

Научная статья  
УДК 629.78

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПО КРИТЕРИЮ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ НА ОКОЛОКРУГОВЫХ ОРБИТАХ

Сяо Чжоу<sup>1</sup>, Сергей Алексеевич Ишков<sup>2</sup>, Григорий Александрович Филиппов<sup>3</sup> ✉

<sup>1, 2, 3</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева  
(Самарский университет),

Самара, Россия

<sup>1</sup> chousyao@yandex.ru

<sup>2</sup> ishkovs@gmail.com

<sup>3</sup> filippov.ga@ssau.ru ✉

**Аннотация.** Рассматривается задача оптимального управления пространственным относительным движением космического аппарата с двигателем конечной тяги на околокруговых орбитах. Движение описывается в безразмерных переменных. В плоскости орбиты движение представлено вековыми и периодическими отклонениями, в боковой плоскости – амплитудой колебаний космического аппарата относительно базовой орбиты. Рассмотрены два варианта управления относительным движением: первый – совместное управление продольными и боковыми составляющими, второй – поэтапное управление, т. е. коррекция продольного, а затем коррекция бокового движения. В качестве критерия выбора оптимального управления принята общая продолжительность относительного движения. Выполнены расчеты оптимального управления для характерных граничных условий, приведены оценки степени неоптимальности раздельного управления при непрерывной работе двигателей.

**Ключевые слова:** относительное движение космических аппаратов, орбитальная цилиндрическая система координат, безразмерные параметры движения, продольное и боковое движение, вековые и периодические составляющие движения, управление со свободной ориентацией тяги

**Для цитирования:** Чжоу С., Ишков С.А., Филиппов Г.А. Оптимальное управление относительным движением космического аппарата по критерию быстродействия на околокруговых орбитах // Вестник Московского авиационного института. 2023. Т. 30. № 3. С. 163–173.

Original article

## OPTIMAL CONTROL OF SPACECRAFT RELATIVE MOTION BY THE RESPONSE RATE CRITERION ON NEAR-CIRCULAR ORBITS

Xiao Chou<sup>1</sup>, Sergei A. Ishkov<sup>2</sup>, Grigori A. Filippov<sup>3</sup> ✉

<sup>1, 2, 3</sup> Samara National Research University named after academician S.P. Korolev (Samara University),  
Samara, Russia

<sup>1</sup> chousyao@yandex.ru

<sup>2</sup> ishkovs@gmail.com

<sup>3</sup> filippov.ga@ssau.ru ✉

### Abstract

The article presents the study of optimal control programs for spatial relative motion at near-circular orbit.

© Чжоу С., Ишков С.А., Филиппов Г.А., 2023

Two spacecraft, namely maneuvering, equipped with engine of finite thrust, and passive, located in a circular orbit are being considered.

The problem of bringing the maneuvering spacecraft to the specified position relative to the passive one is being set.

Equations in cylindrical reference frame, which origin is placed in center of mass of the passive aircraft, and equations of motion are linearized near the passive spacecraft orbit, are used for construction of the dimensionless and invariant to the datum orbit mathematical model of relative motion.

New variables, describing the relative motion in the orbit plane in terms of the secular and periodical motion, and in the form of the maneuvering spacecraft oscillations amplitude and phase relative to the passive one, are introduced.

The authors demonstrate that longitudinal motion in linear approximation is associated with the lateral one only through the controlling accelerations, in which connection two control options are considered. The first one is joint, when both longitudinal and lateral motion components change simultaneously, and no limitations are imposed herewith on the thrust vector orientation of the maneuvering spacecraft. The second one, which is no less common, supposes sequential longitudinal component elimination of the relative motion, and then the lateral one.

Time optimal controls are obtained with the Pontryagin maximum principle application. The optimization problem is reduced to a two-point boundary problem for a system of differential equations, which is solved for three qualitatively different boundary conditions, namely the longitudinal periodic motion correction dominance, the requirements of longitudinal secular motion correction and the requirements of the lateral motion correction dominance.

An additional calculation of the required turning speed of the active spacecraft was performed to the optimal control program accomplishment, which indicated the necessity of introducing the passive sections on the trajectory at time instants corresponding to an almost instantaneous turn of the spacecraft by one hundred and eighty degrees around its axis.

**Keywords:** relative motion of spacecraft, orbital cylindrical reference frame, dimensionless parameters of motion, longitudinal and lateral motion, secular and periodic motion components, control with free orientation of thrust.

**For citation:** Chou X., Ishkov S.A., Filippov G.A. Optimal Control of Spacecraft Relative Motion by the Response Rate Criterion on Near-Circular Orbits. *Aerospace MAI Journal*, 2023, vol. 30, no. 3, pp. 163–173.

---

---

## Введение

В научной литературе относительным движением называется движение маневрирующего космического аппарата в близкой окрестности пассивного космического аппарата. Задача управления относительным движением связана с задачами сближения космических аппаратов [1], организации их группового полета, с задачей приведения космического аппарата в точку стояния на геостационарной орбите и с задачей оптимизации траекторий увода фрагментов космического мусора с применением специального космического аппарата – сборщика мусора.

Современные космические аппараты могут оснащаться двигателями разных типов – химическими (импульсными) двигателями большой тяги и электроракетными двигателями малой тяги, которые позволяют выполнять длительные транспортные операции с высокой энергетической эффективностью.

В настоящей статье рассматривается оптимизация относительного движения космического аппарата с двигателем конечной тяги по критерию быстродействия.

Для решения задач оптимизации используются методы, основанные на применении формализма

принципа максимума Понтрягина [2], динамического программирования Беллмана [24], необходимых условий оптимальности теории базис-векторов [4–6], метода неопределенных множителей Лагранжа [7–9]. Известны также методы оптимизации, основанные на сведении исходной оптимизационной задачи к конечномерной параметрической [10–12], и более современные методы, основанные на применении генетических алгоритмов, эволюционных алгоритмов и их комбинаций [13–18].

