

УДК 629.735.0184

Исследование упругой линии трехслойной балки с существенно различающейся слоевой жесткостью

А.А. Дудченко, Е.А. Башаров

Аннотация

Главной целью работы было исследование поведения упругой линии при нагружении трехслойной балки на основе аналитических формул, построенных с использованием теории изгиба многослойной балки, изложенной в работе В.В. Васильева [1], теории нагружения трехслойных оболочек Э.И. Григолюка [2], и метода нелинейных конечных элементов (КЭ) при изгибе упругого стержня в рамках нелинейной динамики гибких стержней, изложенного в работах Ф.Н. Шклярчука и Т.В. Гришаниной [3,4,5]. Были выявлены и дано объяснение появлению нетривиальных видов упругой линии при нагружении балки с существенно различающейся слоевой жесткостью.

Ключевые слова

трехслойная балка, напряженно-деформированное состояние, конечный элемент, нелинейная модель деформирования, нетривиальная упругая линия, усталостная прочность.

Введение

При расчете слоистой балки из композиционного материала (КМ) в линейной постановке форма прогиба близка к форме прогиба изотропной балки. Однако первые эксперименты по нагружению натуральных образцов композитных балок, проведенные в Отраслевой НИИ прочности и надежности конструкций ЛА при кафедре Строительная механика ЛА КГТУ им. А.Н. Туполева [6], выявили специфическую S-образную форму упругой линии, которая качественно отличается при изгибе балки из одного материала. Это связано с тем, что в линейной модели не учитываются нелинейные члены возникающие при расчете слоистых балок со слоями с различными жесткостями на растяжении, сжатие и сдвиг. Особенно нелинейность характерна для мягких резиновых слоев. Так как слои резины очень тонкие, а величина сдвиговой деформации очень большая, имеет место нелинейность, которая и приводит к нетривиальной упругой линии. Точность нелинейной модели зависит

от точности определения сдвиговых характеристик резины, выбора толщины слоя резины и выбора структуры расположения слоев по толщине балки. Однако трудности при расчете такой нелинейной модели увеличиваются на порядок. Использование нелинейной модели распределения деформаций позволяет получить более близкую к реальной картину НДС слоистой балки из композиционных материалов с существенно различающейся слоевой жесткостью.

Постановка задачи

Рассмотрим статическое нагружение консольной трехслойной балки с существенно различающейся слоевой жесткостью. Конструктивно упругая балка состоит из двух слоев, имеющих большую жесткость, между которыми проложена резина. Схема общего нагружения трехслойной балки поперечной силой P представлена на рис.1.

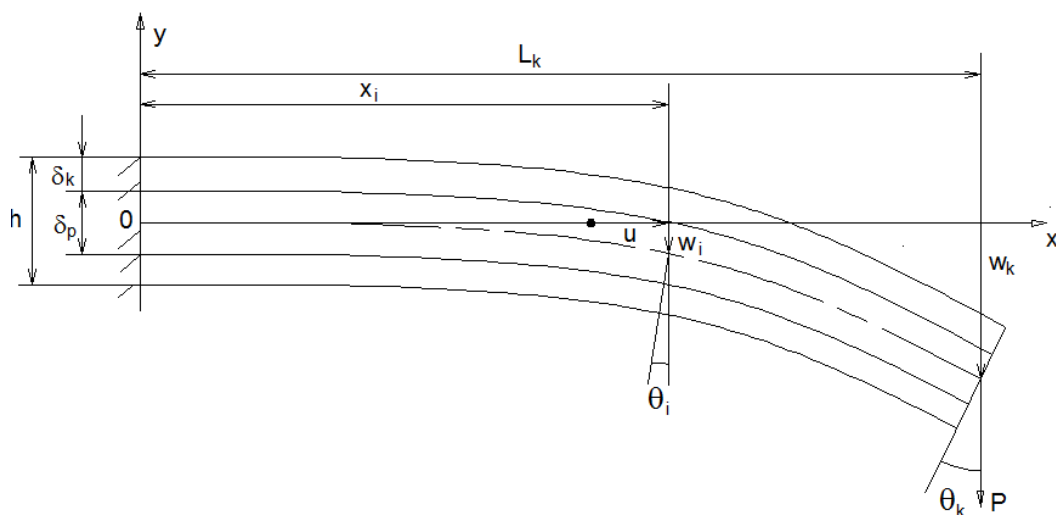


Рис.1

Упругую слоистую балку можно представить в виде нелинейного КЭ, на концах которого задаются перемещения при нагружении поперечным сдвигом и использовать метод конечных элементов в геометрически нелинейной постановке по методике описанной в работах [3,4,5].

