УДК 536.2

Теплоперенос в разделительной системе двух различных сред, обладающей активной теплозащитой, в условиях локального теплового воздействия

А.В. Аттетков, И.К. Волков

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет) (МГТУ им. Н.Э. Баумана), Москва, 105005, Россия
E-mail: fn2@bmstu.ru

Поступила в редакцию 19.12.2018
После доработки 21.12.2018
Принята к публикации 22.12.2018

Предложена математическая модель процесса формирования температурного поля в двухслойной разделительной системе, имитируемой изотропной стенкой постоянной толщины с анизотропным покрытием одной из ее поверхностей, подверженной локальному тепловому воздействию в условиях теплообмена с внешней средой. Показано, что температурное поле изучаемой системы представляет собой сумму двух независимых аддитивных составляющих. С применением интегрального преобразования Лапласа найдено аналитическое решение для первой из аддитивных составляющих температурного поля, формируемого за счет различия начальной температуры двухслойной системы и температур внешних разделяемых сред. Идентифицирована вторая независимая аддитивная составляющая температурного поля, формируемого за счет воздействия нестационарного пространственно-распределенного теплового потока на внешнюю поверхность анизотропного покрытия двухслойной системы при совпадении ее начальной температуры с температурами внешних разделяемых сред. С применением методов интегральных преобразований в аналитически замкнутом виде найдено решение соответствующей задачи нестационарной теплопроводности. Полученные результаты подтверждают обнаруженный ранее эффект «сноса» температурного поля в анизотропном материале с анизотропией свойств общего вида.

Ключевые слова: изотропная разделительная стенка, анизотропное покрытие, локальное тепловое воздействие, интегральные преобразования.

Введение

Необходимость решения практически важной задачи разработки эффективных методов теплозащиты конструкций [1–4] непосредственно связана с развитием методов математического моделирования в сопряженных твердых телах [5–9]. При этом, как правило, конструкцию имитируют изотропным полупространством или (значительно реже) плоской стенкой, которую можно рассматривать как элемент реального объекта исследований.

Одно из перспективных направлений в области теплозащиты конструкций связано с использованием термоэлектрических эффектов [2, 10], реализуемых термоактивной прокладкой, являющейся средством управляемого внешнего воздействия на температурное поле объекта путем регулирования силы тока или использования обратной связи [11–16]. Трудности, которые приходится преодолевать при проведении параметрического анализа температурных полей конструкций с активной теплозащитой, имитируемой изотропным покрытием постоянной толщины с термоактивной прокладкой, известны [11–16]. Они еще усугубляются при использовании в качестве покрытий современных композиционных материалов, обладающих значимой степенью анизотропии [7, 17]. Исследования по рассматриваемому вопросу немногочисленны [16–22], а любой новый результат, полученный аналитическими методами, имеет и теоретическое, и конкретное прикладное значение.

Цель проведенных исследований – нахождение в аналитически замкнутом виде решения задачи определения температурного поля системы, имитируемой разделительной стенкой двух различных сред, одна из поверхностей которой обладает анизотропным покрытием, подверженным локальному тепловому воздействию в условиях теплообмена с внешней средой, при наличии термоактивной прокладки в системе, функционирующей по принципу обратной связи.

Исходные допущения и математическая модель

Для достижения поставленной цели, при построении исходной математической модели процесса формирования искомого температурного поля $T\left(x_1, x_2, x_3, t\right)$ объекта исследований в фиксированной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ пространства $\mathbb{R}^3$ предполагалось, что:

1) объект исследований представляет собой систему, состоящую из изотропной разделительной стенки двух различных сред

$$\Omega_{\text{ст}} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} -\infty < x_1 < +\infty \\ 0 < x_2 < h_{\text{ст}} \\ -\infty < x_3 < +\infty \end{matrix} \right\},$$

поверхность $x_2 = 0$ которой обладает термоактивной прокладкой [11–22]

$$\Omega_{\text{тп}} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} -\infty < x_1 < +\infty \\ -h_{\text{тп}} < x_2 < 0 \\ -\infty < x_3 < +\infty \end{matrix} \right\},$$

с анизотропным покрытием

$$\Omega_{\text{п}} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} -\infty < x_1 < +\infty \\ -\left(h_{\text{п}} + h_{\text{тп}}\right) < x_2 < -h_{\text{тп}} \\ -\infty < x_3 < +\infty \end{matrix} \right\},$$

где значения геометрических характеристик $h_{\text{ст}}$, $h_{\text{тп}}$, $h_{\text{п}}$ элементов объекта исследований являются величинами постоянными;

2) термоактивная прокладка является ортотропной и функционирует по принципу обратной связи [11–16, 23, 24], настроенной по начальной температуре объекта исследований, т.е. в системах «анизотропное покрытие–термоактивная прокладка» и «термоактивная прокладка–изотропная разделительная стенка» для искомого температурного поля $T\left(x_1, x_2, x_3, t\right)$ реализуются следующие условия сопряжения:

$$T\left(x_1, -h_{\text{тп}} - 0, x_3, t\right) = T\left(x_1, -h_{\text{тп}} + 0, x_3, t\right),$$

$$\left[\lambda_{12}^{\text{п}} \frac{\partial T}{\partial x_1} + \lambda_{22}^{\text{п}} \frac{\partial T}{\partial x_2} + \lambda_{23}^{\text{п}} \frac{\partial T}{\partial x_3}\right]\Bigg|_{x_2 = -h_{\text{тп}} - 0} -$$

$$-\lambda_2^{\text{тп}} \frac{\partial T}{\partial x_2}\Bigg|_{x_2 = -h_{\text{тп}} + 0} = -q_{\text{тп}}^{\text{п}} \left[T - T_0\right]\Big|_{x_2 = -h_{\text{тп}} + 0};$$

$$T\left(x_1, 0 - 0, x_3, t\right) = T\left(x_1, 0 + 0, x_3, t\right),$$

$$\lambda_2^{\text{тп}} \frac{\partial T}{\partial x_2}\Bigg|_{x_2 = 0 - 0} - \lambda^{\text{ст}} \frac{\partial T}{\partial x_2}\Bigg|_{x_2 = 0 + 0} =$$

$$= -q_{\text{тп}}^{\text{ст}} \left[T - T_0\right]\Big|_{x_2 = 0 + 0},$$

где $\left\{\lambda_{ij}^{\text{п}}\right\}$, $\left\{\lambda_k^{\text{тп}}\right\}$ и $\lambda^{\text{ст}}$ – компоненты тензоров теплопроводности анизотропного материала покрытия, ортотропного материала термоактивной прокладки при $\lambda_1^{\text{тп}} = \lambda_3^{\text{тп}}$ и изотропного материала разделительной стенки соответственно; $q_{\text{тп}}^{\text{п}}$ и $q_{\text{тп}}^{\text{ст}}$ – определяющие параметры обратной связи термоактивной прокладки со стороны покрытия и стенки соответственно, а $T_0 = \text{const}$ – температура объекта исследований в начальный момент времени $t = 0$;

3) начальная температура объекта исследований T_0 отлична от температур $T_{\text{с}}^{\text{ст}} = \text{const}$ и $T_{\text{с}}^{\text{п}} = \text{const}$ разделенных сред, где $T_{\text{с}}^{\text{ст}}$ – температура внешней среды со стороны стенки, т.е. при $x_2 > h_{\text{ст}}$, а $T_{\text{с}}^{\text{п}}$ – температура внешней среды со стороны покрытия, т.е. при $x_2 < -\left(h_{\text{п}} + h_{\text{тп}}\right)$. При этом, в общем случае, $T_{\text{с}}^{\text{ст}} \neq T_{\text{с}}^{\text{п}}$;

4) теплообмен в системах «внешняя поверхность анизотропного покрытия–внешняя среда» и «внешняя поверхность разделительной стенки–внешняя среда» реализуется по закону Ньютона [25, 26] с коэффициентами теплоотдачи $\alpha_{\text{п}}$ и $\alpha_{\text{ст}}$ соответственно;

5) внешняя поверхность анизотропного покрытия находится под воздействием не только внешней среды с температурой $T_{\text{с}}^{\text{п}} \neq T_0$, но и внешнего теплового потока, ориентированного в направлении ее внутренней нормали;

6) функционал $q(x_1, x_3, t)$, определяющий плотность мощности внешнего теплового потока, интегрируем с квадратом в $\mathbb{R}^2$ по совокупности пространственных переменных, представленных вектором $[x_1, x_3]^{\text{T}} \in \mathbb{R}^2$, для каждого фиксированного значения временного переменного $t \in [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ и интегрируем с квадратом по временному переменному $t \in [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ для каждого фиксированного значения вектора пространственных переменных $[x_1, x_3]^{\text{T}} \in \mathbb{R}^2$, т.е. [27]

$$q(x_1, x_3, t)\Big|_{(t \geq 0)} \in L^2\left(\mathbb{R}^2\right),$$

$$q(x_1, x_3, t)\Big|_{\left([x_1, x_3]^{\text{T}} \in \mathbb{R}^2\right)} \in L^2[0, +\infty).$$

Для удобства дальнейших рассуждений воспользуемся следующими обозначениями:

