связаны с контактным давлением интегральными соотношениями, базирующимися на принципе суперпозиции (см. п. 1.5.):

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= J_0(\beta, \tau), \quad u_z = J_1(\beta, \tau), \\ J_0(\beta, \tau) &= \int_0^\tau dt \int_0^{b(t)} G_w(\beta, \xi, \tau - t) p(\xi, t) d\xi, \\ J_1(\beta, \tau) &= \tilde{\gamma} \int_0^\tau dt \int_0^{b(t)} \Lambda(\beta, \xi, \tau - t) p(\xi, t) d\xi, \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

где $G_w(\beta, \xi, \tau)$ – функция влияния для сферической оболочки, построенная в п. 3.5, выражение для функции $\Lambda(\beta, \xi, \tau)$ дано в п. 1.6.

В (4.5.3) принято допущение о малых относительных размерах пятна контакта ($r \approx \beta$).

Из (4.5.2) и (4.5.3) вытекает основное разрешающее уравнение

$$J_1(\beta, \tau) - J_0(\beta, \tau) \cos \beta = V_0 \tau \cos^2 \beta. \quad (4.5.4)$$

До замкнутой системы разрешающих уравнений оно дополняется кинематическим соотношением (4.4.2), уравнением движения оболочки как абсолютно твердого тела, записанным в интегральной форме

$$\begin{aligned} w_T &= V_0 \tau + \frac{1}{m_0} J_c(\tau), \\ J_c(\tau) &= \pi \int_0^\tau \int_0^{b(t)} p(\xi, \tau) (\tau - t) \sin(2\xi) d\xi dt, \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

а также начальным условием

$$b(0) = 0. \quad (4.5.6)$$

Отметим, что ядро $\Lambda(\beta, \xi, \tau)$ обладает сингулярными особенностями порядка $-3/2$, сосредоточенными на прямых $c_R(\tau - t) = |\beta - \xi|$.

Для решения системы (4.5.4)-(4.5.6) используется численно-аналитический алгоритм, основанный на методе квадратур. С учетом гиперболического типа уравнений движения оболочки и полупространства используется явная схема интегрирования.

На пространственно-временную область $R_{t\xi}^2$ наносится сетка с постоянным шагом Δ_t по времени t и Δ_ξ по координате ξ (рис. 4.5.1):

$$t_i = i\Delta_t, \tau = t_m = m\Delta_t, \xi_j = j\Delta_\xi, \theta = \xi_n = n\Delta_\xi, \Delta_t < c_R\Delta_\xi, \\ R_{t\xi}^2 = \bigcup_i \bigcup_j K_{ij}, K_{ij} = \{(t, \xi) | t \in [t_{i-1}, t_i], \xi \in [\xi_j, \xi_{j+1}]\}, \quad (4.5.7)$$

где K_{ij} – элементарные прямоугольники.

Искомым функциям $b(t)$, $w_T(t)$, $p(t, \xi)$ ставятся в соответствие сеточные функции b_i , w_{Ti} , p_{ij}

$$b_i = b(t_i), w_{Ti} = w_T(t_i), p_{ij} = p(t_i, \xi_j). \quad (4.5.8)$$

Тогда из (4.5.3), (4.5.7) и (4.5.8) получим следующие представления для интегралов $J_0(\beta, \tau)$, $J_1(\beta, \tau)$:

$$J_0 = J_{0mn} = \iint_D G_w(\xi_n, \xi, t_m - t) p(\xi, t) dt d\xi, \\ J_1 = J_{1mn} = \tilde{\gamma} \iint_{D_{mn}} \Lambda(\xi_n, \xi, t_m - t) p(\xi, t) dt d\xi \quad (m = 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.5.9) \\ D = \{(t, \xi) | t \geq 0, \xi \in [0, b(t)]\}, D_{mn} = D \cap S(\xi_n, t_m), \\ S(\xi_n, t_m) = \{(t, \xi) | -t + \xi_n + t_m \geq \xi \geq t + \xi_n - t_m\},$$

где $S(\xi_n, t_m)$ – носитель интегрального оператора J_{1mn} , представляющий собой характеристический конус.

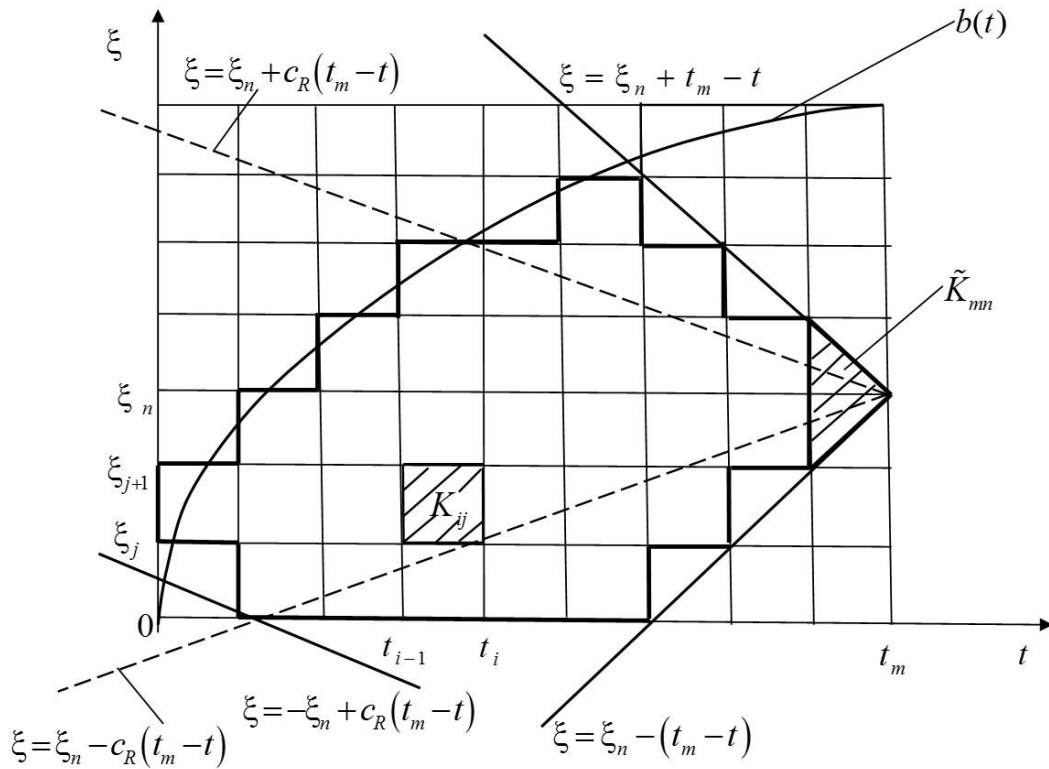


Рис. 4.5.1. Пространственно-временная область интегрирования.

Ядро $\Lambda(\beta, \xi, \tau - t)$ интегрального оператора $J_1(\beta, \tau)$ представим в виде суммы регулярной $\Lambda_{kr}(\beta, \xi, \tau - t)$ и сингулярной $\Lambda_{ks}(\beta, \xi, \tau - t)$ составляющих. Функция $\Lambda(\beta, \xi, \tau - t)$ имеет неинтегрируемую особенность при $c_R(\tau - t) = |\beta - \xi|$ и непрерывна на конусе $S(\beta, \tau)$, исключая вершину $\xi = \beta, t = \tau$, где она имеет интегрируемую особенность. Поэтому интеграл по треугольной области \tilde{K}_{mn} :

$$\tilde{K}_{mn} = \{(t, \xi) \mid t \in [t_{m-1}, t_m], -t + \xi_n + t_m \geq \xi \geq t + \xi_n - t_m\} \quad (4.5.10)$$

должен быть рассмотрен особо.

Соответственно, интеграл J_{1mn} в (4.5.9) запишем в виде суммы:

$$\begin{aligned}
J_{1mn} &= \tilde{\gamma} \left\{ J_{1m-1,n} + \varsigma_{mn} \tilde{J}_{1mn} \right\}, \quad J_{1m-1,n} = J_{1m-1,n}^{(r)} + J_{1m-1,n}^{(s)}, \\
J_{1m-1,n}^{(r)} &= \sum_{k=1}^2 \iint_{D_{mn} \setminus \tilde{K}_{mn}} \Lambda_{kr}(\xi_n, \xi, t_m - t) p(\xi, t) dt d\xi, \\
J_{1m-1,n}^{(s)} &= \sum_{k=1}^2 \iint_{\tilde{D}_{mn} \setminus \tilde{K}_{mn}} \Lambda_{ks}(\xi_n, \xi, t_m - t) p(\xi, t) dt d\xi, \\
\tilde{J}_{1mn} &= \iint_{\tilde{K}_{mn}} \Lambda(\xi_n, \xi, t_m - t) p(\xi, t) dt d\xi,
\end{aligned} \tag{4.5.11}$$

$$\varsigma_{mn} = 1 \quad (m < k_m), \quad \varsigma_{mn} = 0 \quad (m > k_m), \quad k_m = \text{rd} \left[b_m / \Delta_\xi \right],$$

$$\tilde{D}_{mn} = D_{mn} \cap \tilde{S}(\xi_n, t_m), \quad \tilde{S}(\xi_n, t_m) = \left\{ (t, \xi) \mid \xi \geq c_R(m\Delta_t - t) - n\Delta_\xi \right\}.$$

Здесь $[\cdot]$ обозначает целую часть числа x .

Используя аппроксимации (4.5.7), (4.5.8) представим интеграл \tilde{J}_{1mn} в виде:

$$\tilde{J}_{1mn} = p_{mn} d_{mn}, \quad d_{mn} = \iint_{\tilde{K}_{mn}} \Lambda(\xi_n, \xi, t_m - t) dt d\xi. \tag{4.5.12}$$

Для вычисления d_{mn} сделаем замену переменных $z = t - (m-1)\Delta_t$. Тогда с учетом носителя ядра получим:

$$\begin{aligned}
d_{mn} &= \iint_{\tilde{K}_{mn}} \Lambda(n\Delta_\xi, \xi, m\Delta_t - t) d\xi dt = \\
&= \int_0^{\Delta_t} dz \int_{n\Delta_\xi - (\Delta_t - z)}^{n\Delta_\xi + (\Delta_t - z)} \xi \bar{\Lambda}(n\Delta_\xi, \xi, \Delta_t - z) d\xi = \\
&= \int_0^{\Delta_t} dz \int_0^\infty \xi \bar{\Lambda}(n\Delta_\xi, \xi, \Delta_t - z) J_0(0) d\xi = \int_0^{\Delta_t} \bar{\Lambda}^{H_0}(n\Delta_\xi, q, \Delta_t - z) \Big|_{q=0} dz.
\end{aligned} \tag{4.5.13}$$

Здесь $\bar{\Lambda}(n\Delta_\xi, \xi, \Delta_t - z) = \int_0^{2\pi} G_a \left(\sqrt{n^2 \Delta_\xi^2 + \xi^2 - 2n\Delta_\xi \xi \cos \alpha}, \Delta_t - z \right) d\alpha$, $J_0(x)$ — функция Бесселя, значок H_0 указывает на преобразование Ханкеля по переменной ξ , q — параметр этого преобразования.

Применяя к (4.5.13) преобразование Лапласа по Δ_t , получаем:

$$d_{mn}^L = \frac{1}{s} \bar{\Lambda}^{H_0 L}(n\Delta_\xi, q, s) \Big|_{q=0}. \tag{4.5.14}$$

Используя связь преобразования Фурье по двум переменным с преобразованием Ханкеля [76], имеем:

$$\bar{\Lambda}^{H_0L}(n\Delta_\xi, q, s)\Big|_{q=0} = G^{FL}(q_1, q_2, s)\Big|_{q_1=q_2=0} = -\frac{1}{s}. \quad (4.5.15)$$

Здесь значком F обозначено преобразование Фурье по двум переменным, q_1 , q_2 – параметры преобразования Фурье, $G(x_1, x_2, \tau) = G_a(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \tau)$ – функция влияния пространственной задачи (см. (1.6.8)), выражение для изображения $G^{FL}(q_1, q_2, \tau)$ которой получено в работе [80].

Подставляя (4.5.15) в (4.5.14) и выполняя обратное преобразование Лапласа, находим значение искомого интеграла:

$$\tilde{J}_{1mn} = p_{mn} d_{mn} = -p_{mn} \Delta_t. \quad (4.5.16)$$

Для построения квадратурных формул для J_{0mn} , $J_{1m-1,n}^{(r)}$, $J_{1m-1,n}^{(s)}$ заменим область D многоугольником B_m :

$$B_m = \bigcup_{i=1}^m H_{i,0}^{k_i}, \quad k_i = \lceil b_i / \Delta_\xi \rceil, \quad (4.5.17)$$

Области D_{mn} и \tilde{D}_{mn} приближенно представим в виде многоугольников B_{mn} и \tilde{B}_{mn} соответственно:

$$D_{mn} \approx B_{mn} = \bigcup_{i=1}^{m-1} H_{i,q_{1i}}^{p_i} \cup \tilde{K}_{mn}, \quad p_i = \min(k_i, l_{i1}), \quad q_{1i} = \max(l_{i2}, 0),$$

$$\tilde{D}_{mn} \approx \tilde{B}_{mn} = \bigcup_{i=1}^{m-1} H_{i,q_{2i}}^{p_i} \cup \tilde{K}_{mn}, \quad p_i = \min(k_i, l_{i1}), \quad q_{2i} = \max(l_{i2}, l_{i3}, 0),$$

$$l_{i1} = -i + n + m, \quad l_{i2} = i + n - m, \quad l_{i3} = \lceil c_R(m-i) - n \rceil + 1, \quad H_{i,k}^l = \bigcup_{j=k}^{l-1} K_{ij}.$$

Здесь $H_{i,k}^l$ – полоса, ограниченная вертикальными $t = t_{i-1}$, $t = t_i$ и горизонтальными $\xi = l\Delta_\xi$, $\xi = k\Delta_\xi$ прямыми.

Интегралы J_{0mn} , $J_{1m-1,n}^{(r)}$, $J_{1m-1,n}^{(s)}$ в приближенно представим в следующем виде:

$$\begin{aligned}
J_{0mn} &\approx \tilde{I}_{0mn} = \iint_{B_m} G_w(\xi_n, \xi, t_m - t) p(\xi, t) dt d\xi = I_{0m-1,n} + I_{0mn}, \\
J_{1m-1,n} &\approx I_{1m-1,n} = I_{1m-1,n}^{(r)} + I_{1m-1,n}^{(s)}, \\
J_{1m-1,n}^{(r)} &\approx I_{1m-1,n}^{(r)} = \sum_{k=1}^2 \iint_{B_{mn} \setminus \tilde{K}_{mn}} \Lambda_{kr}(\xi_n, \xi, t_m - t) p(\xi, t) dt d\xi, \\
J_{1m-1,n}^{(s)} &\approx I_{1m-1,n}^{(s)} = \sum_{k=1}^2 \iint_{\tilde{B}_{mn} \setminus \tilde{K}_{mn}} \Lambda_{ks}(\xi_n, \xi, t_m - t) p(\xi, t) dt d\xi,
\end{aligned}$$

Значение интегралов $I_{0m-1,n}$ и I_{0mn} определяются так

$$\begin{aligned}
I_{0m-1,n} &\approx \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{k_i-1} p_{ij} a_{ij}, \quad I_{0mn} \approx p_{mn} a_{mn}, \quad a_{ij} = \iint_{K_{ij}} G_w(\xi_n, \xi, t_m - t) dt d\xi, \\
a_{mn} &= \int_{(m-1)\Delta_t}^{m\Delta_t} \int_{n\Delta_\xi}^{(n+1)\Delta_\xi} G_w(\xi_n, \xi, t_m - t) dt d\xi + \\
&+ \tilde{\varepsilon} \int_{(m-1)\Delta_t}^{m\Delta_t} \int_{(n-1)\Delta_\xi}^{n\Delta_\xi} G_w(\xi_n, \xi, t_m - t) dt d\xi, \\
\tilde{\varepsilon} &= 1 \quad (n \neq 0), \quad \tilde{\varepsilon} = 0 \quad (n = 0),
\end{aligned} \tag{4.5.18}$$

где коэффициенты a_{ij} и a_{mn} вычисляются точно с использованием первообразной для функции $G_w(\beta, \xi, \tau)$ по формуле Ньютона-Лейбница.

Теперь рассмотрим интеграл $I_{1m-1,n}$. Он представляет собой сумму регулярных $I_{1m-1,n}^{(r)}$ и сингулярных $I_{1m-1,n}^{(s)}$ интегралов. Первые вычисляются с помощью квадратурных формул Гаусса по четырем точкам ($n_* = 4$) [38].

$$\begin{aligned}
I_{1m-1,n}^{(r)} &= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=q_{i1}}^{p_i-1} p_{ij} \tilde{a}_{ij}, \quad \tilde{a}_{ij} = \sum_{k=1}^2 \int_{(i-1)\Delta_t}^{i\Delta_t} \int_{j\Delta_\xi}^{(j+1)\Delta_\xi} \Lambda_{kr}(\xi_n, \xi, t_m - t) dt d\xi, \\
\tilde{a}_{ij} &\approx \frac{\Delta_t}{2} \frac{\Delta_\xi}{2} \sum_{l_1=1}^{n_*} \sum_{l_2=1}^{n_*} \omega_{l_1} \omega_{l_2} \Lambda_{kr}(\xi_n, \xi_{l_2}, t_m - t_{l_1}), \\
t_{l_1} &= \frac{\Delta_t}{2} \zeta_{l_1} + \frac{(2i-1)\Delta_t}{2}, \quad \xi_{l_2} = \frac{\Delta_\xi}{2} \zeta_{l_2} + \frac{(2j+1)\Delta_\xi}{2},
\end{aligned} \tag{4.5.19}$$

здесь n_* значений аргумента ζ_{lk} , $k=1,2$ являются корнями многочлена Лежандра $P_{n_*}(\zeta)$, а веса $\omega_{lk} = \frac{2}{(1-\zeta_{lk}^2)[P'_{n_*}(\zeta_{lk})]^2}$, где P'_{n_*} - первая производная

полинома Лежандра.

Подынтегральная функция Λ_{kr} содержит полные и неполные эллиптические интегралы первого $K(\tilde{m})$ и второго $E(\tilde{m})$ рода [80, 147].

Значения полных эллиптических интегралов вычисляются с применением аппроксимации многочленами [194]:

$$K(\tilde{m}) = [a_0 + a_1\tilde{m}_1 + \dots + a_4\tilde{m}_1^4] + [b_0 + b_1\tilde{m}_1 + \dots + b_4\tilde{m}_1^4] \ln(1/\tilde{m}_1) + \varepsilon(\tilde{m}),$$

$$|\varepsilon(\tilde{m})| \leq 2 \cdot 10^{-8},$$

$$a_0 = 1.38629436112, a_1 = 0.09666344259, a_2 = 0.03590092383,$$

$$a_3 = 0.03742563713, a_4 = 0.01451196212,$$

$$b_0 = 0.5, b_1 = 0.12498593597, b_2 = 0.06880248576,$$

$$b_3 = 0.03328355346, b_4 = 0.00441787012;$$

$$E(\tilde{m}) = [1 + a_1\tilde{m}_1 + \dots + a_4\tilde{m}_1^4] + [b_1\tilde{m}_1 + \dots + b_4\tilde{m}_1^4] \ln(1/\tilde{m}_1) + \varepsilon(\tilde{m}),$$

$$|\varepsilon(\tilde{m})| \leq 2 \cdot 10^{-8},$$

$$a_1 = 0.44325141463, a_2 = 0.06260601220,$$

$$a_3 = 0.04757383546, a_4 = 0.01736506451,$$

$$b_1 = 0.24998368310, b_2 = 0.09200180037,$$

$$b_3 = 0.04069697526, b_4 = 0.00526449639,$$

где $\tilde{m}_1 = 1 - \tilde{m}$.

Неполные эллиптические интегралы первого $F(\tilde{\delta}, \tilde{m})$ и второго рода $E(\tilde{\delta}, \tilde{m})$ вычисляются с помощью метода Симпсона [38] ($\tilde{\delta}_{эл.}, \tilde{n}$ - шаг в эллиптическом интеграле и число разбиений соответственно):

$$I \approx \frac{\delta_{\text{эл.}}}{3} \left(y_0 + y_n + 4 \sum_{i=1}^n y_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_{2i} \right), \quad I = \begin{cases} F(\tilde{\delta}, \tilde{m}), & y(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{m} \sin^2 \alpha}} \\ E(\tilde{\delta}, \tilde{m}), & y(\alpha) = \sqrt{1 - \tilde{m} \sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\delta_{\text{эл.}} = \frac{\tilde{\delta}}{2\tilde{n}}, \quad y_0 = y(0), \quad y_n = y(\delta), \quad y_{2i-1} = y[(2i-1)\delta_{\text{эл.}}],$$

$$y_{2i} = y(2i\delta_{\text{эл.}}).$$

Построим аппроксимацию интегрального оператора $I_{1m-1,n}^{(s)}$ на области $\tilde{B}_{mn} \setminus \tilde{K}_{mn}$.

$$I_{1m-1,n}^{(s)} = \sum_{k=1}^2 \frac{a_k}{\eta^4} \begin{cases} \frac{\sqrt{1 - \eta_k^2 c_R^2}}{\pi} (I_{11m-1,n}^{(s)} + I_{12m-1,n}^{(s)}), & \xi_n \neq \xi, \quad \xi_n \xi \neq 0, \\ \sqrt{1 - \eta_k^2 c_R^2} I_{13m-1,n}^{(s)}, & \xi_n \xi = 0, \end{cases}$$

$$I_{11m-1,n}^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{\xi_n}} \iint_{\tilde{B}_{mn} \setminus \tilde{K}_{mn}} \frac{p(\xi, t)(t - t_m) \sqrt{\xi}}{c_R^2 (t_m - t)^2 - (\xi_n - \xi)^2} dt d\xi,$$

$$I_{12m-1,n}^{(s)} = \frac{1}{16\xi_n^{3/2}} \iint_{\tilde{B}_{mn} \setminus \tilde{K}_{mn}} \frac{p(\xi, t)(t - t_m)}{\sqrt{\xi}} \ln |c_R^2 (t_m - t)^2 - (\xi_n - \xi)^2| dt d\xi,$$

$$I_{13m-1,n}^{(s)} = \iint_{\tilde{B}_{mn} \setminus \tilde{K}_{mn}} (t_m - t) \xi (\xi_n^2 + \xi^2 - c_R^2 (t_m - t)^2)^{-3/2} dt d\xi$$
(4.5.20)

Интегралы $I_{11m-1,n}^{(s)}$, $I_{12m-1,n}^{(s)}$ вычисляются с помощью метода весовых коэффициентов с применением канонической регуляризации [69]:

$$I_{11m-1,n}^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{\xi_n}} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=q_{2i}}^{p_i-1} p_{ij} \sqrt{j\Delta_\xi} a_{1ij},$$

$$a_{1ij} = \int_{(i-1)\Delta_t}^{i\Delta_t} (t - t_m) dt \int_{j\Delta_\xi}^{(j+1)\Delta_\xi} \frac{d\xi}{c_R^2 (t_m - t)^2 - (\xi_n - \xi)^2},$$

$$I_{12m-1,n}^{(s)} = \frac{1}{16\xi_n^{3/2}} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=q_{2i}}^{p_i-1} \frac{p_{ij}}{\sqrt{j\delta_\xi}} a_{2ij},$$

$$a_{2ij} = \int_{(i-1)\Delta_t}^{i\Delta_t} (t - t_m) dt \int_{j\Delta_\xi}^{(j+1)\Delta_\xi} \ln |c_R^2 (t_m - t)^2 - (\xi_n - \xi)^2| d\xi$$
(4.5.21)

Как видно, особенность порядка (-1) в a_{1ij}, a_{2ij} сосредоточена на прямых $|\xi_n - \xi| = c_R(t_m - t)$. Сингулярные коэффициенты a_{1ij}, a_{2ij} в (4.5.21) определяются аналитически элементарными методами интегрирования:

$$a_{1ij} = \frac{1}{2c_R^2} \sum_{l=0}^1 (-1)^l \sum_{q=0}^1 \sum_{v=0}^{v+1} (-1)^v \mathfrak{v}_{ij(1)}^{lqv} \ln |\mathfrak{v}_{ij(1)}^{lqv}|, \quad (4.5.22)$$

$$\mathfrak{v}_{ij(1)}^{lqv} = c_R \Delta_t (m - i + v) + (-1)^{q+l} \Delta_\xi ((j + q) - n), \quad a_{2ij} = I_{ij}^{(1)} + I_{ij}^{(2)} + 2\Delta_\xi \Delta_t^2 \left(m - i + \frac{1}{2} \right),$$

$$I_{ij}^{(1)} = c_R \sum_{l=0}^1 \sum_{q=0}^1 (-1)^{l+1} \left\{ -\Delta_t d_{j(1)}^{lq} + \sum_{v=0}^1 (-1)^v \left[((i - v) \Delta_t^3 ((i - v)^2 / 3 + m(m - i + v)) + d_{j(2)}^{lq}) \ln |\mathfrak{v}_{ij(2)}^{lqv}| - (i - v) \Delta_t \left(\frac{(i - v)^2 \Delta_t^2}{9} + \frac{(i - v) \Delta_t}{6} d_{j(3)}^{lq} \right) \right] \right\},$$

$$d_{j(1)}^{lq} = \frac{1}{3} \frac{(a_j^{lq})^2}{c_R^2} + \frac{m \Delta_t}{3} \left(-\frac{a_j^{lq}}{c_R} + m \Delta_t \right), \quad d_{j(2)}^{lq} = -\frac{1}{3} \frac{1}{c_R^3} \left[(c_R m \Delta_t)^3 + (a_j^{lq})^3 \right],$$

$$d_{j(3)}^{lq} = \frac{a_j^{lq} - 2c_R m \Delta_t}{c_R}, \quad a_j^{lq} = (n - j - q) (-1)^{q+l} \Delta_\xi, \quad \mathfrak{v}_{ij(2)}^{lqv} = c_R \Delta_t (m - i + v) + a_j^{lq},$$

$$I_{ij}^{(2)} = \sum_{l=0}^1 (-1)^l (n - j - l) \Delta_\xi \sum_{q=0}^1 \sum_{v=0}^1 (-1)^v \left((i - v) \Delta_t^2 \left(\frac{i - v}{2} - m \right) + d_{j(4)}^{lq} \right) \times \\ \times \ln |\mathfrak{v}_{ij(3)}^{lqv}| + \frac{\Delta_t}{2} \left[\Delta_t \left(\frac{1}{2} - i \right) + d_{j(5)}^{lq} \right],$$

$$d_{j(4)}^{lq} = -\frac{(\tilde{a}_j^{lq})^2 - c_R^2 (m \Delta_t)^2}{2c_R^2}, \quad d_{j(5)}^{lq} = -\frac{\tilde{a}_j^{lq} - c_R m \Delta_t}{c_R},$$

$$\tilde{a}_j^{lq} = (n - j - l) (-1)^q \Delta_\xi, \quad \mathfrak{v}_{ij(3)}^{lqv} = c_R \Delta_t (m - i + v) + \tilde{a}_j^{lq}.$$

В формуле (4.5.22) в силу свойств функции $f(x) = x \ln|x|$ при $\mathfrak{v}_{ij(1)}^{lqv} = \mathfrak{v}_{ij(2)}^{lqv} = \mathfrak{v}_{ij(3)}^{lqv} = 0$ соответствующее слагаемое в пределе при $\mathfrak{v}_{ij(k)}^{lqv} \rightarrow 0, k = 1, 2, 3$ равно нулю.

Если в ядре оператора $I_{13m-1,n}^{(s)}$ аргумент $\xi = 0$, то $I_{13m-1,n}^{(s)} = 0$ (см. (4.5.20)), поэтому рассмотрим $I_{13m-1,n}^{(s)}$ при $\xi_n = 0, \xi \neq 0$:

$$\begin{aligned}
I_{13m-1,n}^{(s)} &= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=q_{2i}}^{p_i-1} p_{ij} \int_{(i-1)\Delta_t}^{i\Delta_t} (t_m - t) dt \int_{j\Delta_\xi}^{(j+1)\Delta_\xi} \xi \left(\xi^2 - c_R^2 (t_m - t)^2 \right)^{-3/2} d\xi = \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=q_{2i}}^{p_i-1} p_{ij} \int_{(i-1)\Delta_t}^{i\Delta_t} \int_{j\Delta_\xi}^{(j+1)\Delta_\xi} F_r(\xi, t_m - t) d\xi dt + \int_{(i-1)\Delta_t}^{i\Delta_t} \int_{j\Delta_\xi}^{(j+1)\Delta_\xi} F_s(\xi, t_m - t) d\xi dt, \\
F_r(\xi, t_m - t) &= (t_m - t) \xi \left(\xi^2 - c_R^2 (t_m - t)^2 \right)^{-3/2} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{c_R}} \sqrt{t_m - t} \left(\xi - c_R (t_m - t) \right)^{-3/2}, \\
F_s(\xi, t_m - t) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{c_R}} \sqrt{t_m - t} \left(\xi - c_R (t_m - t) \right)^{-3/2}.
\end{aligned}$$

Регулярная составляющая $F_r(\xi, t_m - t)$ является ограниченной функцией в $\tilde{B}_{mm} \setminus \tilde{K}_{mm}$, двойной интеграл от которой вычисляется с помощью формулы Гаусса (см. (4.5.19)). особенность порядка $(-3/2)$ в сингулярной части $F_s(\xi, t_m - t)$ сосредоточена на прямой $\xi = c_R(t_m - t)$, интеграл от $F_s(\xi, t_m - t)$ вычисляется так:

$$\begin{aligned}
\int_{(i-1)\Delta_t}^{i\Delta_t} \int_{j\Delta_\xi}^{(j+1)\Delta_\xi} F_s(\xi, t_m - t) d\xi dt &= \frac{\sqrt{2}}{2c_R^{3/2}} \sum_{l=0}^1 \sum_{k=0}^1 (-1)^{l+k} \tilde{v}_{lk}, \\
\tilde{v}_{lk} &= \sqrt{(m-i+k)\Delta_t \left[(j+l)\Delta_\xi - c_R(m-i+k)\Delta_t \right]} - \\
&\quad - \arcsin \left(\sqrt{\frac{c_R(m-i+k)\Delta_t}{(j+l)\Delta_\xi}} \right) \frac{(j+l)\Delta_\xi}{\sqrt{c_R}}.
\end{aligned}$$

Дискретный аналог разрешающей системы состоит из следующих уравнений:

$$\begin{aligned}
w_{Tm} &= \frac{\pi}{m_0} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{k_i-1} p_{ij} b_{ij} + V_0 m \Delta_t, \\
b_{ij} &= \iint_{K_{ij}} (t_m - t) \sin(2\xi) d\xi dt = \int_{(i-1)\Delta_t}^{i\Delta_t} \int_{j\Delta_\xi}^{(j+1)\Delta_\xi} (t_m - t) \sin(2\xi) d\xi dt = \quad (4.5.23)
\end{aligned}$$

$$= \frac{2(m-i)+1}{2} \Delta_t^2 \sin \left[(2j+1)\Delta_\xi \right] \sin \Delta_\xi,$$

$$b_m = \sqrt{w_{Tm}(2 - w_{Tm})}, \quad (4.5.24)$$

$$p_{mn} = \frac{\tilde{\gamma} I_{1m-1,n} - I_{0m-1,n} \cos(n\Delta_\xi) - V_0 m \Delta_t \cos^2(n\Delta_\xi)}{\tilde{\gamma} \Delta_t + a_{mn} \cos(n\Delta_\xi)}. \quad (4.5.25)$$

Начальные условия для данной системы имеют вид:

$$w_{T_0} = 0, \quad b_0 = 0.$$

На каждом временном шаге с номером m по формуле (4.5.23) определяется значение глубины проникания оболочки в полупространство w_{T_m} . Подставляя w_{T_m} в (4.5.24), находим радиус области контакта b_m . После этого из (4.5.25) определяются сеточные значения контактного давления p_{mn} .