Основные допущения в расчетной модели:

- недеформируемость поперечного сечения;
- пренебрежение эффектом Пуассона ($\mu = 0$);
- учитывается поперечный сдвиг и влияние продольной растягивающей силы в виде нелинейных членов;
- продольная деформация ε_x распределяется в сечении по закону плоскости,

т.е. она линейно зависит от координат z и y ;

$$f(z, y) = zy$$

Рассмотрим нагружение нелинейного КЭ трехслойной балки. Такой КЭ неподвижно закреплен слева:

$$u(0) = w(0) = \theta(0) = 0 \quad (1)$$

Обозначим через w_k, θ_k – поперечное перемещение и угол поворота сечения по правому краю КЭ, а через P – соответствующие им поперечную силу. При нагружении торсиона поперечной силой конечная деформация удлинения его оси равна:

$$\varepsilon_x = u' + \frac{1}{2} w'^2 = 0 \quad (2)$$

Отсюда можно записать перемещение КЭ трехслойной балки интегрируя (2) при соблюдении условия (1):

$$u = -\frac{1}{2} \int_0^{L_k} w'^2 dx \quad (3)$$

Для определения функций поперечного перемещения $w(x)$ и угла поворота $\theta(x)$ в пределах длины КЭ будем использовать аппроксимацию в виде степенного ряда [3], тогда можно записать:

$$w(x) = w_k \varphi(x) + \theta_k \psi(x), \quad (4)$$

$$\theta(x) = w_k \eta(x) + \theta_k \chi(x)$$

где:

$$\varphi(x) = (1 - K_k) \frac{x}{L_k} + 3K_k \frac{x^2}{L_k^2} - 2K_k \frac{x^3}{L_k^3}, \quad \psi(x) = -\frac{1 - K_k}{2} x + \frac{1 - 3K_k}{2} \frac{x^2}{L_k} + K_k \frac{x^3}{L_k^2},$$

$$\eta(x) = 6 \frac{K_k}{L_k} \left(\frac{x}{L_k} - \frac{x^2}{L_k^2} \right), \quad \chi(x) = (1 - 3K_k) \frac{x}{L_k} + 3K_k \frac{x^2}{L_k^2}.$$

причем:

$$K_k = \left(1 + \frac{12}{L_k^2} \frac{EI_k}{GF_k} \right)^{-1}.$$

Выражения (4) есть точное решение статической задачи нагружения упругой балки постоянного поперечного сечения без учета продольной растягивающей силы ($EF_k = Const, GF_k = Const, EI_k = Const, N = 0$).

Запишем потенциальную энергии деформации КЭ трехслойной балки:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{L_k} \left[E_x I_z \left(w'' \right)^2 + GF \left(w' - \theta \right)^2 \right] dx \quad (5)$$

Потенциальную энергию деформации КЭ трехслойной балки с учетом (4)-(5) запишем в виде:

$$U = \frac{1}{2} \frac{12 E_x I_z}{L_k^3} K_k \left[w_k^2 - L_k w_k \theta_k + \frac{1 + 3 K_k}{12 K_k} L_k^2 \theta_k^2 \right] \quad (6)$$

где $F = \iint dz dy$, $I_z = \iint y^2 dz dy$, $K_k = \left(1 + \frac{12}{L_k^2} \frac{E_x I_z}{GF} \right)^{-1}$

где E_x, G — модули упругости и сдвига упругой балки.

Пренебрегая эффектом Пуассона, который не учитывается в энергии нагружения балок, получаем энергетический функционал в виде:

$$U = \Phi(w_k, \theta_k) \quad (7)$$

где Φ — функция изменения потенциальной энергии деформации КЭ.

Согласно принципу Лагранжа и вариационного исчисления, осуществляя варьирование по w_k, θ_k из условия $\delta U = 0$, получаем уравнения равновесия (8) и естественные граничные условия (9):

$$\begin{cases} N' = 0, \\ Q' = 0, \\ Q = M' \end{cases} \quad (8) \quad \begin{cases} N \delta u = 0, \\ Q \delta w = 0, \\ M \delta \theta = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Уравнения равновесия и естественные граничные условия получаются если выделить элемент нейтральной оси балки и рассмотреть его равновесие к которому приведены силы и моменты (Рис.2):

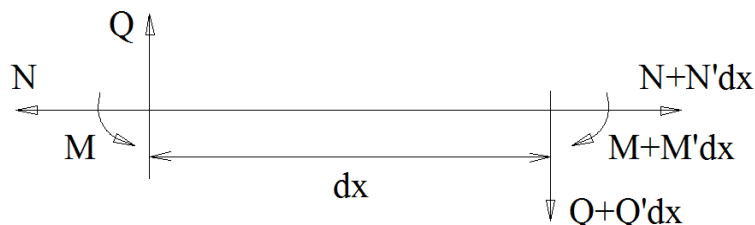


Рис.2 Равновесие элемента нейтральной оси трехслойной балки

При условии равновесия сил и моментов можно записать краевые условия для КЭ трехслойной балки в виде:

При $x = 0$: $u(0) = w(0) = \theta(0) = 0$

При $x = L_k$: (10)

$$\begin{cases} N_k(L_k) = 0, \\ Q_k(L_k) = P, \\ M_k(L_k) = -P(L_k - x) \end{cases}$$

Описание эксперимента

Эксперимент был проведен на консольной трехслойной балке прямоугольного сечения, состоящей из двух пластин Д16Т, между которыми был проложен слой технической резины типа Р-181. Характеристики пластины из сплава Д16Т приняты: модуль упругости в продольном и поперечном направлении $E = 72000$ МПа, модуль сдвига $G = 27700$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$. Характеристики слоя резины приняты: модуль упругости $E = 20$ МПа, модуль сдвига $G = 2,0$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,499$.