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_{\text{с}}^{\text{п}} - T_0};\ x = \frac{x_1}{l_*},\ y = \frac{x_2}{l_*},\ z = \frac{x_3}{l_*};\ H_1 = \frac{h_{\text{п}}}{l_*};$$

$$H_2 = \frac{h_{\text{тп}}}{l_*};\ H_3 = \frac{h_{\text{ст}}}{l_*};$$

$$\text{Fo} = \frac{\lambda_{22}^{\text{п}} t}{l_*^2 c_{\text{п}} \rho_{\text{п}}};\ a^2 = \frac{\lambda_{22}^{\text{п}} c_{\text{тп}} \rho_{\text{тп}}}{\lambda_2^{\text{тп}} c_{\text{п}} \rho_{\text{п}}};$$

$$b^2 = \frac{\lambda_{22}^{\text{п}} c_{\text{ст}} \rho_{\text{ст}}}{\lambda^{\text{ст}} c_{\text{п}} \rho_{\text{п}}};\ \mu_{ij} = \frac{\lambda_{ij}^{\text{п}}}{\lambda_{22}^{\text{п}}};\ \mu = \frac{\lambda_{13}^{\text{п}}}{\lambda_2^{\text{тп}}};\ \text{Bi}^{(1)} = \frac{\alpha_{\text{п}} l_*}{\lambda_{22}^{\text{п}}};$$

$$Q = \frac{q l_*}{\left(T_{\text{с}}^{\text{п}} - T_0\right)\lambda_{22}^{\text{п}}};\ \mu_* = \frac{\lambda_2^{\text{тп}}}{\lambda_{22}^{\text{п}}};\ \Delta = \frac{T_{\text{с}}^{\text{ст}} - T_0}{T_{\text{с}}^{\text{п}} - T_0};$$

$$\mu_{**} = \frac{\lambda_2^{\text{тп}}}{\lambda^{\text{ст}}};\ Q_{(-)} = \frac{q_{\text{тп}}^{\text{п}} l_*}{\lambda_{22}^{\text{п}}};$$

$$Q_{(+)} = \frac{q_{\text{тп}}^{\text{ст}} l_*}{\lambda^{\text{ст}}};\ \text{Bi}^{(3)} = \frac{\alpha_{\text{ст}} l_*}{\lambda^{\text{ст}}},$$

где l_* – используемая единица масштаба пространственных переменных; $\rho_{\text{п}}$, $c_{\text{п}}$, $\rho_{\text{тп}}$, $c_{\text{тп}}$, $\rho_{\text{ст}}$, $c_{\text{ст}}$ – плотность и удельная массовая теплоемкость анизотропного материала покрытия, ортотропного материала термоактивной прокладки и изотропного материала разделительной стенки соответственно. В этом случае, согласно исходным допущениям, представленным выше, функционал $\theta(x, y, z, \text{Fo})$, определяющий процесс формирования искомого температурного поля, должен удовлетворять системе трех линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка параболического типа [8, 25–27]:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\text{Fo}} = \mu_{11}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + 2\mu_{12}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} +$$

$$+2\mu_{13}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + 2\mu_{23}\frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} + \mu_{33}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2},$$

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, -(H_1 + H_2) < y < -H_2,\ \text{Fo} > 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\text{Fo}} = \mu a^{-2}\left\{\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right\} + a^{-2}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2},$$

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ -H_2 < y < 0,\ \text{Fo} > 0;$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\text{Fo}} = b^{-2}\left\{\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right\},$$

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ 0 < y < H_3,\ \text{Fo} > 0,$$

однородным начальным условиям:

$$\theta(x, y, z, 0) = 0, \quad (2)$$

условиям сопряжения:

$$\theta(x, -H_2 - 0, z, \text{Fo}) = \theta(x, -H_2 + 0, z, \text{Fo}),$$

$$\left[\mu_{12}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu_{23}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]\Bigg|_{y=-H_2-0} - \mu_*\frac{\partial\theta}{\partial y}\Bigg|_{y=-H_2+0} =$$

$$= -Q_{(-)}\,\theta\big|_{y=-H_2+0};$$

$$\theta(x, 0-0, z, \text{Fo}) = \theta(x, 0+0, z, \text{Fo}), \quad (3)$$

$$\mu_{**}\frac{\partial\theta}{\partial y}\Bigg|_{y=0-0} - \frac{\partial\theta}{\partial y}\Bigg|_{y=0+0} = -Q_{(+)}\,\theta\big|_{y=0+0}$$

и неоднородным краевым условиям [25–27]:

$$-\left[\mu_{12}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu_{23}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]\Bigg|_{y=-(H_1+H_2)}=$$

$$=\mathrm{Bi}^{(1)}\left(1-\theta\right)\Big|_{y=-(H_1+H_2)}+Q\left(x,z,\mathrm{Fo}\right);$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}\bigg|_{y=H_3}=\mathrm{Bi}^{(3)}\left(\Delta-\theta\right)\Big|_{y=H_3}. \quad (4)$$

При этом функционал $Q\left(x,z,\mathrm{Fo}\right)$ должен удовлетворять следующим требованиям:

$$Q\left(x,z,\mathrm{Fo}\right)\Big|_{(\mathrm{Fo}\geq 0)}\in L^2\left(\mathbb{R}^2\right);$$

$$Q\left(x,z,\mathrm{Fo}\right)\Big|_{\left([x,z]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2\right)}\in L^2\left[0,+\infty\right). \quad (5)$$

Анализ формализованного варианта исходных допущений, представленного в виде частично незамкнутой смешанной задачи (1)–(5) для системы уравнений в частных производных параболического типа, позволяет выдвинуть гипотезу о том, что процесс формирования искомого температурного поля объекта исследований имеет аддитивную структуру с двумя независимыми составляющими. Согласно этой гипотезе, процесс формирования искомого температурного поля – аддитивная композиция процессов формирования двух независимых температурных полей, первый из которых, представленный функционалом $\theta_1\left(y,\mathrm{Fo}\right)$, определяет процесс формирования температурного поля объекта исследований исключительно в результате его теплообмена с разделенными средами, температура которых отлична от начальной температуры системы, а второй, представленный функционалом $\theta_2\left(x,y,z,\mathrm{Fo}\right)$, определяет процесс формирования температурного поля объекта исследований под воздействием внешнего теплового потока и охлаждения разделенными средами с температурой, совпадающей с начальной температурой системы.

Принятие гипотезы, представленной выше, приводит к равенству

$$\theta\left(x,y,z,\mathrm{Fo}\right)=\theta_1\left(y,\mathrm{Fo}\right)+\theta_2\left(x,y,z,\mathrm{Fo}\right), \quad (6)$$

где функционал $\theta_1\left(y,\mathrm{Fo}\right)$ является решением одномерной смешанной задачи (1)–(5) при

$$Q\left(x,z,\mathrm{Fo}\right)\equiv 0, \quad (7)$$

$$\theta_1\left(y,\mathrm{Fo}\right)\Big|_{(\mathrm{Fo}\geq 0)}\in L^2\left[-\left(H_1+H_2\right),H_3\right],$$

$$\theta_1\left(y,\mathrm{Fo}\right)\Big|_{\left(-(H_1+H_2)\leq y\leq H_3\right)}\in L^2\left[0,+\infty\right),$$

а функционал $\theta_2\left(x,y,z,\mathrm{Fo}\right)$ – решение смешанной задачи (1)–(3), (5) при наличии краевых условий

$$\left\{\mu_{12}\frac{\partial\theta_2}{\partial x}+\frac{\partial\theta_2}{\partial y}+\mu_{23}\frac{\partial\theta_2}{\partial z}-\mathrm{Bi}^{(1)}\theta_2\right\}\Bigg|_{y=-(H_1+H_2)}=$$

$$=-Q\left(x,z,\mathrm{Fo}\right);$$

$$\left\{\frac{\partial\theta_2}{\partial y}+\mathrm{Bi}^{(3)}\theta_2\right\}\Bigg|_{y=H_3}=0 \quad (8)$$

и требованиям принадлежности решения заданному классу функций:

$$\theta_2\left(x,y,z,\mathrm{Fo}\right)\Big|_{(\mathrm{Fo}\geq 0)\wedge\left(-(H_1+H_2)\leq y\leq H_3\right)}\in L^2\left(\mathbb{R}^2\right);$$

$$\theta_2\left(x,y,z,\mathrm{Fo}\right)\Big|_{(\mathrm{Fo}\geq 0)\wedge\left([x,z]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2\right)}\in$$

$$\in L^2\left[-\left(H_1+H_2\right),H_3\right]; \quad (9)$$

$$\theta_2\left(x,y,z,\mathrm{Fo}\right)\Big|_{\left([x,z]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2\right)\wedge\left(-(H_1+H_2)\leq y\leq H_3\right)}\in$$

$$\in L^2\left[0,+\infty\right).$$

Температурное поле

Идентификация функционала $\theta_1\left(y,\mathrm{Fo}\right)$

Для решения задачи идентификации функционала $\theta_1\left(y,\mathrm{Fo}\right)$, удовлетворяющего смешанной задаче (1)–(5), (7), существуют два основных варианта действий, первый из которых связан с применением интегрального преобразования Лапласа [25, 28] по пространственному переменному Fo, а второй – с разработкой и применением конечного интегрального преобразования по пространственному переменному y [27, 28]. В рассматриваемой ситуации наиболее перспективным кажется первый путь. Но немногочисленность известных аналитических результатов для неоднослойных областей [6, 25–28], обусловленная проблематичностью перехода из пространства изображений интегрального преобразования Лапласа в пространство его оригиналов для рассматриваемого класса задач, склоняет к реализации второго варианта.