В (4.5.25) интеграл $I_{1m-1,n}$ вычисляется с помощью квадратурных формул (4.5.20), $I_{0m-1,n}$ и a_{mn} находятся по формулам (4.5.18).

Нормальные перемещения оболочки и полупространства вычисляются так

$$w_{nm} = \tilde{w}_{nm} + V_0 n \Delta_t \cos m \Delta_\xi, \quad \tilde{w}_{nm} = p_{mn} a_{mn} + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{k_i-1} p_{ij} a_{ij},$$

$$u_{znm} = -p_{mn} \Delta_t + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=q_{i1}}^{p_i-1} p_{ij} \tilde{a}_{ij} +$$

$$+ \sum_{k=1}^2 \frac{a_k}{\eta^4} \begin{cases} \frac{\sqrt{1-\eta_k^2 c_R^2}}{\pi} (I_{11m-1,n}^{(s)} + I_{12m-1,n}^{(s)}), & \xi_n \neq \xi, \quad \xi_n \xi \neq 0; \\ \sqrt{1-\eta_k^2 c_R^2} I_{13m-1,n}^{(s)}, & \xi_n \xi = 0. \end{cases} \quad (4.5.26)$$

Предложенный алгоритм расчета реализован в среде Си++ [284].

В качестве примера рассмотрим вертикальный удар стальной сферической оболочки по полупространству, заполненному сталью. Для проведения сравнения результатов, полученных с помощью двух предложенных методов, параметры задачи выберем соответствующими примеру предыдущего раздела.

На рис. 4.5.2 – 4.5.10 показано сравнение результатов, полученных при расчетах на сверхзвуковом и произвольном режимах контактного взаимодействия. Сплошные кривые соответствуют результатам, полученным для произвольного этапа взаимодействия (п. 4.4), а штриховые – для

сверхзвукового этапа (п 4.5). На рис. 4.5.2, 4.5.3 представлены зависимости нормальных перемещений от времени в лобовой точке (рис. 4.5.2) и точки с координатой $r = \beta = 0.05$ (рис. 4.5.3). При этом обрыв штриховых линий на графиках соответствует моменту времени окончания сверхзвукового этапа взаимодействия. На рис. 4.5.4 изображены распределения нормальных перемещений при $\tau = 0.05$. Видно, что отличие в результатах незначительное.

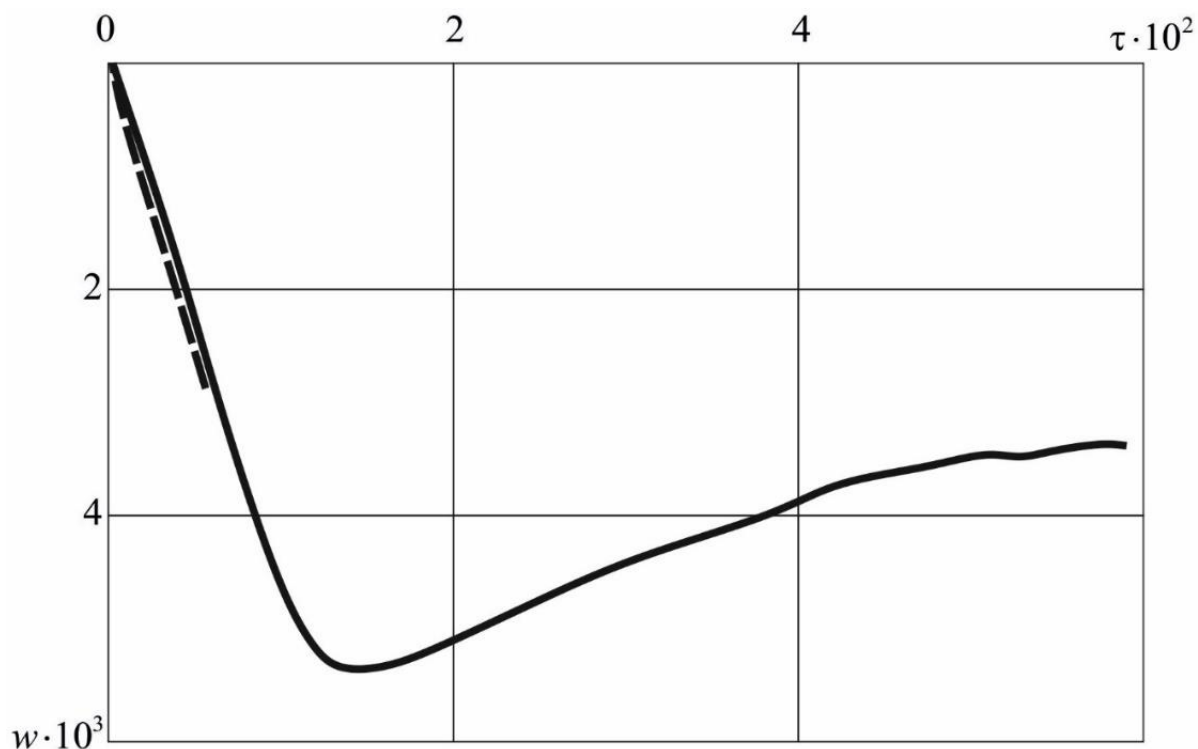


Рис. 4.5.2. Зависимости нормальных перемещений от времени в лобовой точке.

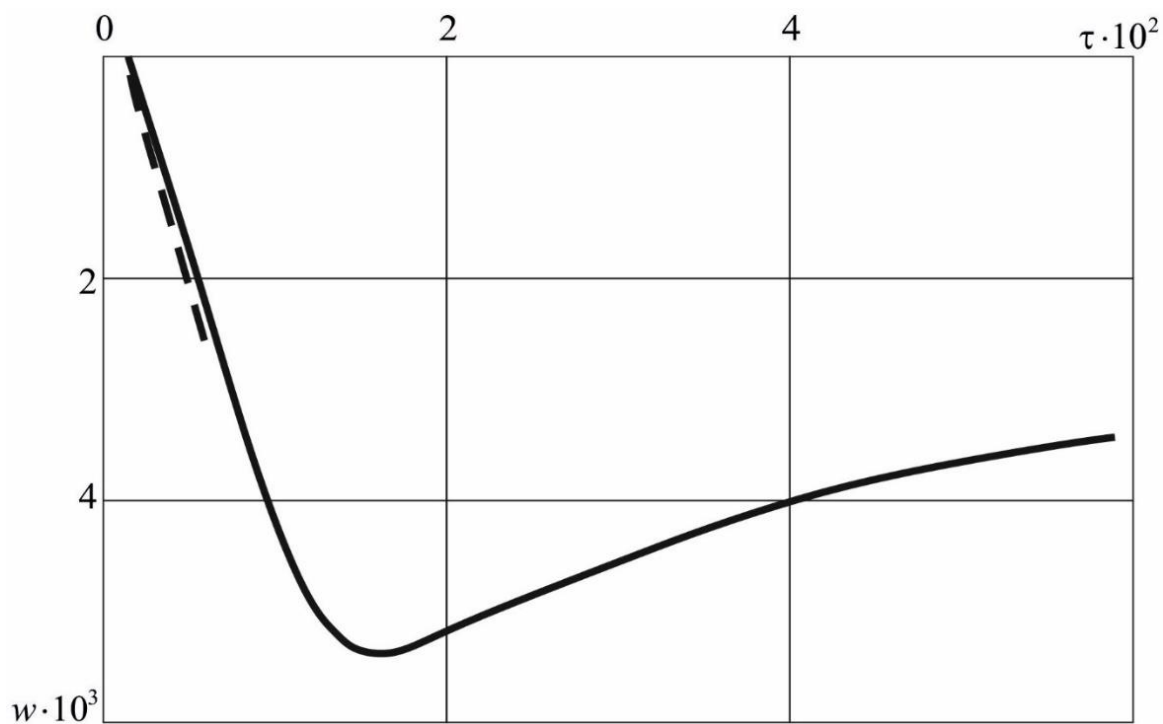


Рис. 4.5.3. Зависимости нормальных перемещений от времени в точке с координатой $r = \beta = 0.05$.

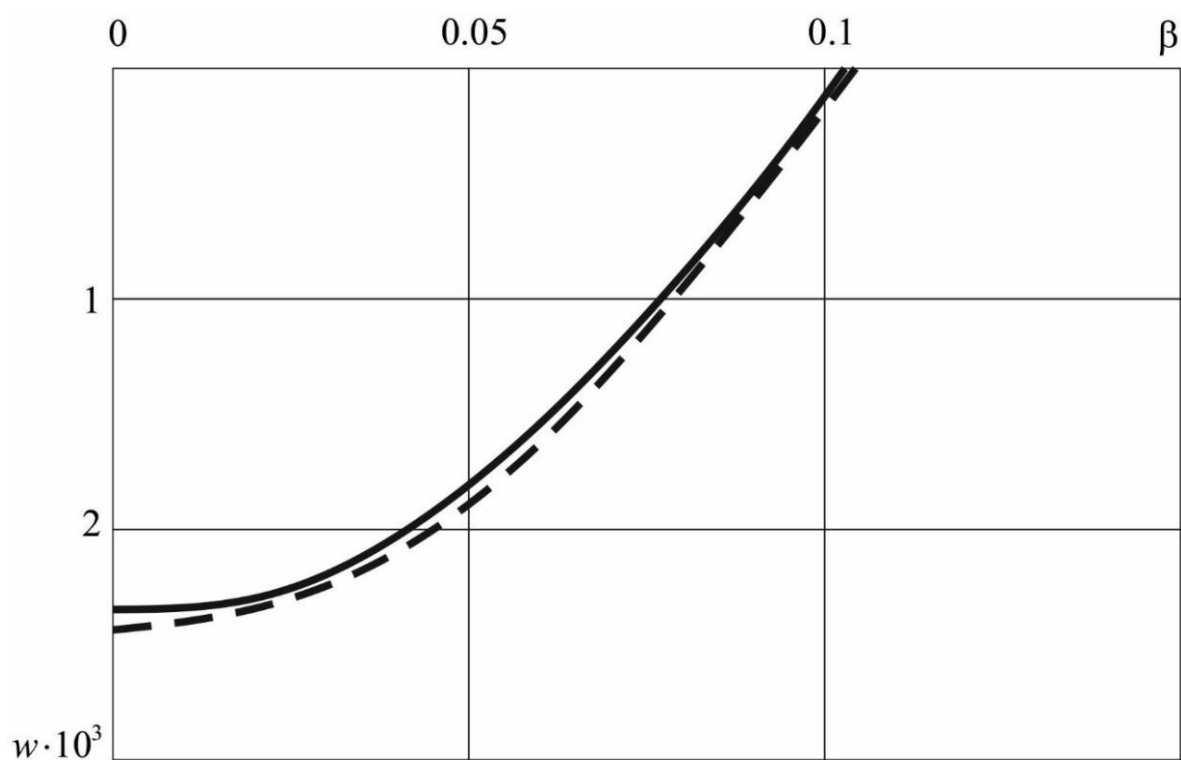


Рис. 4.5.4. Распределения нормальных перемещений.

Отметим, что методы настоящего и предыдущего разделов можно рассматривать как дополнения друг друга. Алгоритм решения задачи на произвольном этапе взаимодействия по методу настоящего раздела требует значительно больших затрат вычислительных ресурсов и машинного времени по сравнению с алгоритмом для сверхзвукового этапа взаимодействия. Поэтому, если требуется быстро оценить интенсивность развития процесса нестационарного контакта, то можно рекомендовать использование алгоритма предыдущего раздела. Если затем появится необходимость детального исследования дальнейшего развития процесса, то можно перейти к расчету по алгоритму для произвольного этапа взаимодействия.

На рис. 4.5.5-4.5.10 показано сравнение результатов, полученных для трех различных значений начальной скорости $V_0 = 0.1$ (сплошные кривые), $V_0 = 0.05$ (штриховые кривые), $V_0 = 0.025$ (штриховые пунктирные кривые). Из представленных графиков видно значительное влияние (причем, нелинейное) начальной скорости на количественные значения полученных результатов. При этом качественные отличия небольшие.

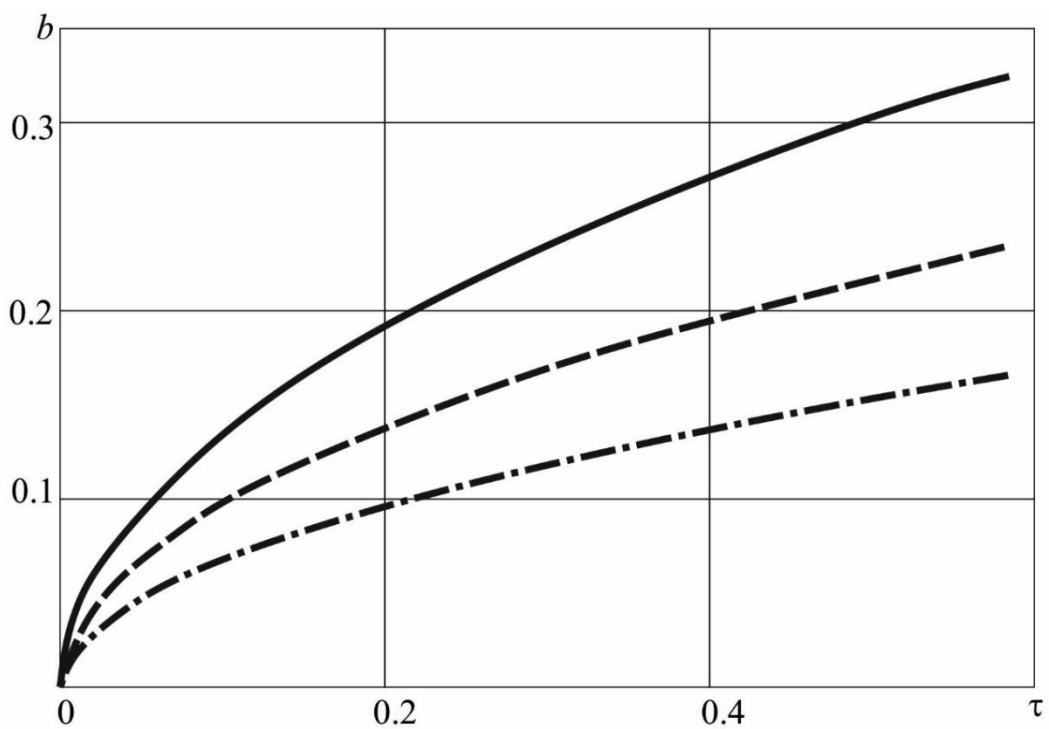


Рис. 4.5.5. Зависимость положения границы области контакта от времени.

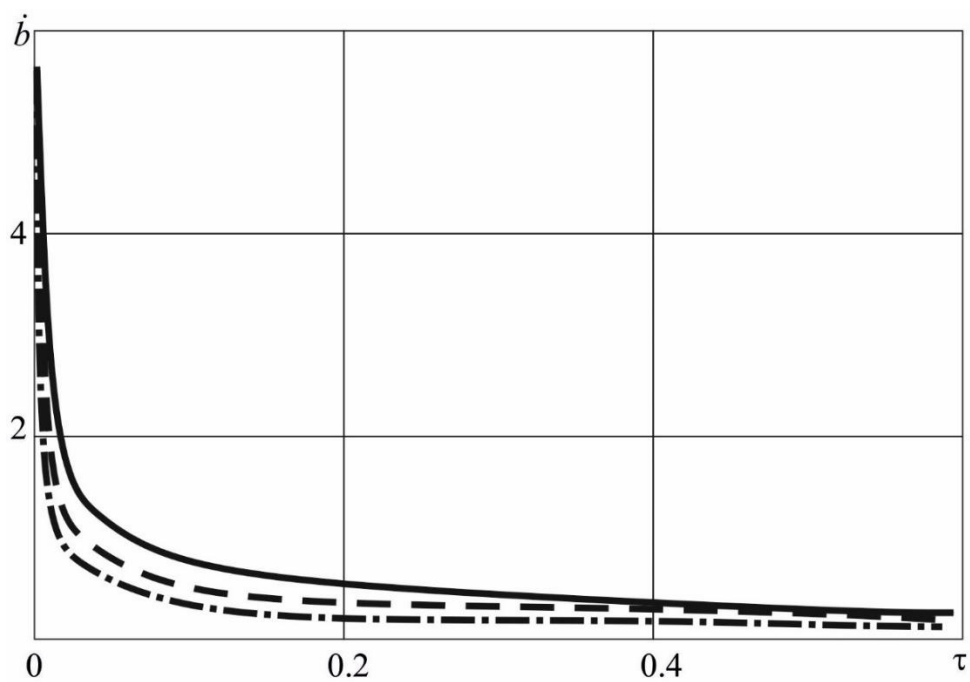


Рис. 4.5.6. Зависимость скорости движения границы области контакта от времени.

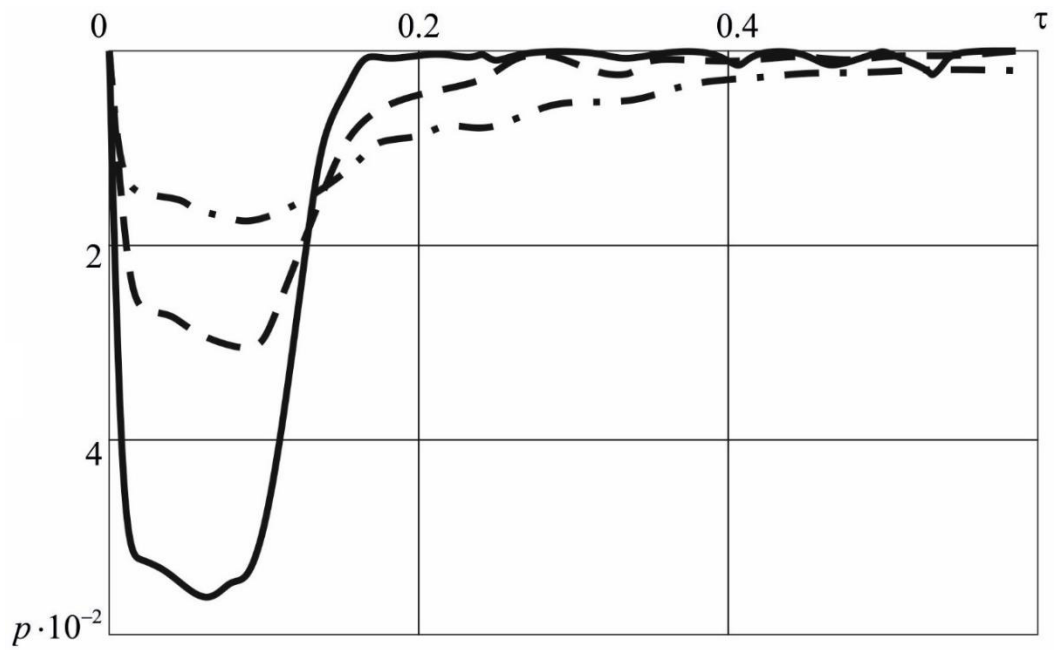


Рис. 4.5.7. Зависимость контактного давления от времени в лобовой точке.

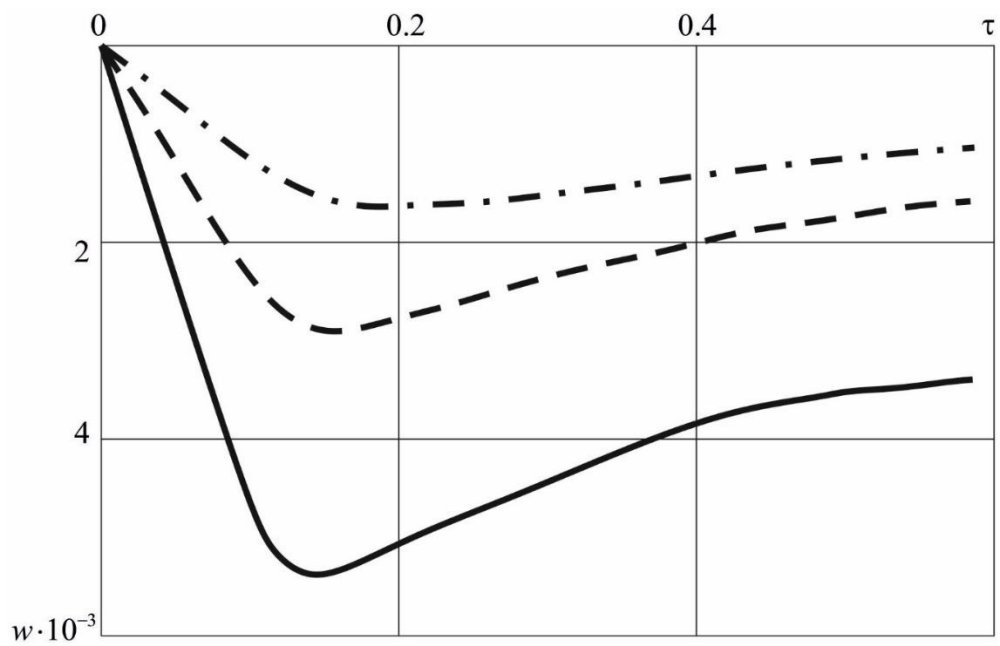


Рис. 4.5.8. Зависимость нормальных перемещений от времени в лобовой точке.

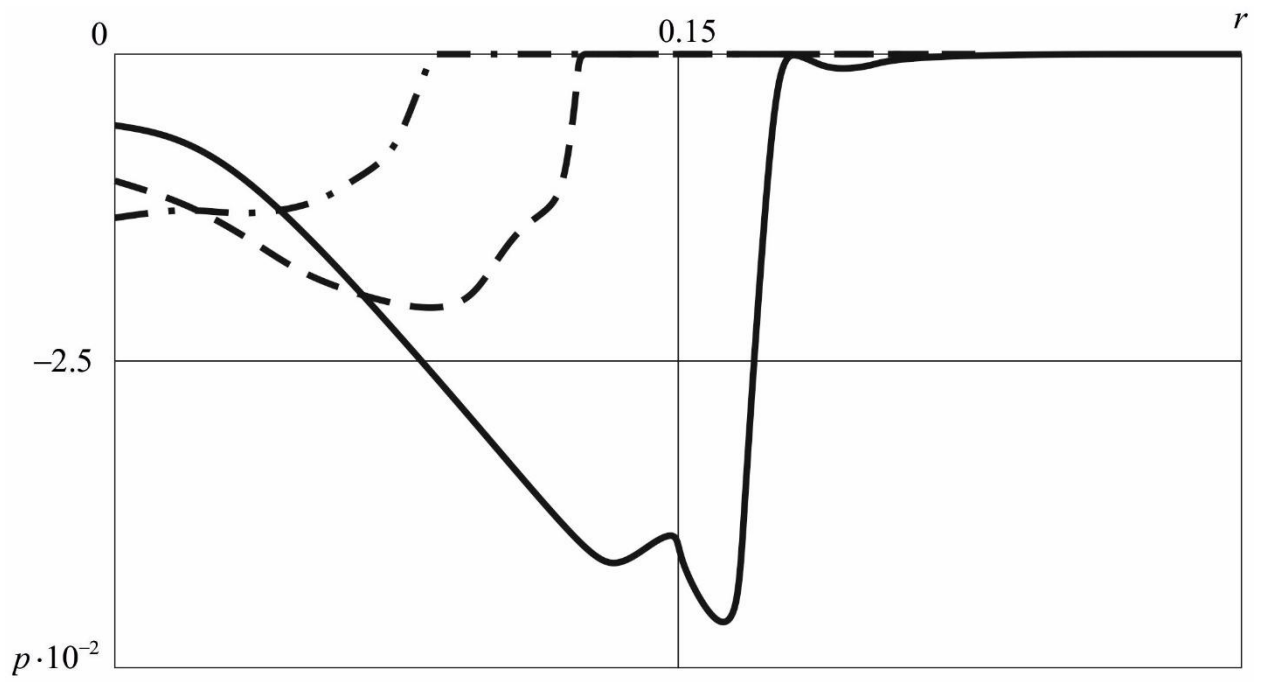


Рис. 4.5.9. Распределение контактного давления по радиусу при $\tau = 0.15$.

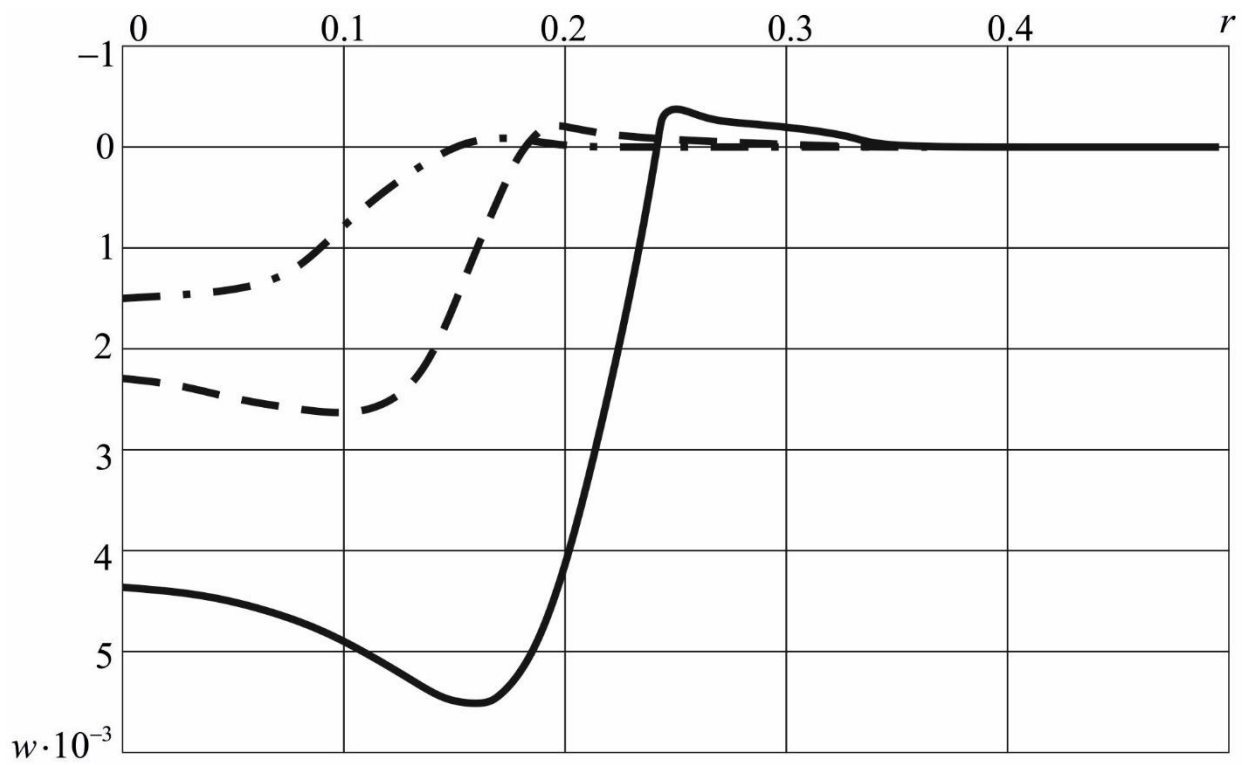


Рис. 4.5.10. Распределение нормальных перемещений по радиусу при $\tau = 0.3$.

4.6. Взаимодействие двух оболочек

Здесь рассмотрим нестационарные контактные задачи с подвижными границами для двух тонких однородных упругих круговых цилиндрических или сферических оболочек, заполненных упругой средой. В начальный момент времени одна из оболочек (основание) неподвижна, а другая (ударник) движется с некоторой начальной скоростью V_0 , вектор которой сонаправлен с осью z , соединяющей центры оболочек (рис. 4.6.1).

В случае двух цилиндрических оболочек первоначально контакт происходит вдоль образующей граничных поверхностей, а сами оболочки предполагаются бесконечно длинными, что приводит к плоской постановки задачи. Для варианта сферических оболочек область контакта первоначально совпадает с точкой касания полюсов оболочек и соответствующая задача является осесимметричной. В обоих вариантах предполагается, что контакт между оболочками и оболочками с наполнителем происходит в условиях свободного проскальзывания. Область контакта изменяется во времени и положение её границы определяется в процессе решения задачи.

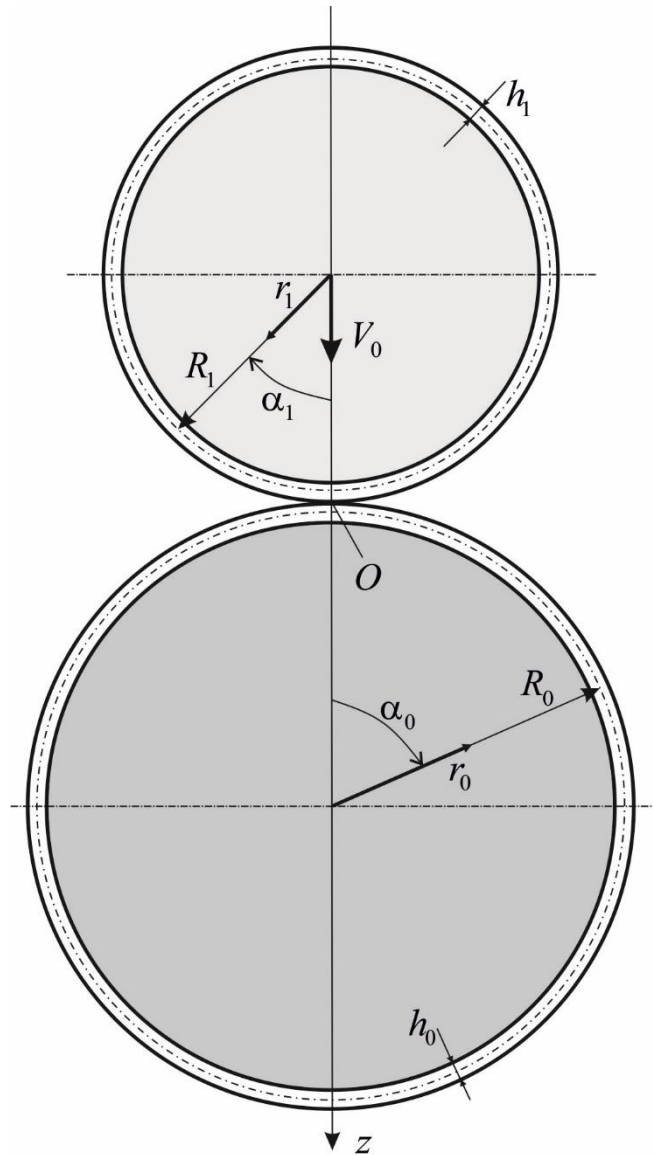


Рис. 4.6.1. Постановка нестационарных контактных задач для оболочек с заполнителями.