Настоящая статья написана в развитие исследований авторов [19, 20]. Ставится задача определения оптимального управления пространственным относительным движением с применением принципа максимума Понтрягина на базе линеаризованной модели относительного движения, полученной путем линеаризации уравнений движения в орбитальной цилиндрической системе координат. Введены новые переменные, описывающие относительное движение в терминах вековых и периодических составляющих относительного движения, уравнения для которых инвариантны по отношению к проектным характеристикам маневрирующего космического аппарата и высоте опорной орбиты. Проведено сравнение различных схем управления,

в том числе предусматривающих раздельное управление продольным и боковым движением.

**Математическая модель относительного движения**

Рассмотрим движение активного космического аппарата (КА2) в близкой окрестности пассивного (КА1). Линеаризованные уравнения движения КА2 имеют вид [21–23]:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{r} &= \Delta V_r; \\ \Delta \dot{V}_r &= \left( 2 \frac{\mu}{r_1^3} - \frac{V_{u_1}^2}{r_1^2} \right) \Delta r + 2 \frac{V_{u_1}}{r_1} \Delta V_u + a_S; \\ \Delta \dot{u} &= \frac{\Delta V_u}{r_1} - \frac{V_{u_1}}{r_1^2} \Delta r; \\ \Delta \dot{V}_u &= -\frac{V_{r_1} \Delta V_u + V_{u_1} \Delta V_r}{r_1} + \frac{V_{r_1} V_{u_1}}{r_1^2} \Delta r + a_T; \\ \Delta \dot{z} &= \Delta V_z; \\ \Delta \dot{V}_z &= -\frac{\mu}{r_1^3} \Delta z + a_W. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $\Delta r$  – разность радиус-векторов;  $\Delta u$  – разность угловых координат;  $\Delta z$  – разность боковых координат,  $\Delta V_r, \Delta V_u, \Delta V_z$  – разность радиальной, трансверсальной и боковой скорости соответственно;  $r_1, V_{r_1}, V_{u_1}$  – радиус-вектор, радиальная и трансверсальная скорость КА1;  $a_S, a_T, a_W$  – проекции ускорения от тяги  $a$  двигательной установки КА2 в радиальном, трансверсальном и боковом направлении соответственно;  $\mu$  – гравитационный параметр.

В большинстве практических задач  $\Delta r \ll r_1$ , эксцентриситет орбиты КА1 мал ( $e < 0,01$ ), что позволяет считать  $V_{r_1} = 0$  и дополнительно упростить уравнения (1):

$$\begin{aligned} \Delta \dot{r} &= \Delta V_r; & \Delta \dot{L} &= \Delta V_u - \lambda \Delta r; \\ \Delta \dot{z} &= \Delta V_z; & \Delta \dot{V}_u &= -\lambda \Delta V_r + a_T; \end{aligned} \tag{2}$$

$$\Delta \dot{V}_r = \lambda (2\Delta V_u + \lambda \Delta r) + a_S; \quad \Delta \dot{V}_z = -\lambda^2 z + a_W,$$

где  $\Delta \dot{L} = \Delta u \cdot r_1$ ;  $\lambda$  – угловая скорость КА1.

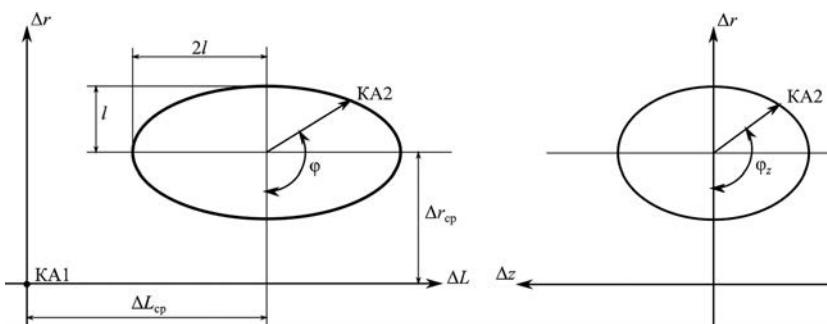


Рис. 1. Параметры относительного движения КА1 и КА2

В продольном относительном движении выделим вековые и периодические параметры [21–23] относительного движения (рис. 1). Введем переменные [24]:

$$\begin{aligned} \Delta r_{cp} &= 2 \left( \Delta r + \frac{\Delta V_u}{\lambda} \right); \\ \Delta L_{cp} &= \Delta L - 2 \frac{\Delta V_r}{\lambda}; \\ l &= \sqrt{\frac{(\Delta L - \Delta L_{cp})^2}{4} + (\Delta r - \Delta r_{cp})^2}; \\ l_z &= \sqrt{\Delta z^2 + \left( \frac{\Delta V_z}{\lambda} \right)^2}; \\ \text{tg}(\varphi) &= \frac{\Delta V_r}{\lambda \Delta r + 2 \Delta V_u}; \\ \text{tg}(\varphi_z) &= \frac{\lambda \Delta z}{\Delta V_z}. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь вековые продольные параметры относительного движения:  $\Delta r_{cp}$  – среднее радиальное смещение;  $\Delta L_{cp}$  – среднее орбитальное смещение;  $l$  – амплитуда продольных колебаний. Вековой параметр бокового движения  $l_z$  – амплитуда боковых колебаний;  $\varphi$  и  $\varphi_z$  – фаза колебаний – периодические продольный и боковой параметры. Амплитуда продольных колебаний также известна как «малая полуось эллипса относительного движения» [20].