С учетом сказанного выше и специфики сходимости в пространстве функций, интегрируемых с квадратом [27, 28], решение исходной задачи для определения функционала $\theta_1(y,\mathrm{Fo})$ ищем в следующем виде:

$$\theta_1(y,\mathrm{Fo}) = \theta_{11}(y) + \theta_{12}(y,\mathrm{Fo}), \tag{10}$$

где функционал $\theta_{11}(y)$ – удовлетворяет системе уравнений (1), условиям сопряжения (3) и краевым условиям (4) в сочетании с условиями (7). При этом функционал $\theta_{12}(y,\mathrm{Fo})$ удовлетворяет системе уравнений (1), условиям сопряжения (3), неоднородным начальным условиям

$$\theta_{12}(y,0) = -\theta_{11}(y) \tag{11}$$

и однородным краевым условиям

$$\left[\frac{\partial\theta_{12}}{\partial y} - \mathrm{Bi}^{(1)}\theta_{12}\right]\Bigg|_{y=-(H_1+H_2)} = 0;$$

$$\left[\frac{\partial\theta_{12}}{\partial y} + \mathrm{Bi}^{(3)}\theta_{12}\right]\Bigg|_{y=H_3} = 0. \tag{12}$$

Таким образом, $\theta_{11}(y)$ – решение краевой задачи для системы трех простейших обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка, которое может быть найдено стандартными методами [29] и представлено в виде:

$$\theta_{11}(y)\Big|_{(-(H_1+H_2)\le y\le -H_2)} = $$
$$= \left[\mu_* C_3 - Q_{(-)}C_2\right](y+H_2) + C_2;$$
$$\theta_{11}(y)\Big|_{(-H_2\le y\le 0)} = C_3(y+H_2) + C_2;$$
$$\theta_{11}(y)\Big|_{(0\le y\le H_3)} =$$
$$= \left[\left(\mu_{**} + Q_{(+)}H_2\right)C_3 + Q_{(+)}C_2\right]y + H_2C_3 + C_2;$$
$$C_2 = \left(\alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{21}\alpha_{12}\right)^{-1}\left(\alpha_{22}\mathrm{Bi}^{(1)} + \alpha_{12}\mathrm{Bi}^{(3)}\right);$$
$$C_3 = \left(\alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{21}\alpha_{12}\right)^{-1}\left(\alpha_{11}\mathrm{Bi}^{(3)}\Delta - \alpha_{21}\mathrm{Bi}^{(1)}\right); \tag{13}$$
$$\alpha_{11} = 1 + (1+H_1)Q_{(-)}; \quad \alpha_{12} = \mu_*(1+H_1);$$
$$\alpha_{21} = \mathrm{Bi}^{(3)} + \left(1 + H_3\mathrm{Bi}^{(3)}\right)Q_{(+)};$$
$$\alpha_{22} = \mathrm{Bi}^{(3)}H_2 + \left(1 + \mathrm{Bi}^{(3)}H_3\right)\left(\mu_{**} + Q_{(+)}H_2\right).$$

Для решения смешанной задачи (1), (11), (3), (12), адаптированной для определения функционала $\theta_{12}(y,\mathrm{Fo})$, воспользуемся интегральным преобразованием с ядром $K(y,\eta)$, применяемым по пространственному переменному $y \in \left[-(H_1+H_2), H_3\right]$ с весовой функцией $\rho(y)$. При этом, согласно общей теории интегральных преобразований [27, 28], в рассматриваемой ситуации задача Штурма–Лиувилля для определения ядра $K(y,\eta)$, и соответствующего ему характеристического уравнения для нахождения спектра собственных чисел $\{\eta_n\}$ имеет вид:

$$\frac{d^2K}{dy^2} + \eta^2 K = 0, \quad -(H_1+H_2) < y < -H_2;$$
$$a^{-2}\frac{d^2K}{dy^2} + \eta^2 K = 0, \quad -H_2 < y < 0;$$
$$b^{-2}\frac{d^2K}{dy^2} + \eta^2 K = 0, \quad 0 < y < H_3;$$
$$\frac{dK}{dy}\Bigg|_{y=-(H_1+H_2)} = \mathrm{Bi}^{(1)}K\Big|_{y=-(H_1+H_2)};$$
$$K(-H_2-0,\eta) = K(-H_2+0,\eta); \tag{14}$$
$$\frac{dK}{dy}\Bigg|_{y=-H_2-0} = \left[\mu_*\frac{dK}{dy} - Q_{(-)}K\right]\Bigg|_{y=-H_2+0};$$
$$K(0-0,\eta) = K(0+0,\eta);$$
$$\left[\mu_{**}\frac{dK}{dy} + Q_{(+)}K\right]\Bigg|_{y=0-0} = \frac{dK}{dy}\Bigg|_{y=0+0};$$
$$\frac{dK}{dy}\Bigg|_{y=H_3} = -\mathrm{Bi}^{(3)}K\Big|_{y=H_3},$$

а ее решение с точностью до нормирующего множителя ядра и эквивалентной формы записи характеристического уравнения допускает следующее представление:

$$K(y,\eta)\Big|_{(-(H_1+H_2)\le y\le -H_2)} =$$
$$= c(\eta)\left\{d_1(\eta)\cos\left[\eta(y+H_2)\right] + \sin\left[\eta(y+H_2)\right]\right\};$$
$$K(y,\eta)\Big|_{(-H_2\le y\le 0)} =$$
$$= c(\eta)d_4^{-1}(\eta)\left\{d_2(\eta)\cos[\eta a y] + d_3(\eta)\sin[\eta a y]\right\};$$

$$K(y,\eta)\Big|_{(0\le y\le H_3)} = \\ = c(\eta)d_4^{-1}(\eta)\{d_2(\eta)\cos[\eta by]+\sin[\eta by]\}; \quad (15)$$

$$d_1(\eta)=\left[\mathrm{Bi}^{(1)}-\eta\mathrm{tg}(\eta H_1)\right]^{-1}\left[\mathrm{Bi}^{(1)}\mathrm{tg}(\eta H_1)+\eta\right];$$

$$d_2(\eta)=\left[\mathrm{Bi}^{(3)}-\eta b\mathrm{tg}(\eta bH_3)\right]^{-1}\times \\ \times\left[\mathrm{Bi}^{(3)}\mathrm{tg}(\eta bH_3)+\eta b\right];$$

$$d_3(\eta)=(\mu_{**}\eta a)^{-1}\left[\eta b-Q_{(+)}d_2(\eta)\right];$$

$$d_4(\eta)=d_1^{-1}(\eta)\times \\ \times\left[d_2(\eta)\cos(\eta aH_2)-d_3(\eta)\sin(\eta aH_2)\right];$$

$$\eta\left[d_2(\eta)-d_3(\eta)\mathrm{tg}(\eta aH_3)\right]= \\ =d_1(\eta)\Big\{\left[\mu_*\eta ad_2(\eta)+Q_{(-)}d_3(\eta)\right]\times \\ \times\mathrm{tg}(\eta aH_3)+\mu_*\eta ad_3(\eta)-Q_{(-)}d_4(\eta)\Big\}. \quad (16)$$

Далее обратимся к задаче определения весовой функции $\rho(y)$, полагая

$$A(y)\triangleq\begin{cases}1, & -(H_1+H_2)<y<-H_2\\ a^{-2}, & -H_2<y<0\\ b^{-2}, & 0<y<H_3\end{cases} \quad (17)$$

и представив систему уравнений в задаче Штурма–Лиувилля (14) в следующем виде:

$$A(y)\frac{d^2K(y,\eta_n)}{dy^2}=-\eta_n^2K(y,\eta_n), \\ -(H_1+H_2)<y<H_3. \quad (18)$$

Поскольку функция $A(y)$ – множитель при операторе d^2/dy^2 в уравнении (18) и, согласно равенству (17), является кусочно-постоянной, то можно предположить наличие аналогичной структуры и у весовой функции, т.е.

$$\rho(y)\triangleq\begin{cases}\rho_1, & -(H_1+H_2)<y<-H_2\\ \rho_2, & -H_2<y<0\\ \rho_3, & 0<y<H_3\end{cases}. \quad (19)$$

При этом, для идентификации значений параметров $\{\rho_j\}_{j=1}^3$ можно воспользоваться известным приемом [28], в основе которого лежит требование ортонормированности с весом $\rho(y)$ системы $\{K(y,\eta_n)\}_{n\ge1}$.