Для единообразной записи математических постановок контактных задач этой главы для перемещений и контактного давления введём следующие индексные обозначения: $\mathbf{w}_{ml} = (u_{ml}, w_{ml}, \chi_{ml})^T$ – вектор перемещений оболочек, $\mathbf{p}_{ml} = (0, p_{ml}, 0)^T$ – вектор контактного давления. При этом индекс $l=1$ соответствует случаю круговой цилиндрической, а $l=2$ – сферической оболочки; величины с индексом $m=0$ относятся к основанию, а с индексом $m=1$ – к ударнику.

Движение цилиндрических и сферических оболочек описывается уравнениями (1.3.7) и (1.3.8) соответственно. Для единообразной формы записи в случае сферической оболочки в уравнениях (1.3.8) в качестве обозначения угловой координаты будем использовать греческую литеру α_m вместо β . Вследствии плоской или осесимметричной постановки задач все заданные и искомые функции зависят только от угла α_m и времени τ , где в случае цилиндрических оболочек α_m – полярный угол ($\alpha_m \in (-\pi, \pi]$), а в случае сферических оболочек это угол сферических систем координат ($\alpha_m \in [0, \pi]$). В обоих вариантах углы отсчитываются по часовой стрелке от оси, соединяющей центры оболочек (рис. 4.6.1).

В качестве характерных размерных величин примем: характерный линейный размер – радиус оболочки-основания $L = R_0$, характерная скорость – скорость волн растяжения-сжатия в материале оболочки основания $c_* = c_{0,10} = \sqrt{\frac{\lambda_{00} + 2\mu_{00}}{\rho_{00}}}$, где λ_{00} , μ_{00} и ρ_{00} – упругие параметры Ламе (они же выступают в качестве характерных размерных параметров $\lambda_* = \lambda_{00}$ и $\mu_* = \mu_{00}$) и плотность материала оболочки-основания.

В этих обозначениях уравнения (1.3.7) и (1.3.8) принимают единообразную форму записи:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{w}}_{ml} &= \mathbf{L}_{ml} \mathbf{w}_{ml} + \mathbf{p}_{ml}, \quad \mathbf{w}_{ml} = (u_{ml}, w_{ml}, \chi_{ml})^T, \\ \mathbf{L}_{ml} &= (L_{ij}^{ml})_{3 \times 3}, \quad \mathbf{p}_{ml} = (0, p_{ml}, 0)^T, \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

Дифференциальные операторы L_{ij}^{ml} совпадают с операторами L_{ij} в (1.3.7) при $l=1$ и (1.3.8) при $l=2$ с заменой $\alpha = \alpha_m$ и $\beta = \alpha_m$ соответственно. Там же и в безразмерных величинах (1.3.4) дополнительно необходимо учесть следующие замены: $\eta_1 = \eta_{m1}$, $\eta_2 = \eta_{m2}$, $\gamma = \gamma_m$, $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_m$, $c_{10} = c_{m,10}$, $c_{20} = c_{m,20}$, $\lambda_0 = \lambda_{m0}$, $\mu_0 = \mu_{m0}$, $\rho_0 = \rho_{m0}$. При этом $\eta_{01} = 1$.

Для описания движения заполнителей используются уравнения теории упругости в цилиндрической (1.2.22) или в сферической (1.2.30) системе координат с той же заменой $\alpha = \alpha_m$ и $\beta = \alpha_m$ соответственно:

$$\kappa_{m1}^2 \Delta_l \varphi_{ml} = \frac{\partial^2 \varphi_{ml}}{\partial \tau^2}, \quad \kappa_{m2}^2 \Delta_l \psi_{ml} = \frac{\partial^2 \psi_{ml}}{\partial \tau^2}, \quad (4.6.2)$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{r_m} \frac{\partial}{\partial r_m} \left(r_m \frac{\partial}{\partial r_m} \right) + \frac{1}{r_m^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_m^2},$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial r_m^2} + \frac{2}{r_m} \frac{\partial}{\partial r_m} + \frac{1}{r_m^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha_m^2} + \text{ctg} \alpha_m \frac{\partial}{\partial \alpha_m} \right).$$

Соответственно, в системе безразмерных величин (1.2.5) и в формулах для геометрических и физических соотношений (1.2.23)-(1.2.25) и (1.2.31)-(1.2.33) необходимо учесть следующие замены обозначений: $r = r_m$, $\lambda = \lambda_m$, $\mu = \mu_m$, $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_m$, $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_m$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ml}$, $\kappa_1 = \kappa_{m1}$, $\kappa_2 = \kappa_{m2}$, $\sigma_{ij} = \sigma_{m,ij}$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{m,ij}$ ($i, j = r_m, \alpha_m$).

Реальная область контакта Π_* в линейной постановке задачи заменяется частями недеформированных срединных поверхностей, сдвинувшихся в момент времени $\tau > 0$ вдоль оси z на величины $w_{mT,l}(\tau)$ – перемещения ударника и основания как абсолютно твердых тел. Границы этих частей определяются углами $\alpha_m^*(\tau)$, которые находятся из условия их пересечения (рис. 4.6.2):

$$\alpha_0^* = \arcsin x_0, \quad \alpha_1^* = \arcsin \frac{x_0}{R_1}, \quad (4.6.3)$$

$$x_0 = \sqrt{1 - (z_0 - 1 - w_{0T,l})^2}, \quad z_0 = \frac{1}{2} \frac{2(w_{1T,l} R_1 + w_{0T,l}) + w_{0T,l}^2 - w_{1T,l}^2}{1 + R_1 + w_{0T,l} - w_{1T,l}}.$$

Здесь и далее под R_1 понимается безразмерный радиус оболочки-ударника: $R_1 = R'_1/R'_0$, где R'_0, R'_1 – размерные радиусы оболочек.

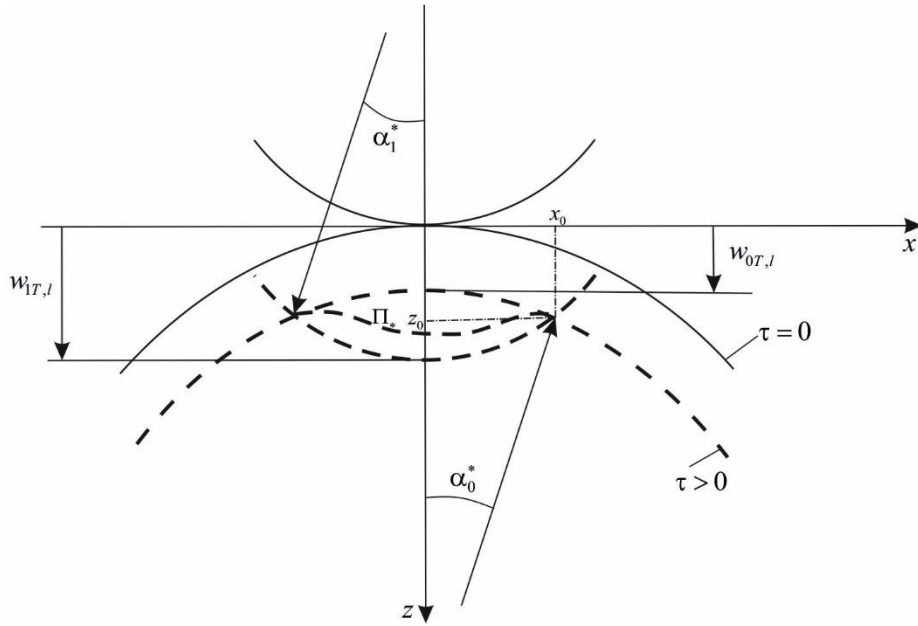


Рис. 4.6.2. Определение угловых размеров области контакта.

С учётом малости угловых размеров области контакта, можно положить, что

$$\alpha_0^* = x_0, \alpha_1^* = \frac{x_0}{R_1}. \quad (4.6.4)$$

Очевидно, в зоне контакта имеет место равенство $\sin \alpha_0 = -R_1 \sin \alpha_1$, которое также с учётом малости зоны контакта можно записать в приближенной форме: $\alpha_0 = \alpha = -R_1 \alpha_1$. Тогда в зоне контакта имеем

$$\alpha_0 = \alpha, \alpha_1 = -\alpha/R_1, \alpha \in [0, \alpha^*], \alpha^* = x_0. \quad (4.6.5)$$

Линеаризованные граничные условия с учетом свободного проскальзывания записываются так:

$$\begin{aligned} w_{0l}(\alpha, \tau) + w_{1l}(-\alpha/R_1) = 0, \quad p_{0l}(\alpha, \tau) = p_{1l}(-\alpha/R_1), \quad \alpha \in [0, \alpha^*]; \\ p_{0l}(\alpha, \tau) = p_{1l}(-\alpha/R_1) = 0, \quad \alpha \notin [0, \alpha^*]. \end{aligned} \quad (4.6.6)$$

Перемещения ударника и основания как абсолютно твердых тел определяются из решения следующих начальных задач:

$$m_l \ddot{w}_{mT,l}(\tau) = Q_{ml}(\tau), \quad w_{mT,l}(0) = 0, \quad \dot{w}_{mT,l}(0) = V_0 \delta_{1m}. \quad (4.6.7)$$

Здесь δ_{1m} – символ Кронекера, $Q_{m,l}(\tau)$ – результирующие силы контактного давления, которые вычисляются по формулам:

$$Q_{m1}(\tau) = 2(-1)^{m+1} \int_0^{\alpha^*(\tau)/R_1^m} p_{m,1}(\alpha, \tau) \cos \alpha d\alpha,$$

$$Q_{m2}(\tau) = \pi(-1)^{m+1} \int_0^{\alpha^*(\tau)/R_1^m} p_{m,2}(\alpha, \tau) \sin 2\alpha d\alpha.$$

Замыкают постановку задачи начальные условия

$$u_{0l} \Big|_{\tau=0} = w_{0l} \Big|_{\tau=0} = \chi_{0l} \Big|_{\tau=0} = u_{1l} \Big|_{\tau=0} = w_{1l} \Big|_{\tau=0} = \chi_{1l} \Big|_{\tau=0} = 0,$$

$$\dot{u}_{0l} \Big|_{\tau=0} = \dot{w}_{0l} \Big|_{\tau=0} = \dot{\chi}_{0l} \Big|_{\tau=0} = \dot{\chi}_{1l} \Big|_{\tau=0} = 0,$$

$$\dot{u}_{1l} \Big|_{\tau=0} = -V_0 \sin \alpha_1, \quad \dot{w}_{1l} \Big|_{\tau=0} = V_0 \cos \alpha_1.$$

Сведем поставленные задачи к задачам с нулевыми начальными условиями. Для этого перемещения ударника u_{1l} и w_{1l} представляем так

$$u_{1l} = \tilde{u}_{1l} - V_0 \tau \sin \alpha_1, \quad w_{1l} = \tilde{w}_{1l} + V_0 \tau \cos \alpha_1$$

При этом остаются в силе уравнения движения (4.6.1) с заменой u_{1l} и w_{1l} на \tilde{u}_{1l} и \tilde{w}_{1l} , а первое граничное условие в (4.6.6) с учётом чётности нормальных перемещений по углу α принимает вид

$$w_{0l}(\alpha, \tau) + w_{1l}(\alpha/R_1) = -V_0 \tau \cos(\alpha/R_1), \quad \alpha \in [0, \alpha^*]. \quad (4.6.8)$$

В дальнейшем знак « \sim » в обозначениях для перемещений опускаем.

Как следует из принципа суперпозиции, нормальные перемещения $w_{0l}(\alpha, \tau)$ и $w_{1l}(\alpha/R_1)$ связаны с контактным давлением посредством соотношений (2.8.1) и (3.5.10), в которых в качестве ядер выступают функции влияния для цилиндрической и сферической оболочек с упругими заполнителями, найденные в п. 2.7 и п. 3.5 соответственно: (здесь и далее, учитывая выполнение граничных условий, нижний индекс « m » в обозначении для контактного давления опускаем: $p_{ml} = p_l$, верхний индекс « c » у функции влияния соответствует цилиндрической оболочке с заполнителем, а « s » – сферической оболочке с заполнителем):

$$w_{ml}(\alpha, \tau) = J_{ml}(\alpha, \tau; p_l), \quad (4.6.9)$$

$$J_{m1}(\alpha, \tau; p_l) = \int_0^\tau \int_{-\alpha^*(\tau)/R_1^m}^{\alpha^*(t)/R_1^m} G_{mw}^c(\alpha - \xi, \tau - t) p_1(\xi, t) d\xi dt,$$

$$J_{m2}(\alpha, \tau; p_l) = \int_0^\tau \int_0^{\alpha^*(t)/R_1^m} G_{mw}^s(\alpha, \xi, \tau - t) p_2(\xi, t) d\xi dt.$$

Подстановка интегральных представлений (4.6.9) в граничное условие (4.6.8) приводит к интегральному уравнению

$$J_{0l}(\alpha, \tau; p_l) + J_{1l}(\alpha/R_1, \tau; p_l) = -V_0 \tau \cos(\alpha/R_1), \quad (4.6.10)$$

которое дополняется до замкнутой системы уравнением (4.6.3), определяющим угловой размер области контакта и уравнениями (4.6.7), записанными в интегральной форме:

$$w_{1T,l}(\tau) = V_0 \tau + \frac{1}{m_l} J_{1T,l}(\tau), \quad w_{0T,l}(\tau) = \frac{1}{m_l} J_{0T,l}(\tau), \quad (4.6.11)$$

$$J_{mT,l}(\tau) = \int_0^\tau (\tau - t) Q_{ml}(t) dt.$$

Приведем описание алгоритма решения задачи для двух цилиндрических оболочек. В случае сферических оболочек все рассуждения аналогичны. Для решения системы разрешающих уравнений (4.6.3), (4.6.10) и (4.6.11) используем явную численно-аналитическую схему. Для дискретизации интегральных операторов в основном разрешающем уравнении (4.6.10) применим аппроксимацию, построенную в п. 2.2.1. (см. формулы (2.3.9), (2.3.10)). Аналогично аппроксимируем интегральные операторы в уравнениях (4.6.11). В результате на каждом шаге по времени задача сводится к решению аналогичной (2.3.10) системы алгебраических уравнений. При этом на каждом временном шаге граница области контакта определяется из решения уравнения (4.6.3). На каждом шаге алгоритма по времени проводится анализ полученных узловых значений контактного давления на предмет удовлетворения неравенству $p_l < 0$. В случае наличия положительных, либо нулевых узловых значений последние исключаются из расчёта. Затем проводится вычисление нормальных перемещений оболочек с

помощью дискретных аналогов формул (4.6.9) и алгоритм переходит на следующий шаг по времени.

В качестве примера расчёта рассмотрим нестационарное контактное взаимодействие двух сферических оболочек с упругими заполнителями. Примем следующие значения безразмерных параметров: $R_1 = 0.6$, $\gamma_1 = 8.6 \cdot 10^{-3}$, $\gamma_2 = 9.6 \cdot 10^{-3}$, $\eta_{01} = \eta_{11} = \kappa_{01} = \kappa_{11} = 1$, $\eta_{02} = \eta_{12} = \kappa_{02} = \kappa_{12} = 0.53$, что соответствуют оболочкам и заполнителям, выполненным из стали. На всех графиках для упрощения записи в обозначениях величин индекс « l » опускаем.

На рис. 4.6.3 показана зависимость перемещения w_{1T} центра масс оболочки-ударника от времени. Аналогичный график представлен на рис. 4.6.4 для оболочки-основания.

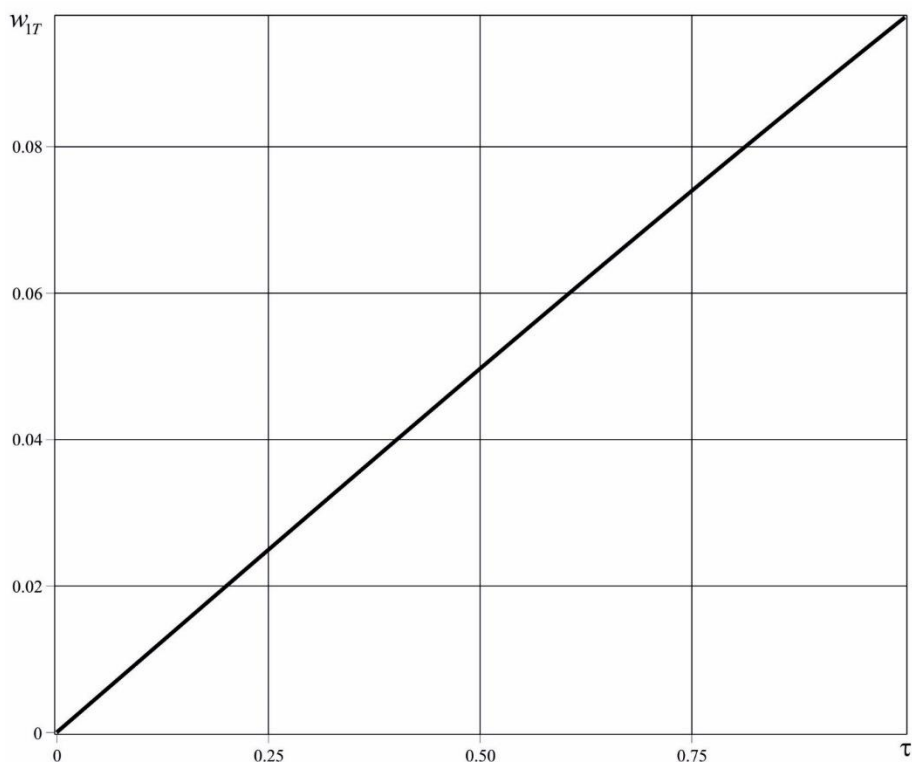


Рис. 4.6.3. Перемещение w_{1T} центра масс оболочки-ударника.

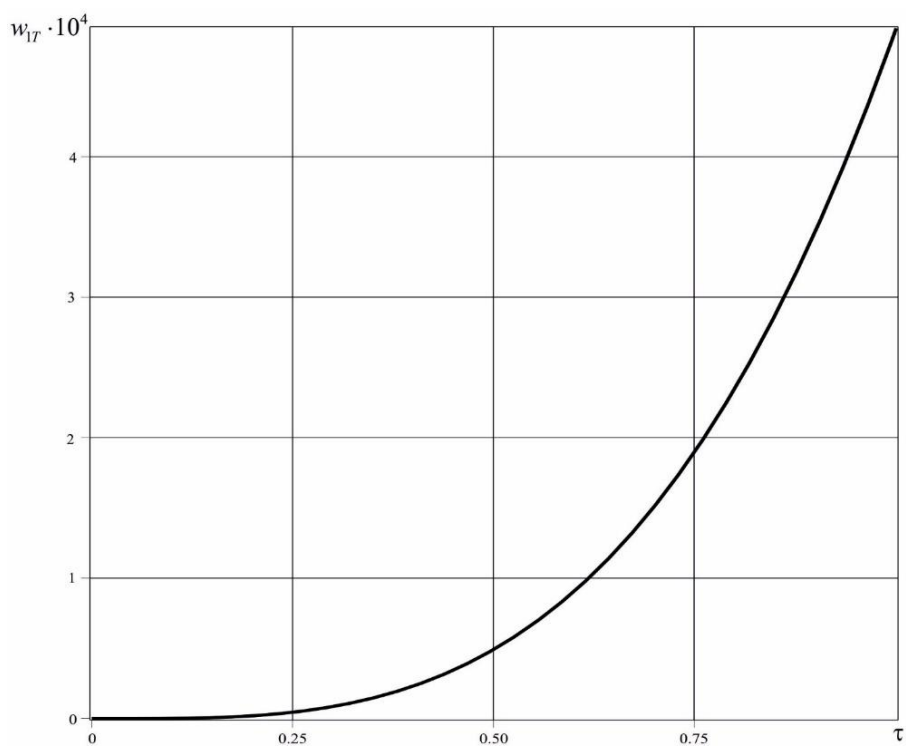


Рис. 4.6.4. Перемещение w_{0T} центра масс оболочки-основания.

Угловой размер α^* области контакта в зависимости от времени представлен на рис. 4.6.5.

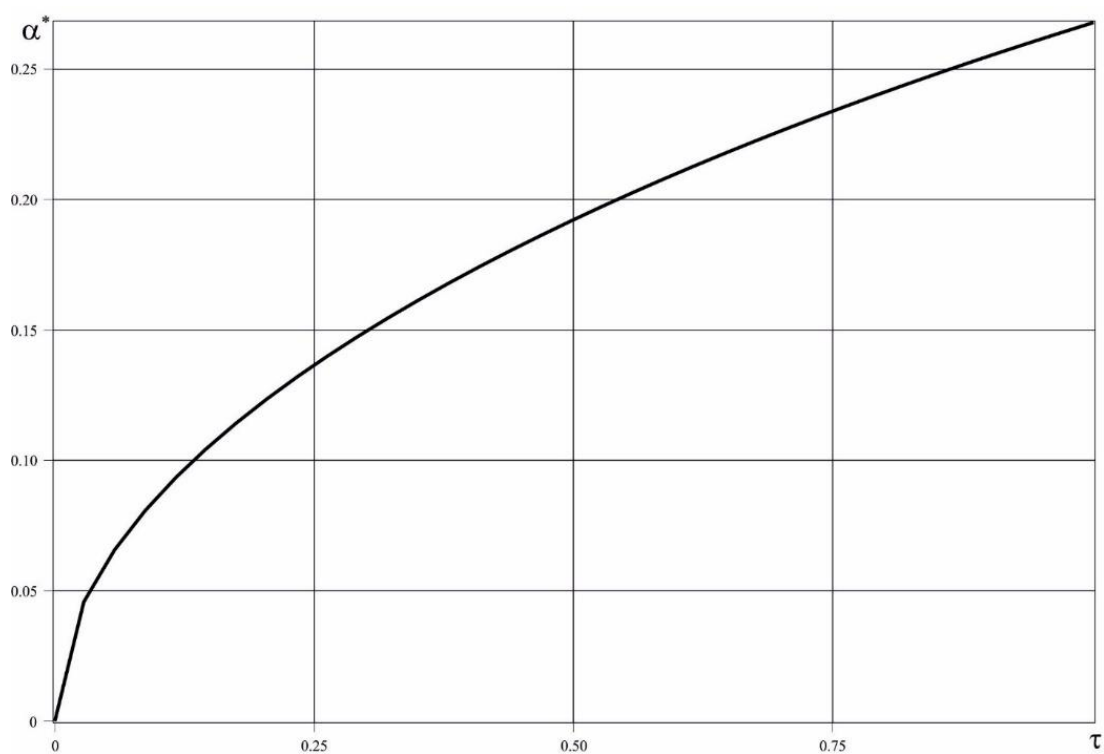


Рис. 4.6.5. Угловой размер α^* области контакта в зависимости от времени.

На рис. 4.6.6 представлены зависимости контактного давления от времени в точках с различными значениями координаты α . Сплошная кривая соответствует $\alpha = 0$, пунктирная – $\alpha = 0.05$, штрихпунктирная – $\alpha = 0.08$

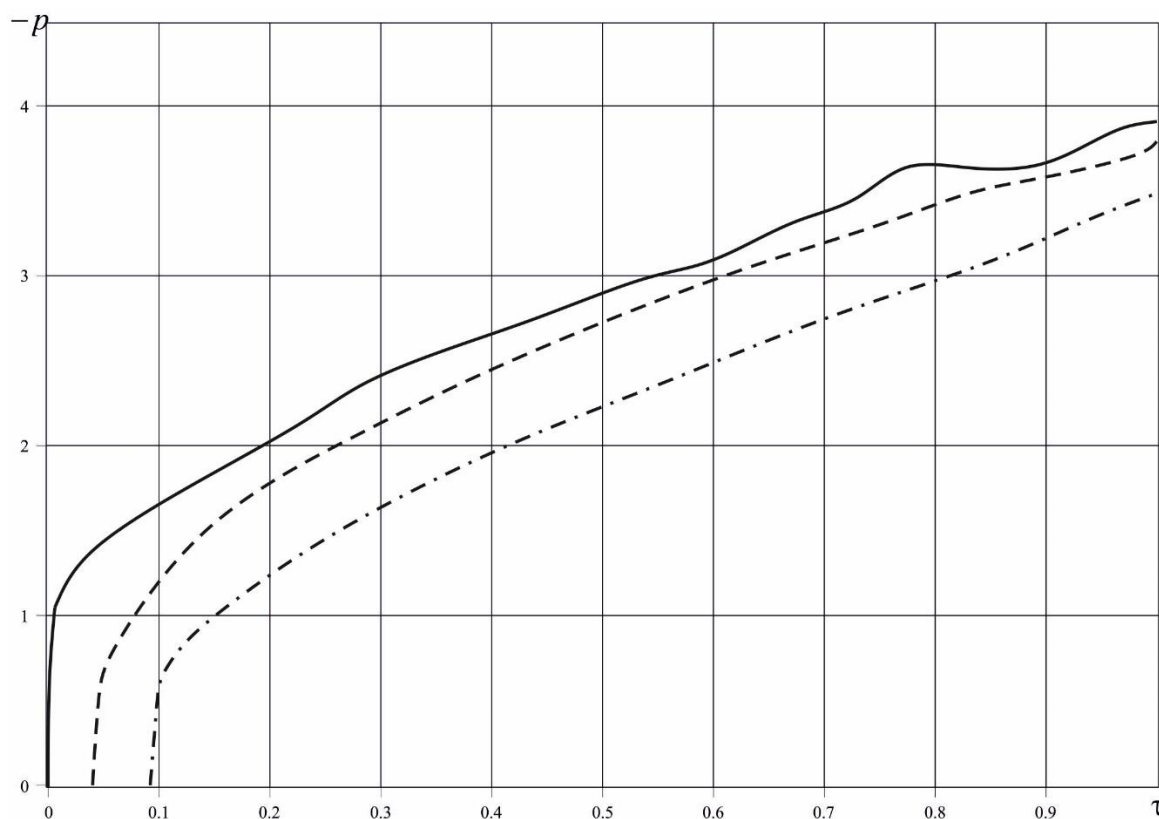


Рис. 4.6.6. Зависимости контактного давления от времени в точках с различными значениями координаты α . Сплошная кривая соответствует $\alpha = 0$, пунктирная – $\alpha = 0.05$, штрихпунктирная – $\alpha = 0.08$.

Распределения давления по области контакта в различные моменты времени представлены на рис. 4.6.7. Здесь сплошная кривая соответствует моменту времени $\tau = 0.1$, пунктирная – $\tau = 0.2$, штрихпунктирная – $\tau = 0.3$.

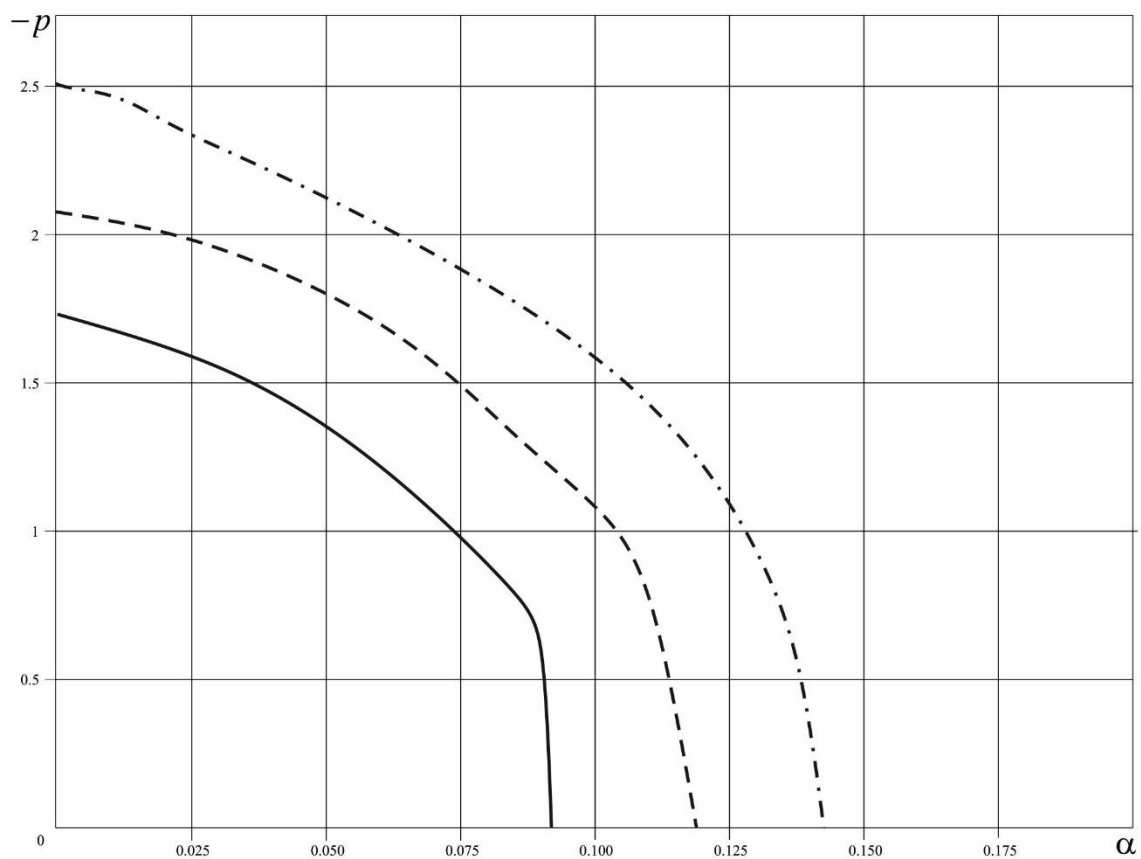


Рис. 4.6.7. Распределения давления по области контакта в различные моменты времени. Сплошная кривая соответствует моменту времени $\tau = 0.1$, пунктирная – $\tau = 0.2$, штрихпунктирная – $\tau = 0.3$.

Положения границ ударника и основания представлены на рис. 4.6.86. Сплошные кривые соответствуют моменту времени $\tau = 1$, пунктирные – $\tau = 0.6$, штрихпунктирные – $\tau = 0.3$. Графики изображены в декартовой прямоугольной системе координат Oxz .

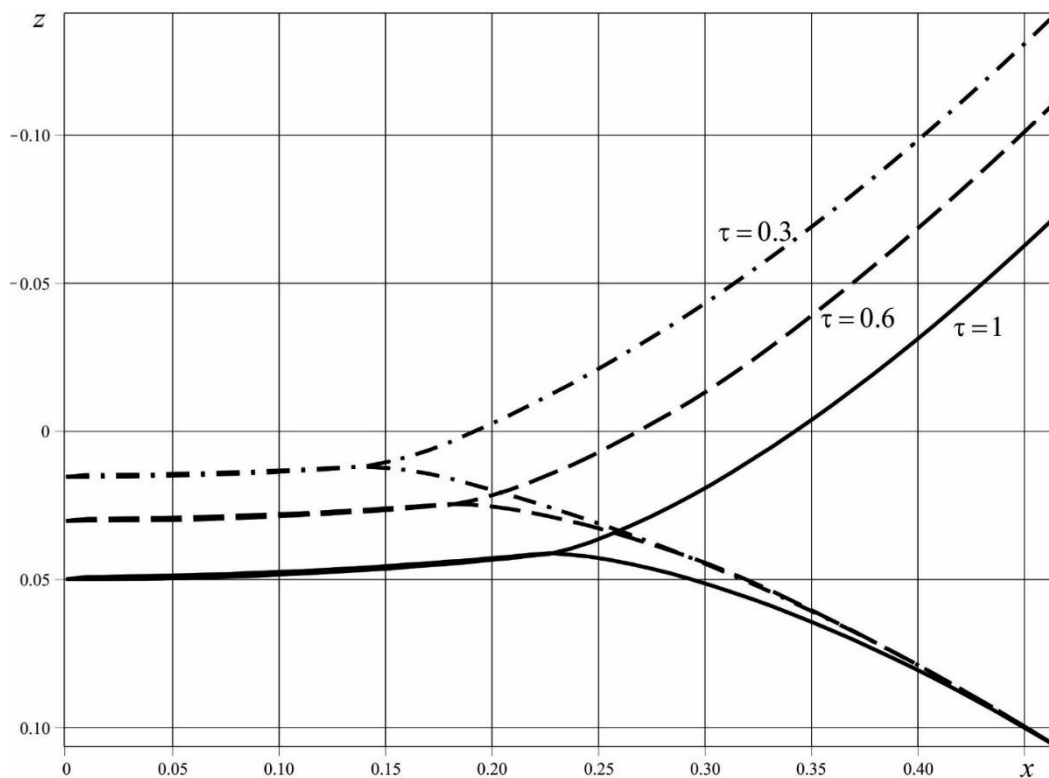


Рис. 4.6.8. Положения границ ударника и основания в различные моменты времени.