Дифференциальные уравнения для переменных (3) примут вид:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{r}_{cp} &= \frac{2}{\lambda} a_T; \\ \Delta \dot{L}_{cp} &= -1,5 \lambda \Delta r_{cp} - \frac{2}{\lambda} a_S; \\ \dot{l} &= \frac{1}{\lambda} (a_S \sin \varphi + 2 a_T \cos \varphi); \\ \dot{l}_z &= \frac{1}{\lambda} a_W \cos \varphi_z; \\ \dot{\varphi} &= \lambda + \frac{a_S \cos \varphi - 2 a_T \sin \varphi}{\lambda l}; \\ \dot{\varphi}_z &= \lambda - \frac{a_W \sin \varphi_z}{\lambda l_z}. \end{aligned} \tag{4}$$

Анализ уравнений (4) показывает, что при малых  $l$  и  $l_z$  возникает вычислительная особенность в уравнениях для  $\varphi$  и  $\varphi_z$ , связанная с делением на малый параметр. Во избежание указанных трудностей, введем новые переменные:

$$l_x = l \cos(\varphi); \quad l_y = l \sin(\varphi);$$

$$x_z = l_z \cos(\varphi_z); \quad y_z = l_z \sin(\varphi_z)$$

и окончательно получим систему уравнений относительного движения, не имеющую вычислительных особенностей:

$$\Delta \dot{r}_{cp} = \frac{2a_T}{\lambda}; \quad \Delta \dot{L}_{cp} = -1,5\lambda \Delta r_{cp} - \frac{2a_S}{\lambda};$$

$$\dot{l}_x = -\lambda l_y + \frac{2a_T}{\lambda}; \quad \dot{l}_y = \lambda l_x + \frac{a_S}{\lambda}; \quad (5)$$

$$\dot{x}_z = -\lambda y_z + \frac{a_W}{\lambda}; \quad \dot{y}_z = \lambda x_z.$$

Рассмотрим вариант управления, предполагающий отсутствие ограничений на ориентацию вектора тяги. В этом случае запишем:

$$a_T = a \cos(\alpha) \cos(\beta);$$

$$a_S = a \sin(\alpha) \cos(\beta); \quad (6)$$

$$a_W = a \sin(\beta).$$

Здесь  $\alpha$  – угол отклонения вектора тяги от трансверсального направления,  $\beta$  – угол отклонения вектора тяги от плоскости орбиты.

Уравнения (5) запишем в безразмерном виде:

$$\Delta \dot{\bar{r}}_{cp} = \cos(\alpha) \cos(\beta);$$

$$\Delta \dot{\bar{L}}_{cp} = -1,5\Delta \bar{r}_{cp} - \sin(\alpha) \cos(\beta);$$

$$\dot{\bar{l}}_x = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \bar{l}_y;$$

$$\dot{\bar{l}}_y = \frac{\sin(\alpha) \cos(\beta)}{2} + \bar{l}_x; \quad (7)$$

$$\dot{\bar{x}}_z = \frac{\sin(\beta)}{2} - \bar{y}_z;$$

$$\dot{\bar{y}}_z = \bar{x}_z.$$

Переход от размерных переменных к безразмерным выполняют по формулам:

$$\bar{X} = \frac{X}{K}; \quad K = \frac{2a}{\lambda^2}; \quad \bar{t} = \lambda t.$$

Безразмерная система уравнений (7) не зависит от высоты орбиты КА1 и от ускорения от тяги КА2 (символ «-» над обозначением параметра будет опущен).

### Совместное оптимальное управление относительным движением

Построим оптимальное управление относительным движением без ограничений на управление. Ставится задача определения оптимальных программ управления – зависимостей  $\alpha_{opt}$  и  $\beta_{opt}$  от времени, удовлетворяющих граничным условиям задачи

$$t = 0 : \Delta r_{cp} = \Delta L_{cp0}; \Delta L_{cp} = \Delta L_{cp0}; l_x = l_{x0};$$

$$l_y = l_{y0}; x_z = x_{z0}; y_z = y_{z0};$$

$$t = t_k : \Delta r_{cp} = 0; \Delta L_{cp} = 0; l_x = 0; l_y = 0; \quad (8)$$

$$x_z = 0; y_z = 0$$

и доставляющих минимум критерию

$$J = \int_0^{t_k} 1 dt \rightarrow \min.$$

В соответствии с общим алгоритмом принципа максимума Понтрягина запишем гамильтониан системы (7):

$$H = \Psi_{\Delta r_{cp}} \cos(\alpha) - \cos(\beta) -$$

$$-\Psi_{\Delta L_{cp}} [1, 5\Delta r_{cp} + \sin(\alpha) \cos(\beta)] +$$

$$+\Psi_{l_x} [\cos(\alpha) \cos(\beta) - l_y] +$$

$$+\Psi_{l_y} \left[ \frac{\sin(\alpha) \cos(\beta)}{2} + l_x \right] + \quad (9)$$

$$+\Psi_{x_z} \left[ \frac{\sin(\beta)}{2} - y_z \right] + \Psi_{y_z} x_z - 1.$$

Здесь  $\Psi_{\Delta r_{cp}}, \Psi_{\Delta L_{cp}}, \Psi_{l_x}, \Psi_{l_y}, \Psi_{x_z}, \Psi_{y_z}$  – сопряженные переменные, уравнения для которых имеют вид:

$$\dot{\Psi}_{\Delta r_{cp}} = 1,5\Psi_{\Delta L_{cp}}; \quad \dot{\Psi}_{\Delta L_{cp}} = 0;$$

$$\dot{\Psi}_{l_x} = -\Psi_{l_y}; \quad \dot{\Psi}_{l_y} = \Psi_{l_x}; \quad (10)$$

$$\dot{\Psi}_{x_z} = -\Psi_{y_z}; \quad \dot{\Psi}_{y_z} = \Psi_{x_z}.$$

Сопряженная система имеет аналитическое решение:

$$\Psi_{\Delta r_{cp}}(t) = \Psi_{\Delta r_{cp0}} + 1,5t\Psi_{\Delta L_{cp0}};$$

$$\Psi_{\Delta L_{cp}}(t) = \Psi_{\Delta L_{cp0}};$$

$$\Psi_{l_x}(t) = \sqrt{\Psi_{l_{x0}}^2 + \Psi_{l_{y0}}^2} \cos \left[ t + \arctg \left( \frac{\Psi_{l_{y0}}}{\Psi_{l_{x0}}} \right) \right];$$

$$\Psi_{l_y}(t) = \sqrt{\Psi_{l_{x0}}^2 + \Psi_{l_{y0}}^2} \sin \left[ t + \arctg \left( \frac{\Psi_{l_{y0}}}{\Psi_{l_{x0}}} \right) \right]; \quad (11)$$

$$\Psi_{x_z}(t) = \sqrt{\Psi_{x_{z0}}^2 + \Psi_{y_{z0}}^2} \cos \left[ t + \arctg \left( \frac{\Psi_{y_{z0}}}{\Psi_{x_{z0}}} \right) \right];$$

$$\Psi_{y_z}(t) = \sqrt{\Psi_{x_{z0}}^2 + \Psi_{y_{z0}}^2} \sin \left[ t + \arctg \left( \frac{\Psi_{y_{z0}}}{\Psi_{x_{z0}}} \right) \right].$$