Для реализации сказанного выше правую и левую части уравнения (18) скалярно с весом $\rho(y)$ умножаем на $K(y,\eta_m)$ и с использованием представлений (17), (19) после двухкратного вычисления соответствующих интегралов «по частям» [29] приходим к следующей цепочке равенств:

$$-\eta_n^2\left(K(y,\eta_n),K(y,\eta_m)\right)= \\ =\int_{-(H_1+H_2)}^{H_3}\rho(y)A(y)\frac{d^2K(y,\eta_n)}{dy^2}K(y,\eta_m)dy= \\ =\int_{-(H_1+H_2)}^{H_3}\rho(y)A(y)\frac{d^2K(y,\eta_m)}{dy^2}K(y,\eta_n)dy+\psi_{nm}= \\ =-\eta_m^2\left(K(y,\eta_n),K(y,\eta_m)\right)+\psi_{nm};$$

$$\psi_{nm}=\rho_1\Delta_{nm}(y)\Big|_{-(H_1+H_2)}^{-H_2}+ \\ +\rho_2\Delta_{nm}(y)\Big|_{-H_2}^{0}+\rho_3\Delta_{nm}(y)\Big|_0^{H_3};$$

$$\Delta_{nm}(y)=K(y,\eta_m)\frac{dK(y,\eta_n)}{dy}- \\ -\frac{dK(y,\eta_m)}{dy}K(y,\eta_n).$$

Таким образом,

$$\left(K(y,\eta_n),K(y,\eta_m)\right)=0\Leftrightarrow\psi_{nm}=0,\quad \forall n\ne m.$$

Воспользовавшись краевыми условиями и условиями сопряжения задачи Штурма–Лиувилля (14), убеждаемся в том, что для ортогональности системы $\{K(y,\eta_n)\}_{n\ge1}$ достаточно считать

$$\rho_1=1\wedge\rho_2=\mu_*a^2\wedge\rho_3=\mu_*\mu_{**}^{-1}b^2. \quad (20)$$

Для завершения процедуры идентификации искомого интегрального преобразования определяем нормирующий множитель $c(\eta_n)$ его ядра $K(y,\eta_n)$, где ядро и весовая функция $\rho(y)$ заданы равенствами (15) и (19), (20) соответственно:

$$1=\left\|K(y,\eta_n)\right\|^2=\left(K(y,\eta_n),K(y,\eta_n)\right)=$$

$$= \int_{-(H_1+H_2)}^{H_3} \rho(y) K^2(y,\eta_n) dy =$$

$$= C^2(\eta_n) \left\{ \int_{-(H_1+H_2)}^{-H_2} \{d_1(\eta_n)\cos(\eta_n(y+H_2)) + \right.$$

$$+ \sin(\eta_n(y+H_2))\}^2 dy + \mu_* a^2 d_4^{-1}(\eta_n) \times$$

$$\times \int_{-H_2}^{0} \{d_2(\eta_n)\cos(\eta_n ay) + d_3(\eta_n)\sin(\eta_n ay)\}^2 dy +$$

$$+ \mu_* \mu_{**}^{-1} b^2 d_4^{-1}(\eta_n) \times$$

$$\left. \times \int_0^{H_3} \{d_2(\eta_n)\cos(\eta_n by) + \sin(\eta_n by)\}^2 dy \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c(\eta_n) = \left\{ \frac{d_1^2(\eta_n)+1}{2} H_1 + \frac{d_1^2(\eta_n)-1}{4\eta_n} \times \right.$$

$$\times \sin(2\eta_n H_1) - \frac{d_1(\eta_n)}{2\eta_n}\left[1-\cos(2\eta_n H_1)\right] + \mu_* a^2 d_4^{-1} \times$$

$$\times (\eta_n) \left[\frac{d_2^2(\eta_n)+d_3^2(\eta_n)}{2} H_2 + \frac{d_2^2(\eta_n)-d_3^2(\eta_n)}{4a\eta_n} \times \right.$$

$$\left. \times \sin(2\eta_n a H_2) - \frac{d_3(\eta_n)}{2a\eta_n}\left[1-\cos(2\eta_n a H_2)\right] \right] +$$

$$+ \mu_* \mu_{**}^{-1} b^2 d_4^{-1}(\eta_n) \left[\frac{d_2^2(\eta_n)+1}{2} H_3 + \frac{d_2^2(\eta_n)-1}{4b\eta_n} \times \right.$$

$$\left. \left. \times \sin(2\eta_n b H_3) - \frac{d_2(\eta_n)}{2b\eta_n}\left[1-\cos(2\eta_n b H_1)\right] \right] \right\}^{-\frac{1}{2}}. \tag{21}$$

Таким образом, искомое интегральное преобразование полностью определено равенствами (15), (16), (19), (20) и [27, 28]

$$U(\eta_n,\mathrm{Fo}) \triangleq G\left[\theta_{12}(y,\mathrm{Fo})\right] \equiv$$

$$\equiv \int_{-(H_1+H_2)}^{H_3} \theta_{12}(y,\mathrm{Fo}) \rho(y) K(y,\eta_n) dy; \tag{22}$$

$$\theta_{12}(y,\mathrm{Fo}) = G^{-1}\left[U(\eta_n,\mathrm{Fo})\right] \equiv$$

$$\equiv \sum_{n=1}^{\infty} U(\eta_n,\mathrm{Fo}) K(y,\eta_n),$$

где равенство понимается как равенство в пространстве $L^2\left[-(H_1+H_2),H_3\right]$. При этом, согласно общей теории интегральных преобразований [27, 28], смешанная задача (1), (11), (3), (12), которой удовлетворяет функционал $\theta_{12}(y,\mathrm{Fo})$, в пространстве изображений интегрального преобразования (22) трансформируется к простейшей задаче Коши:

$$\frac{dU(\eta_n,\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}} + \eta_n^2 U(\eta_n,\mathrm{Fo}) = 0, \mathrm{Fo} > 0; \tag{23}$$

$$U(\eta_n,0) = -V(\eta_n),$$

где с учетом (11), (22), (13), (15), (19), (21)

$$V(\eta_n) \triangleq G\left[\theta_{11}(y)\right] \equiv (\theta_{11}(y), K(y,\eta_n)) =$$

$$= (\eta_n)\{d_4(\eta_n) J_1(\eta_n) + \mu_* a^2 J_2(\eta_n) +$$

$$+ \mu_* \mu_{**}^{-1} b^2 J_3(\eta_n)\};$$

$$J_1(\eta_n) \triangleq \int_{-(H_1+H_2)}^{-H_2} \left[C_{3*}(y+H_2)+C_2\right] \times$$

$$\times \{d_1(\eta_n)\cos(\eta_n(y+H_2)) +$$

$$+ \sin(\eta_n(y+H_2))\} dy =$$

$$= \left\{\eta_n^{-2}\left[1-\cos(\eta_n H_1)\right] - \eta_n^{-1} H_1 \sin(\eta_n H_1)\right\} \times$$

$$\times C_{3*} d_1(\eta\eta_n) + C_2 d_1(\eta_n)\sin(\eta_n H_1) -$$

$$- C_{3*}\left\{\eta_n^{-1} H_1 \cos(\eta_n H_1) + \eta_n^{-2}\sin(\eta_n H_1)\right\} -$$

$$- \eta_n^{-1} C_2 \{1-\cos(\eta_n H_1)\};$$

$$J_2(\eta_n) \triangleq \int_{-H_2}^{0} \left[C_3(y+H_2)+C_2\right] \times$$

$$\times \{d_2(\eta_n)\cos(\eta_n ay) + d_3(\eta_n)\sin(\eta_n ay)\} dy =$$

$$= \eta_n^{-2} a^{-2} C_3 d_2(\eta_n)\left[1-\cos(\eta_n a H_2)\right] +$$

$$+ \eta_n^{-1} a^{-1} C_2 d_2(\eta_n)\sin(\eta_n a H_2) +$$

$$+ C_3 d_3(\eta_n)\left[\eta_n^{-2} a^{-2}\sin(\eta_n a H_2) - \eta_n^{-1} a^{-1} H_2\right] -$$

$$- \eta_n^{-1} a^{-1} C_2 d_3(\eta_n)\left[1-\cos(\eta_n a H_2)\right]; \tag{24}$$

$$J_3(\eta_n) \triangleq \int_{-H_2}^{0} \left[C_{3**} y + C_{2*}\right] \times$$

$$\times \{d_2(\eta_n)\cos(\eta_n by) + \sin(\eta_n by)\} dy = C_{3**} d_2(\eta_n) \times$$

$$\times\left\{\eta_n^{-1}b^{-1}\sin\left(\eta_n bH_3\right)+\eta_n^{-2}b^{-2}\left[1-\cos\left(\eta_n bH_3\right)\right]\right\}+$$
$$+C_{3*}\eta_n^{-1}b^{-1}\sin\left(\eta_n bH_3\right)+$$
$$+C_{2*}\left[\eta_n^{-2}b^{-2}\sin\left(\eta_n bH_3\right)-\eta_n^{-1}b^{-1}H_3\cos\left(\eta_n bH_3\right)\right]+$$
$$+\eta_n^{-1}b^{-1}C_{2*}\left[1-\cos\left(\eta_n bH_3\right)\right];$$
$$C_{3*}\triangleq\mu_*C_3-Q_{(-)}C_2,\ C_{2*}\triangleq C_3H_2+C_2,$$
$$C_{3**}\triangleq\left(\mu_{**}+Q_{(+)}H_2\right)C_3+Q_{(+)}C_2.$$

А так как, согласно (23),

$$U\left(\eta_n,\mathrm{Fo}\right)=-V\left(\eta_n\right)\exp\left(-\eta_n^2\mathrm{Fo}\right),\ \mathrm{Fo}\ge 0,\quad (25)$$

где $\left\{V\left(\eta_n\right)\right\}_{n\ge1}$ определены равенствами (24), (21), (16), то осталось воспользоваться равенством (25) и формулой обращения (22) использованного интегрального преобразования, полностью определенного (15), (16), (19)–(21).