Геометрические размеры трехслойной балки прямоугольного сечения равны: длина – $\underline{L} = 500$ мм, ширина – $\underline{b} = 20$ мм, высота – $\underline{h} = 14$ мм. Толщина пластины Д16Т – $\delta_1 = 2$ мм, толщина слоя резины – $\delta_2 = 10$ мм.

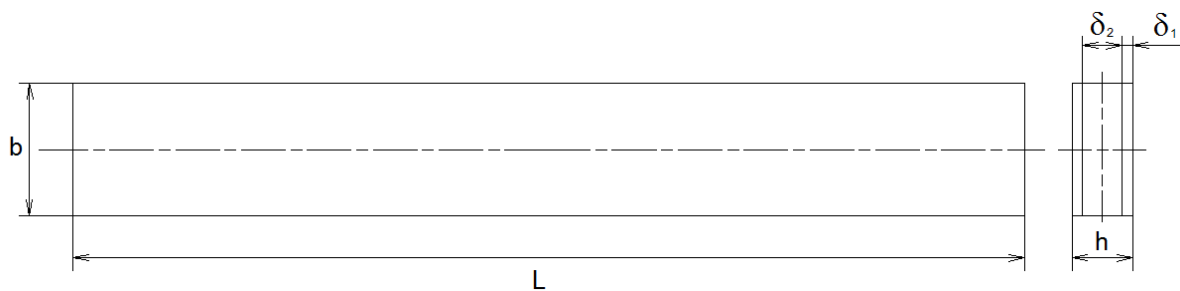
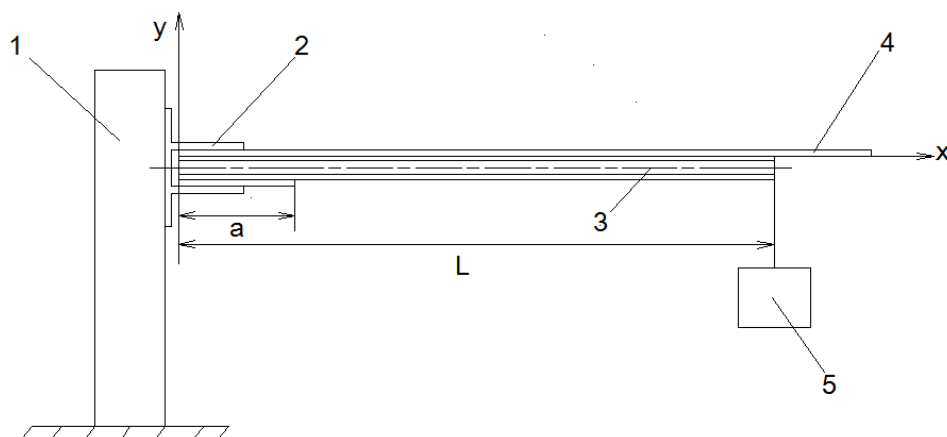
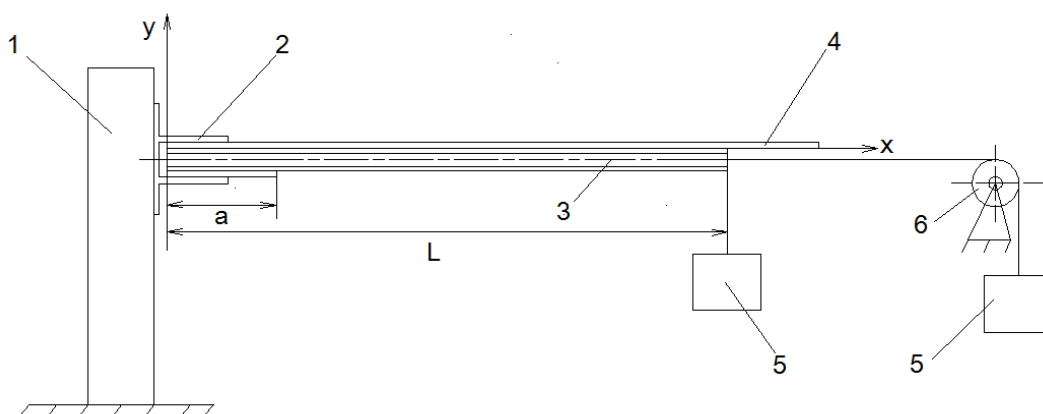


Рис.3 Общий вид и геометрические размеры образца трехслойной балки

При испытаниях образец жестко закрепляется в комлевом участке, свободный конец нагружается усилиями через приспособление. Нагрузка прикладывалась к трехслойной балке по разному: поперечной силой $P = 25H$, $P = 50H$ и при сложном нагружении растягивающей силой $N = 200H$ с учетом их взаимовлияния.



а) при простом нагружении



б) при сложном нагружении

Рис.4 Схема испытательной установки

1-колонна, 2-захват, 3-образец, 4-установочная база для системы измерений перемещений, 5-груз, 6-шкив.

Прогиб трехслойной балки определялся при помощи мерной линейки, который измерялся от базы 4 до нейтральной оси трехслойной балки. Значения прикладываемых сил контролировалось динамометром при помощи подвешивания чугунных чушек, которые использовались в качестве грузов и контрольным взвешиванием на весах. Сложный характер нагружения способствует лучшему пониманию поведения упругой линии балки со слоями с различными изгибными жесткостями и жесткостями на растяжение.