В заключении представим сравнения графиков положения границ оболочки-ударника и оболочки-основания с учётом заполнителя (сплошные кривые) и без заполнителя в момент времени $\tau = 1$. Видно, что наличие заполнителя оказывает значительное влияние.

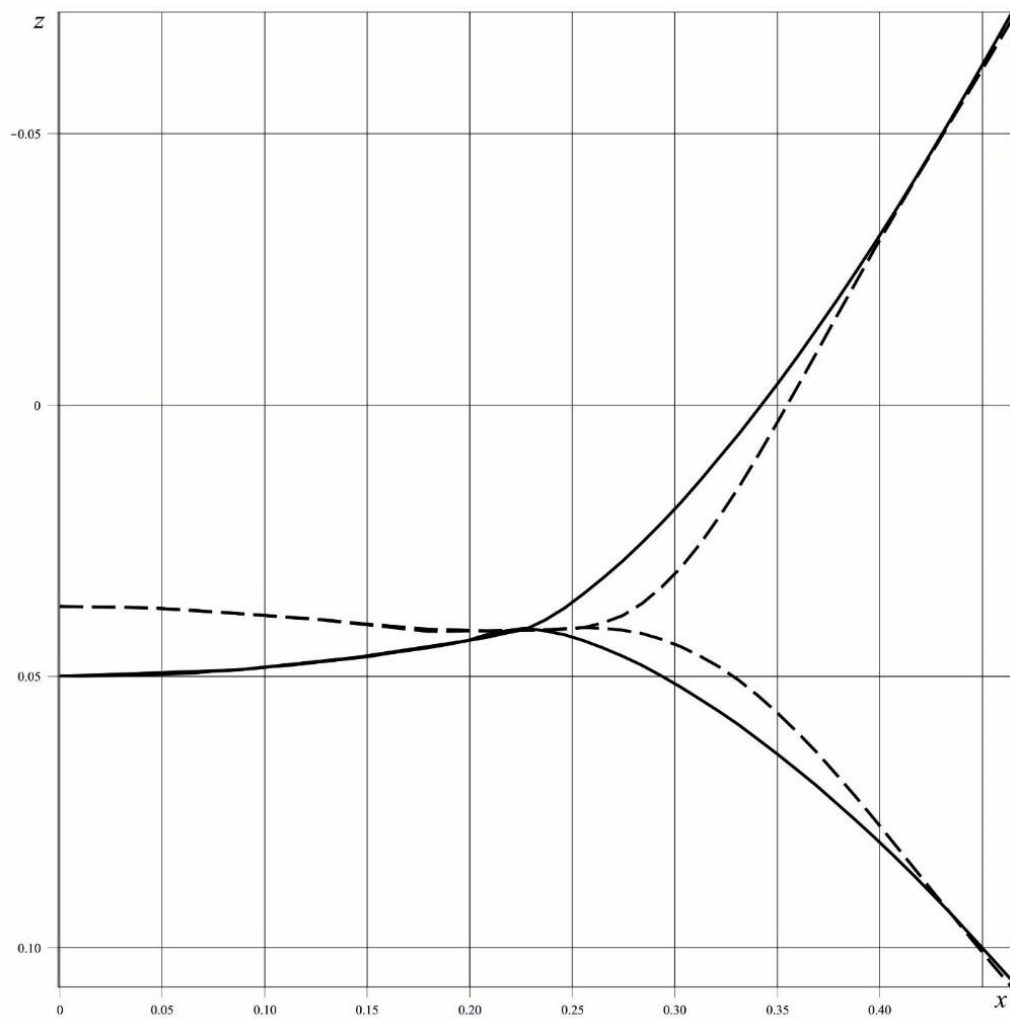


Рис. 4.6.9. Положения границ ударника и основания с учётом и без учёта заполнителя.

ГЛАВА V. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В этой главе ограничимся пространственной нестационарной контактной задачей для круговой бесконечно длинной цилиндрической оболочки и абсолютно твёрдого ударника, ограниченного выпуклой гладкой поверхностью. Аналогичным образом может быть рассмотрено основание в виде сферической оболочки.

5.1. Постановка задачи и система разрешающих уравнений

Для описания движения оболочки используются уравнения движения модели С.П. Тимошенко (1.3.3).

Полагаем, что в начальный момент времени $\tau=0$ с покоящейся оболочкой входит в контакт абсолютно жесткий ударник, ограниченный гладкой выпуклой поверхностью. Полагаем, что вектор начальной скорости ударника V_0 коллинеарен оси Ox (рис. 6.1.1) и направлен к центральной оси оболочки. Таким образом, рассматривается случай бокового удара, при этом уравнение движения ударника как абсолютно твёрдого тела имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} m_u \ddot{u}_c(\tau) &= R(\tau) = \iint_{D(\tau)} p(\xi, \zeta, \tau) d\xi d\zeta, \quad (\xi, \zeta) \in D(\tau), \\ u_c(0) &= 0, \quad \dot{u}_c(0) = V_0, \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

где R – результирующая контактного давления p , $u_c(\tau)$ – перемещение центра масс ударника по оси Ox , $D(\tau)$ – область контакта, граница которой зависит от времени.

Полагаем, что контакт между ударником и оболочкой происходит в условиях свободного проскальзывания:

$$\begin{aligned} p(\alpha, z, \tau) < 0, (\alpha, z) \in D(\tau); \\ p(\alpha, z, \tau) = q_\alpha(\alpha, z, \tau) = q_z(\alpha, \beta, \tau) = 0, (\alpha, \beta) \notin D(\tau). \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

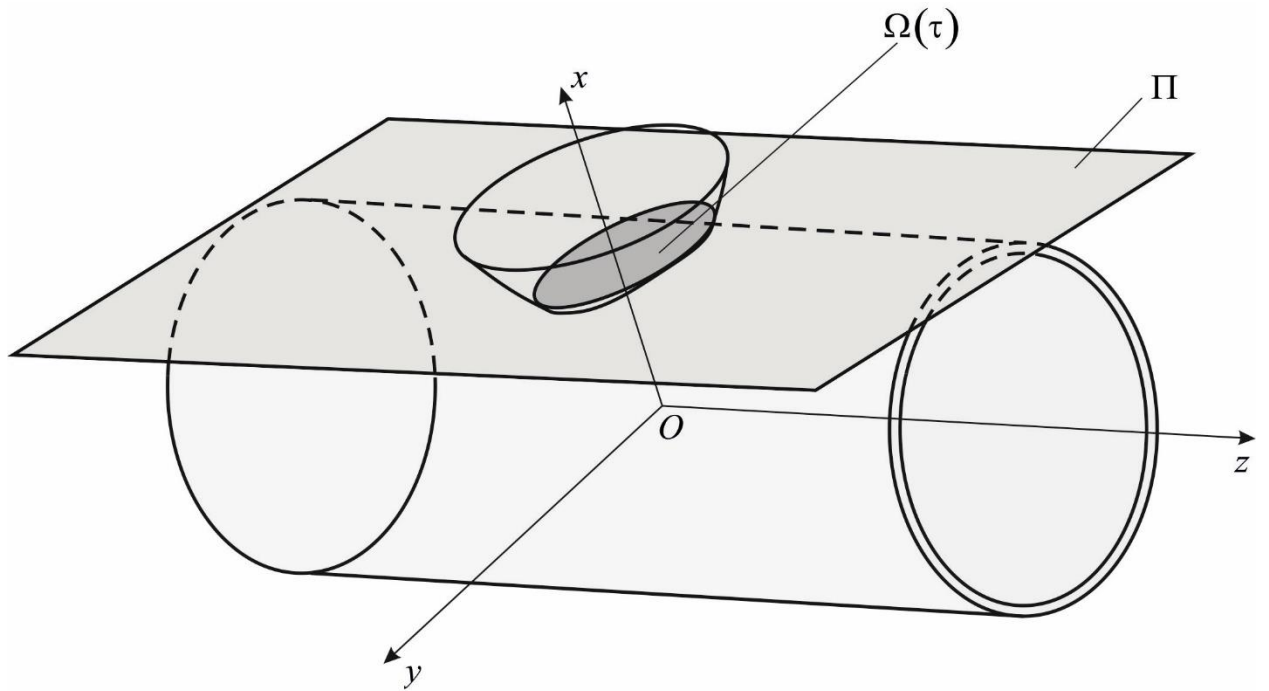


Рис. 5.1.1. Постановка задачи.

Первоначально оболочка находится в недеформированном состоянии, что соответствует нулевым начальным условиям:

$$\mathbf{w}|_{\tau=0} = \dot{\mathbf{w}}|_{\tau=0} = \mathbf{0}. \quad (5.1.3)$$

Основой для построения системы разрешающих уравнений нестационарной контактной задачи для абсолютно твёрдого ударника и тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки является интегральное соотношение (2.5.2), связывающее нормальные перемещения оболочки с контактным давлением:

$$w(\alpha, z, \tau) = \int_0^\tau dt \iint_{D(t)} G_w(\alpha - \xi, z - \zeta, \tau - t) p(\xi, \zeta, t) dS. \quad (5.1.4)$$

В линейной постановке задачи условия контакта ставим на фиктивной смоченной поверхности, в качестве которой используем плоскую область $\Omega(\tau)$, принадлежащую плоскости Π , касательной к поверхностям оболочки и ударника в начальный момент времени (рис. 4.1.1).

В предположении о малости размера пятна контакта ($\text{diam}\Omega(\tau) \ll 1$) можно положить

$$\sin \alpha \approx \alpha \approx y, \quad (y, z) \in \Omega(\tau). \quad (5.1.5)$$

Тогда на поверхностях ударника и полупространства с учётом условий свободного проскальзывания (5.1.2) будут справедливы следующие соотношения

$$w(y, z, \tau)|_{(y,z) \in \Omega(\tau)} = u_T(y, z, \tau)|_{(y,z) \in \Omega(\tau)}, \quad p(y, z, \tau)|_{(y,z) \in \Omega(\tau)} < 0, \quad (5.1.6)$$

где $u_T(y, z, \tau)$ – перемещение граничной поверхности ударника.

Положим, что положение поверхности, ограничивающей ударник, в текущий момент времени τ задаётся явным уравнением в системе координат $Oxyz$:

$$\begin{aligned} x = u_T(y, z, \tau) &= f(y, z) + u_c(\tau), \\ u_c(0) &= 0, \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

где функция $f(y, z)$ определяет положение поверхности, ограничивающей ударник, в нулевой момент времени $\tau = 0$.

Принимая во внимание граничные условия (5.1.6) выражение (5.1.7) и интегральное соотношение (5.1.4), приходим к основному разрешающему интегральному уравнению относительно искомого контактного давления $p(y, z, \tau)$:

$$\int_0^\tau dt \iint_{\Omega(t)} G_w(y - \xi, z - \zeta, \tau - t) p(\xi, \zeta, t) dS = f(y, z) + u_c(\tau). \quad (5.1.8)$$

В уравнении (5.1.8) кроме контактного давления неизвестными являются также область контакта $\Omega(\tau)$ и перемещение центра масс ударника $u_c(\tau)$.

Для получения замкнутой системы сначала определим соотношение для определения положения границы области контакта $\Omega(\tau)$. Она определяется из условия пересечения поверхности ударника с плоскостью П:

$$f(y, z) + u_c(\tau) = 1. \quad (5.1.9)$$

Перемещение центра масс ударника определяется уравнением его движения (5.1.1), записанным в интегральной форме

$$u_c(\tau) = V_0\tau + \frac{1}{m_u} \int_0^\tau (\tau - t) dt \iint_{\Omega(t)} p(y, z, t) dS. \quad (5.1.10)$$

Уравнения (5.1.8)-(5.1.10) составляют замкнутую систему. Для её решения используем численно-аналитический алгоритм, основанный на методе механических квадратур.

5.2. Алгоритм решения

Временной интервал $[0, \tau]$ разделим на M равномерных шагов $\Delta_t = \frac{\tau}{M}$:

$$t_m = m\Delta_t, \quad m = \overline{1, M}, \quad t_M = M\Delta_t = \tau. \quad (5.2.1)$$

Интегралы по времени в уравнениях (5.1.8) и (5.1.10) заменим суммой интегралов по интервалам $[\tau_{m-1}, \tau_m]$ и положим, что в пределах каждого временного интервала контактное давление остаётся постоянным:

$$\sum_{m=1}^M \int_{t_{m-1}}^{t_m} dt \iint_{\Omega(t)} G_w(y - \xi, z - \zeta, \tau - t) p_m(\xi, \zeta) dS = f(y, z) + u_{cM}, \quad (5.2.2)$$

$$u_{cM} = V_0 \tau + \frac{1}{m_u} \sum_{m=1}^M \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} (\tau - t) dt \iint_{\Omega(t)} p_m(\xi, \zeta) dS,$$

$$u_{cM} = u_c(\tau), \quad p_m(\xi, \zeta) = p(\xi, \zeta, t_m), \quad t_m = m\Delta_t.$$

Область контакта $\Omega(t) \in \Pi$ приближенно заменим объединением прямоугольных подобластей K_{mij} (рис. 5.2.1):

$$\Omega(t) \approx \Omega_m \in \Pi, \quad \Omega_m = \bigcup_{i,j} K_{mij},$$

$$K_{mij} = \{(\xi, \zeta) : \xi_{i-1} \leq \xi \leq \xi_i, \zeta_{j-1} \leq \zeta \leq \zeta_j, t = t_m\},$$

$$\xi_i - \xi_{i-1} = \zeta_j - \zeta_{j-1} = \Delta, \quad \xi_i = b_{m1} + i\Delta, \quad \zeta_j = d_{i1} + j\Delta, \quad (5.2.3)$$

$$i \in [1, I], \quad I = \left[\frac{b_{m2} - b_{m1}}{\Delta} \right]; \quad j \in [1, J_i], \quad J_i = \left[\frac{d_{i2} - d_{i1}}{\Delta} \right],$$

где $\left[\frac{b_{m2} - b_{m1}}{\Delta} \right], \left[\frac{d_{i2} - d_{i1}}{\Delta} \right]$ – целые части чисел $\frac{b_{m2} - b_{m1}}{\Delta}$ и $\frac{d_{i2} - d_{i1}}{\Delta}$.

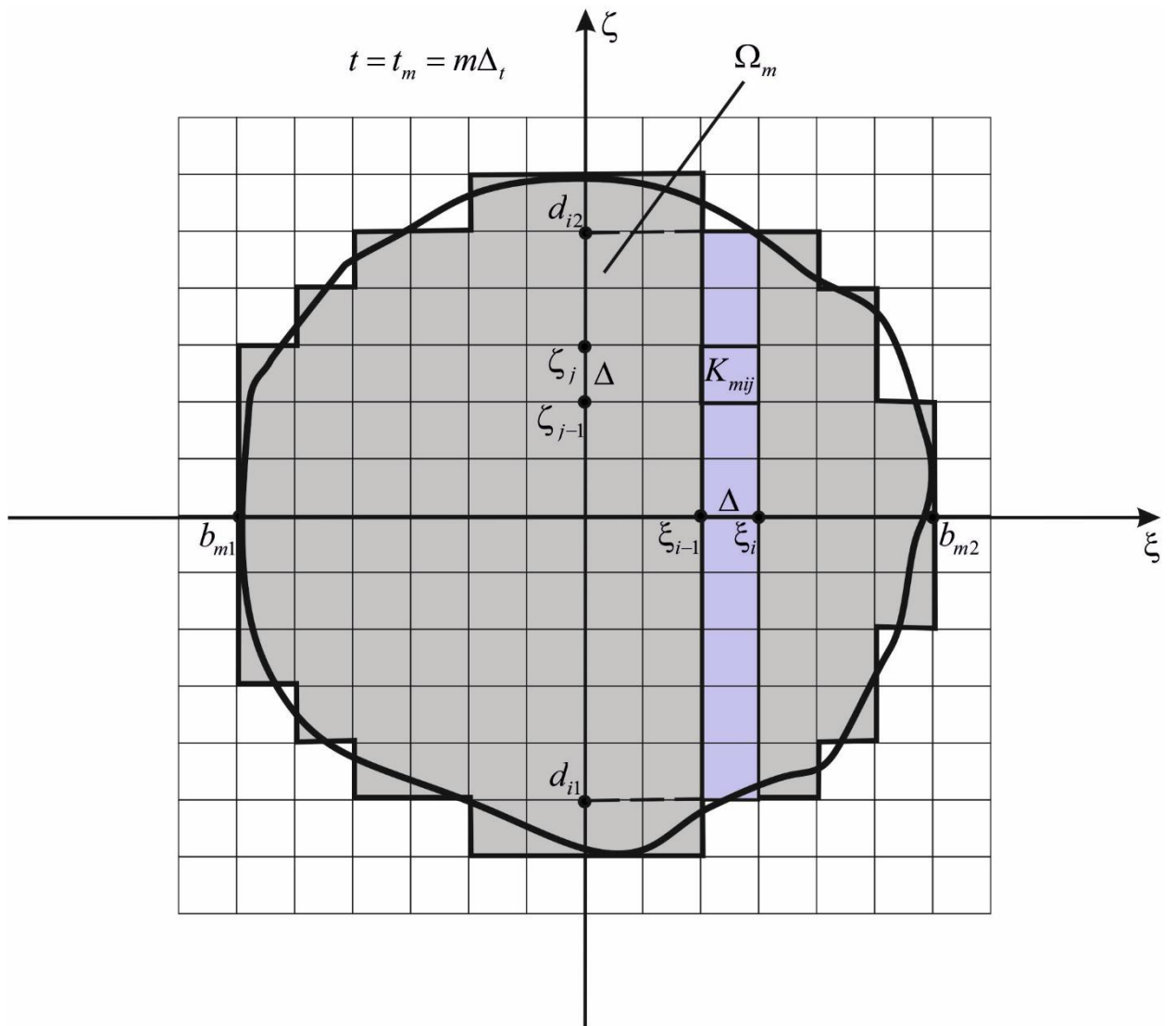


Рис. 5.2.1. Дискретная аппроксимация области контакта.

Из соображений, касающихся устойчивости численной схемы, шаг Δ по пространственным переменным выбирается из условия $\Delta > \Delta_t$ [132]. В частности, можно положить $\Delta = 2\Delta_t$. Границы b_{m1} , b_{m2} , d_{i1} , d_{i2} изменения дискретных значений пространственных переменных ξ_i и ζ_j являются решениями уравнений

$$\begin{aligned}
 f(b_m, 0) + u_{cm} = 1 &\Rightarrow b_{m1}, b_{m2}, \\
 f(\xi_i, d_i) + u_{cm} = 1 &\Rightarrow d_{i1}, d_{i2}, \\
 u_{cm} &= u(t_m).
 \end{aligned}
 \tag{5.2.4}$$

С применением аппроксимации (5.2.3), получим численные аналоги уравнений (5.2.2). Для этого положим, что в пределах элементарного квадрата K_{mij} контактное давление остаётся постоянным:

$$p_m(\xi, \zeta)|_{(\xi, \zeta) \in K_{ij}} = p_{mij} = \text{const.} \quad (5.2.5)$$

Тогда из (5.2.2)-(5.2.5) следует

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} p_{mij} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{\xi_{i-i}}^{\xi_i} \int_{\zeta_{j-i}}^{\zeta_j} G_w(y_k - \xi, z_l - \zeta, \tau - t) d\xi d\zeta dt = f_{kl} + u_{cM}, \\ u_{cM} = V_0 \tau + \frac{\Delta_t^2 \Delta^2}{m_u} \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} p_{mij} \left(M - m + \frac{1}{2} \right), \\ f(b_m, 0) + u_{cm} = 1 \Rightarrow b_{m1}, b_{m2}, \\ f(\xi_i, d_i) + u_{cm} = 1 \Rightarrow d_{i1}, d_{i2}, \\ k, i \in [1, I], I = \left[\frac{b_{m2} - b_{m1}}{\Delta} \right]; l, j \in [1, J_i], J_i = \left[\frac{d_{i2} - d_{i1}}{\Delta} \right], \\ f_{kl} = f(y_k, z_l). \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} G_{mijkl} p_{mij} = f_{kl} + u_{cM}, \\ u_{cM} = V_0 \tau + \frac{\Delta_t^2 \Delta^2}{m_u} \sum_{m=1}^M A_m \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} p_{mij}, \\ f(b_m, 0) + u_{cm} = 1 \Rightarrow b_{m1}, b_{m2}, \\ f(\xi_i, d_i) + u_{cm} = 1 \Rightarrow d_{i1}, d_{i2}, \\ k, i \in [1, I], I = \left[\frac{b_{m2} - b_{m1}}{\Delta} \right]; l, j \in [1, J_i], J_i = \left[\frac{d_{i2} - d_{i1}}{\Delta} \right], \\ G_{mijkl} = \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{\xi_{i-i}}^{\xi_i} \int_{\zeta_{j-i}}^{\zeta_j} G_w(y_k - \xi, z_l - \zeta, M \Delta_t - t) d\xi d\zeta dt, \\ A_m = M - m + \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Уравнения (5.2.6) составляют численный аналог системы разрешающих уравнений пространственной нестационарной контактной задачи для

абсолютно твёрдого ударника и тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко.

Построения решений системы (5.2.6) проводится пошагово по времени. Отметим, что система уравнений (5.2.6) является нелинейной, так как четвёртое и пятое уравнения содержат искомые значения контактного давления p_{Mij} на M -ном шаге по времени. Для линеаризации системы уравнений (5.2.6) предлагается использовать итерационную процедуру. На нулевой итерации второе уравнение системы (5.2.6) заменяется следующим аналогом

$$u_{cM} = V_0 \tau + \frac{\Delta_t^2 \Delta^2}{m_u} \sum_{m=0}^{M-1} (M - m) \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} p_{mij}, p_{0ij} = 0. \quad (5.2.7)$$

Это позволяет определить перемещение u_{cM} без учета поля давления на шаге с номером M . Затем из третьего и четвертого уравнения определяются границы области интегрирования, а затем верхние значения I и J_i сумм в первом уравнении. После этого из первого уравнения вытекает система $I \times J$ линейных алгебраических уравнений, где $J = \sum_{i=1}^I J_i$, относительно $I \times J$ искомого значения контактного давления на M -ном шаге по времени. После их определения перемещение ударника u_{cM} уточняется с использованием второго уравнения системы (5.2.6). Затем уточняются границы области интегрирования, а также пределы верхние значения сумм I и J_i . После этого происходит пересчет поля значений контактного давления как решений первого уравнения в системе (5.2.6), эквивалентного системе $I \times J$ линейных алгебраических уравнений.

Таким образом, алгоритм решения системы (5.2.6) включает следующие операции.

1. На первом шаге определяется поле дискретных значений контактного давления p_{1ij} на элементарных квадратах K_{1ij} .

2. На втором и последующих шагах по времени первое уравнение системы (5.2.6) записывается в виде

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} G_{Mijkl} p_{Mij} = f_{kl} + u_{cM} - F_M, \quad (5.2.8)$$

$$F_M = \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} G_{mijkl} p_{mij},$$

где F_M – известная величина, так как её выражение содержит лишь значения контактного давления на предыдущих шагах по времени.

Уравнение (5.2.8) эквивалентно системе $I \times J$ линейных алгебраических уравнений, из которых определяются значения контактного давления p_{Mij} на элементарных квадратах K_{Mij} .

3. На каждом шаге по времени перемещение ударника и положение границ области интегрирования уточняется с помощью описанной выше итерационной процедуры.

4. Коэффициенты G_{mijkl} вычисляются численно-аналитически по формуле

$$G_{mijkl} \approx \tilde{G}_{mijkl} = \Delta_t \int_{\xi_{i-i}}^{\xi_j} \int_{\zeta_{j-i}}^{\zeta_j} G_w \left[y_k - \xi, z_l - \zeta, \left(M - \frac{2m-1}{2} \right) \Delta_t \right] d\xi d\zeta. \quad (5.2.9)$$

При этом структура функции влияния и метод её построения, описанный в п. 2.4, позволяют аналитически вычислить интегралы в правой части (5.2.9). Действительно, из (2.4.2) и (2.4.6)

$$G_w(y, z, \tau) = \sum_{n=0}^N G_{w,n}(z, \tau) \cos ny,$$

$$G_{w,n}(z, \tau) = \frac{1}{2\eta k \tau} G_{w,n}^{FL^{-1}}(0, s) H(\eta k \tau - |z|) +$$

$$+ \frac{1}{\eta k \tau} \sum_{h=1}^H \left\{ G_{w,n}^{FL^{-1}} \left[\frac{\pi h}{\eta k \tau}, s \right] \cos \left[\frac{\pi h z}{\eta k \tau} \right] \right\} H(\eta k \tau - |z|), \quad (5.2.10)$$

где, следуя п. 2.4, можно принять $N = 30$, $H = 10$.

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{mijkl} = & \Delta_t \Delta G_{0,mijl}(z, \tau_{Mm}) + \\ & + 2\Delta_t \sum_{n=1}^{30} \frac{1}{n} G_{n,mijl}(z, \tau_{Mm}) \sin(n\Delta/2) \cos n(y_k - i\Delta + \Delta/2), \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

$$\begin{aligned} G_{n,mijl} = & \frac{\Delta}{2\eta k \tau_{Mm}} G_{w,n}^{FL^{-1}}(0, s) H(\eta k \tau_{Mm} - |z_l - \zeta_j|) + \\ & + \frac{2}{\pi} \sum_{h=1}^{10} \frac{1}{h} \left[G_{w,n}^{FL^{-1}} \left(\frac{\pi h}{\eta k \tau_{Mm}}, s \right) \sin \left(\frac{\Delta}{2} \frac{\pi h}{\eta k \tau_{Mm}} \right) \cos \left(\frac{\pi h}{\eta k \tau_{Mm}} (z_l - j\Delta + \Delta/2) \right) \right] \times \\ & \times H(\eta k \tau_{Mm} - |z_l - \zeta_j|), \\ & \tau_{Mm} = \left(M - \frac{2m-1}{2} \right) \Delta_t. \end{aligned}$$

5. После определения положения границы области контакта и поля контактного давления в дискретные моменты времени, истинные нормальные перемещения оболочки снова определяются интегральным соотношением (5.1.4). Его дискретный аналог имеет вид

$$w(\alpha, z, \tau) = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} p_{mij} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \int_{\zeta_{j-i}}^{\zeta_j} G_w(\alpha - \xi, z - \zeta, \tau - t) d\xi d\zeta dt. \quad (5.2.12)$$

5.3. Примеры расчётов

В качестве примера рассмотрим нестационарное контактное взаимодействие круговой цилиндрической оболочки, радиуса $R=1$ и толщиной $h=0.025$ с абсолютно твердым ударником, ограниченным поверхностью, имеющей форму параболоида вращения:

$$f(y, z) = y^2 + z^2 + 1. \quad (5.3.1)$$

В качестве материала оболочки примем сталь со следующими характеристиками: $\rho = 7850$ кг/м³, $\lambda = 1.15 \times 10^{11}$ Па, $\mu = 7.69 \times 10^{10}$ Па, чему соответствуют безразмерные параметры: $\eta = 0.53$, $\gamma = 1.3 \times 10^{-6}$.

Рассмотрим влияние начальной скорости ударника на процесс нестационарного контактного взаимодействия. Примем к рассмотрению три её возможных значения $V_0 = 0.01$, $V_0 = 0.05$ и $V_0 = 0.1$.

На рис. 5.3.1 представлены зависимости перемещения центра масс ударника $u_c(\tau)$ от времени. Здесь и далее сплошная кривая соответствует $V_0 = 0.01$, штриховая – $V_0 = 0.05$, штрихпунктирная – $V_0 = 0.1$.

Поверхность контакта в данном случае представляет собой круг, граница которого совпадает с сечением поверхности $x = y^2 + z^2 + 1 - u_c(\tau)$ плоскостью $x = 1$ в текущий момент времени τ . Зависимости радиуса области контакта от времени для выбранных значений начальной скорости движения ударника представлены на рис. 5.3.2.

Кривые на рис. 5.3.3 иллюстрируют зависимости результирующей контактной силы $R(\tau)$ от времени.

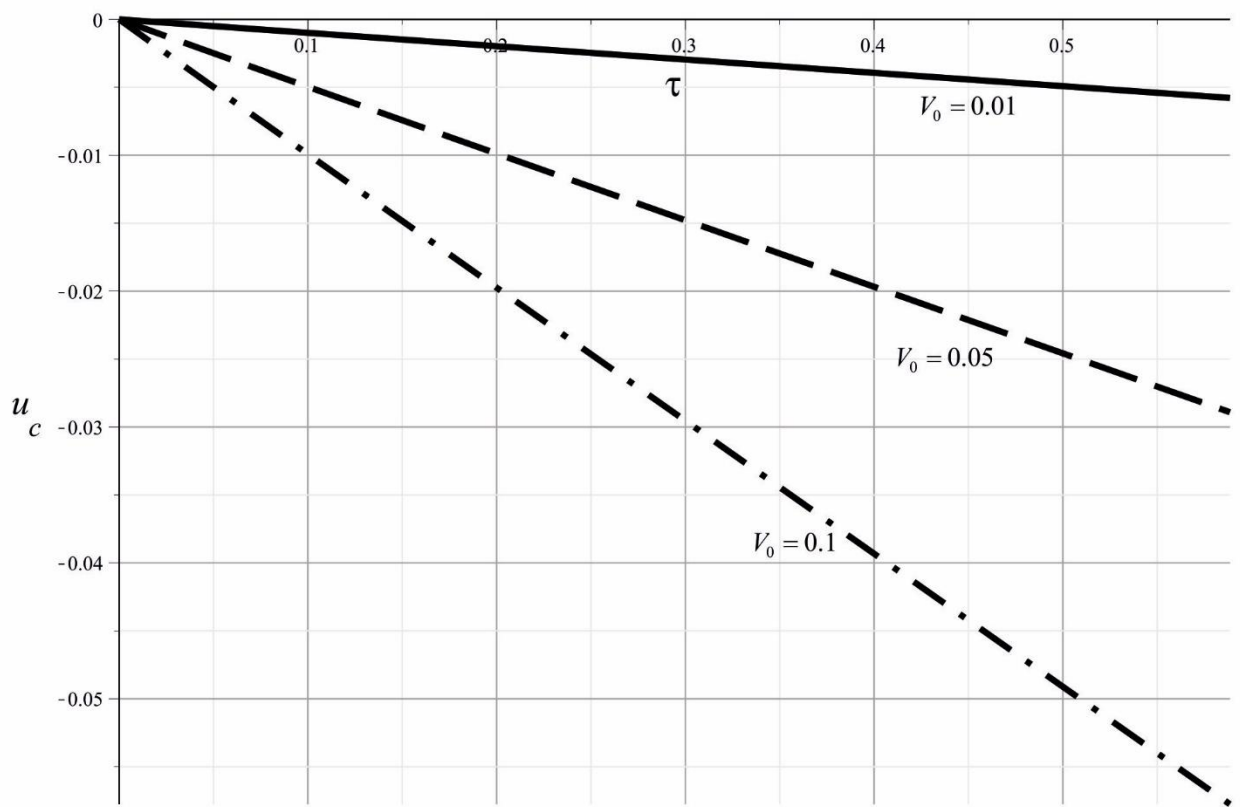


Рис. 5.3.1. Перемещение центра масс ударника.