Идентификация функционала $\theta_2\left(x,y,z,\mathrm{Fo}\right)$

При идентификации второй аддитивной составляющей процесса формирования искомого температурного поля объекта исследований воспользуемся исходными допущениями, представленными в математической модели (1)–(3), (8), (9), (5), согласно которым функционалы $\theta_2\left(x,y,z,\mathrm{Fo}\right)$ и $Q\left(x,z,\mathrm{Fo}\right)$ как скалярные функции пространственных переменных x и z являются оригиналами двумерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье [30], задаваемого парой линейных интегральных операторов:

$$\Phi[\cdot]\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdot\exp\left(-ipx-irz\right)dxdz;$$
$$\Phi^{-1}[\cdot]\equiv\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdot\exp\left(ipx+irz\right)dpdr,\quad (26)$$

где i – «мнимая» единица [25]. Полагая

$$A\left(p,y,r,\mathrm{Fo}\right)\triangleq\Phi\left[\theta_2\left(x,y,z,\mathrm{Fo}\right)\right];$$
$$\Pi\left(p,r,\mathrm{Fo}\right)\triangleq\Phi\left[Q\left(x,z,\mathrm{Fo}\right)\right],\qquad (27)$$

воспользуемся стандартными свойствами оператора $\Phi[\cdot]$, и в пространстве изображений интегрального преобразования (26) представим математическую модель (1)–(3), (8), (9), (5) в следующем виде:

$$\frac{\partial A}{\partial\mathrm{Fo}}=\frac{\partial^2A}{\partial y^2}+2i\left(\mu_{12}p+\mu_{23}r\right)\frac{\partial A}{\partial y}-$$
$$-\left(\mu_{11}p^2+2\mu_{13}pr+\mu_{33}r^2\right)A,$$
$$-\left(H_1+H_2\right)<y<-H_2,\ \mathrm{Fo}>0;$$
$$\frac{\partial A}{\partial\mathrm{Fo}}=a^{-2}\frac{\partial^2A}{\partial y^2}-\mu a^{-2}\left(p^2+r^2\right)A,$$
$$-H_2<y<0,\ \mathrm{Fo}>0;$$
$$\frac{\partial A}{\partial\mathrm{Fo}}=b^{-2}\frac{\partial^2A}{\partial y^2}-b^{-2}\left(p^2+r^2\right)A,$$
$$0<y<H_3,\ \mathrm{Fo}>0;\quad A\left(p,y,r,0\right)=0;$$
$$\left[\frac{\partial A}{\partial y}+i\left(\mu_{12}p+\mu_{23}r\right)A-\mathrm{Bi}^{(1)}A\right]\Bigg|_{y=-\left(H_1+H_2\right)}=$$
$$=-\Pi\left(p,r,\mathrm{Fo}\right);$$
$$A\left(p,-H_2-0,r,\mathrm{Fo}\right)=A\left(p,-H_2+0,r,\mathrm{Fo}\right);\ (28)$$
$$\left[\frac{\partial A}{\partial y}+i\left(\mu_{12}p+\mu_{23}r\right)A\right]\Bigg|_{y=-H_2-0}-$$
$$-\mu_*\frac{\partial A}{\partial y}\Bigg|_{y=-H_2+0}=-Q_{(-)}A\Big|_{y=-H_2+0};$$
$$A\left(p,0-0,r,\mathrm{Fo}\right)=A\left(p,0+0,r,\mathrm{Fo}\right);$$
$$\mu_{**}\frac{\partial A}{\partial y}\Bigg|_{y=0-0}-\frac{\partial A}{\partial y}\Bigg|_{y=0+0}=-Q_{(+)}A\Big|_{y=0-0};$$
$$\left[\frac{\partial A}{\partial y}+\mathrm{Bi}^{(3)}A\right]\Bigg|_{y=H_3}=0;$$
$$\Pi\left(p,r,\mathrm{Fo}\right)\Big|_{\left([p,r]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2\right)}\in L^2[0,+\infty);$$
$$A\left(p,y,r,\mathrm{Fo}\right)\Big|_{\left([p,r]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2\right)\wedge\left(\mathrm{Fo}\ge0\right)}\in$$
$$\in L^2\left[-\left(H_1+H_2\right),H_3\right];$$
$$A\left(p,y,r,\mathrm{Fo}\right)\Big|_{\left([p,r]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2\right)\wedge\left(-\left(H_1+H_2\right)\le y\le H_3\right)}\in$$
$$\in L^2[0,+\infty).$$

Специфика математической модели (28), определяющей изображение $A\left(p,y,r,\mathrm{Fo}\right)$ оригинала $\theta_2(x,y,z,\mathrm{Fo})$, обусловлена не только нестандартными условиями сопряжения, но и наличием комплекса $i(\mu_{12}p+\mu_{23}r)$ в различных ее элементах. С учетом сказанного естественно предполагать, что изображение $A(p,y,r,\mathrm{Fo})$ оригинала $\theta_2(x,y,z,\mathrm{Fo})$ обладает следующей структурой:

$$A(p,y,r,\mathrm{Fo})=B(p,y,r,\mathrm{Fo})\times$$
$$\times\begin{Bmatrix} -i(\mu_{12}p+\mu_{23}r)(y+H_2)\ , -(H_1+H_2)<y<-H_2 \\ 0, \qquad -H_2\le y\le H_3 \end{Bmatrix}, \tag{29}$$

где, согласно (29), (28), функционал $B(p,y,r,\mathrm{Fo})$ должен удовлетворять смешанной задаче:

$$\frac{\partial B}{\partial \mathrm{Fo}}=\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}-\delta_1(p,r)B,$$
$$-(H_1+H_2)<y<-H_2,\ \mathrm{Fo}>0;$$
$$\frac{\partial B}{\partial \mathrm{Fo}}=a^{-2}\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}-\delta_2(p,r)B,\quad -H_2<y<0,\ \mathrm{Fo}>0;$$
$$\frac{\partial B}{\partial \mathrm{Fo}}=b^{-2}\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}-\delta_3(p,r)B,\quad 0<y<H_3,\ \mathrm{Fo}>0;$$
$$B(p,y,r,0)=0;$$
$$\left[\frac{\partial B}{\partial y}-\mathrm{Bi}^{(1)}B\right]\Bigg|_{y=-(H_1+H_2)}=$$
$$=-\Pi(p,r,\mathrm{Fo})\exp\left[-i(\mu_{12}p+\mu_{23}r)H_1\right];$$
$$B(p,-H_2-0,r,\mathrm{Fo})=B(p,-H_2+0,r,\mathrm{Fo}); \tag{30}$$
$$\left.\frac{\partial B}{\partial y}\right|_{y=-H_2-0}-\mu_*\left.\frac{\partial B}{\partial y}\right|_{y=-H_2+0}=-Q_{(+)}B\Big|_{y=-H_2+0};$$
$$B(p,0-0,r,\mathrm{Fo})=B(p,0+0,r,\mathrm{Fo});$$
$$\mu_{**}\left.\frac{\partial B}{\partial y}\right|_{y=0-0}-\left.\frac{\partial B}{\partial y}\right|_{y=0+0}=-Q_{(+)}B\Big|_{y=0-0};$$
$$\left[\frac{\partial B}{\partial y}+\mathrm{Bi}^{(3)}B\right]\Bigg|_{y=H_3}=0;$$
$$\Pi(p,r,\mathrm{Fo})\Big|_{\left([p,r]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2\right)}\in L^2[0,+\infty);$$
$$B(p,y,r,\mathrm{Fo})\Big|_{\left([p,r]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2\right)\wedge(\mathrm{Fo}\ge 0)}\in$$
$$\in L^2\left[-(H_1+H_2),H_3\right];$$
$$B(p,y,r,\mathrm{Fo})\Big|_{\left([p,r]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2\right)\wedge\left(-(H_1+H_2)\le y\le H_3\right)}\in$$
$$\in L^2[0,+\infty),$$

где квадратичная форма

$$\delta_1(p,r)=\left(\mu_{11}-\mu_{12}^2\right)p^2+$$
$$+2\left(\mu_{13}-\mu_{12}\mu_{23}\right)pr+\left(\mu_{33}-\mu_{32}^2\right)r^2 \tag{31}$$

является положительно определенной, что проверяется непосредственно с использованием критерия Сильвестра [31] и свойств тензора теплопроводности второго ранга [8]. Положительная определенность квадратичных форм

$$\delta_2(p,r)\triangleq\mu a^{-2}\left(p^2+r^2\right),$$
$$\delta_3(p,r)\triangleq b^{-2}\left(p^2+r^2\right) \tag{32}$$

является очевидной [31].

Математическая модель (30)–(32), определяющая функционал $B(p,y,r,\mathrm{Fo})$, не имеет принципиальных отличий от математической модели (1), (11), (3), (12), адаптированной для описания оригинала $\theta_{12}(y,\mathrm{Fo})$. Поэтому для решения задачи идентификации функционала $B(p,y,r,\mathrm{Fo})$ также целесообразно использовать конечное интегральное преобразование с ядром $K(y,\eta)$, которое, согласно общей теории интегральных преобразований [27, 28] и используемой математической (30)–(32), должно удовлетворять следующей задаче Штурма–Лиувилля:

$$\frac{d^2K}{dy^2}+\kappa^2(\eta,p,r,y)K=0,\ -(H_1+H_2)<y<H_3;$$
$$\left[\frac{dK}{dy}-\mathrm{Bi}^{(1)}K\right]\Bigg|_{y=-(H_1+H_2)}=0;$$
$$K(-H_2-0,\eta)=K(-H_2+0,\eta);$$
$$\left.\frac{dK}{dy}\right|_{y=-H_2-0}-\mu_*\left.\frac{dK}{dy}\right|_{y=-H_2+0}=-Q_{(-)}K\Big|_{y=-H_2+0};$$
$$K(0-0,\eta)=K(0+0,\eta); \tag{33}$$
$$\mu_{**}\left.\frac{dK}{dy}\right|_{y=0-0}-\left.\frac{dK}{dy}\right|_{y=0+0}=-Q_{(+)}K\Big|_{y=0+0};$$
$$\left[\frac{dK}{dy}+\mathrm{Bi}^{(3)}K\right]\Bigg|_{y=H_3}=0;$$

$$\kappa^2(\eta,p,r,y)\triangleq$$
$$\triangleq\left\{\begin{matrix}\eta^2-\delta_1(p,r), & -(H_1+H_2)<y<-H_2\\ \eta^2-\delta_2(p,r), & -H_2<y<0\\ \eta^2-\delta_3(p,r), & 0<y<H_3\end{matrix}\right\}.$$