Оптимальное управление определим из условия максимума гамильтониана (9):

$$\alpha_{\text{опт}} = \arctg \left( \frac{\Psi_{I_y} / 2 - \Psi_{\Delta I_{\text{сп}}}}{\Psi_{I_x} + \Psi_{\Delta r_{\text{сп}}}} \right);$$

$$\beta_{\text{опт}} = \arctg \left[ \Psi_{x_z} / \sqrt{(\Psi_{I_y} / 2 - \Psi_{\Delta I_{\text{сп}}})^2 + (\Psi_{I_x} + \Psi_{\Delta r_{\text{сп}}})^2} \right]. \quad (12)$$

Проверим необходимое условие максимума гамильтониана (9) при управлении (12). Вторые производные гамильтониана по управлению

$$a = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} H = - \frac{A^2 + B^2}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Psi_{x_z}^2}};$$

$$c = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} H = - \sqrt{A^2 + B^2 + \Psi_{x_z}^2};$$

$$b = \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} H = 0.$$

Согласно теории, если  $ac - b^2 > 0$  и  $a < 0$ , то функция  $H$  достигает максимума по управлению в любой момент времени. В рассматриваемом случае сомножители  $a$  и  $c$  могут принимать только отрицательные значения, их произведение только положительно, следовательно, управление (12) доставляет максимум гамильтониану (9) в любой момент времени.

Таким образом, вариационная задача сведена к краевой для системы уравнений движения (7) с управлением (12) и сопряженной ей системы (10), которая заключается в определении начальных значений сопряженных переменных, удовлетворяющих граничным условиям (8).

### Поэтапное управление относительным движением

Так как боковое движение может быть рассмотрено отдельно от продольного, то представляется возможным разделить процесс управления на этапы. На первом этапе происходит коррекция продольного движения, на втором – бокового. Такой вариант управления рассматривался и в других публикациях [25].

Оптимальное управление на первом этапе по критерию минимума общего времени определяется первым равенством системы (12).

Для второго этапа (коррекция бокового движения) определим оптимальное управление. Выпишем уравнения бокового движения:

$$\dot{x}_z = \frac{\delta_W}{2} - y_z;$$

$$\dot{y}_z = x_z. \quad (13)$$

Здесь  $\delta_W$  принимает значения  $\{-1; 1\}$ .

Определим оптимальное управление системой (13). Гамильтониан системы имеет вид

$$H = \Psi_{x_z} \left( \frac{\delta_W}{2} - y_z \right) + \Psi_{y_z} x_z - 1, \quad (14)$$

где  $\Psi_{x_z}, \Psi_{y_z}$  – сопряженные переменные, определяемые третьей строкой системы (10) или пятой и шестой системы (11).

Оптимальное управление определим из условия максимума гамильтониана (14):

$$\delta_{W_{\text{опт}}} = \text{sign}(\Psi_{x_z}). \quad (15)$$

Таким образом, вариационная задача сведена к краевой для системы уравнений движения (13) с управлением (12) и сопряженной ей системы (10) (третья строка), которая заключается в определении начальных значений сопряженных переменных, удовлетворяющих граничным условиям (8) в части бокового движения.

### Численное решение краевых задач

Получены оптимальные управления для трех, качественно разных, типов граничных условий, показанных в табл. 1, где вариант 1 соответствует доминированию требования коррекции периодического движения, вариант 2 – доминированию требования коррекции бокового движения и вариант 3 – доминированию требования коррекции векового движения. Параметры движения в конечный момент времени приняты нулевыми, хотя следует отметить, что для маневра сближения космических аппаратов они могут и должны быть отличными от нуля исходя из требований безопасности [27, 28].

В табл. 2 приведены результаты решения задач управления для введенных граничных условий методом совместного и поэтапного управления.

Таблица 1

#### Граничные условия задач

Вариант	$\Delta r_{\text{сп0}}$	$\Delta I_{\text{сп0}}$	$I_0$	$I_{z0}$
1	1	140	10	2
2	2	140	2	10
3	20	2800	2	10

Как следует из табл. 2, поэтапное управление не оптимально по сравнению с совместным.

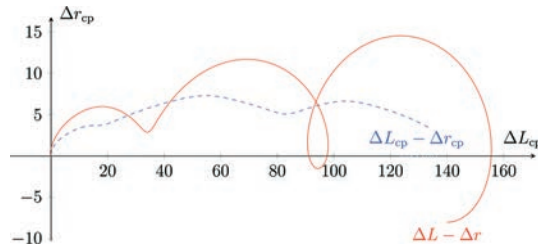
На рис. 2–4 представлены примеры оптимальных траекторий и параметров управления для граничных условий из табл. 1.

Как следует из рис. 2, оптимальная зависимость угла отклонения вектора тяги от радиус-вектора (угол  $\alpha$ ) на витке изменяется от  $-180^\circ$  до  $180^\circ$ . Такое управление характерно для коррекции малой полуоси эллипса относительного движения,

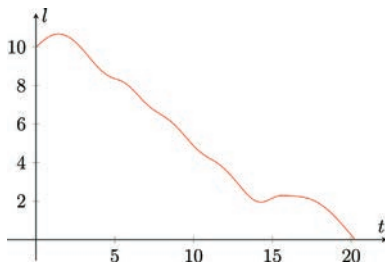
Таблица 2

Результат решения задач управления (затраты времени)

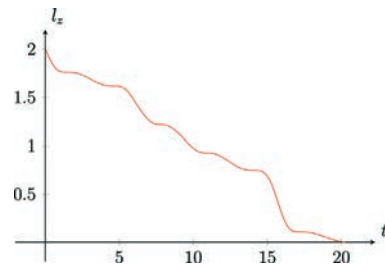
Граничные условия	Совместное управление	Поэтапное управление		
		Коррекция продольного движения	Коррекция бокового движения	Суммарные затраты
1	20,2447	19,9914	6,2832	26,2746
2	31,7952	17,9401	31,4159	49,3560
3	72,4283	70,9021	31,4159	102,3180