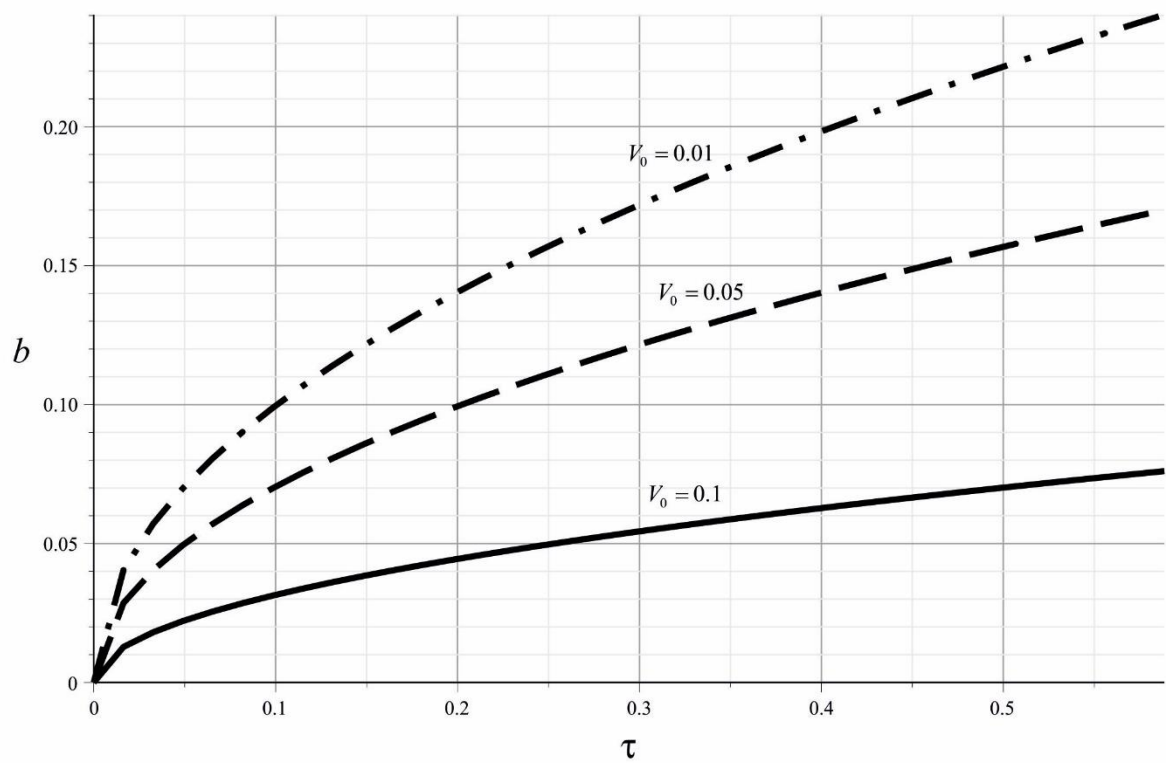


Рис. 5.3.2. Зависимость радиуса области контакта от времени.

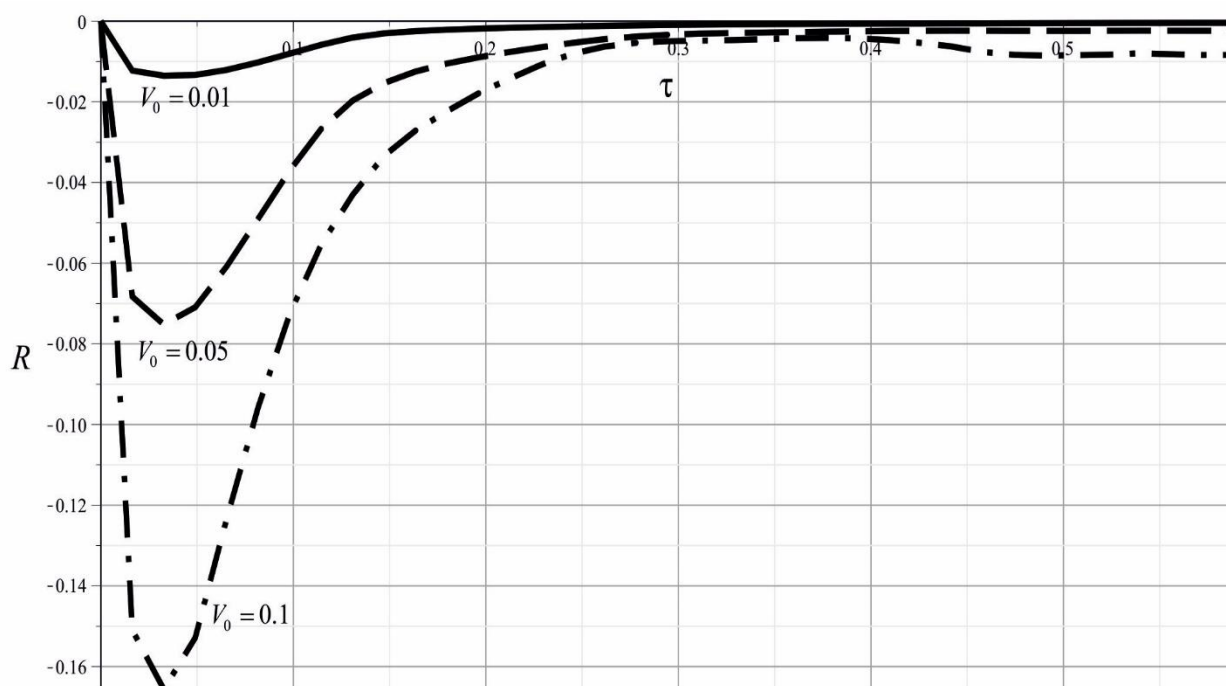


Рис. 5.3.3. Зависимости результирующей контактной силы от времени.

На рис. 5.3.4 изображены распределения контактного давления по координате α (с учётом предположения о том, что $y \approx \alpha$) в момент времени $\tau = 0.3$ при начальной скорости ударника $V_0 = 0.01$. Сплошная кривая соответствует координате $z = 0$, штриховая – $z = 0.15$, штрихпунктирная – $z = 0.3$.

Аналогичные графики представлены на рис. 5.3.5 для момента времени $\tau = 0.6$.

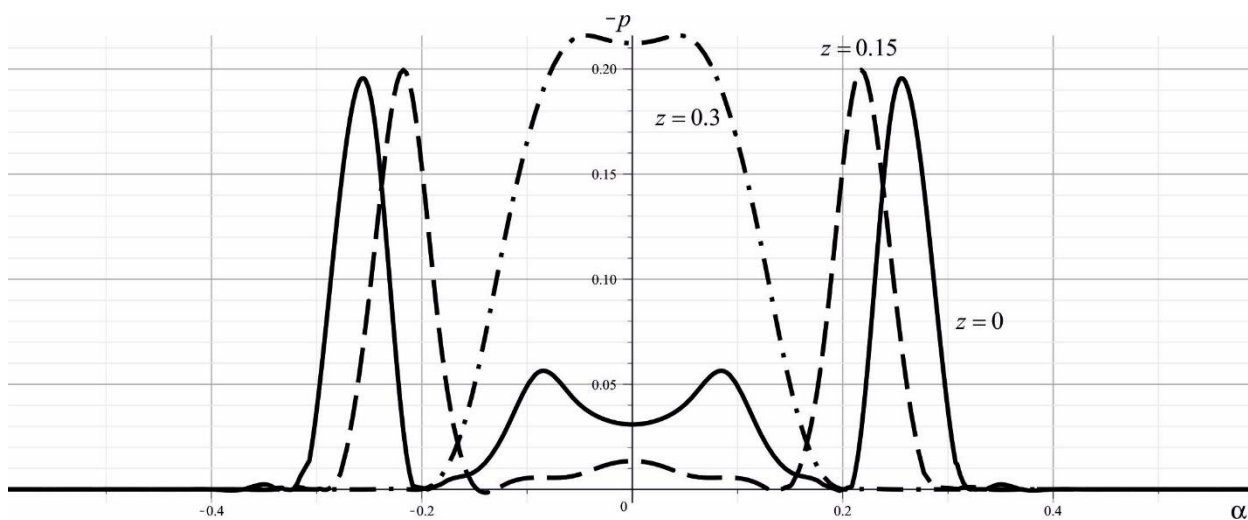


Рис. 5.3.4. Распределение контактного давления по угловой координате, $\tau = 0.3$, $V_0 = 0.01$.

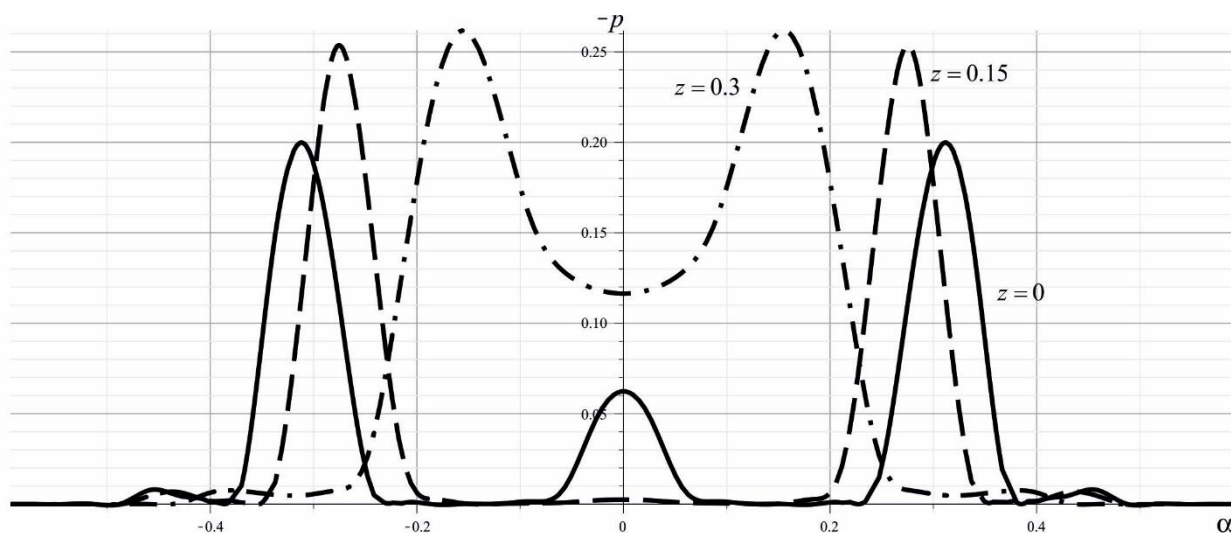


Рис. 5.3.5. Распределение контактного давления по угловой координате, $\tau = 0.6$, $V_0 = 0.01$.

Рис. 5.3.6 и 5.3.7 иллюстрируют распределения контактного давления по координате α в моменты времени $\tau = 0.3$ и $\tau = 0.6$ при начальной скорости ударника $V_0 = 0.05$. Сплошная кривая соответствует координате $z = 0$, штриховая – $z = 0.15$, штрихпунктирная – $z = 0.3$.

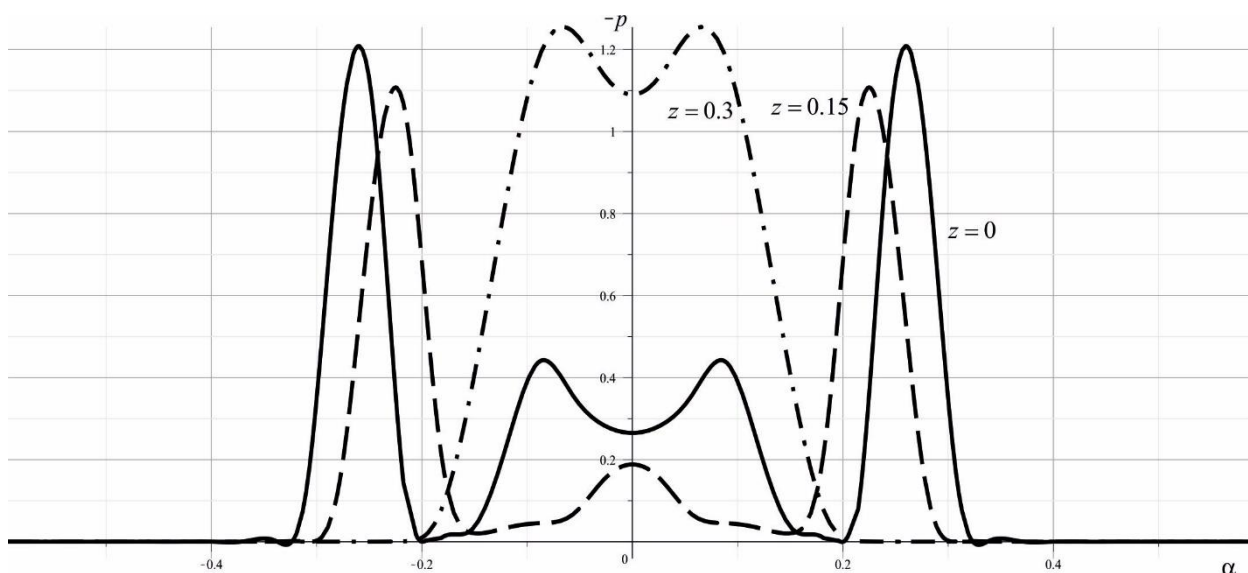


Рис. 5.3.6. Распределение контактного давления по угловой координате, $\tau = 0.3$, $V_0 = 0.05$.

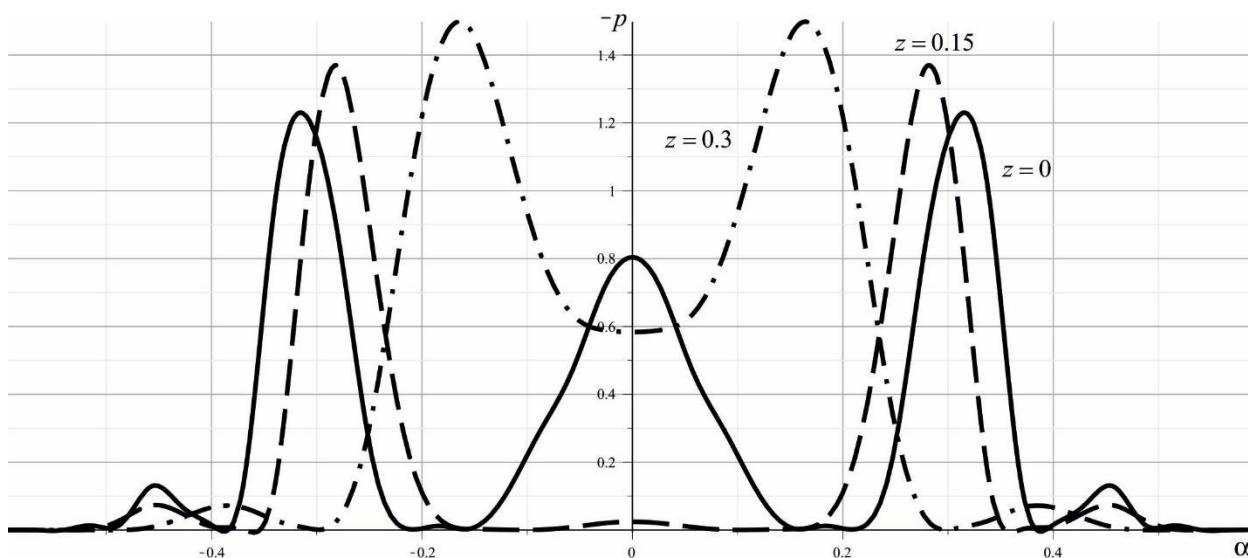


Рис. 5.3.7. Распределение контактного давления по угловой координате, $\tau = 0.6$, $V_0 = 0.05$.

Распределения контактного давления по координате α в моменты времени $\tau = 0.3$ и $\tau = 0.6$ при начальной скорости ударника $V_0 = 0.1$ представлено на рис. 5.3.8 и 5.3.9. Здесь, как и ранее, сплошная кривая соответствует координате $z = 0$, штриховая – $z = 0.15$, штрихпунктирная – $z = 0.3$.

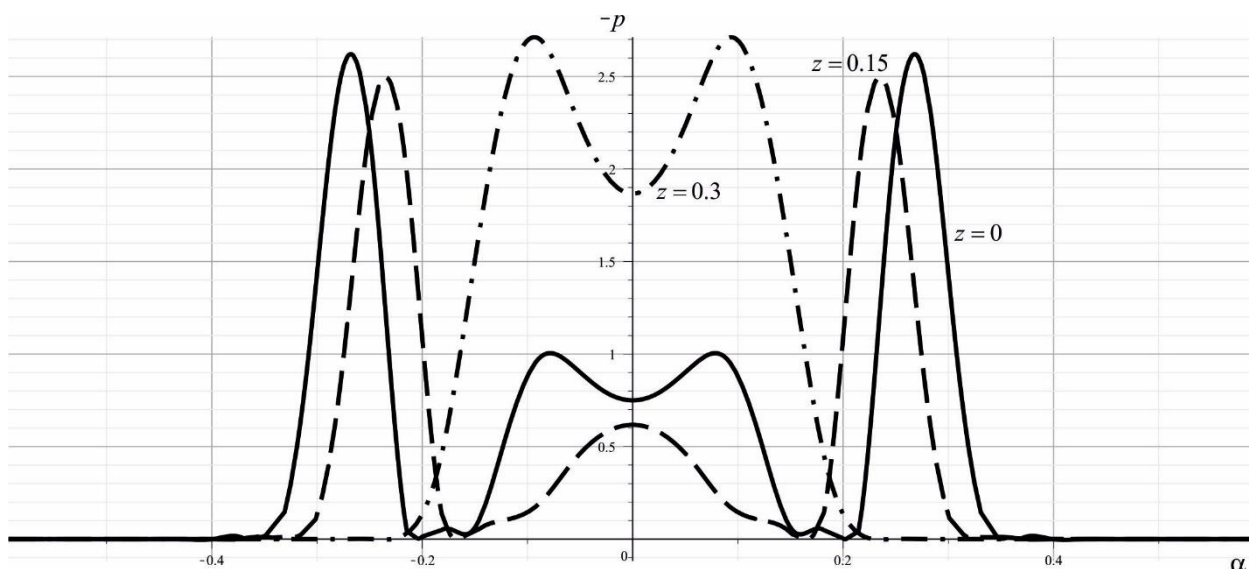


Рис. 5.3.8. Распределение контактного давления по угловой координате, $\tau = 0.3$, $V_0 = 0.1$.

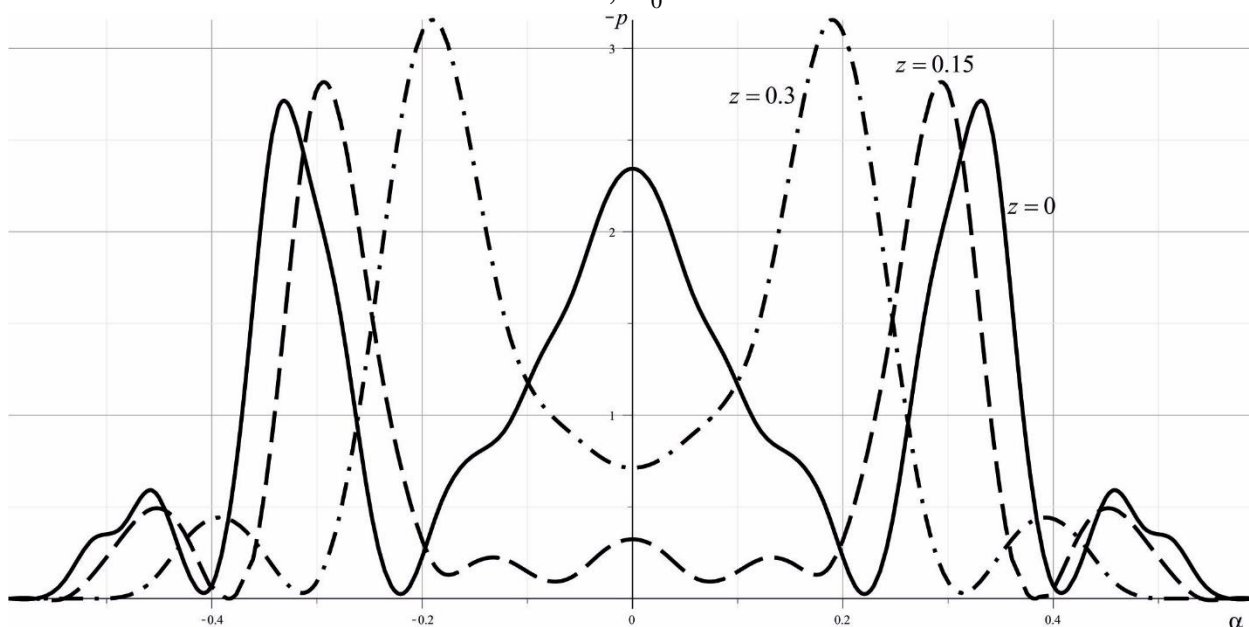


Рис. 5.3.9. Распределение контактного давления по угловой координате, $\tau = 0.6$, $V_0 = 0.1$.

Распределения контактных напряжений по координате z в моменты времени $\tau = 0.3$ и $\tau = 0.6$ при различных значениях начальной скорости движения ударника иллюстрируют рис. 5.3.10-5.3.15. Здесь сплошная кривая соответствует координате $\alpha = 0$, штриховая – $\alpha = 0.15$, штрихпунктирная – $\alpha = 0.3$.

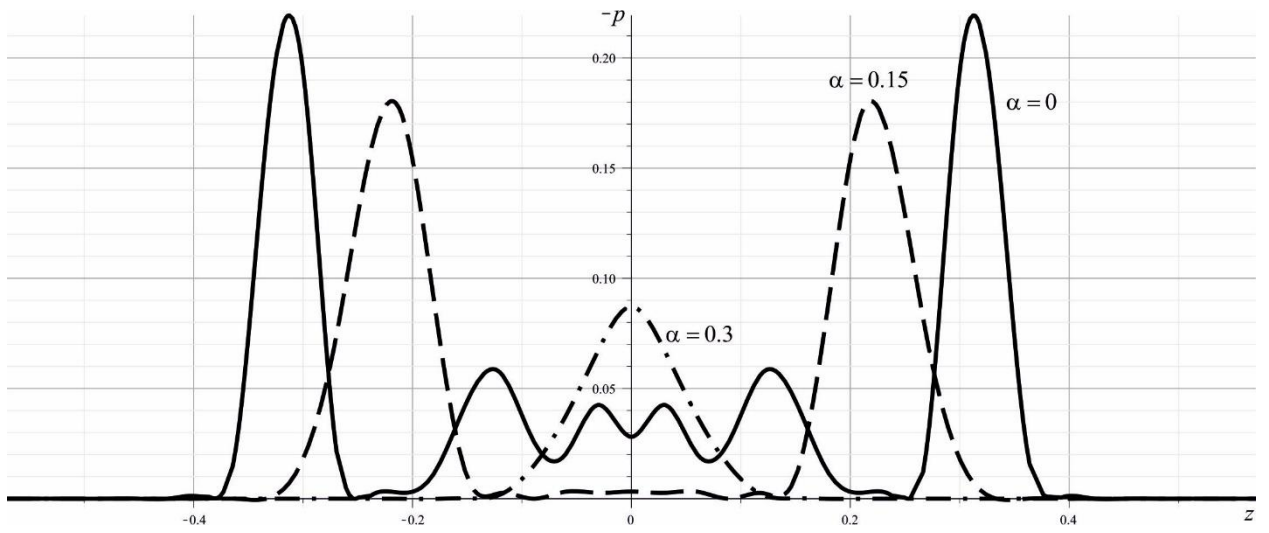


Рис. 5.3.10. Распределение контактного давления по координате z ,
 $\tau = 0.3, V_0 = 0.01$.

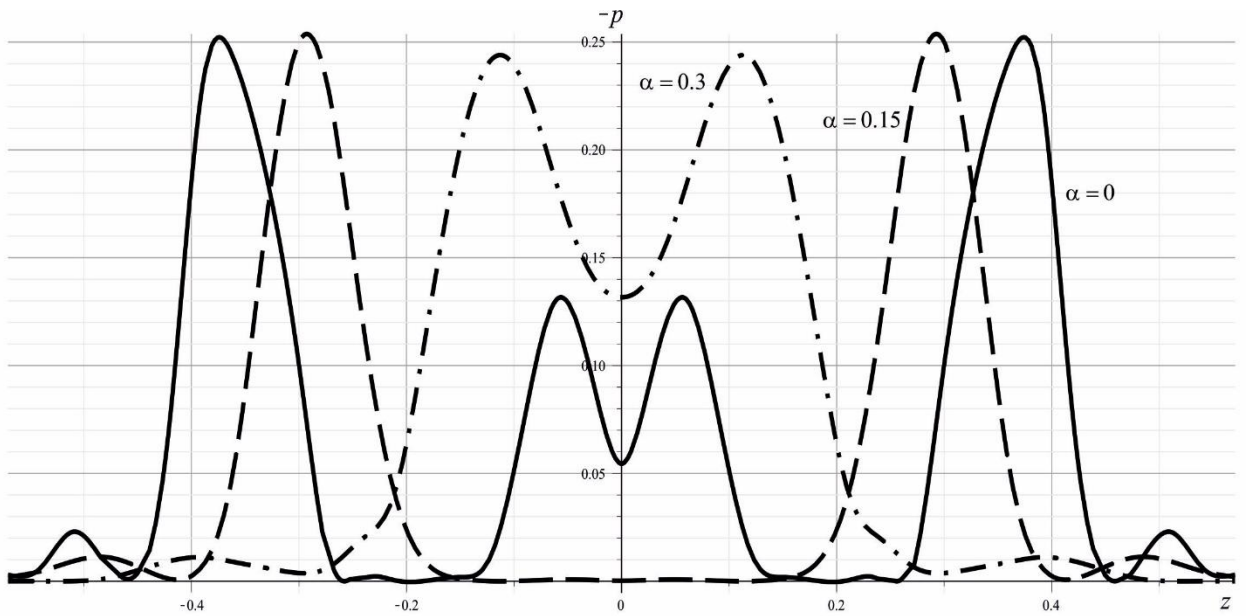


Рис. 5.3.11. Распределение контактного давления по координате z ,
 $\tau = 0.6, V_0 = 0.01$.

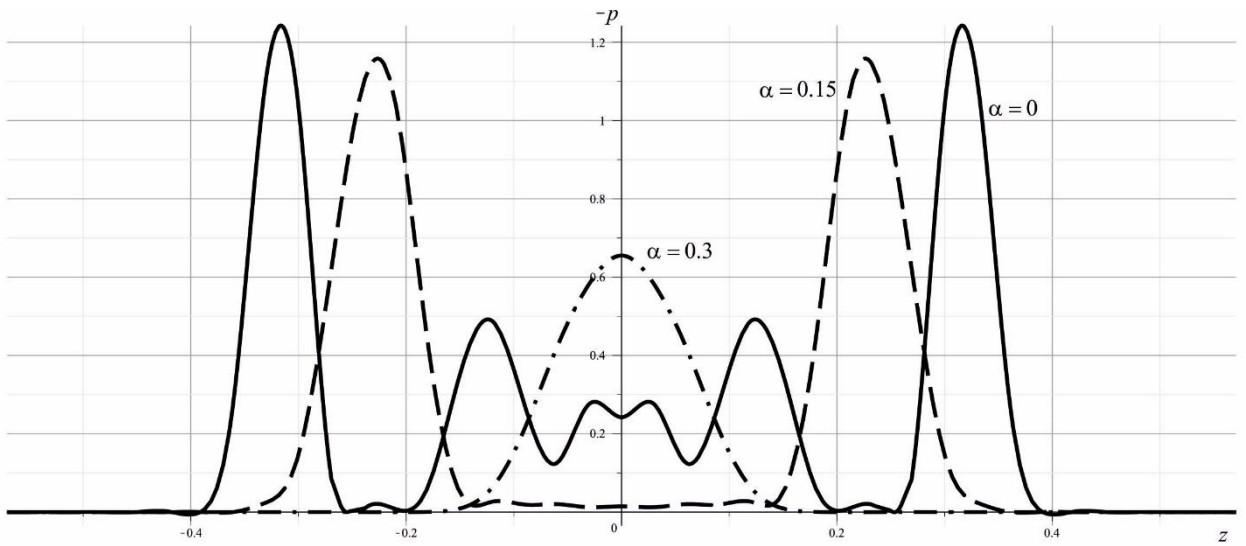


Рис. 5.3.12. Распределение контактного давления по координате z ,
 $\tau = 0.3, V_0 = 0.05$.

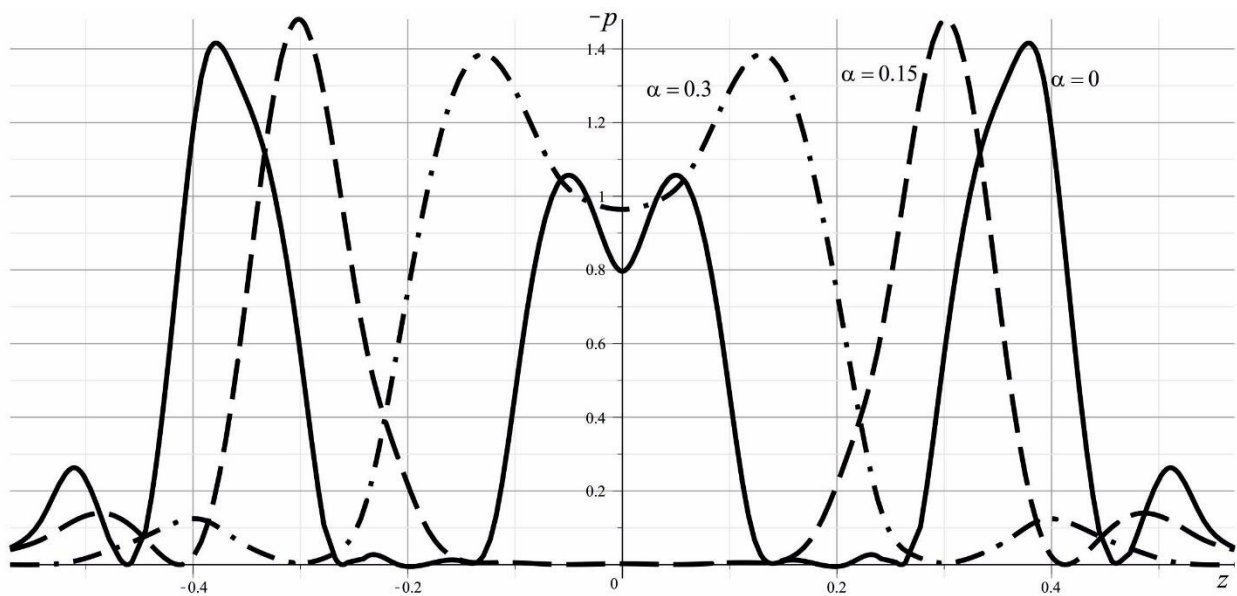


Рис. 5.3.13. Распределение контактного давления по координате z ,
 $\tau = 0.6, V_0 = 0.05$.