Стандартными методами [29] находим решение задачи Штурма–Лиувилля (33):

$$K(y,\eta)\Big|_{(-(H_1+H_2)\le y\le -H_2)}=C(\eta,p,r)\times$$
$$\times\left\{d_1(\eta,p,r)\cos\left[(y+H_2)\sqrt{\eta^2-\delta_1(p,r)}\right]+\right.$$
$$\left.+\sin\left[(y+H_2)\sqrt{\eta^2-\delta_1(p,r)}\right]\right\};$$
$$K(y,\eta)\Big|_{(-H_2\le y\le 0)}=C(\eta,p,r)\times$$
$$\times\left\{d_2(\eta,p,r)\cos\left[y\sqrt{\eta^2-\delta_2(p,r)}\right]+\right.$$
$$\left.+d_3(\eta,p,r)\sin\left[y\sqrt{\eta^2-\delta_2(p,r)}\right]\right\};$$
$$K(y,\eta)\Big|_{(0\le y\le H_3)}=C(\eta,p,r)\times$$
$$\times\left\{d_2(\eta,p,r)\cos\left[y\sqrt{\eta^2-\delta_3(p,r)}\right]+\right.$$
$$\left.+d_4(\eta,p,r)\sin\left[y\sqrt{\eta^2-\delta_3(p,r)}\right]\right\};$$
$$d_1(\eta,p,r)=$$
$$=\frac{\mathrm{Bi}^{(1)}\mathrm{tg}\left[H_1\sqrt{\eta^2-\delta_1(p,r)}\right]+\sqrt{\eta^2-\delta_1(p,r)}}{\mathrm{Bi}^{(1)}-\sqrt{\eta^2-\delta_1(p,r)}\,\mathrm{tg}\left[H_1\sqrt{\eta^2-\delta_1(p,r)}\right]};\quad(34)$$
$$d_2(\eta,p,r)=d_1(\eta,p,r)\cos\left[H_2\sqrt{\eta^2-\delta_2(p,r)}\right]+$$
$$+\frac{\sqrt{\eta^2-\delta_1(p,r)}-Q_{(-)}d_1(\eta,p,r)}{\mu_*\sqrt{\eta^2-\delta_1(p,r)}}\times$$
$$\times\sin\left[H_2\sqrt{\eta^2-\delta_2(p,r)}\right];$$
$$d_3(\eta,p,r)=-d_1(\eta,p,r)\sin\left[H_2\sqrt{\eta^2-\delta_2(p,r)}\right]+$$
$$+\frac{\sqrt{\eta^2-\delta_1(p,r)}-Q_{(-)}d_1(\eta,p,r)}{\mu_*\sqrt{\eta^2-\delta_1(p,r)}}\times$$
$$\times\cos\left[H_2\sqrt{\eta^2-\delta_2(p,r)}\right];$$
$$d_4(\eta,p,r)=$$
$$=\frac{\mu_{**}\sqrt{\eta^2-\delta_2(p,r)}\,d_3(\eta,p,r)-Q_{(+)}d_2(\eta,p,r)}{\sqrt{\eta^2-\delta_3(p,r)}}.$$

Выписываем характеристическое уравнение для определения спектра собственных чисел $\{\eta_n(p,r)\}_{n\ge1}$, каждое из которых зависит от параметров использованного двумерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье (26):

$$\left[\sqrt{\eta^2-\delta_3(p,r)}\,d_2(\eta,p,r)-\mathrm{Bi}^{(3)}d_4(\eta,p,r)\right]\times$$
$$\times\mathrm{tg}\left[H_3\sqrt{\eta^2-\delta_3(p,r)}\right]=$$
$$=\sqrt{\eta^2-\delta_3(p,r)}\,d_4(\eta,p,r)+\mathrm{Bi}^{(3)}d_2(\eta,p,r),\quad(35)$$

убеждаемся в том, что в рассматриваемой ситуации весовая функция $\rho(y)$ искомого интегрального преобразования

$$W(\eta_n(p,r),p,r,\mathrm{Fo})\triangleq E\left[B(p,y,r,\mathrm{Fo})\right]\equiv$$
$$\equiv\int\limits_{-(H_1+H_2)}^{H_3}B(p,y,r,\mathrm{Fo})\rho(y)K(y,\eta_n(p,r))dy,$$
$$B(p,y,r,\mathrm{Fo})=E^{-1}\left[W(\eta_n(p,r),p,r,\mathrm{Fo})\right]\equiv$$
$$\equiv\sum_{n=1}^{\infty}W(\eta_n(p,r),p,r,\mathrm{Fo})K(y,\eta_n(p,r))\quad(36)$$

определена равенствами (19), (20) и определяем нормирующий множитель его ядра:

$$C(\eta_n(p,r),p,r)=$$
$$=\left\{\frac{d_1^2(\eta_n(p,r),p,r)+1}{2}H_1-\right.$$
$$-\frac{d_1(\eta_n(p,r),p,r)}{2\sqrt{\eta_n^2(p,r)-\delta_1(p,r)}}\times$$
$$\times\left(1-\cos\left[2H_1\sqrt{\eta_n^2(p,r)-\delta_1(p,r)}\right]\right)-$$
$$-\frac{d_1^2(\eta_n(p,r),p,r)-1}{4\sqrt{\eta_n^2(p,r)-\delta_1(p,r)}}\times$$
$$\times\sin\left[2H_1\sqrt{\eta_n^2(p,r)-\delta_1(p,r)}\right]+$$

$$+\mu_* a^2 \left[\frac{d_2^2\left(\eta_n(p,r),p,r\right)+d_3^2\left(\eta_n(p,r),p,r\right)}{2} \times \right.$$

$$\times H_2 - \frac{d_2\left(\eta_n(p,r),p,r\right)d_3\left(\eta_n(p,r),p,r\right)}{2\sqrt{\eta_n^2(p,r)-\delta_2(p,r)}} \times$$

$$\times\left(1-\cos\left[2H_2\sqrt{\eta_n^2(p,r)-\delta_2(p,r)}\right]\right)+$$

$$+\frac{d_2^2\left(\eta_n(p,r),p,r\right)-d_3^2\left(\eta_n(p,r),p,r\right)}{4\sqrt{\eta_n^2(p,r)-\delta_2(p,r)}} \times$$

$$\times\sin\left[2H_2\sqrt{\eta_n^2(p,r)-\delta_2(p,r)}\right]\Bigg]+\frac{\mu_* b^2}{\mu_{**}}\times$$

$$\times\left[\left[\frac{d_2^2\left(\eta_n(p,r),p,r\right)+d_4^2\left(\eta_n(p,r),p,r\right)}{2}H_3+\right.\right.$$

$$+\frac{d_2\left(\eta_n(p,r),p,r\right)d_4\left(\eta_n(p,r),p,r\right)}{2\sqrt{\eta_n^2(p,r)-\delta_3(p,r)}} \times$$

$$\times\left(1-\cos\left[2H_3\sqrt{\eta_n^2(p,r)-\delta_3(p,r)}\right]\right)+$$

$$+\frac{d_2^2\left(\eta_n(p,r),p,r\right)-d_4^2\left(\eta_n(p,r),p,r\right)}{4\sqrt{\eta_n^2(p,r)-\delta_3(p,r)}} \times$$

$$\left.\left.\times\sin\left[2H_3\sqrt{\eta_n^2(p,r)-\delta_3(p,r)}\right]\right]\right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (37)$$

В пространстве изображений интегрального преобразования (36), полностью определенного равенствами (34), (31), (32), (19), (20), (37) и характеристическим уравнением (35), смешанная задача (30), решением которой является функционал $B(p,y,r,\mathrm{Fo})$, трансформируется в простейшую задачу Коши относительно его изображения $W\left(\eta_n(p,r),p,r,\mathrm{Fo}\right)$:

$$\frac{dW}{d\mathrm{Fo}}+\eta_n^2(p,r)W=$$
$$=K\left(-(H_1+H_2),\eta_n(p,r)\right)\Pi(p,r,\mathrm{Fo})\times$$
$$\times\exp\left[-i(\mu_{12}p+\mu_{23}r)H_1\right],\ \mathrm{Fo}>0;$$
$$W\left(\eta_n(p,r),p,r,0\right)=0,$$

решение которой может быть найдено стандартными методами и представлено в следующем виде [29]:

$$W\left(\eta_n(p,r),p,r,\mathrm{Fo}\right)=\psi_n(p,r,\mathrm{Fo})\times$$
$$\times\exp\left[-i(\mu_{12}p+\mu_{23}r)H_1\right],\ \mathrm{Fo}\geq 0; \quad (38)$$
$$\psi_n(p,r,\mathrm{Fo})=K\left(-(H_1+H_2),\eta_n(p,r)\right)\times$$
$$\times\int_0^{\mathrm{Fo}}\Pi(p,r,t)\exp\left[-\eta_n^2(p,r)(\mathrm{Fo}-t)\right]dt.$$

Далее, с учетом полученного представления (38) изображения $W\left(\eta_n(p,r),p,r,\mathrm{Fo}\right)$, используем формулу обращения интегрального преобразования (36) и равенство (29), в результате чего определяем изображение

$$A(p,y,r,\mathrm{Fo})=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(p,r,\mathrm{Fo})K\left(y,\eta_n(p,r)\right)\times$$
$$\times\begin{cases}\exp\left[-i(\mu_{12}p+\mu_{23}r)(y+H_1+H_2)\right], \\ \qquad -(H_1+H_2)<y<-H_2 \\ \exp\left[-i(\mu_{12}p+\mu_{23}r)H_1\right], \\ \qquad -H_2<y<H_3\end{cases} \quad (39)$$

двумерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье (26), (27) оригинала $\theta_2(x,y,z,\mathrm{Fo})$. Таким образом, для завершения процедуры идентификации второй независимой составляющей изучаемого процесса формирования искомого температурного объекта исследований достаточно воспользоваться оператором $\Phi^{-1}[\cdot]$ обращения интегрального преобразования Фурье (26).