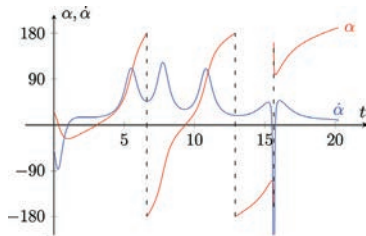
а – траектории векового движения



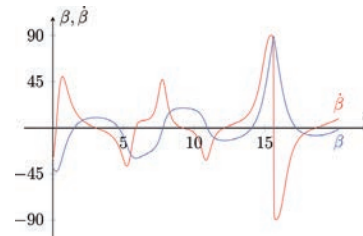
б – зависимость малой полуоси эллипса относительного движения от времени



в – зависимость боковых колебаний от времени



г – зависимость угла отклонения тяги от трансверсального направления в плоскости орбиты α и его производной от времени

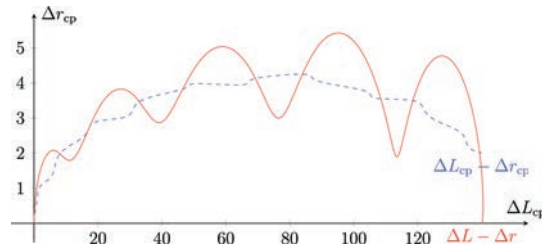


д – зависимость угла отклонения тяги от плоскости орбиты β и его производной от времени

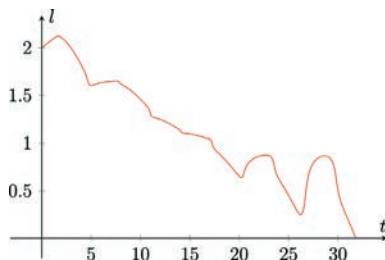
Рис. 2. Пример I: траектории в координатах  $\Delta r_{cp} - \Delta L_{cp}$  (а), зависимости амплитуды продольных колебаний от времени (б), зависимости амплитуды боковых колебаний от времени (в) и зависимости параметров оптимального управления от времени (г, д) для граничных условий 1 по табл. 1 (доминирование требования коррекции продольного периодического движения)

которая практически на всем интервале времени монотонно уменьшается. Нарушение этого принципа приходится на безразмерное время, большее 15, когда происходит одновременная «подгонка» периодического и векового движения. Наиболее сильное уменьшение амплитуды боковых колебаний происходит при прохождении маневриру-

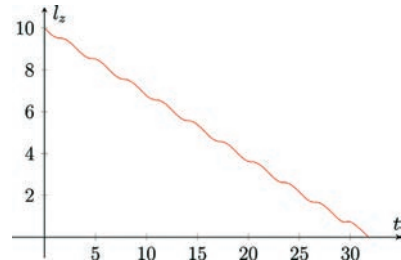
ющим КА апогея орбиты при безразмерном  $\Delta L_{cp}$ , равном 120, 70 и 20, что соответствует безразмерному времени 5, 10 и 15, в эти же моменты времени угол отклонения вектора тяги от плоскости орбиты (угол β) достигает наибольших по модулю значений, а также наблюдаются «рывки» уменьшения амплитуды боковых колебаний. Представляет интерес



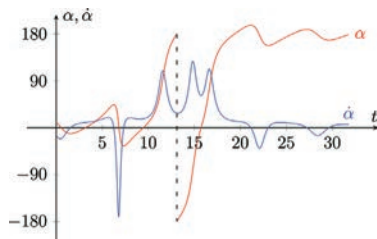
a – траектории векового движения



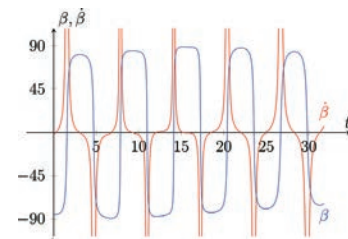
b – зависимость малой полуоси эллипса относительного движения от времени



c – зависимость боковых колебаний от времени



d – зависимость угла отклонения тяги от трансверсального направления в плоскости орбиты α и его производной от времени



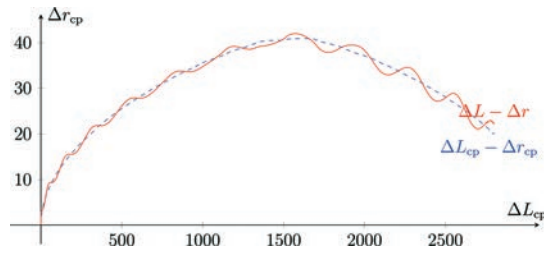
e – зависимость угла отклонения тяги от плоскости орбиты β и его производной от времени

Рис. 3. Пример II: траектории в координатах  $\Delta r_{cp} - \Delta L_{cp}$  (a), зависимости амплитуды продольных колебаний от времени (b), зависимости амплитуды боковых колебаний от времени (c) и зависимости параметров оптимального управления от времени (d, e) для граничных условий 1 по табл. 1 (доминирование требования коррекции бокового периодического движения)

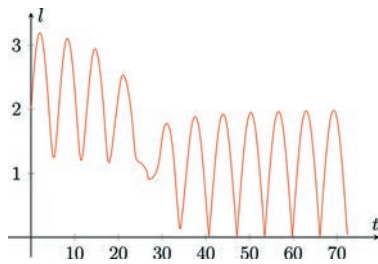
разрыв производной угла  $\alpha$  в момент безразмерного времени 15. Он обусловлен переключением режима указанного угла с коррекции периодического движения на коррекцию векового. В момент безразмерного времени 15 скорость изменения угла  $\beta$  большая, но конечная.