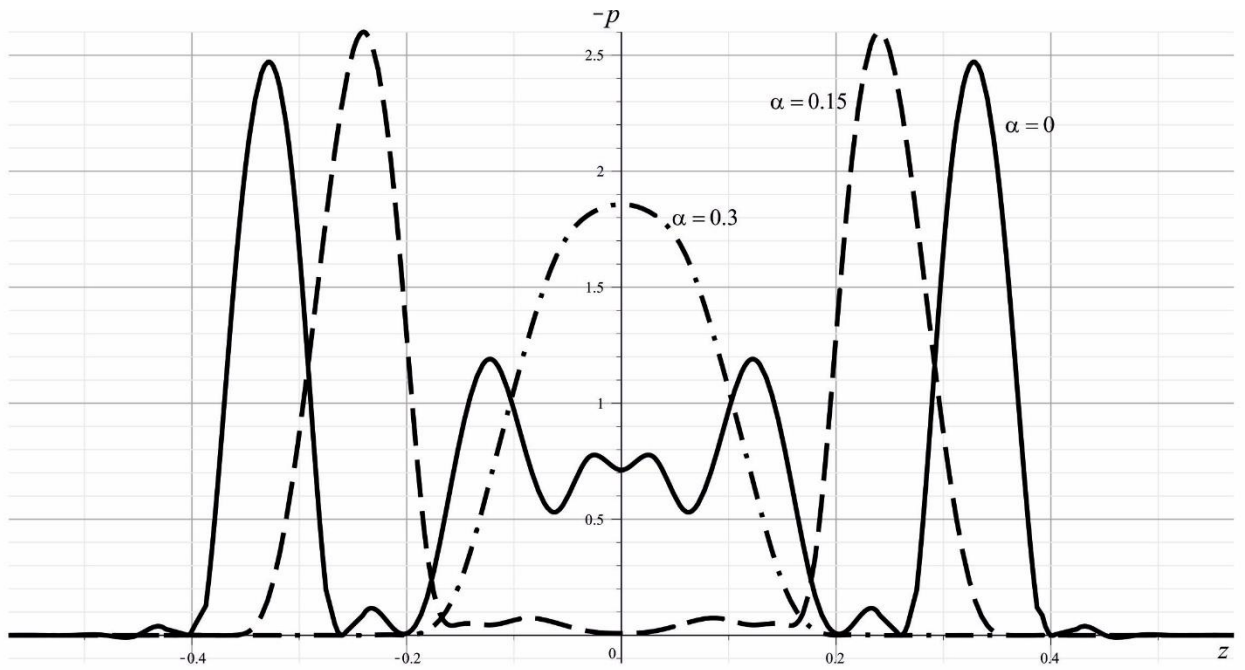


Рис. 5.3.14. Распределение контактного давления по координате z ,
 $\tau = 0.3, V_0 = 0.1$.

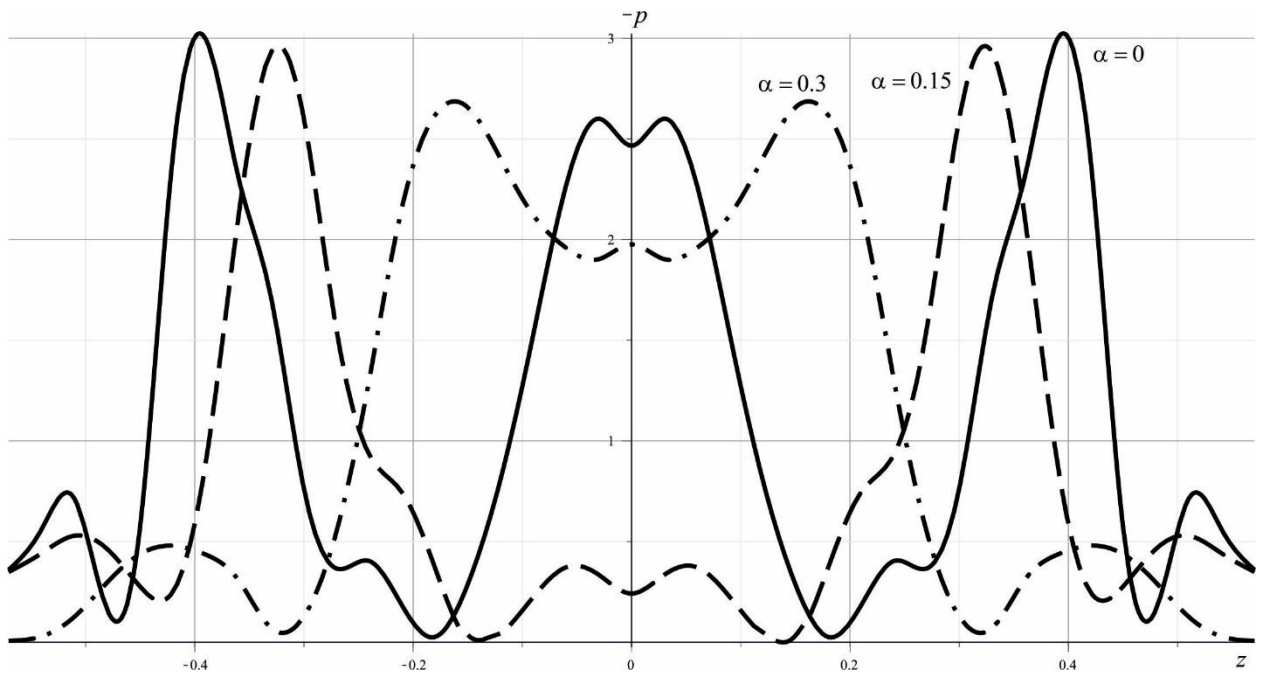


Рис. 5.3.15. Распределение контактного давления по координате z ,
 $\tau = 0.6, V_0 = 0.1$.

Распределение нормальных перемещений по угловой координате в момент времени $\tau = 0.6$ при $V_0 = 0.01$ представлено на рис. 5.3.16. Сплошная

кривая соответствует координате $z=0$, штриховая – $z=0.15$, штрихпунктирная – $z=0.3$. Аналогичные результаты приведены на рис. 5.3.17, 5.3.18 при значениях начальной скорости ударника $V_0 = 0.05$ и $V_0 = 0.1$ соответственно.

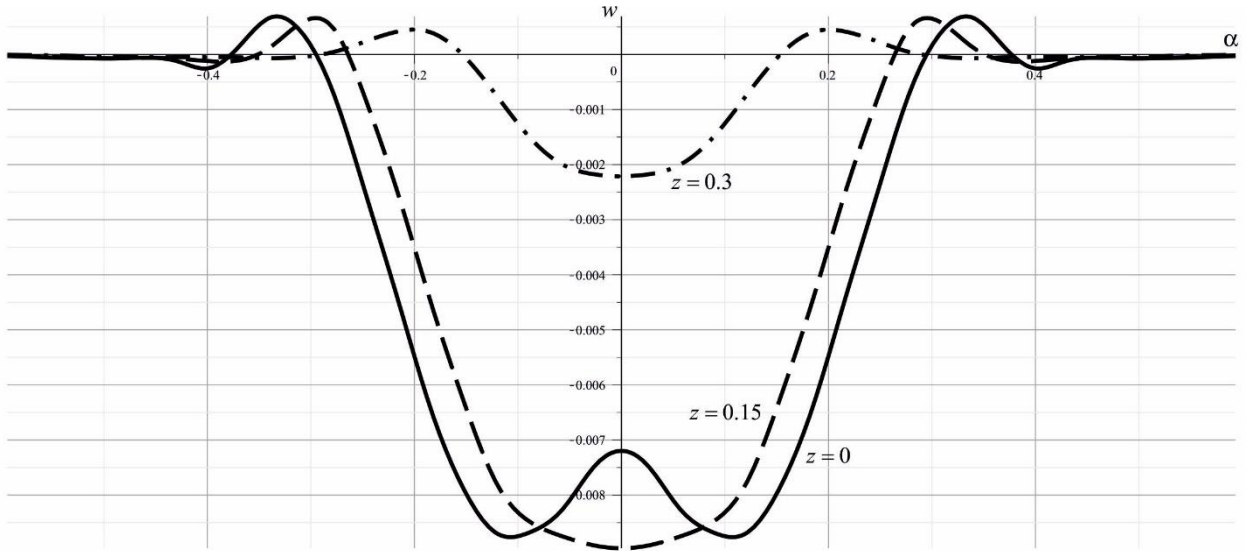


Рис. 5.3.16. Распределение нормальных перемещений по координате α , $\tau = 0.6$, $V_0 = 0.01$.

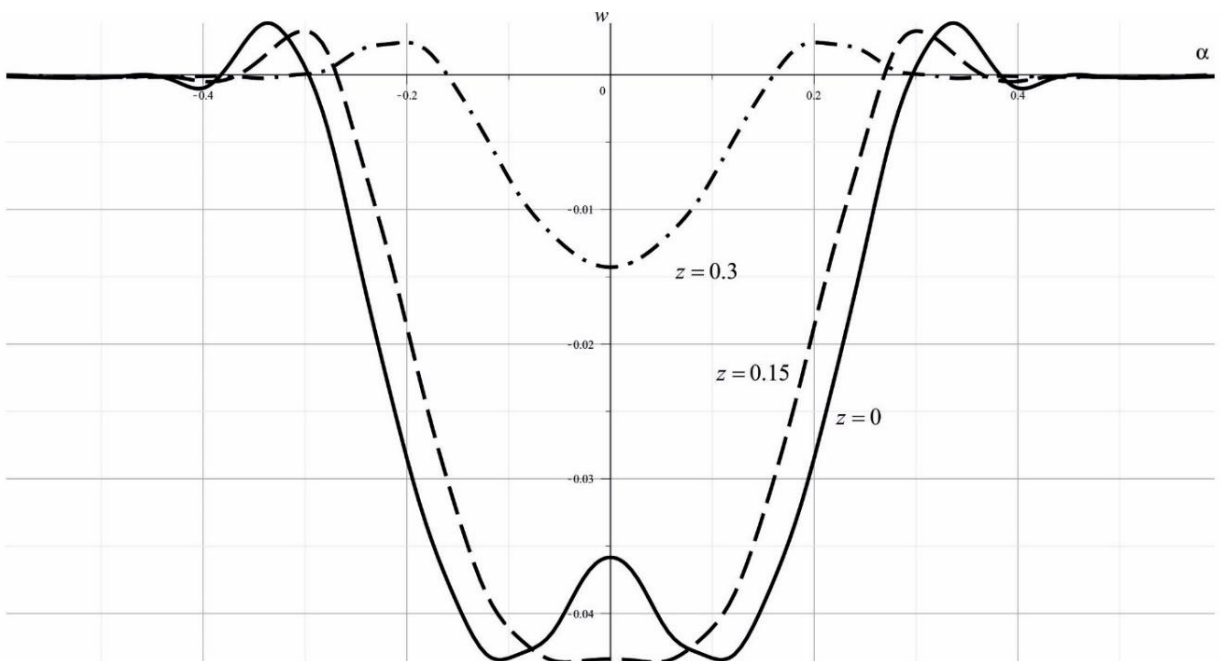


Рис. 5.3.17. Распределение нормальных перемещений по координате α , $\tau = 0.6$, $V_0 = 0.05$.

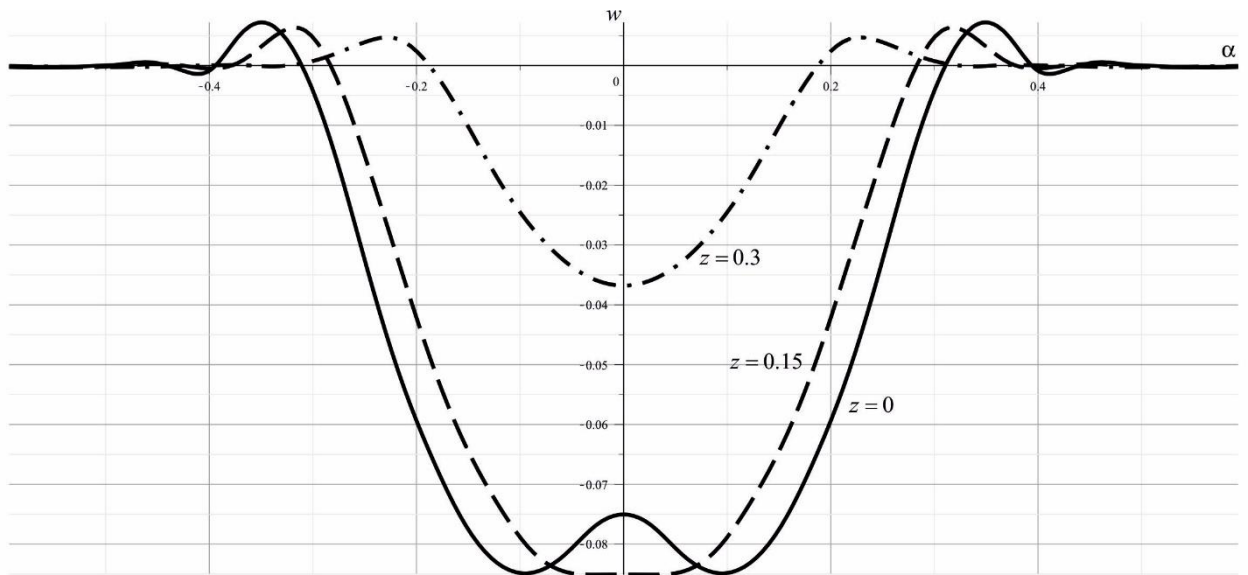


Рис. 5.3.18. Распределение нормальных перемещений по координате α ,
 $\tau = 0.6, V_0 = 0.1$.

Распределение нормальных перемещений по координате z в момент времени $\tau = 0.6$ для различных начальных скоростей движения ударника проиллюстрировано на рис. 5.3.19-56.3.21. Здесь сплошная кривая соответствует координате $\alpha = 0$, штриховая – $\alpha = 0.15$, штрихпунктирная – $\alpha = 0.3$.

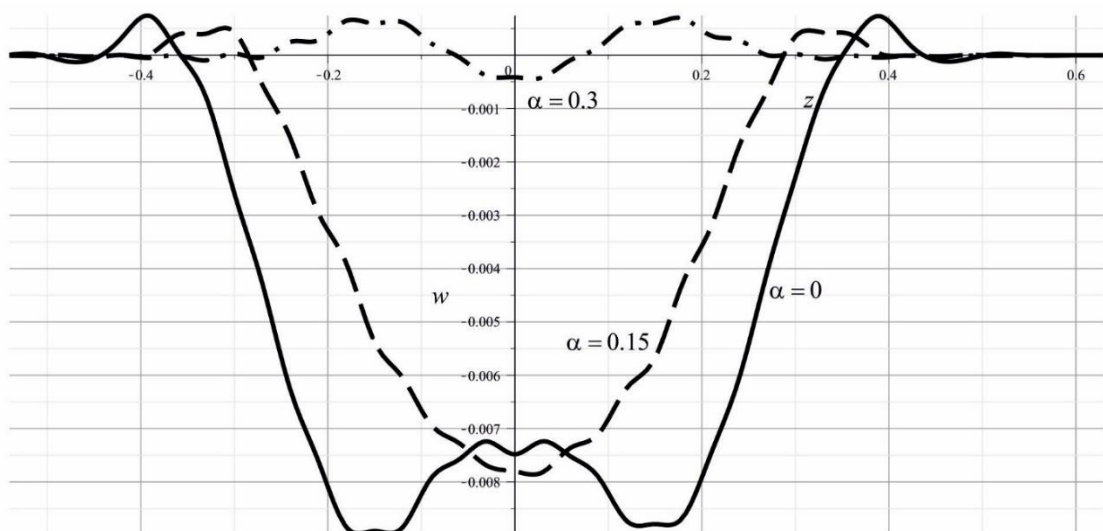


Рис. 5.3.19. Распределение нормальных перемещений по координате z ,
 $\tau = 0.6, V_0 = 0.01$.

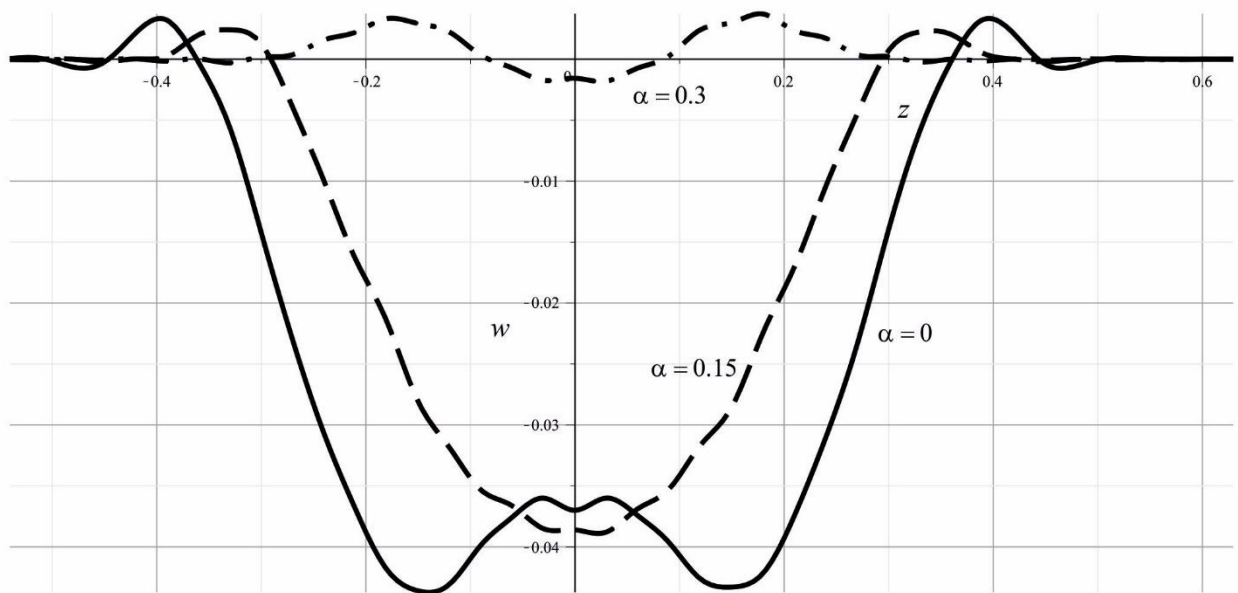


Рис. 5.3.20. Распределение нормальных перемещений по координате z , $\tau = 0.6$, $V_0 = 0.05$.

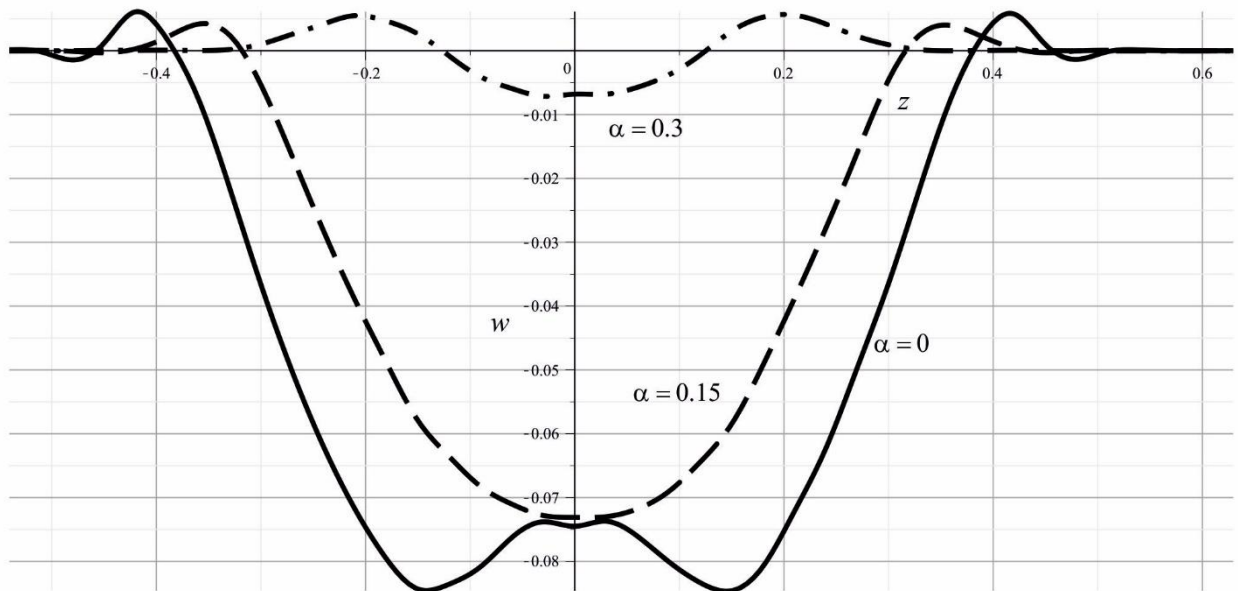


Рис. 5.3.21. Распределение нормальных перемещений по координате z , $\tau = 0.6$, $V_0 = 0.1$.

Пространственные распределения нормальных перемещений оболочки в момент времени $\tau = 0.6$ представлены на рис. 5.3.22-5.3.24. Рис. 5.3.22 соответствует значению начальной скорости $V_0 = 0.01$, рис. 5.3.23 – $V_0 = 0.05$, рис. 5.3.24 – $V_0 = 0.1$. Для большей наглядности значения нормальных перемещений на этих графиках увеличены в 10 раз.

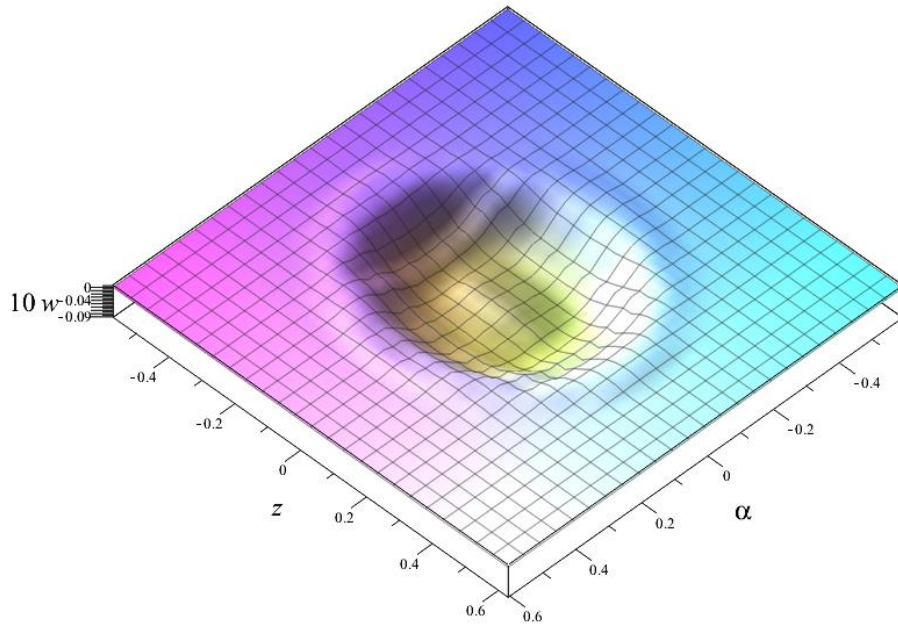


Рис. 5.3.22. Пространственное распределение нормальных перемещений,
 $\tau = 0.6$, $V_0 = 0.01$.

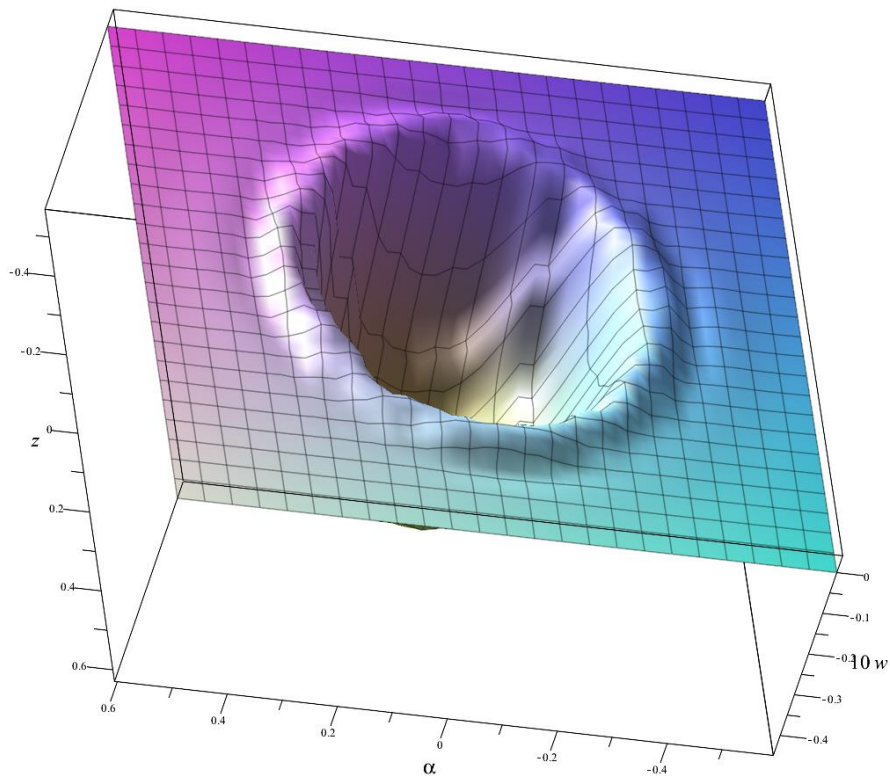


Рис. 5.3.23. Пространственное распределение нормальных перемещений,
 $\tau = 0.6$, $V_0 = 0.05$.

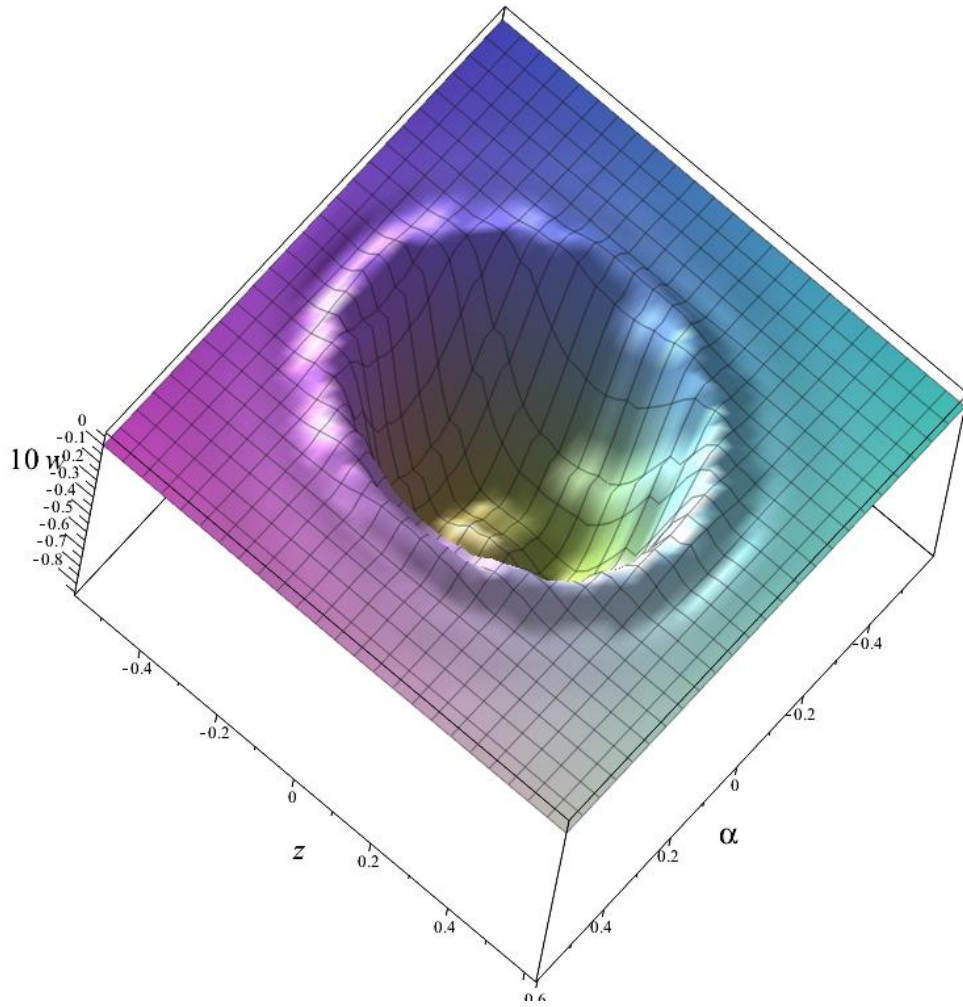


Рис. 5.3.24. Пространственное распределение нормальных перемещений,
 $\tau = 0.6$, $V_0 = 0.1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы.

1. Дана математическая постановка нестационарных контактных задач для тонких цилиндрических и сферических оболочек с заполнителем и без него и упругого полупространства при учете подвижности границ и многосвязности области контакта.

2. Развита и обобщена методика решения таких контактных задач, основанная на использовании функций влияния, включающая итеративный процесс для определения области контакта. Доказана эффективность применяемого подхода к решению за счёт существенного снижения размерности исследуемых задач.

3. Построены и исследованы нестационарные двумерные и пространственные функции влияния для цилиндрических и сферических оболочек с заполнителем и без него.

4. Построено решение нестационарных двумерных контактных задач с подвижными границами для цилиндрических или сферических оболочек и упругого полупространства. Предложено и реализовано два подхода, справедливые на сверхзвуковом и произвольном этапе контактного взаимодействия. Проведено сравнение и показано совпадение результатов, полученных и использованием этих подходов.

5. Получены решения нестационарных контактных задач для двух цилиндрических или сферических оболочек с учётом упругого заполнителя. Проведен анализ влияния наличия заполнителя на процесс контактного взаимодействия.