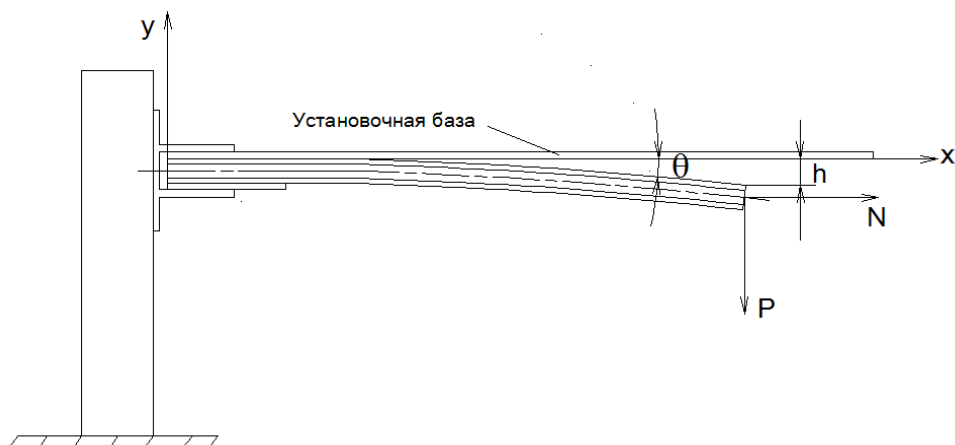


Рис.5 Схема нагружения опытного образца

В случае закрепления слоев балки со свободным краем, поперечная сила P в виде груза, подвешенного к крюку, прикладывалась через болты крепления на пластину 1, которая нагружала перерезывающей силой верхний слой балки, причем нижний слой балки оставался свободным. В случае закрепления слоев балки со стеснением перемещения слоев на краю, поперечная сила P прикладывается уже к болтовому соединению пластин 1, 2, которые нагружают внешние слои балки одинаково. Болтовое соединение создает стеснение в зоне прикладываемой нагрузки, тем самым препятствуя свободному перемещению нижнего слоя, т.е. слои деформируются как одно целое. При нагружении растягивающей силой N , нагрузка в виде груза на нити перекинутой через блок передается через болты крепления на пластины 1, 2 которые нагружают внешние слои растяжением в продольном направлении (рис.6). Причем нагрузка может прикладываться под некоторым конструктивным углом к нейтральной оси балки, с целью моделирования нагружения образца к реальной центробежной силой лопасти. Так при сложном нагружении трехслойная балка нагружается одновременно как поперечной силой P , так и растягивающей силой N .

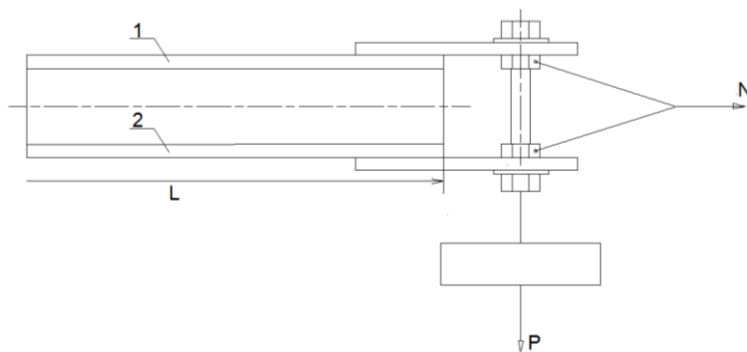
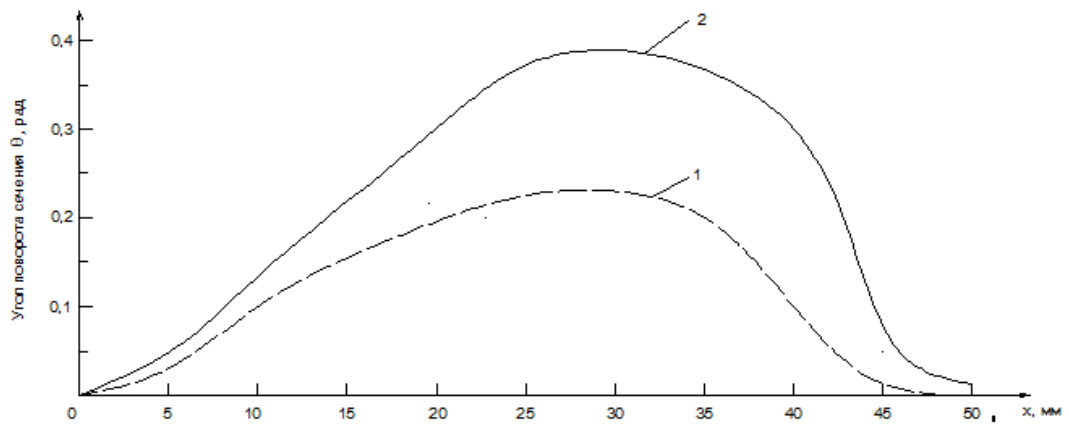
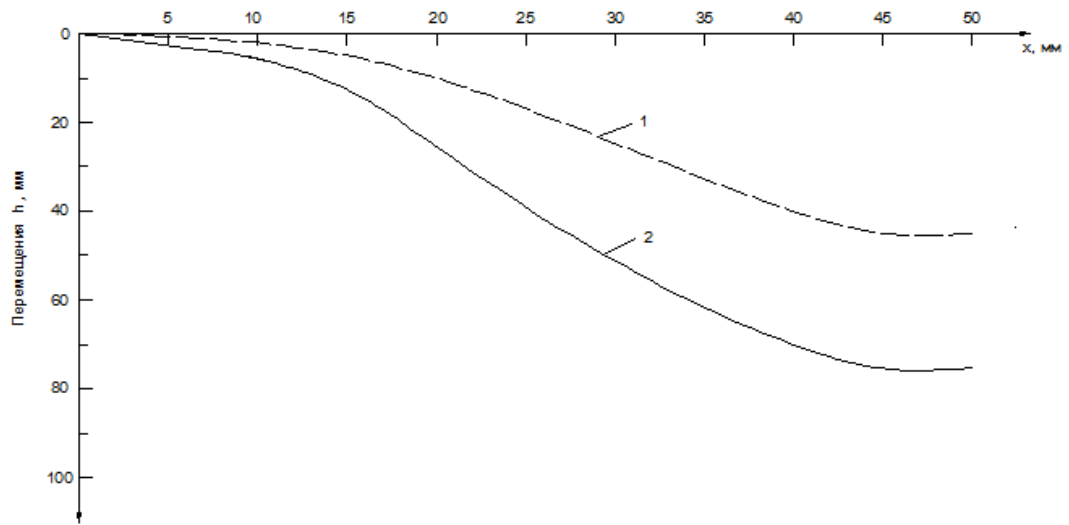