Как следует из рис. 3, оптимальная программа угла отклонения вектора тяги от радиус-вектора (угол  $\alpha$ ) имеет две характерных области. Первая расположена в интервале безразмерного времени  $0 \dots 12$  (или  $\Delta L_{cp}$  от 140 до 120) и  $20 \dots 31.7952$  (или  $\Delta L_{cp}$  от 40 до 0), а вторая расположена в интервале безразмерного времени  $12 \dots 20$ . В первой области угол отклонения тяги от радиус-вектора близок сначала к  $0^\circ$ , затем к  $180^\circ$ . Во второй области он изменяется от минус до плюс  $180^\circ$ . Такая структура управления характерна для со-

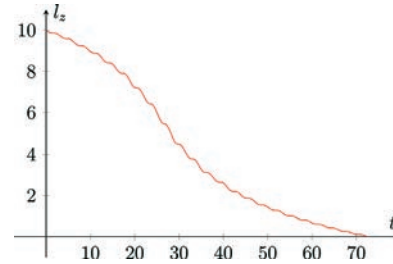
поставимого изменения малой полуоси эллипса относительного движения и векового движения. В первой области изменение вековых составляющих движения близко к монотонному, изменение малой полуоси эллипса относительного движения колебательно. Во второй области изменение векового движения колебательно, изменение малой полуоси относительного движения монотонно. На протяжении всего маневра угол отклонения вектора тяги от плоскости орбиты  $\beta$  колеблется между амплитудными значениями – от минус до плюс  $90^\circ$ , а характер изменения амплитуды боковых колебаний монотонный и, в отличие от ранее рассмотренного случая, близкий к равномерному, без «рывков» при прохождении маневрирующим КА апогея орбиты. Разрыв производной угла  $\alpha$  в момент безразмерного времени 6 обусловлен пе-



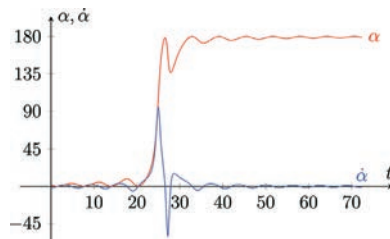
а – траектории векового движения



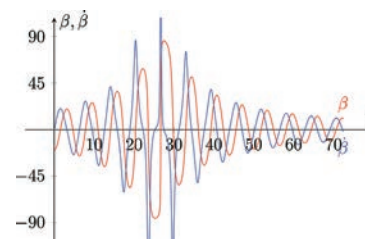
б – зависимость малой полуоси эллипса относительного движения от времени



в – зависимость боковых колебаний от времени



з – зависимость угла отклонения тяги от трансверсального направления в плоскости орбиты α и его производной от времени



д – зависимость угла отклонения тяги от плоскости орбиты β и его производной от времени

Рис. 4. Пример III: траектории в координатах  $\Delta r_{cp} - \Delta L_{cp}$  (а), зависимости амплитуды продольных колебаний от времени (б), зависимости амплитуды боковых колебаний от времени (в) и зависимости параметров оптимального управления от времени (з, д) для граничных условий 1 по табл. 1 (доминирование требования коррекции векового движения)

реключением режима угла  $\alpha$  с коррекции векового движения на коррекцию периодического. Важно указать на разрывы производной угла  $\beta$ . Они имеют место при «скачкообразном» переключении угла с минус  $90^\circ$  на плюс  $90^\circ$ .

Как следует из рис. 4, оптимальная программа угла отклонения вектора тяги от радиус-вектора (угол  $\alpha$ ) содержит две характерные области. Первая в интервале безразмерного времени  $0 \dots 25$ , угол отклонения тяги от радиус-вектора близок к  $0^\circ$ . Вторая область расположена в интервале безразмерного времени  $25 \dots 71,3974$ , угол отклонения тяги близок к  $180^\circ$ . Такое управление характерно для доминирования коррекции векового движения. В указанных областях характер зависимости малой полуоси эллипса относительного движения от безразмерного времени колебательный, векового движения – монотонный. Амплитуда боковых

колебаний уменьшается до заданного значения практически монотонно, наиболее быстрое ее изменение приходится на момент безразмерного времени  $20 \dots 40$ , когда угол отклонения тяги от плоскости орбиты достигает наибольших по модулю значений. В это же время компонента движения  $\Delta r_{cp}$  равна  $30 \dots 40$ , наблюдается наибольшее удаление маневрирующего КА от центра Земли, следовательно, маневрирующий КА имеет минимальную скорость. Зависимость угла  $\beta$  от времени аналогична случаю, показанному на рис. 3 (доминирование требования коррекции бокового движения), с той лишь разницей, что здесь угол не достигает амплитудных значений. Природа разрывов производных углов  $\alpha$  и  $\beta$  рассмотрена ранее.

По результатам расчетов можно заключить, что целесообразно ввести пассивные участки на траектории в следующие моменты времени:



1. При переключении режима отклонения угла  $\alpha$  с коррекции векового движения на коррекцию периодического.

2. В моменты переключения угла  $\beta$  между амплитудными значениями при сопоставимом или доминирующем над остальными граничными условиями требования коррекции бокового движения.

Введение пассивных участков в указанные моменты времени снизит требования к скорости разворота космического аппарата для ориентации тяги в требуемом направлении и позволит ограничиться более простой аппаратурой управления угловым движением рассматриваемого аппарата.

### Выводы

С применением принципа максимума Понтрягина задача оптимального управления относительным движением космического аппарата с двигателем конечной тяги сведена к двухточечной краевой задаче. Получена оптимальная программа управления для поэтапного и совместного управления составляющими относительного движения. Сравнение совместного и поэтапного управления показало, что поэтапное управление не оптимально с точки зрения целевого критерия. Выполнен расчёт траекторий движения для разных типов граничных условий: доминирование векового движения, доминирование периодического движения в плоскости орбиты или в боковой плоскости. Показано, что тип граничных условий существенно влияет на характер оптимального управления.