6. Для произвольного временного интервала разработан и реализован алгоритм решения пространственной нестационарной контактной задачи с подвижными границами для цилиндрической оболочки и абсолютно твёрдого

ударника, ограниченного гладкой выпуклой поверхностью. Получены и проанализированы результаты расчётов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Абузяров М.Х., Баженов В.Т., Котов В.Л., Кочетков А.В., Крылов С.В., Фельдгун В.Р.* Метод распада разрывов в динамике упругопластических сред // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2000. – Т. 40. – № 6. – С. 940-953.
2. *Айзикович С.М., Александров В.М. и др.* Механика контактных взаимодействий. – М.: Физматлит, 2001. – 672 с.
3. *Александров В.М., Горячева И.Г., Торская Е.В.* Пространственная задача о движении гладкого штампа по вязкоупругому полупространству // Доклады Академии наук. – 2010. – Т. 430. – № 4. – С. 490-493.
4. *Александров И.А., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Ударное взаимодействие тонких упругих оболочек типа Тимошенко // Матер. XIV Междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред» им. А.Г. Горшкова. – М., 2008. – Т.1. – С. 12-13.
5. *Александров И.А., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Плоская нестационарная контактная задача об ударе двух оболочек типа Тимошенко // Матер. II междунар. научн. конф. «Современные проблемы механики и математики» – Украина, Львов, 2008. – Т.2. – С. 15-16.
6. *Александров И.А., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Ударное взаимодействие упругих оболочек типа Тимошенко // Проблемы нелинейной динамики деформируемого твердого тела: Труды Второй международной конференции. Казань, 8-11 декабря 2009 г. / научн. ред. С.А. Кузнецов – Казань: гос. ун-т, 2009. – С. 29-30.
7. *Александров И.А., Федотенков Г.В.* Плоская нестационарная контактная задача с подвижными границами для двух круговых оболочек типа Тимошенко // Матер. XIII Междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред» им. А.Г. Горшкова. – М., 2007. – С. 18-19.
8. *Александрова Н.И.* Численно-аналитическое исследование процесса ударного погружения трубы в грунт с сухим трением. Ч. I: Внешняя среда не

- деформируема // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2012. № 5. С. 104-119.
9. *Александрова Н.И.* Численно-аналитическое исследование процесса ударного погружения трубы в грунт с сухим трением. Ч. II. Внешняя среда деформируема // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2013. № 3. С. 91-106.
10. *Амар Абдул Карим Салман, Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Удар деформируемым цилиндрическим телом по упругому полупространству // Изв. РАН. МТТ – 2004. – № 3. – С. 82-90.
11. *Амензаде Ю.А.* Теория упругости. – М.: Высшая школа, 1976. – 272 с.
12. *Ананьев И.В., Бабешко В.А.* Вибрация штампа на слое с переменными по глубине свойствами // Изв. АН СССР. МТТ. – 1978. – № 1. – С. 64-69.
13. *Ананьев И.В., Калинин В.В., Полякова И.Б.* О возбуждении волн вибрирующим штампом в среде с неоднородными начальными напряжениями // Прикладная математика и механика. – 1983. – Т. 47. – № 3. – С. 483-489.
14. *Афанасьева О.А., Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В.* Нестационарное контактное взаимодействие сферической оболочки и упругого полупространства // Математические проблемы механики неоднородных структур / Львов: Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины, 2010. – С. 348-349.
15. *Афанасьева О.А., Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В.* Произвольный этап нестационарного контактного взаимодействия
16. тврия сферической оболочки и упругого полупространства // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2012. – Вип. 20. – С. 19-26.
17. *Афанасьева О.А., Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Произвольный этап взаимодействия сферической и упругого полупространства // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: Збірник наукових праць / Дніпропетровський національний університет. – Дніпропетровськ, 2010. – Вип. 11. – С. 24-31.

18. *Афанасьева О.А., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Нестационарная контактная задача об ударном взаимодействии тонких упругих оболочек // Теория оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур: материалы междунар. науч. конф., 16–20 сент. 2013 г., г. Минск, Беларусь. – Минск: Изд. центр БГУ, 2013. – С. 64-67.
19. *Афанасьева О.А., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Пространственная нестационарная контактная задача для двух сферических оболочек // Сборник научных трудов IX Международной научной конференции «Математические проблемы механики неоднородных структур» - Львов: Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины. – 2014, С. 239-141.
20. *Бабешко В.А.* Обобщённый метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256с.
21. *Бабешко В.А.* Факторизация одного класса матриц-функций и её приложения // ДАН СССР. – 1975. – Т. 223. – № 5. – С.1094 - 1097.
22. *Бабешко В.А.* Новый метод в теории пространственных динамических смешанных задач // ДАН СССР. – 1978. – Т. 242. – №1. – С. 62-65.
23. *Бабешко В.А., Белянкова Т.И., Калинин В.В.* Метод фиктивного поглощения в задачах теории упругости для неоднородного полупространства // Прикладная математика и механика. – 2002. – Т. 66. – № 2. – С. 276-284.
24. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В.* Об особенностях в угловых точках пространственных штампов в контактных задачах // Доклады Академии наук СССР. – 1981. – Т. 257. – № 2. – С. 289.
25. *Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Об одном методе в теории динамических контактных задач для круглых штампов // Изв. АН СССР. МТТ. – 1981. – №2. С. 22-28.
26. *Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Метод фиктивного поглощения в плоских динамических задачах // ПММ. – 1980. – Т.44. – Вып. 3. – С.477- 484.
27. *Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Об одном методе решения систем интегральных уравнений, порождаемых динамическими контактными задачами со

- сцеплением / Ростовский Государственный университет. Ростов-на-Дону, 1980. 19 с. Деп. в ВИНТИ 22.07.80, № 3218-80.
28. *Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Метод фиктивного поглощения в пространственных динамических задачах теории упругости / Ростовский
29. *Баженов В.Г., Брагов А.М., Котов В.Л.* Экспериментально-теоретическое исследование процессов проникания жестких ударников и идентификация свойств грунтовых сред // Прикладная механика и техническая физика. – 2009. – Т. 50. – № 6 (298). – С. 115-125.
30. *Баженов В.Г., Брагов А.М., Котов В.Л., Кочетков А.В.* Исследование удара и проникания тел вращения в мягкий грунт // Прикладная математика и механика. – 2003. – Т. 67. – № 4. – С. 686.
31. *Баженов В.Г., Кочетков А.В., Крылов С.В., Фельдгун В.Р.* Численное решение двумерных нестационарных задач взаимодействия тонкостенных конструкций с грунтовыми средами // Прикл. пробл. прочн и пластич. Методы реш. задач упруг. и пластич. Горький, 1984. – С. 52-59.
32. *Баженов В.Г., Демарева А.В., Жестков М.Н., Кибец А.И.* Особенности численного моделирования упругопластического выпучивания полусферических оболочек при нагружении жестким индентором // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 2. – С. 22-33.
33. *Баженов В.Г., Павленкова Е.В., Артемьева А.А., Иванов В.А., Жестков М.Н.* Решение осесимметричной задачи устойчивости упругопластических оболочек вращения при комбинированном нагружении МКЭ // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2013. – № 1-3. – С. 19-24.
34. *Бакулин В.Н., Овчаров П.Н., Потопахин В. А.* Экспериментальное исследование деформаций тонких конических оболочек в процессе проникания в грунт // Тр. 14 Всес. конф. по теории пластин и оболочек, Кутаиси, 1987 г. – Т. 1. – Тбилиси, 1987. – С. 164-169.

35. Бакулин В.Н., Овчаров П.Н., Потопахин В.А. Экспериментальное исследование деформаций тонких конических оболочек в процессе проникания в грунт // Изв. АН. МГТ. – 1988. – № 4. – С. 188-191.
36. Баландин Вл.В., Баландин Вл.Вл., Брагов А.М., Котов В.Л. Экспериментальное изучение динамики проникания твердого тела в грунтовую среду // Журнал технической физики. 2016. Т. 86. № 6. С. 62-70.
37. Баландин В.В., Брагов А.М. Экспериментальная методика измерения сил сопротивления при взаимодействии ударника с грунтовой средой // Прикл. пробл. прочн. и пластич.: методы реш. Н.-Новгород, 1991. – С. 101-104.
38. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2003. – 632 с.
39. Белянкова Т.И., Калинин В.В. О взаимодействии осциллирующего штампа с предварительно напряженным полупространством // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57. № 4. С. 123-134.
40. Белянкова Т.И., Калинин В.В. Динамика массивного тела, взаимодействующего с предварительно напряженным полупространством // Известия Академии наук. Механика твердого тела. – 1994. – № 6. – С. 83-94.
41. Бивин Ю.К. Косой вход группы тел в упругопластическую среду // Изв АН. МГТ. – 1993. – № 4. – С. 172-173.
42. Бивин Ю.К., Викторов В. В., Коваленко Б.Я. Определение динамических характеристик грунтов методом пенетрации // Изв. АН. МГТ. – 1980. – № 3. – С. 105-110.
43. Бирюков Д.Г., Кадомцев И.Г. Динамический упругопластический контакт ударника и сферической оболочки // Прикладная механика и техническая физика. – 2002. – Т. 43. – № 5 (255). – С. 171-175.
44. Бобров А.В. Удар сферической оболочки о грунт // Взаимод. пластин и оболочек с жидкостью и газом. М., 1984. – С. 122-127.
45. Богданов В.Р., Попов С.Н. Вертикальный удар сферической оболочки об упругое полупространство // Тр. 17 научн. конф. мол. ученых ин-та мех. АН Украины, Киев, 19-22 мая, 1992 г. Киев, 1992.

46. *Болдырев И.П., Федотенков Г.В.* Нестационарное взаимодействие тонких упругих оболочек // Тезисы докладов Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». 2014г., Москва – М.: Издательство МАИ, 2014. – С. 9.
47. *Болдырев И.П., Федотенков Г.В.* Нестационарная контактная задача для тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки с наполнителем и упругого полупространства // Тезисы докладов II Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». 2015г., Москва – М.: Издательство ООО "ТР-принт", 2015. – С. 26-27.
48. *Брагов А.М., Баландин В.В., Котов В.Л., Баландин В.В., Линник Е.Ю.* Экспериментальное исследование удара и проникания конического ударника в мерзлый песчаный грунт // Прикладная механика и техническая физика. 2018. Т. 59. № 3 (349). С. 111-120.
49. *Брычков Ю.А., Прудников А.П., Маричев. О.И.* Интегралы и ряды. // М.: Наука, 1991. – 797 с.
50. *Бугаев Н.М., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Нестационарное контактное взаимодействие тонкой упругой цилиндрической оболочки с наполнителем и упругого полупространства // Тезисы докладов X Всероссийской школы-семинара «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» 25-30 мая 2015г. – Ростов-на-Дону: Изд.-во Южного федерального университета, 2015. – С. 116.
51. *Бухарев Ю.Н., Кораблев А.Е., Хаймова М.И.* Экспериментальное определение касательных напряжений на поверхности ударника при динамическом внедрении в грунт // Изв. АН. МТТ. – 995. – № 2. – С. 186-188.
52. *Велданов В.А., Федоров С.В.* Особенности поведения грунта на границе контакта с недеформируемым ударником при проникании // Прикладная механика и техническая физика. – 2005. – Т. 46. – № 6 (274). – С. 116-127.

53. *Вестяк В.А., Гачкевич А.Р., Мусий Р.С., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Двумерные нестационарные волны в электромагнитоупругих телах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2019. – 288 с.
54. *Вестяк А.В., Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В.* Нестационарное взаимодействие деформируемых тел с окружающей средой // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Мех. деформ. тверд. тела. – 1983. – Т. 15. – С. 69-148.
55. *Вестяк А.В., Игумнов Л.А., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Воздействие нестационарного давления на тонкую сферическую оболочку с упругим наполнителем // Вычислительная механика сплошных сред. – 2016. – Т. 9. – № 4. – С. 443–452.
56. *Вестяк А.В., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Нестационарное контактное взаимодействие цилиндрической оболочки и упругой полуплоскости // Тезисы докл. V межд. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплошн. сред». М.: изд-во ГАФОС, 1999. – С. 10.
57. *Вестяк А.В., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Нестационарная контактная задача об ударе деформируемой цилиндрической оболочкой по упругому полупространству. // Тезисы докл. VI межд. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплошн. сред» ». М.: изд-во ГАФОС, 2000. – С. 10-11.
58. *Вестяк А.В., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Ударное взаимодействие тонкой цилиндрической оболочки с упругим полупространством с учетом многосвязности области контакта // Матер. VII Междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред.». – М.: Изд-во «Граффросс», 2001. – С. 10.
59. *Вестяк А.В., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Нестационарное контактное взаимодействие тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки с упругим полупространством // VIII Всероссийский съезд по теор. и прикл. механ. Аннот. докл. – Екатеринбург: УрО РАН, 2001. – С. 151–152.
60. *Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В.* Интегральное представление характеристик нестационарного электромагнитного поля в движущейся полуплоскости // Доклады Академии наук. – 2015. – Т. 460. – № 3. – С. 279.

61. *Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В.* Нестационарное осесимметричное деформирование упругого пространства со сферической полостью под действием объемных сил // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2016. – № 4. – С. 48-54.
62. *Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В.* Нестационарное осесимметричное электромагнитное поле в деформирующейся сферической оболочке // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2015. – Т. 157. – № 4. – С. 90-95.
63. *Вестяк В.А., Федотенков Г.В.* Алгоритм численного обращения преобразования Лапласа в классе обобщенных функций, образующих алгебру со сверткой // Прикладная математика и математическая физика. – 2015. – Т. 1. – №1. – С. 67–76.
64. *Власова И.П.* Взаимодействие пологой сферической оболочки с преградами // Прочн., устойч. и колеб. элементов констр. летат. аппаратов. М., 1986. С. 4-10.
65. *Воленко А.К., Пряжевский Р.Д., Оконечников А.С., Федотенков Г.В.* Аналитический метод решения некоторых плоских нестационарных контактных задач с подвижными границами // Материалы XXIII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова – М., 2017. – Т. 2. – С. 21-22.
66. *Воленко А.К., Сапожников Г.А., Федотенков Г.В.* Численный алгоритм обращения интегрального преобразования Лапласа в задаче о воздействии нестационарного внешнего давления на тонкую круговую цилиндрическую оболочку // Материалы XXIII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова – М., 2017. – Т. 2. – С. 22-25.
67. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
68. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 304 с.

69. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции. Вып. 1: Обобщенные функции и действия над ними. – М.: Физматгиз, 1959. – 470 с.
70. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В.* Об особенностях поля упругих напряжений в окрестности вершины клиновидной пространственной трещины // Известия Академии наук. Механика твердого тела. – 1992. – № 4. – С. 82.
71. *Горшков А.Г.* Нестационарное взаимодействие пластин и оболочек со сплошными средами // Изв. АН. МТТ. – 1981. – № 4. – С. 177-189.
72. *Горшков А.Г., Колодяжный В.А.* Нормальный удар конических оболочек о грунт // Тр. 16 междунар. конф. по теории пластин и оболочек, Н-Новгород, 21-23 сент., 1993 г. Т. 1. Н-Новгород, 1994. – С. 72-76.
73. *Горшков А.Г., Лобода А.И.* Вертикальный удар цилиндрической оболочки о грунт // Взаимод. пластин и оболочек с жидк. и газом. М., 1984. – С. 128-135.
74. *Горшков А.Г., Лобода А.И.* Удар цилиндрических оболочек о деформируемые преграды // 13 Всес. конф. по теории пластин и оболочек, Таллинн, 1983 г. Ч. 2. Таллинн, 1983. – С. 18-22.
75. *Горшков А.Г., Лобода А.И., Смелянский С.В.* Динамическое поведение оболочек вращения при взаимодействии со сплошной средой // Колеб. упруг. констр. с жидк.: Сб. науч. докл. 5 Всес. симп., Новосибирск, 1982 г. М., 1984. – С. 90-94.
76. *Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.* Волны в сплошных средах: Учеб. пособ. для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
77. *Горшков А.Г., Медведский А.Л., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Нестационарные контактные задачи с подвижными границами для деформируемого тела и полупространства // Известия высших научных заведений Северо-Кавказский регион. – 2000. – №3 – С. 41-46.
78. *Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В.* Динамика абсолютно твердой сферической оболочки с наполнителем при ударе по упругому полупространству // II Всес. конф. по мех. неоднор. структур, Львов, 1987: Тез. докл. – Т. 1. – Львов, 1987. – С. 74-75.

79. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамическая контактная задача для круговой цилиндрической оболочки и упругого полупространства // Прочность пластин и оболочек при комбинированных воздействиях. – М.: МАИ, 1987. – С. 16-25.
80. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 352. с.
81. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. – М.: Наука, 1990. – 264 с.
82. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Удар цилиндрической оболочкой по упругому полупространству // Тр. XVI Гагаринских научн. чтений по космонавтике и авиации, Москва, 1986. М., 1987. – С. 165.
83. Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В. Динамическая контактная задача для круговой цилиндрической оболочки и упругого полупространства // Прочность пластин и оболочек при комбинированных воздействиях. – М.: МАИ, 1987. – С. 16-25.
84. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Вертикальный удар цилиндрической оболочкой по упругой полуплоскости // Акт. пробл. разв. трансп. систем: Тез. докл. междунар. научн.-тех. конф. Гомель: БелГУТ, 1998. – С. 194-195.
85. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Плоская задача о вертикальном ударе цилиндрической оболочки по упругому полупространству // Изв. РАН. МТТ – № 5. – 2000. – С. 151-158.
86. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Удар цилиндрической оболочки по упругой полуплоскости // Известия вузов. Северо – Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2001. – Спецвыпуск. – С. 51-53.
87. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарное контактное взаимодействие деформируемой цилиндрической оболочки и упругой полуплоскости // Матер. III Научн. школы «Имп. процессы в механ. сплош. сред». – Николаев: Из-во «Атолл», 1999. – С. 66-68.

88. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Влияние деформируемости граничных поверхностей в задаче удара цилиндрической оболочки по упругой полуплоскости // Актуальные проблемы развития транспортных систем и строительного комплекса: Тр. Междунар. научно-практич. конф. – Гомель: БелГУТ, 2001. – С. 293-294.
89. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Ударное взаимодействие круговой деформируемой цилиндрической оболочки с упругой полуплоскостью // Импульсные процессы в механике сплошных сред: Матер. V Междунар. научн. шк.-сем. (авг. 2003). – Николаев: Атолл, 2003. – С. 44-45.
90. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Удар деформируемой круговой цилиндрической оболочки по упругой полуплоскости // Тез. докл. XX Междунар. конф. "Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов" ВЕМ&FEM – СПб: 24-26 сент., 2003 г. – С. 66-68.
91. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Исследование особенностей контактного давления в плоской нестационарной контактной задаче для абсолютно твердого ударника и упругой полуплоскости // Импульсные процессы в механике сплошных сред: Матер. VI Междунар. научн. шк.-сем. (авг. 2005). – Николаев: КП «Николаевская областная типография», 2005. – С. 14-15.
92. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Особенности контактных напряжений в плоской нестационарной контактной задаче о внедрении абсолютно твердого тела в упругое полупространство. // Проблемы безопасности на транспорте: материалы III Международ. науч.-практ. конф. - Гомель: БелГУТ, 2005. – С. 249-251.
93. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Особенности контактных напряжений в нестационарных контактных задачах с подвижными границами // Избранные проблемы прочности современного машиностроения. Сборн. научн. статей, посвящ. 85-летию чл.-корр. АН Э.И. Григолюка. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – С. 88-95.

94. *Горячева И.Г.* Контактная задача качения вязкоупругого цилиндра по основанию из того же материала // Прикладная математика и механика. – 1973. – Т. 37. – № 5. – С. 925.
95. *Горячева И.Г.* Контакт упругих тел в условиях трения качения при наличии промежуточного слоя // Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения. 2016. № 4 (64). С. 24-28.
96. *Горячева И.Г., Горячев А.П.* Контактные задачи о скольжении штампа с периодическим рельефом по вязкоупругой полуплоскости // Прикладная математика и механика. – 2016. – Т. 80. – № 1. – С. 103-116.
97. *Горячева И.Г., Губенко М.М., Маховская Ю.Ю.* Скольжение сферического индентора по вязкоупругому основанию с учетом сил молекулярного притяжения // Прикладная механика и техническая физика. – 2014. – Т. 55. – № 1 (323). – С. 99-107.
98. *Горячева И.Г., Зобова А.А.* Торможение жесткого цилиндра, скользящего по вязкоупругому основанию // Прикладная математика и механика. – 2019. – Т. 83. – № 2. – С. 215-227.
99. *Горячева И.Г., Зобова А.А.* Динамика упругого цилиндра на упругом основании // Прикладная математика и механика. – 2019. – Т. 83. – № 1. – С. 39-46.
100. *Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю.* Скольжение волнистого индентора по поверхности вязкоупругого слоя при наличии адгезии // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2015. – № 4. – С. 90-103.
101. *Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю.* Упругий контакт номинально плоских поверхностей при наличии шероховатости и адгезии // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2017. – № 4. – С. 101-111.
102. *Горячева И.Г., Степанов Ф.И., Торская Е.В.* Скольжение гладкого индентора при наличии трения по вязкоупругому полупространству // Прикладная математика и механика. – 2015. – Т. 79. – № 6. – С. 853-863.

103. *Горячева И.Г., Цуканов И.Ю.* Моделирование упругого контакта тел с регулярным микрорельефом // Вестник Брянского государственного технического университета. – 2018. – № 11 (72). – С. 81-87.
104. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Поверхностные функции Грина в нестационарных задачах термомехано-диффузии // Проблемы прочности и пластичности. – 2017. – Т. 79. – № 1. – С. 38-47.
105. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
106. *Егоров Д.Л., Кузнецов С.А.* Контактное взаимодействие круглых пластин на упругом основании со штампами различных форм // Научно-технический вестник Поволжья. – 2011. – № 5. – С. 32-35.
107. *Егоров Д.Л., Кузнецов С.А.* Исследование контактного взаимодействия круглых пластин со штампами на основе численно-аналитической методики // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2010. – Т. 152. – № 4. – С. 127-134.
108. *Епифанов В.П.* Разрушение льда при контактных взаимодействиях // Изв. АН. МГТ. – 1986. – № 6. – С. 177-185.
109. *Епифанов В.П., Кузьменко В.П.* Механика разрушения снега // Изв. АН. МГТ. – 1986. – № 4. – С. 190-197.
110. *Зверев Н.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Моделирование нестационарных связанных механо-диффузионных процессов в изотропном сплошном цилиндре // Проблемы прочности и пластичности. – 2020. – Т. 82. – № 2. – С. 156-167.
111. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Полярно-симметричная задача упругой диффузии для многокомпонентной среды // Проблемы прочности и пластичности. – 2018. – Т. 80. – № 1. – С. 5-14.
112. *Зобова А.А., Горячева И.Г.* Динамическая задача о качении с проскальзыванием упругого цилиндра по упругому полупространству // Доклады Академии наук. – 2018. – Т. 481. – № 1. С. 24-26.

113. *Игумнов Л.А., Аменицкий А.В., Белов А.А., Литвинчук С.Ю., Петров А.Н.* Численно-аналитическое исследование динамики вязко и пористо-упругих тел // Прикладная механика и техническая физика. – 2014. – Т. 55. – № 1 (323). – С. 108-114.
114. *Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Тарлаковский Д.В., Локтева Н.А.* Численное моделирование динамики составного пороупругого тела // Проблемы прочности и пластичности. – 2013. – Т. 75. – № 2. – С. 130-136.
115. *Игумнов Л.А., Марков И.П.* Моделирование динамики трехмерных однородных электроупругих тел методом граничных элементов // Проблемы прочности и пластичности. – 2014. – Т. 76. – № 3. – С. 191-197.
116. *Игумнов Л.А., Оконечников А.С., Тарлаковский Д.В., Белов А.А.* Гранично-элементный анализ волн на упругом, пористом и вязкоупругом полупространствах // Проблемы прочности и пластичности. – 2013. – Т. 75. – № 2. – С. 145-151.
117. *Игумнов Л.А., Петров А.Н.* Моделирование динамики частично насыщенных пороупругих тел на основе метода гранично-временных элементов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 3. – С. 47-61.
118. *Игумнов Л.А., Оконечников А.А., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Плоская нестационарная задача о движении поверхностной нагрузки по упругому полупространству // Математические методы и физико-механические поля. – 2013.– Т. 56. – № 2. – С. 157 -163. = L.A. Igumnov, A.S. Okonechnikov, D.V. Tarlakovskii, and G.V. Fedotenkov Plane nonstationary problem of motion of the surface load over an elastic half-space // Journal of Mathematical Sciences. 2014. – Vol. 174. – No. 2. – Pp. 193-201.
119. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* Динамические контактные задачи для предварительно напряженных полуограниченных тел. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 240 с.
120. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* К проблеме исследования динамических смешанных задач электроупругости и термоупругости для слоисто

- неоднородного полупространства // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2000. – № 3 (111). – С. 72-74.
121. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. – М.: Мир, 1978. – 518 с.
122. *Киреенков А.А., Федотенков Г.В.* Движение композитной сферической оболочки по твёрдой поверхности с учётом комбинированного сухого трения // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т. 26. – № 3. – С. 327-340.
123. *Коровайцева Е.А., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Нестационарные задачи о воздействии внешнего давления на тонкие цилиндрические или сферические оболочки с наполнителем // Материалы XXII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова – М., 2016. – Т. 2. – С. 85-86.
124. *Котов В.Л., Баландин В.В., Брагов А.М., Баландин В.В.* Квазистационарное движение твердого тела в сыпучем грунте при развитой кавитации // Доклады Академии наук. – 2013. – Т. 451. – № 3. – С. 278.
125. *Кубенко В.Д., Богданов В.Р.* Плоская задача удара оболочки об упругое полупространство // Прикл. мех. – 1995. – Т. 31. – № 6. – С. 78-85.
126. *Кубенко В.Д., Мейш В.Ф., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Пространственные нестационарные функции влияния тонкой упругой сферической оболочки // Матер. XX междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред» им. А.Г. Горшкова. – М., 2014. – Т. 2 – С. 109-118.
127. *Кубенко В.Д., Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В.* Решение осесимметричной нестационарной контактной задачи для тонкой сферической оболочки и упругого полупространства // Матер. XVIII междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред» им. А.Г. Горшкова. – М., 2012. – Т. 2 – С. 130-136.

128. *Кубенко В.Д., Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В.* Удар сферической оболочки по упругому полупространству на произвольном этапе взаимодействия // Теория оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур: материалы междунар. науч. конф., 16-20 сент. 2013, г. Минск, Беларусь. – Минск: Изд. центр БГУ, 2013. – С. 78-80.
129. *Кузнецова Е.Л., Леоненко Д.В., Старовойтов Э.И.* Собственные колебания трехслойных круговых цилиндрических оболочек в упругой среде // Известия российской академии наук. Механика твердого тела. – 2015. – № 3. – С. 152-160.
130. *Кузнецова Е.Л., Тарлаковский Д.В., Медведский А.Л., Федотенков Г.В.* Воздействие нестационарной распределенной нагрузки на поверхность упругого слоя // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2013. Вып. 71. <http://trudymai.ru/upload/iblock/113/113eac4247e0fe0472eafa775f9805ff.pdf?lang=ru&issue=71>.
131. *Кузнецова Е.Л., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Распространение нестационарных волн в упругом слое // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – № 5. С. 144–152. = Kuznetsova E.L., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Propagation of unsteady waves in an elastic layer // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46. No 5. – Pp. 779-787.
132. *Курант Р., Фридрихс К., Леви Г.* О разностных уравнениях математической физики // УМН. – 1941. – № 8. – С. 125-160.
133. *Леоненко Д.В., Старовойтов Э.И.* Импульсные воздействия на трехслойные круговые цилиндрические оболочки в упругой среде // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2015. – Т. 15. – № 2. – С. 202-209.
134. *Леоненко Д.В., Старовойтов Э.И., Плескачевский Ю.М.* Колебания трехслойных цилиндрических оболочек в упругой среде Винклера при резонансе // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – Т. 4. – № 25. – С. 70-73.

135. *Ломунов А.К., Пряжевский Р.Д., Федотенков Г.В.* Нестационарная контактная задача для абсолютно твердого гладкого штампа и упругой полуплоскости на дорелеевском интервале движения границ области взаимодействия // Проблемы прочности и пластичности. – 2017. – Т 79. – № 1. – С. 17–27.
136. *Луговой П.З., Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Алгоритм решения нестационарной осесимметричной контактной задачи для сферической оболочки и упругого полупространства на произвольном этапе взаимодействия // Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред: Матер. XVII Междунар. симп. им. А.Г. Горшкова. – М., 2011. – Т. 2. – С. 33–35.
137. *Любин Л.Я., Повицкий А.С.* Косой удар твердого тела о грунт // Ж. прикл. мех. и техн. физ. – 1966. – № 1. – С. 83–92.
138. *Маркин В.Т., Марков В.А., Овчинников А.Ф., Пусев В.И.* Расчет степени фрагментации космического аппарата сферической формы при внутреннем неконтактном взрыве // Вопросы оборонной техники. Серия 16: Технические средства противодействия терроризму. – 2014. – № 1-2 (67-68). – С. 81–88.
139. *Медведский А.Л.* Сверхзвуковой этап взаимодействия упругого однородного изотропного шара и абсолютно жесткой преграды // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2009. – Т. 2. – № 1 (38). – С. 38–49.
140. *Медведский А.Л., Тарлаковский Д.В.* Нестационарный контакт недеформируемого ударника с несовершенствами и упругой полуплоскости на сверхзвуковом участке внедрения // Вестник Московского авиационного института. – 2011. – Т. 18. – № 6. – С. 125–132.
141. *Медведский А.Л., Тарлаковский Д.В.* Плоская нестационарная задача о взаимодействии твердого ударника с несовершенствами и упругого полупространства // Труды МАИ. – 2011. – № 48. – С. 2.
142. *Механика контактных взаимодействий / ред. И.И. Ворович, В.М. Александров.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 672 с.

143. *Митин А.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Нестационарный контакт цилиндрической оболочки и абсолютно твердого эллиптического параболоида // Труды МАИ. – 2019. – № 107. – <https://elibrary.ru/item.asp?id=41224820>.
144. *Мифтахова А.Р., Горячева И.Г.* Моделирование трения качения с учетом свойств промежуточной среды и относительного проскальзывания в области контактного взаимодействия // Машиностроение и инженерное образование. – 2016. – № 3 (48). – С. 38-44.
145. *Михайлова Е.Ю., Кубенко В.Д., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Нестационарное контактное взаимодействие тонкой сферической оболочки и упругого полупространства // Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред: Матер. XVI междунар. симп. им. А.Г. Горшкова. – М., 2009. – Т. 2. – С. 64-65.
146. *Михайлова Е.Ю., Старовойтов Э.И., Федотенков Г.В.* Параметрическое исследование процесса нестационарного контактного взаимодействия тонкой сферической оболочки и упругого полупространства // Матер. XX междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред» им. А.Г. Горшкова. – М., 2014. – Т. 2 – С. 31-32.
147. *Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Нестационарный контакт сферической оболочки и упругого полупространства // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2014. – Вып. 78. <http://trudymai.ru/upload/iblock/540/540b786eac60d751a2e5f5b8f745d731.pdf?lang=ru&issue=78>.
148. *Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Сверхзвуковой этап контактного взаимодействия сферической оболочки и упругого полупространства // Современные проблемы механики и математики: Тезисы докл. междунар. науч. конф. – Львов, 2008. – Т. 1 – С. 91-93.
149. *Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Решение нестационарной контактной задачи для тонкой сферической оболочки и упругого полупространства на сверхзвуковом этапе взаимодействия // Динам.