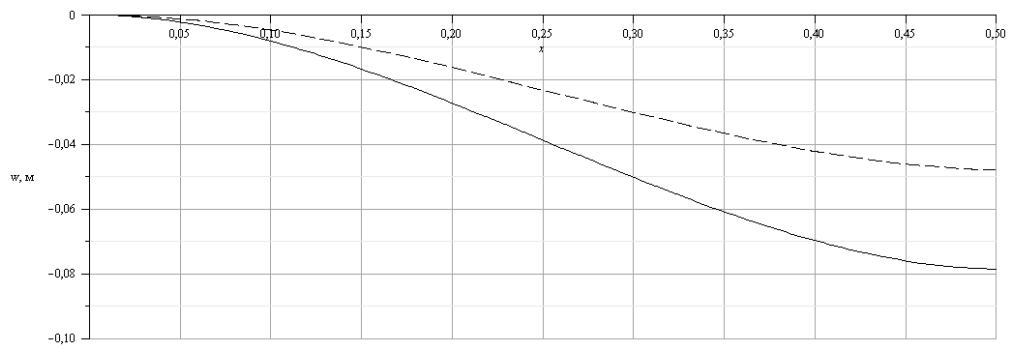
Рис.6 Схема стесненного нагружения образца

Результаты

В результате расчета и опытных измерений были получены следующие зависимости поведения упругой линии трехслойной балки, представленные на рис.7-10.



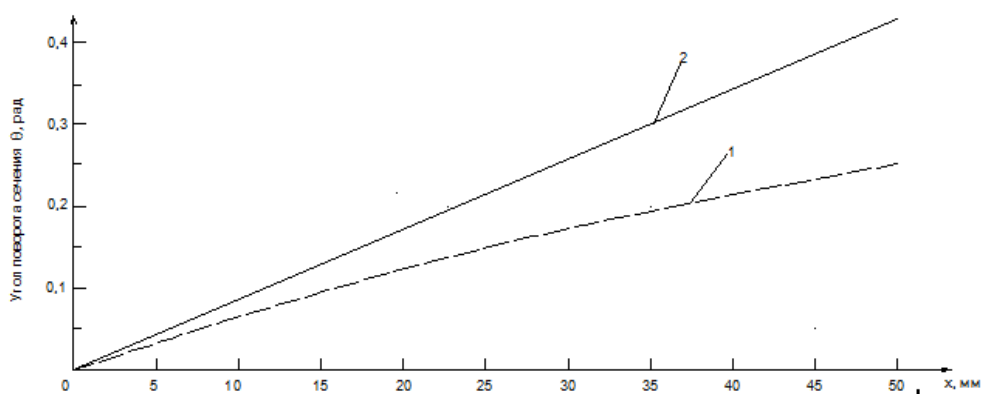
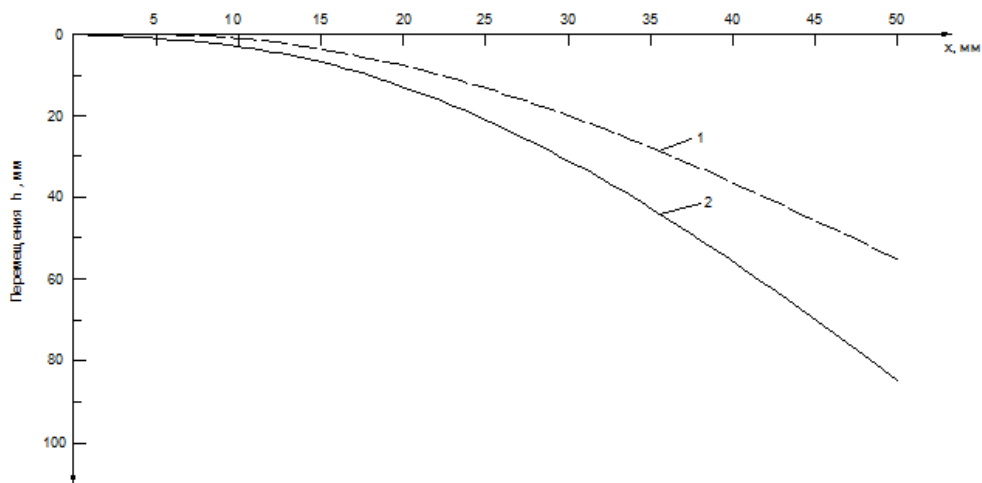
а) Эксперимент