### Список источников

1. Дзесов Р.А., Жуков В.Н., Мельников Е.К., Павлов В.П. Баллистический анализ схемы быстрого сближения транспортных кораблей с международной космической станцией // Вестник Московского авиационного института. 2014. Т. 21. № 3. С. 73–79.
2. Миронов В.И., Миронов Ю.В., Фоминов И.В. Энергетически оптимальное управление сближением космических аппаратов в нецентральной гравитационном поле Земли на этапе дальнего наведения // Труды СПИИРАН. 2019. Т. 18. № 1. С. 202–229. DOI: 10.15622/sp.18.1.202-229
3. Салмин В.В., Четвериков А.С. Управление плоскими параметрами орбиты геостационарного космического аппарата с помощью двигателя малой тяги // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королева (национального исследовательского университета). 2015. Т. 14. № 4. С. 92–101. DOI: 10.18287/2412-7329-2015-14-4-92-101
4. Баранов А.А., Ролдугин Д.С. Шестиимпульсные маневры встречи космических аппаратов на околокруговых некомпланарных орбитах // Космические исследования. 2012. Т. 50. № 6. С. 472–480.
5. Баранов А.А., Терехова Е.О. Оптимальная четырехимпульсная встреча на компланарных почти круговых орбитах // Космические исследования. 1995. Т. 33. № 4. С. 420–425.
6. Баранов А.А. Маневрирование в окрестности круговой орбиты. – М.: Спутник+, 2016. – 512 с.
7. Han C., Xie H.W. Study on the Multi-Revolution Lambert Transfer Algorithm for Rendezvous // Chinese Space Science and Technology. 2004. Vol. 24. No. 5, pp. 9–13.
8. Kriz J.A. A Uniform Solution of the Lambert Problem // Celestial Mechanics. 1976. Vol. 14, pp. 509–513. DOI: 10.1007/BF01229061
9. Shen H.J., Tsiotras P. Optimal Two-Impulse Rendezvous Using Multiple-Revolution Lambert Solutions // Journal of Guidance, Control and Dynamics. 2003. Vol. 26. No. 1, pp. 50–61. DOI: 10.2514/2.5014
10. Улыбышев Ю.П. Оптимизация многорежимных траекторий сближения с ограничениями // Космические исследования. 2008. Т. 46. № 2. С. 135–147.
11. Hughes S.P., Mailhe L.M., Guzman J.J. A Comparison of Trajectory Optimization Methods for the Impulsive Minimum Fuel Rendezvous Problem // 26th Annual Guidance and Control Conference (Breckenridge, CO). 2003. Vol. 113, pp. 85–104. URL: <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20030025254/downloads/20030025254.pdf>
12. Kluever C.A. Low-Thrust Trajectory Optimization Using Orbital Averaging and Control Parameterization // Spacecraft Trajectory Optimization. - Cambridge University Press, 2010, pp. 112–138. DOI: 10.1017/CBO978051177802-ifvgbymjys5.006
13. Luo Y.Z., Li H.Y., Tang G.J. Hybrid approach to optimize a rendezvous phasing strategy // Journal of Guidance, Control and Dynamics. 2007. Vol. 30. No. 2, pp. 185–191. DOI: 10.2514/1.20232
14. Luo Y.Z., Tang G.J., Lei Y.J. Optimization of multiple-impulse, multiple revolution, rendezvous phasing maneuvers // Journal of Guidance, Control and Dynamics. 2007. Vol. 30. No. 4, pp. 946–952. DOI: 10.2514/1.25620
15. Luo Y.Z., Tang G.J., Li H.Y. Optimization of multi-impulse minimum-time rendezvous using a hybrid genetic algorithm // Aerospace Science and Technology. 2006. Vol. 10. No. 6, pp. 534–540. DOI: 10.1016/j.ast.2005.12.007
16. Luo Y.Z., Zhang J., Li H.Y., Tang G.J. Interactive optimization approach for optimal impulsive rendezvous using primer vector and evolutionary algorithms // Acta Astronautica. 2010. Vol. 67. No. 3–4, pp. 396–405. DOI: 10.1016/j.actaastro.2010.02.014
17. Luo Y.Z., Li H.Y., Tang G.J. Hybrid approach to Optimize a Rendezvous Phasing Strategy // Journal of Guidance, Control and Dynamics. 2007. Vol. 30. No. 1, pp. 185–191. DOI: 10.2514/1.20232
18. Zhang J., Wang X., Ma X.B. et al. Spacecraft long-duration phasing maneuver optimization using hybrid approach // Acta Astronautica. 2012. Vol. 72, pp. 132–142. DOI: 10.1016/j.actaastro.2011.09.008

19. Филиппов Г.А. Формирование парето-оптимальных номинальных программ управления относительным движением космического аппарата с конечной тягой на околокруговых орбитах: Дисс. ... канд. техн. наук. — Самара, 2023. — 131 с.
20. Ишков С.А., Филиппов Г.А. Исследование оптимальных программ управления относительным движением космического аппарата с ограниченной тягой // Космические исследования. 2023. Т. 61. № 3. С. 248–257. DOI: 10.31857/S0023420622600155
21. Константинов М.С., Каменков Е.Ф., Перельгин Б.П., Безвербий В.К. Механика космического полёта: Учеб. — М.: Машиностроение, 1989. — 408 с.
22. Аппазов Р.Ф., Сытин О.Г. Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли. — М.: Наука, 1987. — 440 с.
23. Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. — М.: Наука, 1965. — 540 с.
24. Ишков С.А. Сближение космических аппаратов с малой тягой на околокруговых орбитах // Космические исследования. 1992. Т. 30. № 2. С. 165–179.
25. Авксентьев А.А. Метод управления сближением космического аппарата с орбитальным объектом на участке дальнего наведения // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2017. Т. 60. № 8. С. 689–696. DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-8-689-696
26. Олейников И.И., Аксенов О.Ю., Павлов В.П. Стратегия расчёта вероятности безопасного порога сближения двух космических объектов // Вестник Московского авиационного института. 2012. Т. 19. № 2. С. 29–34.
27. Мынкин В.А., Обносков Б.В. Минимизация систематической составляющей «мгновенного пролета» и спрямление траектории в задаче пересечения траекторий двух летательных аппаратов // Вестник Московского авиационного института. 2011. Т. 18. № 2. С. 15–25.