Заключение

1. Процесс формирования искомого температурного поля представляет собой аддитивную композицию двух независимых составляющих, первая из которых обусловлена лишь отличием температур разделяемых сред от начальной температуры разделительной системы, а вторая – локальным воздействием внешнего теплового потока на ее анизотропное покрытие при равенстве начальной температуры объекта исследований и температур разделяемых сред.
2. Первая независимая аддитивная составляющая процесса формирования температурного поля, представленная функционалом $\theta_1(y,\mathrm{Fo})$, также имеет аддитивную структу-

ру. Ее составляющая $\theta_{11}(y)=\theta_1(y,+\infty)$ является независимой и полностью определена равенствами (13). Идентификация зависимой аддитивной составляющей $\theta_{12}(y,\mathrm{Fo})$ функционала $\theta_1(y,\mathrm{Fo})$ реализована с использованием специально разработанного конечного интегрального преобразования (22), (15), (16), (19)–(21).

3. Вторая независимая аддитивная составляющая процесса формирования искомого температурного поля представлена функционалом $\theta_2(x,y,z,\mathrm{Fo})$, для идентификации которого использована композиция двумерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье (26) и конечного интегрального преобразования (22), адаптированного к специфике рассматриваемой задачи. При этом в пространстве изображений интегрального преобразования Фурье (26) специфика функционала, представленного равенством (29), указывает на проявление известного эффекта «сноса» температурного поля в анизотропном материале [32, 33].
4. Адаптация разработанного конечного интегрального преобразования (22) к специфике задачи определения функционала $\theta_2(x,y,z,\mathrm{Fo})$ приводит к зависимости спектра собственных чисел этого преобразования от параметров p,r интегрального преобразования Фурье (26), что связано со значимым увеличением временных затрат при проведении вычислительного эксперимента.
5. При подготовке к проведению вычислительных экспериментов, связанных с определением второй независимой аддитивной составляющей, целесообразно воспользоваться теоремой о возможности одновременного приведения к каноническому виду двух квадратичных форм [31], позволяющей реализовать существующую связь между комплексным двумерным экспоненциальным интегральным преобразованием Фурье и вещественным двумерным интегральным косинус-преобразованием Фурье [30]. Кроме того, в силу неоднородности краевого условия на поверхности $y=-(H_1+H_2)$ анизотропного покрытия следует помнить, что в рассматриваемом случае равенство понимается как равенство в линейном пространстве функций, интегрируемых с квадратом [27, 28].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Полежаев Ю.В., Юревич Ф.Б.** Тепловая защита. М.: Энергия, 1976. 392 с.
2. **Зарубин В.С.** Расчет и оптимизация термоизоляции. М.: Энергоатомиздат, 1991. 192 с.
3. **Полежаев Ю.В., Шишков А.А.** Газодинамические испытания тепловой защиты. М.: Промедак, 1992. 248 с.
4. **Галицейский Б.М., Совершенный В.Д., Формалев В.Ф.** Тепловая защита лопаток турбин. М.: Изд-во МАИ, 1996. 356 с.
5. **Зинченко В.И.** Математическое моделирование сопряженных задач теплообмена. Томск: Изд-во ТГУ, 1985. 221 с.
6. **Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В.** Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. М.: Высшая школа, 2005. 430 с.
7. **Формалёв В.Ф., Кузнецова Е.Л.** Тепломассоперенос в анизотропных телах при аэрогазодинамическом нагреве. М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. 308 с.
8. **Формалёв В.Ф.** Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи. М.: Физматлит, 2015. 280 с.
9. **Формалёв В.Ф., Колесник С.А.** Математическое моделирование аэрогазодинамического нагрева затупленных анизотропных тел. М.: Изд-во МАИ, 2016. 160 с.
10. **Анатычук Л.И.** Термоэлементы и термоэлектрические устройства. Киев: Наукова думка, 1979. 766 с.
11. **Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С.** Термоактивная прокладка как средство управляемого воздействия на температурное поле конструкции // Известия РАН. Энергетика. 2002. № 4. С. 131–141.
12. **Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С.** Базовая модель процесса теплопереноса в экранированном полупространстве с термоактивной прокладкой // Известия РАН. Энергетика. 2009. № 2. С. 147–155.
13. **Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С.** Математическое моделирование процесса теплопереноса в экранированном полупространстве с термоактивной прокладкой при осесимметричном тепловом воздействии // Инженерно-физический журнал. 2008. Т. 81. № 3. С. 559–568.
14. **Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С.** Температурное поле экранированной стенки с термоактивной прокладкой при осесимметричном тепловом воздействии // Инженерно-физический журнал. 2009. Т. 82. № 5. С. 1–9.
15. **Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С.** Температурное поле многослойного полупространства при неидеальном тепловом контакте между слоями // Известия РАН. Энергетика. 2010. № 3. С. 83–91.
16. **Волков И.К., Тверская Е.С.** Оптимальная толщина экранированной стенки с термоактивной прокладкой, функционирующей по принципу обратной связи // Наука и образование. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электронный журнал. 2012. № 5. С. 172–187.
17. **Формалёв В.Ф.** Теплопроводность анизотропных тел. Аналитические методы решения задач. М.: Физматлит, 2014. 312 с.

18. **Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С.** Иерархия математических моделей процесса формирования температурного поля в системе «изотропная пластина – термоактивная прокладка – анизотропное покрытие» // Тепловые процессы в технике. 2013. Т. 5. № 5. С. 224–228.
19. **Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С.** Стационарное температурное поле охлаждаемой ортотропной пластины с термически тонкой термоактивной прокладкой и анизотропным покрытием, находящейся под воздействием внешнего теплового потока // Известия РАН. Энергетика. 2013. № 5. С. 136–145.
20. **Аттетков А.В., Волков И.К.** Температурное поле конструкции с активной системой теплозащиты, содержащей анизотропное покрытие // Известия РАН. Энергетика. 2013. № 6. С. 125–136.
21. **Аттетков А.В., Волков И.К.** Установившееся температурное поле системы с активной теплозащитой // Тепловые процессы в технике. 2014. Т. 6. № 2. С. 81–86.
22. **Аттетков А.В., Волков И.К.** Особенности процесса формирования температурного поля в системе с активной теплозащитой // Известия РАН. Энергетика. 2014. № 3. С. 69–81.
23. **Негойцэ К.** Применение теории систем к проблемам управления. М.: Мир, 1981. 184 с.
24. **Дезоер Ч., Вильясагар М.** Системы с обратной связью: вход-выходные соотношения. М.: Наука, 1983. 278 с.
25. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
26. **Карташов Э.М.** Аналитические методы в теории теплопроводности твёрдых тел. М.: Высшая школа, 2001. 552 с.
27. **Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.** Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.
28. **Волков И.К., Канатников А.Н.** Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. 228 с.
29. **Эльсгольц Л.Э.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
30. **Снеддон И.** Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 668 с.
31. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.
32. **Аттетков А.В., Волков И.К.** Температурное поле анизотропной охлаждаемой пластины, находящейся под воздействием импульсно-периодического теплового потока с интенсивностью гауссовского типа // Известия РАН. Энергетика. 2012. № 5. С. 71–79.
33. **Аттетков А.В., Волков И.К.** Температурное поле охлаждаемой изотропной пластины с анизотропным покрытием, находящейся под воздействием внешнего теплового потока // Тепловые процессы в технике. 2013. Т. 5. № 2. С. 50–58.

Heat transfer in a system dividing two various environments possession an active heat-shielding in conditions of local thermal influence

A.V. Attetkov, I.K. Volkov

Bauman Moscow State Technical University (National Research University)
Moscow, 105005, Russia
e-mail: fn2@bmstu.ru

The article suggests a mathematical model of a temperature field forming in a system, imitated by a wall dividing two different media with anisotropic covering of one of its surfaces, subjected to the local thermal impact in conditions of heat exchange with ambient environment. It is demonstrated, that the temperature field of the system under study represents the sum of the two independent additive components. An analytical solution for the first of the additive components of the temperature field, formed due only to the difference in temperature of the divided environments from the reference temperature of the dividing system, was obtained with specially developed finite integral transformation. The second independent additive component of the temperature field of dividing system formed by the impact of a heat flux on its anisotropic covering at equality of reference temperature of an object under study and temperatures of the divided environments is identified. Solution of the corresponding problem of non-stationary thermal conductivity in analytically closed form was obtained applying integral transformations method. The obtained results confirm the earlier found effect of the temperature field "suppression" in anisotropic material with properties anisotropy of the general type.