- и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред: Матер. XV Междунар. симп. им. А.Г. Горшкова. – М., 2009. – Т. 2. – С. 31-32.
150. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Старовойтов Э.И., Федотенков Г.В. Начальный этап контактного взаимодействия тонкой сферической оболочки с упругим полупространством // Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред: Матер. XIV междунар. симп. им. А.Г. Горшкова. — М., 2008. — Т. 1. — С. 152.
151. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Удар сферической оболочки по упругому полупространству // Импульсные процессы в механике сплошных сред: Матер. Междунар. научн. конф. – Николаев: КП «Миколаївська областна друкарня», 2009. – С. 88-90.
152. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Сверхзвуковой этап взаимодействия оболочки и упругого полупространства // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного деформівного твердого тіла: Збірник наукових праць / Дніпропетр. націон. ун-т. – Дніпропетровськ, 2009. – Вип. 13. – С. 156-162.
153. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Удар сферической оболочки по упругому полупространству // Импульсные процессы в механике сплошных сред: Матер. Междунар. научн. конф. – Николаев, 2009. – С. 88-90.
154. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарная осесимметричная задача удара оболочки по упругому полупространству // XV Int. conf. «Dynamical system modeling and stability investigation» / Abstracts of conference reports. Kiev, Ukraine, May 25-27, 2011. – Pp. 307.
155. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарная контактная задача с подвижной областью взаимодействия для сферической оболочки и упругого полупространства // Материалы XXII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова – М., 2016. – Т. 2. – С. 96-97.

156. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Обобщенная линейная модель динамики тонких упругих оболочек // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. – 2018. – Т. 160, кн. 3. – С. 561-577. = Mihajlova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. A Generalized Linear Model of Dynamics of Thin Elastic Shells // Uchenye zapiski kazanskogo universiteta-seriya fiziko-matematicheskie nauki. – 2018. – Vol. 160. – No 3. – Pp. 561-577.
157. Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В. Нестационарная осесимметричная задача об ударе сферической оболочки по упругому полупространству (начальный этап взаимодействия) // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – № 2. – С. 98–108. = Mikhailova E.Yu., Fedotenkov G.V. Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction) // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46. – No. 2. – Pp. 239-247.
158. Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В. Ударное взаимодействие сферической оболочки с упругим полупространством // Тезисы докладов Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». 2014г., Москва – М.: Издательство МАИ, 2014. – С. 50–51.
159. Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В. Теоретическое и экспериментальное исследование нестационарного контактного взаимодействия упругой сферической оболочки с недеформируемыми штампами // Тезисы докладов V Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». 2016г., Москва – М.: Издательство ООО "ТР-принт", 2016. – С. 135-137.
160. Митин А.Ю., Федотенков Г.В. Метод и алгоритм решения пространственных нестационарных контактных задач для абсолютно твердых ударников и тонкой упругой цилиндрической оболочки // Материалы XXV международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы

- механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – Москва, 2019. – Т. 2. – С. 113-114.
161. *Нгуен Н.Х., Тарлаковский Д.В.* Нестационарные поверхностные функции влияния для упруго-пористой полуплоскости // Труды МАИ. – 2012. – № 53. – С. 2.
162. *Нобл Б.* Метод Винера-Хопфа. – М.: Иностран. лит., 1962. – 279 с.
163. *Нобл Б.* Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Иностран. лит., 1962. – 279 с.
164. *Нетребко А.В., Пшеничнов С.Г.* Некоторые задачи динамики линейно-вязкоупругих цилиндрических оболочек конечной длины. Проблемы прочности и пластичности. – 2015. – Т. 77. – № 1. – С. 14-22.
165. *Оконечников А.С., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Нестационарное движение нормальной сосредоточенной нагрузки вдоль границы упругой полуплоскости // Труды МАИ. – 2015 – № 82. https://www.mai.ru/upload/iblock/0f1/okonechnikov_tarlakovskiy_fedotenzkov_rus.pdf
166. *Оконечников А.С., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Пространственная нестационарная контактная задача для цилиндрической оболочки и абсолютно твердого тела // Известия российской академии наук. Механика твердого тела. – 2020. – №3. – С. 80–91. = Okonechnikov A.S., Tarlakovsky D.V., and Fedotenzkov G.V. Spatial Non-Stationary Contact Problem for a Cylindrical Shell And Absolutely Rigid Body // Mechanics of Solids. – 2020. – Vol. 55. – No. 3. – Pp. 366-376.
167. *Пещерикова О.Н., Федотенков Г.В.* Воздействие нестационарной поверхностной нагрузки на упруго–пористое полупространство // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2019. – Т. 160. – С. 105-113.
168. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. – М.: Наука, 1986. – 328 с.

169. *Попов С.Н., Богданов В.Р.* Вертикальный удар цилиндрической оболочки об упругое полупространство // Тр. 16 научн. конф. мол. ученых ин-та мех. АН Украины, Киев, 21-24 мая, 1991 г. Ч. 2. Киев, 1991. С. 332-337 (Рук. деп. в ВИНТИ 12.11.91, 4260-В91).
170. *Пряжевский Р.Д., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Нестационарная контактная задача для абсолютно твердого гладкого штампа и упругой полуплоскости // Тезисы докладов Всероссийской конференции молодых ученых-механиков 5-15 сентября 2017, Сочи, "Буревестник" МГУ, Издательство Московского университета, 2017. – С. 99.
171. *Пряжевский Р.Д., Федотенков Г.В.* Аналитическое решение некоторых плоских нестационарных контактных задач с подвижными границами для абсолютно твердых ударников и упругого полупространства // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. 17–26 апреля 2017 года. Тезисы докладов. – М.: Издательство Московского университета, 2017. – С. 170–171.
172. *Пшеничников С.Г.* Некоторые особенности использования преобразования Лапласа при решении линейных задач нестационарной динамики деформируемых твердых тел // Доклады Академии наук. – 1994. – Т. 339. – № 1. – С. 48.
173. *Россихин Ю.А., Шамарин В.В., Шитикова М.В.* Волновая теория удара упругих тел ограниченных размеров по упругой сферической оболочке // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4-5. – С. 2463-2464.
174. *Сагомоян А.Я.* Проникание (проникание твердых тел в сжимаемые сплошные среды). – М.: МГУ, 1974. – 299 с.
175. *Сагомоян А.Я.* Волны напряжения в сплошных средах. – М.: МГУ, 1963. – 356 с.
176. *Сагомоян А.Я., Моргунов М.Н.* Проникание упругой цилиндрической оболочки с жестким срезом в грунт // Газ. и волнов. динам. – 1979. – № 3. – С. 138-141.

177. Сапожников Г.А., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Плоская задача об ударе цилиндрической оболочки с наполнителем по упругому полупространству // *Материалы IV Международной научно-практической конференции «Строительство и восстановление искусственных сооружений»* – Гомель, 2015. – С. 422–426.
178. Сапожников Г.А., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Решение нестационарной задачи для цилиндрической оболочки с упругим наполнителем с применением асимптотических методов и численного обращения интегрального преобразования Лапласа // *Тезисы докладов IV Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы»*. – М.: Издательство ООО "ТР-принт", 2016. – С. 133–134.
179. Сапожников Г.А., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Определение нормальных перемещений упругой круговой цилиндрической оболочки с наполнителем при воздействии внешнего нестационарного давления // *Ломоносовские чтения. Секция механики. Тезисы докладов научной конференции. 18-27 апреля 2016, Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, изд-во Московского университета, 2016.* – С. 161.
180. Сеймов В.Н. Динамические контактные задачи. – Киев: Наукова думка, 1976. – 283 с.
181. Серпичева Е.В., Федотенков Г.В. Функции влияния для тонкой сферической оболочки с упругим наполнителем // *Тезисы докладов III Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы»*. 2015г., Москва – М.: Издательство ООО "ТР-принт", 2015. – С. 109-110.
182. Слепян Л.И. Механика трещин. - 2-е изд., перераб. и доп. – Л.: Судостроение, 1990. – 296 с.

183. *Слепян Л.И.* Нестационарные упругие волны. – Л.: Судостроение, 1980. – 376 с.
184. *Слепян Л.И., Яковлев Ю.С.* Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. – Л.: Судостроение, 1980. – 344 с.
185. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Том 1. – М.: Наука, 1974. – 655 с.
186. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Том 2. – М.: Наука, 1974. – 656 с.
187. *Солдатенков И.А.* Расчет трения индентора с фрактальной шероховатостью о вязкоупругое основание // Трение и износ. – 2015. – Т. 36. – № 3. – С. 257-262.
188. *Солдатенков И.А.* Контактная задача для упругой полосы и волнистого штампа при наличии трения и износа // Прикладная математика и механика. – 2011. – Т. 75. – № 1. – С. 122-132.
189. *Солдатенков И.А.* К расчету деформационной составляющей силы трения для стандартного вязкоупругого основания // Трение и износ. – 2008. – Т. 29. – № 1. – С. 12-21.
190. *Солдатенков И.А.* Деформационная составляющая силы трения в волнистом упругом контакте с износом // Трение и износ. – 2011. – Т. 32. – № 6. – С. 602-607.
191. *Солдатенков И.А.* Задача об изнашивании штампа при его случайном скольжении по тонкому упругому слою // Прикладная математика и механика. – 2013. – Т. 77. – № 5. – С. 778-787.
192. *Солдатенков И.А.* К расчету кинетики изнашивания покрытия: использование уточненных деформационных моделей // Прикладная математика и механика. – 2020. – Т. 84. – № 1. – С. 122-136.
193. *Солдатенков И.А.* Модель трения и изнашивания упругого покрытия в паре с волнистым штампом при наличии вибраций // Трение и износ. – 2018. – Т. 39. – № 4. – С. 352-361.
194. Справочник по специальным функциям / ред. *М. Абрамовиц, И. Стиган.* – М.: Наука, 1979. – 830 с.

195. *Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В.* Резонансные колебания трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем // *Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2016. – Т. 22. – № 1. – С. 60-68.
196. *Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Пространственная нестационарная контактная задача для сферической оболочки и абсолютно жесткой преграды // *Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (Чебоксары, 16–21 июня 2014 г.). Ч. 1.* – Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун–т, 2014. – С. 195–197.
197. *Старовойтов Э.И., Федотенков Г.В.* Особенности решений плоских нестационарных контактных задач с подвижными границами // *Матер. XIII Междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред» им. А.Г. Горшкова.* – М., 2007. – С. 233-234.
198. *Строганов Я.А., Федотенков Г.В.* Нестационарные контактные задачи для тонких упругих оболочек с наполнителем и абсолютно твердых, упругих и акустических преград // *Тезисы докладов Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы».* 2014г., Москва – М.: Издательство МАИ, 2014. – С. 81-82.
199. *Строганов Я.А., Федотенков Г.В.* Нестационарная контактная задача для абсолютно жесткой оболочки с наполнителем и упругого полупространства // *Тезисы докладов II Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы».* 2015г., М.: Издательство ООО "ТР-принт", 2015. – С. 89-90.
200. *Суворов Е.М., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Плоская задача об ударе твердого тела по полупространству, моделируемому средой Коссера // *Прикладная математика и механика.* – 2012. – Т. 76. – Вып. 5. – С. 850-859. = *Suvorov Ye.M., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V.* The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* – 2012. – Vol. 76. – No 5. – Pp. 511-518.

201. *Суворов Е.М., Федотенков Г.В.* Плоская нестационарная задача о воздействии поверхностной нагрузки на моментно упругую полуплоскость // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4. – Ч. 4. – С. 1794–1796.
202. *Тарлаковский Д.В.* Вертикальный удар абсолютно твердой сферы с заполнителем по упругому полупространству // Расчет на прочн. и оптим. проектир. элементов авиац. конструкций. – М.: МАИ, 1988. – С. 41-46.
203. *Тарлаковский Д.В.* Плоская задача об ударе цилиндрической оболочки по упругому полупространству // Тр. 14 Всес. конф. по теории пластин и оболочек, Кутаиси, 20-23 окт., 1987 г. – Т. 2. – Тбилиси, 1987. – С. 471-476.
204. *Тарлаковский Д.В.* Удар абсолютно жесткой оболочки с заполнителем по упругому полупространству // Деформир. и разруш. элементов конструкций летат. аппаратов. – М.: МАИ, 1989. – С. 129-138.
205. *Тарлаковский Д.В.* Удар цилиндрической оболочки с акустическим заполнителем по упругому полупространству // Совр. пробл. строит. мех. и прочн. летат. аппаратов: Тез. докл. III Всес. конф., Казань, 1988 г. Казань, 1988. – С. 142.
206. *Тарлаковский Д.В., Данг К.З.* Распространение осесимметричных поверхностных возмущений в упруго-пористом полупространстве // Труды МАИ. – 2014. – № 76. – С. 1.
207. *Тарлаковский Д.В., Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В.* Ударное взаимодействие тонкой упругой сферической оболочки и упругого полупространства с различными механическими характеристиками материалов // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. 14–23 апреля 2014 г., Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова. – М.: Издательство Московского университета, 2014. – С. 131–132.
208. *Тарлаковский Д.В., Митин А.Ю., Федотенков Г.В.* Нестационарное пространственное движение цилиндрической оболочки типа Тимошенко под воздействием внешнего давления // Современные проблемы механики

- сплошной среды: тезисы докладов XIX Международной конференции (Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2018 г.) / отв. ред. О.А. Ватульян и др.; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону, 2018. – С. 123.
209. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Удар цилиндрической оболочки по упругому полупространству // Матер. IV междунар. симп. «Динам. и технол. пробл. мех. констр. и сплош. сред». М.: из-во ГРАФРОС, 1998. – С.130-134.
210. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Нестационарное контактное взаимодействие деформируемой цилиндрической оболочки и упругой полуплоскости // "Импульсные процессы в механике сплошных сред" Тез. докл. III научн. школы сентябрь 1999. Николаев, 1999. – С. 66-68.
211. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Контактное взаимодействие цилиндрической оболочки и упругой полуплоскости // I Всерос. конк. курсовых и дипломных проектов студ. по спец. «Технология и качество авиац. техники.». М.: изд-во «МАИ», 1999. – С. 40-43.
212. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Двумерный нестационарный контакт упругих цилиндрических или сферических оболочек // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2014. – №2. – С 69–76. = *Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V.* Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability.* – 2014. – Vol. 43. – No 2. – Pp. 145-152.
213. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Пространственное нестационарное движение упругой сферической оболочки // Изв. РАН. МТТ. – 2015. – № 2. – С. 118–128. = *Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V.* Nonstationary 3D Motion of an elastic Spherical Shell // *Mechanics of Solids.* – 2015. – Vol. 50. – No 2. – Pp. 208-217.
214. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Воздействие нестационарного давления на цилиндрическую оболочку с упругим наполнителем // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. – 2016. – Т. 158. – Кн. 1. – С. 141-151.

215. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Нестационарные контактные задачи для упругих оболочек // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: Збірник наукових праць / Дніпропетровський національний університет. – Дніпропетровськ: ІМА–прес, 2009. – Вип. 10. – С. 270-276.
216. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Об особенностях напряжений в плоской контактной задаче с подвижными границами // Матер. VIII Междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред.». – М., 2002. – С. 39.
217. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Исследование наличия и характера особенностей контактных напряжений в плоской нестационарной задаче с подвижными границами // Матер. IX Междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред.». – М., 2003. – С. 41.
218. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Нестационарные задачи для упругой полуплоскости с подвижной точкой смены граничных условий // Вестник ПНИПУ. – 2016. – № 3. С. 188–206. = *Tarlakovskii D. V., Fedotenko G. V.* Non-stationary problems for elastic half-plane with moving point of changing boundary conditions // *PNRPU Mechanics Bulletin.* – 2016. – No. 3. – Pp. 188-206.
219. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Аналитическое исследование особенностей напряжений в плоских нестационарных контактных задачах с подвижными границами // НАН Украины. Математические методы и физико-механические поля. – 2008 г. – Том. 51. – №2. – С. 202–207. = *Tarlakovskiy D.V., Fedotenko G.V.* Analytic investigation of features of stresses in plane nonstationary contact problems with moving boundaries // *Journal of Mathematical Sciences.* – 2009. – Vol. 162. – No. 2. – Pp. 246-253.
220. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Исследование особенностей сингулярных уравнений плоской нестационарной контактной задачи с подвижными границами. // Тез. докл. Междунар. конф. "Интегральные уравнения и их применения", 29 июня - 4 июля 2005 г. – Одесса: 2005. – С. 139.

221. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Исследование сингулярных интегральных уравнений плоской нестационарной контактной задачи с подвижными // Матер. XII Междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред». – М., 2006. – С. 298-299.
222. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Асимптотическое поведение напряжений в окрестности подвижной области контакта упругих тел // Тезисы докладов II Всероссийск. науч. конф. по волновой дин-ке маш. и констр. (Н. Новгород, 28-30 октября 2007 г.) – Н. Новгород, изд. ЗАО «Интек - НН», 2007. – С. 94.
223. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Исследование особенностей решений плоских нестационарных контактных задач об ударном взаимодействии деформируемых тел // Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения: Труды Междунар. конф. Т. 2. – СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. – С. 327-330.
224. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Исследование особенностей решений сингулярных интегральных уравнений нестационарных контактных задач теории упругости // Современные проблемы математики, механики и их приложений. Матер. междунар. конф., посвящ. 70-летию ректора МГУ В.А. Садовниченко. – М.: Изд-во «Университетская книга», 2009. – С. 304.
225. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Исследование особенностей решений двумерных сингулярных интегральных уравнений плоских нестационарных контактных задач // Импульсные процессы в механике сплошных сред: Матер. Междунар. научн. конф. – Николаев: КП «Миколаївська областна друкарня», 2009. – С. 85-86.
226. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Исследование особенностей напряжений вблизи границ подвижной области взаимодействия в нестационарных контактных задачах // Математические проблемы механики неоднородных структур / Львов: Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины, 2010. – С. 92-93.

227. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Удар круговой цилиндрической оболочкой по абсолютно жесткой преграде // Проблемы и перспективы развития транспортных систем и строительного комплекса. Материалы III Международной научно-практической конференции. – Гомель, 17–19 октября 2013 г. – Гомель: БелГУТ, 2013. – С. 407-409.
228. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Динамическая контактная задача с подвижными границами для двух тонких упругих цилиндрических или сферических оболочек // Труды VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твердого тела. – Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2013. – Т.2. – С. 195-199.
229. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Динамическая контактная задача с подвижными границами для двух тонких упругих цилиндрических или сферических оболочек // Тезисы докладов VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твердого тела. – Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2013. – С. 139.
230. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Нестационарные волны в упругих оболочках с упругим и акустическим наполнителем // Труды X Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 26–29 сентября 2016 г.) / Под редакцией Д.В. Баландина, В.И. Ерофеева, И.С. Павлова. Нижний Новгород: Издательский дом «Наш дом», 2016. – С. 701-710.
231. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Нестационарные контактные задачи с подвижными границами для оболочек и абсолютно твердых или деформируемых тел // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. 19-24 августа 2019 г. Уфа. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. – С. 257.
232. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Нестационарные контактные задачи с подвижными границами для оболочек и абсолютно твердых или

- деформируемых тел // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. Т. 3: Механика деформируемого твердого тела. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. – С. 993–994.
233. *Федотенков Г.В.* Ударное взаимодействие тонкого цилиндра с упругим полупространством // Проблемы перспективной авиационной техники: Сб. статей науч.-исслед. работ студ., аспирант. и мол. ученых. – М.: изд-во «МАИ» 1999. – С. 97-103.
234. *Федотенков Г.В.* Особенности контактных напряжений на подвижной границе в плоской нестационарной контактной задаче // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннот. докл. – Нижний Новгород 2006. – Т. 3. – С. 210.
235. *Федотенков Г.В.* Об асимптотическом поведении контактных напряжений в окрестности границы области взаимодействия в плоских нестационарных контактных задачах с подвижными границами // Матер. VII Междунар. научн. шк.-сем. (21-25 авг. 2007). – Николаев: КП «Николаевская областная типография», 2007. – С. 36–37.
236. *Федотенков Г.В.* Аналитическое исследование напряжений в подвижной области взаимодействия в нестационарных контактных задачах // Матер. XIV Междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред» им. А.Г. Горшкова. – М., 2008. – Т.1. – С. 201.
237. *Филяков А.Б., Коган В.В., Выходцев В.Н.* Распределение давлений на поверхностях деформатора при его внедрении в сыпучую среду // Горн., строит, дор. машины. – 1991. – № 44. – С. 13-24.
238. *Хоа Н.Н., Тарлаковский Д.В.* Распространение нестационарных поверхностных кинематических возмущений в упруго-пористой полуплоскости // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т. 17. – № 4. – С. 567-576.
239. *Abrosimov N.A., Elesin A.V., Igumnov L.A.* Numerical Simulation of the Process of Loss of Stability of Composite Cylindrical Shells Under Combined Quasi-Static

- and Dynamic Actions // Mechanics of Composite Materials. – 2019. – Vol. 55, № 1. – Pp. 41-52.
240. *Afanasieva O.A., Fedotenkov G.V.* Plane nonstationary contact problems of the impact of rigid and deformable strikers on an elastic half-space // Abstracts of the 23rd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, August 19–24, Beijing, China. – China Science Literature Publishing House, 2012. – P. – 159.
241. *Afanasieva O., Zemskov A., Tarlakovskii D.* Electromagnetoelastic diffusion in anisotropic continuum // Structural Integrity. – 2019. – No. 5. – Pp. 397-398.
242. *Bateman V.I., Came T.G., McCau D.M.* Force reconstruction for impact tests of an energyabsorbing nose // Int. J. Anal. and Exp. Modal Anal. – 1992. – Vol. 7. – No 1. – Pp. 41-50.
243. *Beskopylny A., Veremeenko A., Kadomtseva E., Celko J.* Approximate solution the problem of low-speed impact of a conical indenter in a cylindrical shell // AIP Conference Proceedings. – 2019. – No 2188. – Paper № 060011.
244. *Das A., Banerjee R., Karmakar A.* Transient dynamic analysis of pretwisted functionally graded conical shells subject to low velocity impact: A finite element approach // ASME 2017 Gas Turbine India Conference – 2017. – GTINDIA 2017 – 4611.
245. *Davydov S.A., Zemskov A.V., Igumnov L.A., Tarlakovskii D.V.* Non-stationary model of mechanical diffusion for half-space with arbitrary boundary conditions // Materials Physics and Mechanics. – 2016. – Vol. 28. – No 1-2. – C. 72-76.
246. *Dubin V.V., Bannikov S.N.* The experimental investigation of the impact of a particle or a rigid body on a cylindrical shell // Progress in Nuclear Energy. – 2003. – 43. – 1-4 SPEC. – Pp. 253-260.
247. *Fedotenkov G.V., Mikhailova E.Yu., Kuznetsova E.L., Rabinskiy L.N.* Modeling the unsteady contact of spherical shell made with applying the additive technologies with the perfectly rigid stamp // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2016. – Vol. 111. – No. 2. – Pp. 331-342.
248. *Fedotenkov G.V., Okonechnikov A.S., Rabinskiy L.N., Tarlakovskii D.V.* A nonstationary dynamic problem on the effects of surface loads on a half-space with

- a nanosized structure within the framework of the Cosserat medium model // *Nanomechanics Science and Technology: An International Journal*. – 2016. – No 6(4). – Pp. 61–77.
249. *Fedotenkov G.V., Tarlakovskii D.V., Mitin A.Yu.* Transient spatial motion of cylindrical shell under influence of non-stationary pressure // *Proceedings of the Second International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics. Structural Integrity*. – Springer Nature Switzerland AG. – 2019. – Pp. 264–269.
250. *Hirano S., Yoshikawa S., Himeno Y.* Pressure measurement on the bottom of a wedge-form planing plate // *J. Kansai Soc. Nav. Archit. Jap.* 1988. No 208. P. 45–52.
251. *Igumnov L.A., Litvinchuk S.Y., Petrov A.N., Belov A.A.* Boundary-element modeling of 3-d poroelastic half-space dynamics // *Advanced Materials Research*. – 2014. – Vol. 1040. – Pp. 881–885.
252. *Igumnov L.A., Markov I.P., Boev A.V.* A static boundary element analysis of 3D anisotropic elastic problems // *Materials Physics and Mechanics*. – 2019. – Vol. 42. – No 4. – Pp. 461—469.
253. *Igumnov L.A., Tarlakovskii D.V., Zemskov A.V.* Bulk Green's functions in one-dimensional unsteady problems of elastic diffusion // *Materials Physics and Mechanics*. – 2019. – Vol. 42. – № 2. – Pp. 191—197.
254. *Kalinchuk V.V., Mitin A.Y., Fedotenkov G.V.* Three-dimensional non-stationary motion of Timoshenko-type circular cylindrical shell // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2019. – Vol. 40. – No. 3. – Pp. 311–320.
255. *Korovaytseva E.A., Pshenichnov S.G., Tarlakovski D.V.* Propagation of one-dimensional non-stationary waves in viscoelastic half space // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2017. – Vol. 38. – No 5 – Pp. 827.
256. *Kubenko V.D.* Nonsteady Problem for an Elastic Half-Plane with Mixed Boundary Conditions // *International Applied Mechanics*. – 2016. – Vol. 52. – No 2. – Pp. 105–118.

257. *Kubenko V.D.* Wave processes in an elastic half-plane impacted by a blunt-nosed rigid body // *Mechanics of Solids*. – 2011. – Vol. 46. – No 2. – Pp. 256-265.
258. *Kubenko V.D., Marchenko T.A.* Nonstationary indentation of a blunt rigid body into an elastic layer: An axisymmetric problem // *International Applied Mechanics*. – 2008. – Vol. 44. – No 7. – Pp. 747-756.
259. *Kubenko V.D., Yanchevskiy I.V.* Axisymmetric nonstationary elastic contact problem for conforming surfaces // *Archive of Applied Mechanics*. – 2018. – Vol. 88. – No 9. – Pp. 1559-1571.
260. *Kubenko V.D.* Impact of blunted bodies on a liquid or elastic medium // (*) Prikladnaya Mekhanika*. – 2004. – Vol. 40. – No 11. – Pp. 3-44.
261. *Kubenko V.D., Yanchevskiy I.V.* Nonstationary plane contact problem in theory of elasticity for conformal cylindrical surfaces // *Acta Mechanica Solida Sinica*. – 2017. – Vol. 30. – No 2. – Pp. 190-197.
262. *Li X.* Dynamic response analysis and comparative study of circular cylindrical shell subjected to radial impact // *Journal of Ship Research*. – 2007. – Vol. 51. – No 2. – Pp. 94-103.
263. *Lu S.H., Zhong H.Z.* Approximate series solution of transient response of cylindrical shells with two free ends subject to localized impact // *Gongcheng Lixue/Engineering Mechanics*. – 2004. – Vol. 21. – No. 6. – Pp. 65-71.
264. *Mao Y.Q., Ai S.G., Chen C.P. et al.* Nonlinear dynamic response and damage analysis for functionally graded metal shallow spherical shell under low-velocity impact // *Arch Appl Mech* (2015), Volume 85, Issue 11, pp 1627–1647.
265. *Mikhailova E.Yu, Tarlakovskiy D.V., Fedotenkov G.V.* Impact of Transient Pressure on a Half-Space with Membrane Type Coating // *Structural Integrity*. – 2020. – No 16. – Pp. 312-315. DOI: 10.1007/978-3-030-47883-4_56.
266. *Mikhailova E.Yu, Tarlakovskiy D.V., Fedotenkov G.V.* The Unsteady Contact Interaction Problem of an Absolutely Rigid Body and a Membrane // *Proceedings of the Second International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics. Structural Integrity*. – Springer Nature Switzerland AG. – 2019. – Pp. 289–293.

267. *Mikhailova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V.* Transient contact problem for liquid filled concentric spherical shells and a rigid barrier // Proceedings of the First International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics. – 2019. – Pp. 385–386.
268. *Mikhailova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V.* The impact of liquid filled concentric spherical shells with a rigid wall // Shell Structures: Theory and Applications. – 2017. – Vol. 4. – Pp. 305–308.
269. *Mikhailova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V.* Transient contact problem for spherical shell and elastic half-space // Shell Structures: Theory and Applications. – 2017. – Vol. 4. – Pp. 301–304.
270. *Mortimer R.W., Rose J.L., Chou, P.C.* Longitudinal impact of cylindrical shells // Experimental Mechanics. – 1972. – No 12. – Pp. 25–31.
271. *Okonechnikov A.S., Tarlakovsky D.V., Fedotenkov G.V.* Transient Interaction of Rigid Indenter with Elastic Half-plane with Adhesive Force // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 40. – No. 4. – Pp. 489–498.
272. *Okonechnikov A.S., Tarlakovski D.V., Ul'yashina A.N., Fedotenkov G.V.* Transient reaction of an elastic half-plane on a source of a concentrated boundary disturbance // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2016. – Vol. 158. – No 1. – Pp. 012073.
273. *Rabinskiy L.N., Tushavina O.V., Fedotenkov G.V.* Plain non-stationary problem of the effect of a surface load on an elastic-porous half-space // Asia Life Sciences. – 2019. – Vol. 28. – No 1. – Pp. 149–162.
274. *Tarlakovskii, D.V., Fedotenkov G.V.* Non-stationary Contact Problems for Thin Shells and Solids // Structural Integrity. – 2020. – No 16. – Pp. 287-292.
275. *Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V.* Analytical solutions of some nonstationary contact problems with moving boundaries // In book: Proceedings of the First International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics. – 2019. – Pp. 383–384.

276. *Vestyak V.A., Tarlakovsky D.V.* A nonstationary axially symmetric electromagnetic field in a moving sphere // *Doklady Physics*. – 2015. – Vol. 60. – No 10. – Pp. 433-436.
277. *Watanabe Shouhei* Modulus of deformation and Poisson`s ratio of soils obtained by plate loading tests using two cylindrical pits // *Trans. JSIDRE*. – 1996. – No 184. – Pp. 641-648.
278. *Yulong LI, Arutiunian A.M., Kuznetsova El.L., Fedotenkov G.V.* Method for solving plane unsteady contact problems for rigid stamp and elastic half-space with a cavity of arbitrary geometry and location // *INCAS BULLETIN*. – 2020. – Vol. 12, Special Issue. – Pp. 99-113.
279. *Zemskov A.V., Okonechnikov A.S., Tarlakovskii D.V.* Unsteady Elastic–Diffusion Vibrations of a Simply Supported Euler–Bernoulli Beam Under the Distributed Transverse Load // *Advanced Structured Materials*. – 2021. – No 141. – Pp. 487-499.
280. *Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V.* Modelling of rectangular Kirchhoff plate oscillations under unsteady elastodiffusive perturbations // *Acta Mechanica*. – 2021.
281. *Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V.* Modelling of Unsteady Elastic Diffusion Oscillations of a Timoshenko Beam // *Advanced Structured Materials*. – 2020. – No 122. – Pp. 447-461.
282. *Zobova A.A., Goryacheva I.G.* Dynamics of a viscoelastic cylinder on a viscoelastic half-space // *Acta Mechanica*. – 2020. – Vol. 231. – No 6. – Pp. 2217-2230.
283. Свид. 2012661354 Российская Федерация. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Расчет сверхзвукового этапа контактного взаимодействия обтекателя летательного аппарата сферической формы при ударе о скальный грунт. / Е.Ю. Михайлова, Д.В. Тарлаковский, Г.В. Федотенков; заявитель и правообладатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский авиационный институт

(национальный исследовательский университет)» (RU) – № 2012619071;
заявл. 25.10.12; опубл. 13.12.12.

284. Свид. 2014611055 Российская Федерация. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Расчет нестационарного напряженно-деформированного состояния сферического обтекателя спускаемого космического аппарата при ударе о грунт. / Е.Ю. Михайлова, Д.В. Тарлаковский, Г.В. Федотенков; заявитель и правообладатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (RU) – № 2013619305; заявл. 16.10.13; опубл. 23.01.14.