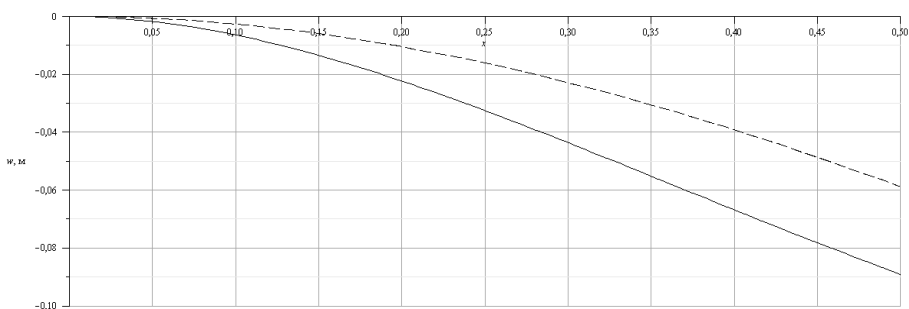
б) Расчет

Рис.7 Нагружение балки со свободным концом поперечной силой:

1- $P = 25H$, 2- $P = 50H$.



а) Эксперимент



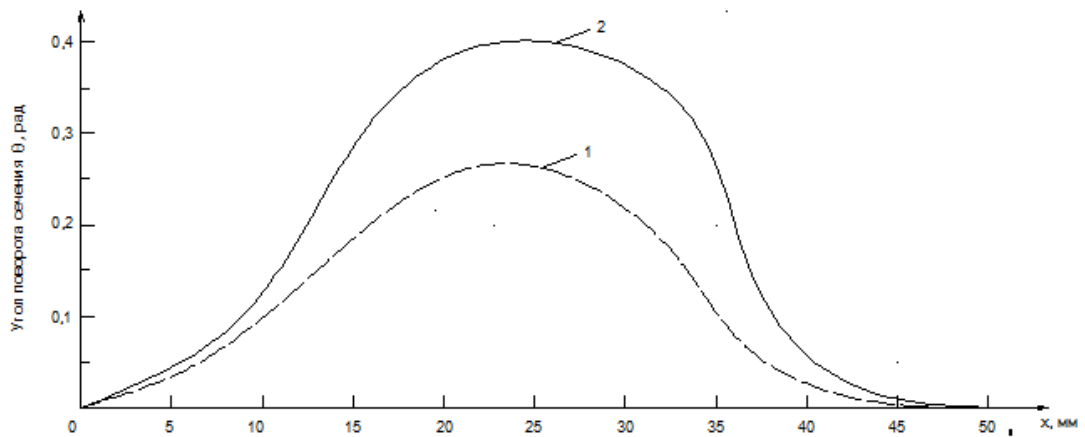
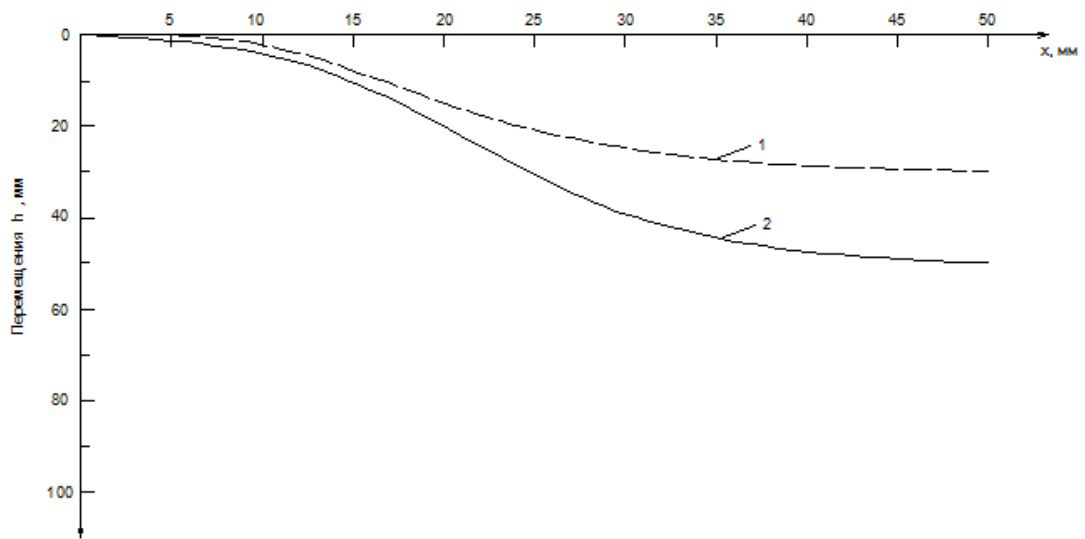
б) Расчет