## References

1. Dzesov R.A., Zhukov V.N., Melnikov E.K., Pavlov V.P. Ballistic analysis of fast scheme for rendezvous between transport vehicles and the international space station. *Aerospace MAI Journal*, 2014, vol. 21, no. 3, pp. 73–79.
2. Mironov V.I., Mironov Yu.V., Fominov I.V. *Trudy SPIIRAN*, 2019, vol. 18, no. 1, pp. 202–229. DOI: 10.15622/sp.18.1.202-229
3. Salmin V.V., Chetverikov A.S. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta im. akademika S.P. Koroleva (natsional'nogo issledovatel'skogo universiteta)*, 2015, vol. 14, no. 4, pp. 92–101. DOI: 10.18287/2412-7329-2015-14-4-92-101
4. Baranov A.A., Roldugin D.S. *Kosmicheskie issledovaniya*, 2012, vol. 50, no. 6, pp. 472–480.
5. Baranov A.A., Terekhova E.O. *Kosmicheskie issledovaniya*, 1995, vol. 33, no. 4, pp. 420–425.
6. Baranov A.A. *Manevrirovanie v okrestnosti krugovoi orbity* (Maneuvering in the vicinity of a circular orbit), Moscow, Sputnik+, 2016, 512 p.
7. Han C., Xie H.W. Study on the Multi-Revolution Lambert Transfer Algorithm for Rendezvous. *Chinese Space Science and Technology*, 2004, vol. 24, no. 5, pp. 9–13.
8. Kriz J.A. A Uniform Solution of the Lambert Problem. *Celestial Mechanics*, 1976, vol. 14, pp. 509–513. DOI: 10.1007/BF01229061
9. Shen H.J., Tsiotras P. Optimal Two-Impulse Rendezvous Using Multiple-Revolution Lambert Solutions. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2003, vol. 26, no. 1, pp. 50–61. DOI: 10.2514/2.5014
10. Ulybyshev Yu.P. *Kosmicheskie issledovaniya*, 2008, vol. 46, no. 2, pp. 135–147.
11. Hughes S.P., Mailhe L.M., Guzman J.J. A Comparison of Trajectory Optimization Methods for the Impulsive
11. Minimum Fuel Rendezvous Problem. *26th Annual Guidance and Control Conference (Breckenridge, CO)*, 2003, vol. 113, pp. 85–104. URL: <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20030025254/downloads/20030025254.pdf>
12. Kluever C.A. Low-Thrust Trajectory Optimization Using Orbital Averaging and Control Parameterization. In *Spacecraft Trajectory Optimization*. Cambridge University Press, 2010, pp. 112–138. DOI: 10.1017/CBO978051177802-ifvgbymjys5.006
13. Luo Y.Z., Li H.Y., Tang G.J. Hybrid approach to optimize a rendezvous phasing strategy. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2007, vol. 30, no. 2, pp. 185–191. DOI: 10.2514/1.20232
14. Luo Y.Z., Tang G.J., Lei Y.J. Optimization of multiple-impulse, multiple revolution, rendezvous phasing maneuvers. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2007, vol. 30, no. 4, pp. 946–952. DOI: 10.2514/1.25620
15. Luo Y.Z., Tang G.J., Li H.Y. Optimization of multi-impulse minimum-time rendezvous using a hybrid genetic algorithm. *Aerospace Science and Technology*, 2006, vol. 10, no. 6, pp. 534–540. DOI: 10.1016/j.ast.2005.12.007
16. Luo Y.Z., Zhang J., Li H.Y., Tang G.J. Interactive optimization approach for optimal impulsive rendezvous using primer vector and evolutionary algorithms. *Acta Astronautica*, 2010, vol. 67, no. 3–4, pp. 396–405. DOI: 10.1016/j.actaastro.2010.02.014
17. Luo Y.Z., Li H.Y., Tang G.J. Hybrid approach to Optimize a Rendezvous Phasing Strategy. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2007, vol. 30, no. 1, pp. 185–191. DOI: 10.2514/1.20232
18. Zhang J., Wang X., Ma X.B. et al. Spacecraft long-duration phasing maneuver optimization using hybrid approach. *Acta Astronautica*, 2012, vol. 72, pp. 132–142. DOI: 10.1016/j.actaastro.2011.09.008

19. Filippov G.A. *Formirovanie pareto-optimal'nykh nominal'nykh programm upravleniya otноситel'nykh dvizheniem kosmicheskogo apparata s konechnoi tyagoi na okolokrugovykh orbitakh* (Formation of pareto-optimal nominal control programs for the relative motion of a spacecraft with finite thrust in near-circular orbits). Ph.D. thesis. Samara, Samarskii universitet, 2023, 131 p.
20. Ishkov S.A., Filippov G.A. *Kosmicheskie issledovaniya*, 2023, vol. 61, no. 3, pp. 248-257. DOI: 10.31857/S0023420622600155
21. Konstantinov M.S., Kamenkov E.F., Pereygin B.P., Bezverbyi V.K. *Mekhanika kosmicheskogo poleta* (Mechanics of space flight), Moscow, Mashinostroenie, 1989, 408 p.
22. Appazov R.F., Sytin O.G. *Metody proektirovaniya traektorii nositelei i sputnikov Zemli* (Methods of designing trajectories of carriers and Earth satellites), Moscow, Nauka, 1987, 440 p.
23. El'yasberg P.E. *Vvedenie v teoriyu poleta iskusstvennykh sputnikov Zemli* (Introduction to the theory of flight of artificial Earth satellites), Moscow, Nauka, 1965, 540 p.
24. Ishkov S.A. *Kosmicheskie issledovaniya*, 1992, vol. 30, no. 2, pp. 165-179.
25. Avksent'ev A.A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Priborostroenie*, 2017, vol. 60, no. 8, pp. 689-696. DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-8-689-696
26. Oleynikov I.I., Aksyonov O.Y., Pavlov V.P. The strategy of determination of the safe threshold probability of two space objects approach. *Aerospace MAI Journal*, 2012, vol. 19, no. 2, pp. 29-34.
27. Mynkin V.A., Obnosov B.V. Minimization of the regular component of "overshoot estimation" and the trajectory straightening in the problem to cross the two flying vehicles trajectories. *Aerospace MAI Journal*, 2011, vol. 18, no. 2, pp. 15-25.

Статья поступила в редакцию 28.04.2023; одобрена после рецензирования 13.06.2023; принята к публикации 13.06.2023.

The article was submitted on 28.04.2023; approved after reviewing on 13.06.2023; accepted for publication on 13.06.2023.