Keywords: isotropic wall dividing of two various environments, thermofissile laying, anisotropic covering, local thermal influence, temperature field, integral transformations.

REFERENCES

1. **Polezhaev Yu.V., Yurevich F.B**. *Teplovaya zashchita* [Thermal protection]. Moscow: Energiya, 1976. 392 p. In Russ.
2. **Zarubin V.S.** *Raschet i optimizatciia termoizoliatcii*. [Calculation and optimization of thermal insulation]. Moscow, Ehnergoatomizdat, 1991. 192 p. In Russ.
3. **Polezhaev Yu.V., Shishkov A.A.** *Gazodinamicheskie ispytaniya teplovoi zashchity* [Gas dynamic testing of thermal protection]. Moscow, Promedak publ., 1992. 248 p. In Russ.
4. **Galitseiskii B.M., Sovershennyi V.D., Formalev V.F.** *Teplovaya zashchita lopatok turbin* [Thermal protection of turbine blades]. Moscow, MAI Publishing house, 1996. 356 p. In Russ.
5. **Zinchenko V.I.** *Matematicheskoe modelirovanie sopryazhennykh zadach teploobmena* [Mathematical modeling of coupled heat transfer problems]. Tomsk: Publishing house TGU, 1985. 221 p. In Russ.
6. **Kudinov V.A., Kartashov E.M., Kalashnikov V.V.** *Analiticheskie resheniya zadach teplomassoperenosa i termouprugosti dlya mnogosloinykh konstruktsii* [Analytical solutions to the problems of heat and mass transfer and thermoelasticity for multilayer structures]. Moscow: Vysshaya shkola, 2005. 430 p. In Russ.
7. **Formalev V.F., Kuznetsova E.L.** *Teplomassoperenos v anizotropnyh telah pri aerogazodinamicheskom nagreve* [Heat and mass transfer in anisotropic bodies during aerogasdynamic heating]. Moscow: Publishing House MAI-Print, 2010. 308 p. In Russ.
8. **Formalev V.F.** *Teploperenos v anizotropnyh tvyordyh telah. Chislennye metody, teplovye volny, obratnye zadachi* [Heat transfer in anisotropic solids. Numerical methods, heat waves, inverse problems]. Moscow: Fizmatlit, 2015. 280 p. In Russ.
9. **Formalev V.F., Kolesnik S.A.** *Matematicheskoe modelirovanie aerogazodinamicheskogo nagreva zatuplennykh anizotropnykh tel* [Mathematical modeling of aerogasdynamic heating of blunted anisotropic bodies]. Moscow: Publishing House MAI-Print, 2016. 160 p. In Russ.
10. **Anatychuk L.I.** *Termoelementy i termoelektricheskie ustroistva* [Thermocouples and thermoelectric devices]. Kiev: Naukova dumka, 1979. 766 p. In Russ.
11. **Attetkov A.V., Volkov I.K., Tverskaya E.S.** Termoaktivnaya prokladka kak sredstvo upravlyaemogo vozdeistviya na temperaturnoe pole konstruktsii. [Thermosetting gasket as a means of controlled impact on the temperature field of the structure]. *Izv. RAN. Energetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2002, no. 4, pp. 131–141. In Russ.
12. **Attetkov A.V., Volkov I.K., Tverskaya E.S**. Bazovaya model' protsessa teploperenosa v ekranirovannom poluprostranstve s termoaktivnoi prokladkoi [Baseline model of heat transfer in screened half-space with a thermosetting layer]. *Izv. RAN. Energetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2009, no. 2, pp. 147–155. In Russ.
13. **Attetkov A.V., Volkov I.K., Tverskaya E.S.** Mathematical modeling of the process of heat transfer in a shielded half-space with a thermoactive spacer under external thermal action. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2008, vol. 81, no. 3, pp. 588‑597.
14. **Attetkov A.V., Volkov I.K., Tverskaya E.S.** Temperature field of a screened wall with a thermoactive lining on exposure to an axisymmetric thermal effect. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2009, vol. 82, no. 5, pp. 940–948.
15. **Attetkov A.V., Volkov I.K., Tverskaya E.S.** Temperaturnoe pole mnogosloinogo poluprostranstva pri neideal'nom teplovom kontakte mezhdu sloyami [Temperature field in the the multi-layer halfspace under non-ideal thermal contact between layers]. *Izv. RAN. Energetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2010, no. 3, pp. 83–91. In Russ.
16. **Volkov I.K., Tverskaya E.S.** Optimal'naya tolshchina ekranirovannoi stenki s termoaktivnoi prokladkoi, funktsioniruyushchei po printsipu obratnoi svyazi [Optimal thickness of the shielded wall with a thermosetting gasket operating on the feedback principle]. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N. E. Baumana Science and education. Bauman Moscow State Technical University,* 2012, no. 5, 12 p. In Russ.
17. **Formalev V.F.** *Teploprovodnost' anizotropnyh tel. Analiticheskie metody resheniya zadach* [Thermal conductivity of anisotropic bodies. Analytical methods for solving problems]. Moscow: Fizmatlit, 2014. 312 p. In Russ.
18. **Attetkov A.V., Volkov I.K., Tverskaya E.S.** Ierarhiya matematicheskih modelej processa formirovaniya temperaturnogo polya v sisteme "izotropnaya plastina – termoaktivnaya prokladka – anizotropnoe pokrytie" [The hierarchy of mathematical models of the process of temperature field formation in the system “plane isotropic wall – thermal active layer – anisotropic coating”]. *Teplovyye protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2013, no. 5, pp. 224–228. In Russ.
19. **Attetkov A.V., Volkov I.K., Tverskaya E.S.** Statsionarnoe temperaturnoe pole okhlazhdaemoi ortotropnoi plastiny s termicheski tonkoi termoaktivnoi prokladkoi i anizotropnym pokrytiem, nakhodyashcheisya pod vozdeistviem vneshnego teplovogo potoka [Stationary temperature field of a cooled orthotropic wall with a thermal active layer and anisotropic coating, under the influence of external heat flux]. *Izv. RAN. Energetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2013, no. 5, pp. 136–145. In Russ.
20. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** Temperaturnoe pole konstruktsii s aktivnoi sistemoi teplozashchity, soderzhashchei anizotropnoe pokrytie [Temperature field of a structure with an active thermal protection system containing an anisotropic coating]. *Izv. RAN. Energetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2013, no. 6, pp. 125–136. In Russ.
21. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** Ustanovivsheesya temperaturnoe pole sistemy s aktivnoi teplozashchitoi [Steady-state temperature field of the system with active thermal protection]. *Teplovyye protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2014, no.6, pp. 81–86. In Russ.
22. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** Osobennosti protsessa formirovaniya temperaturnogo polya v sisteme s aktivnoi teplozashchitoi [Peculiarities of formation of the temperature field in a system with an active heat shield] *Izv. RAN. Energetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2014, no. 3, pp. 69–81. In Russ.
23. **Negoita C.V.** Management applications of sistem. Birkhauser, 1979. 154 p.
24. **Desoer C.A., Vidyasagar M.** *Sistemy s obratnoi svyaz'yu: vkhod-vykhodnye sootnosheniya* [Feedbaск systemi: input – output properties]. Moscow: Nauka, 1983. 278 p. In Russ.
25. **Lykov A.V.** *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of heat conductivity]. Moscow: Vysshaya shkola, 1967. 600 p. In Russ.

26. **Kartashov E.M**. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tvyordyh tel* [Analytical methods in the theory of the thermal conductivity of solids]. Moscow: Vysshaya shkola, 2001. 552 p. In Russ.
27. **Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M.** *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoj fiziki* [Partial differential equations of mathematical physics]. Moscow: Vysshaya shkola, 1970. 712 p. In Russ.
28. **Volkov I.K., Kanatnikov A.N.** *Integral'nye preobrazovaniya i operatsionnoe ischislenie* [Integral transforms and operational calculus]. Moscow: Publishing house Bauman Moscow State Technical University, 2015. 228 p. In Russ.
29. **El'sgol'c L.E.** *Differencial'nye uravneniya i variacionnoe ischislenie* [Differential equations and calculus of variations]. Moscow: Nauka, 1969. 424 p. In Russ.
30. **Sneddon I.** *Preobrazovaniya Fur'e* [Fourier transforms]. Moscow: Izd-vo inostr. lit., 1955. 668 p. In Russ.
31. **Bellman R**. *Vvedenie v teoriyu matric* [Introduction to the theory of matrices]. Moscow: Nauka, 1969. 368 p. In Russ.
32. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** Temperaturnoe pole anizotropnoj ohlazhdaemoj plastiny, nahodyashchejsya pod vozdejstviem impul'sno-periodicheskogo teplovogo potoka s intensivnost'yu gaussovskogo tipa [The temperature field of an anisotropic cooled plate under the influence of a repetitively pulsed heat flow with a Gaussian-type intensity]. *Izv. RAN. Energetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2012, no. 5, pp. 71–79. In Russ.
33. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** Temperaturnoe pole okhlazhdaemoj izotropnoj plastiny s anizotropnym pokrytiem, nakhodyashhejsya pod vozdejstviem vneshnego teplovogo potoka [Temperature field of a cooled isotropic plate with anisotropic covering under influence of external heat flow]. *Teplovye protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2013, vol. 5, no. 2, pp. 50–58. In Russ.