Рис.8 Нагружение балки с закрепленными на конце пластинами поперечной силой:

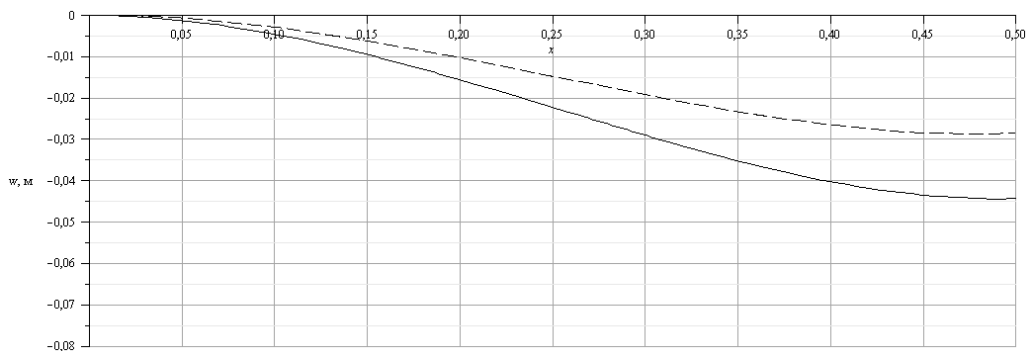
$$1 - P = 25H, 2 - P = 50H.$$

При проведении эксперимента установлено, что при поперечном изгибе трехслойной балки ее упругая линия в различных случаях закрепления ведет себя по-разному. В случае закрепления слоев балки со свободным краем упругая линия имеет ярко выраженную нетривиальную S-образную форму, тогда как в случае закрепления слоев балки со стеснением перемещения слоев на краю упругая линия имеет обычную форму изотропной балки. Это объясняется тем, что наружные слои и резина имеют сильно отличающиеся

жесткости на сдвиг. При такой разнице жесткостей слоев по толщине балки сдвиговая деформация в резине имеет существенно большее значение и имеет нелинейный характер.



а) Эксперимент



б) Расчет

Рис.9 Нагружение балки с незакрепленными пластинами на конце поперечной силой 1- $P = 25H$, 2- $P = 50H$ и растягивающей силой $N = 200H$.

Это приводит к тому, что нижний слой балки получает большее продольное перемещение, чем верхний. Тем самым упругая линия балки приобретает S -образную форму. При расчете в такой постановке использование единой кинематической гипотезы плоских нормалей не позволяет получить реальное распределение напряжений и деформаций по толщине балки и следует применять гипотезу ломанной линии с учетом геометрической нелинейности при растяжении.

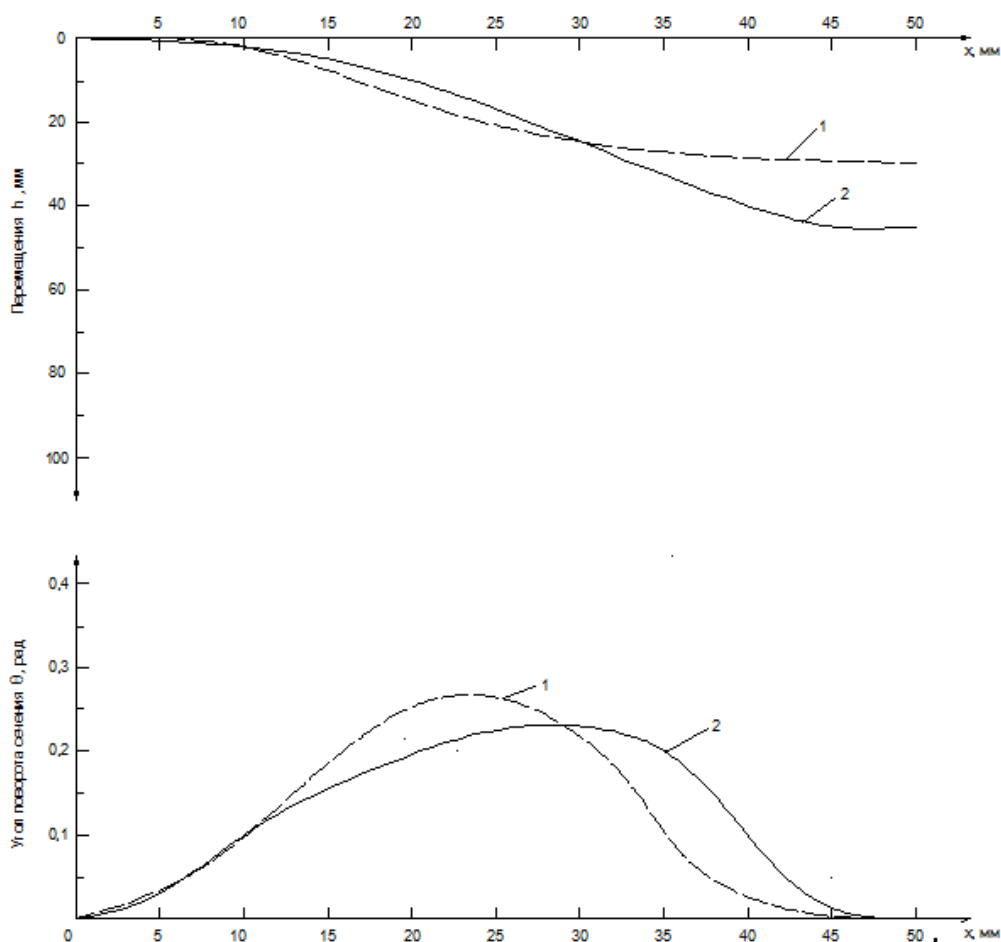


Рис.10 Зависимости изменения прогиба и угла поворота при нагружении балки с незакрепленными пластинами на конце:

1- при действии растяжения, 2- без действия растяжения.

При сложном нагружении вид упругой линии несколько меняется, это объясняется высокой чувствительностью конструкции балки к направлению приложения нагрузки. Экспериментально установлено, что при разгрузке балки сохраняются остаточные прогибы, которые исчезают через некоторое время.

Установлено хорошее согласование результатов аналитического расчета с данными эксперимента, погрешность составляет не более 10-20%.



а



б

Рис.11 Вид упругой линии трехслойной балки, полученной в эксперименте
а- свободное нагружение, б- стесненное нагружение.

Выводы

Поставленный эксперимент на образце трехслойной балки и выполненные расчеты позволяют правильно обосновать появление S - образной формы при нагружении образцов многослойных балок, проведенные в Отраслевой НИЛ прочности и надежности конструкций ЛА при кафедре Строительная механика ЛА КГТУ им. А.Н. Туполева [6]. Появление такой формы упругой линии является прямым следствием слоеной структуры многослойной балки типа торсион по длине и толщине. Дело в том, что такая балка в регулярной зоне имеет многослойную структуру, где слои стеклопластика совмещаются с

тонкими слоями резины. За счет того, что слой резины тонкий и имеет модуль сдвига G на несколько порядков меньше по сравнению со слоями из стеклоткани, сдвиговая деформация на нижней пластине становится очень большой и имеет место нелинейная зависимость этой деформации от прикладываемой нагрузки, что приводит к характерному S -образному виду упругой линии трехслойной балки. В слоистом торсионе, где резиновые слои используются с целью увеличения изгибной жесткости разнесом слоев, но без существенного увеличения крутильной жесткости, слои резины очень тонкие и имеет место похожий эффект появления S -образного вида упругой линии при статическом нагружении без продольной растягивающей силы. При нагружении такой структуры поперечной силой, сдвиговая деформация в слоях резины имеет нелинейный характер и нижние слои балки имеют тенденцию к некоторому продольному перемещению в пределах сдвиговой деформации резины. Иначе происходит, если балка имеет стесненное нагружение на свободном краю (случай, когда перемещения слоев торсиона ограничены узлом крепления пера лопасти). В зоне жесткой связи внешних слоев балки при нагружении возникают силы реакции, которые на плече равном высоте балки создают изгибающий момент, и вид упругой линии принимает классический вид. Таким образом, картина деформирования имеет сложный характер и отлична от балочной. Эту особенность следует учитывать при расчете усталостной прочности торсиона.

Причины появления нетривиальных видов упругой линии при сложном нагружении слоистой балки типа торсион требуют отдельного изучения, т.к. меняется картина распределения деформаций как по высоте, так и по длине балки. Это может негативно сказаться на усталостной прочности таких балок, приводя к отслоениям резины от композита. Точность определения сдвиговых деформаций в резиновых слоях является ограничением при исследовании слоистых балок типа торсион.

Библиографический список

1. Васильев В.В. Механика конструкций из КМ.-М: Машиностроение.1988. – 272 С.
2. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек.- М: Машиностроение.1973.-285 С.
3. Шклярчук Ф.Н. Колебания и аэроупругость летательных аппаратов.-М : МАИ.1981.-225 С.
4. Шклярчук Ф.Н., Гришанина Т.В. Нелинейные и параметрические колебания упругих систем.-М : МАИ.1993. – 82 С.
5. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Динамика упругих управляемых конструкций.-М : МАИ.2007. – 65 С.

6. Расчетно-экспериментальное исследование прочности упругих элементов бесшарнирных винтов вертолетов.-Ч.1, Ч.2 / Голованов А.И., Митряйкин В.И., Михайлов С.А., Конюхов А.В., Фетисов Л.В ,Шувалов В.А. Изв.вузов. Авиационная техника. Изд-во КГТУ. 4/ 2001. С.7-11, 1/ 2002 .С.9-10.

Сведения об авторах

Дудченко Александр Александрович, профессор Московского авиационного института (государственного технического университета), д.т.н. Телефон 8-916-423-2046; e-mail: a_dudchenko@mail.ru.

Башаров Евгений Анатольевич, аспирант Московского авиационного института (государственного технического университета). Телефон 8-906-736-4310; e-mail: bashevg@gmail.com.