

Научная статья  
УДК 532.529.5  
DOI: [10.34759/trd-2022-125-07](https://doi.org/10.34759/trd-2022-125-07)

## РАСЧЕТ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КРУПНЫХ ЧАСТИЦ СО СВЕРХЗВУКОВЫМ УДАРНЫМ СЛОЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БЕССЕТОЧНОГО АЛГОРИТМА

**Андрей Витальевич Способин**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
Москва, Россия*  
[spise@inbox.ru](mailto:spise@inbox.ru)

**Аннотация.** Изложен бессеточный алгоритм численного моделирования движения крупных дисперсных частиц в ударном слое у поверхности затупленного тела, обтекаемого сверхзвуковым потоком вязкого теплопроводного газа, течение которого описывается системой нестационарных уравнений Навье-Стокса в трёхмерном пространстве. Представлены результаты расчёта газодинамического взаимодействия одной и нескольких частиц с ударным слоем, а также их влияние на конвективный тепловой поток от газа к поверхности.

**Ключевые слова:** численное моделирование, бессеточный метод, нестационарные уравнения Навье-Стокса, сверхзвуковое обтекание тел, конвективный тепловой поток

**Финансирование:** работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России, № FSFF-2020-0013.

**Для цитирования:** Способин А.В. Расчет взаимодействия крупных частиц со сверхзвуковым ударным слоем с использованием бессеточного алгоритма // Труды МАИ. 2022. № 125. DOI: [10.34759/trd-2022-125-07](https://doi.org/10.34759/trd-2022-125-07)

Original article

## **CALCULATION OF THE LARGE PARTICLE INTERACTION WITH A SUPERSONIC SHOCK LAYER USING THE MESHLESS ALGORITHM**

**Andrey V. Sposobin**

Moscow Aviation Institute (National Research University),

Moscow, Russia

[spise@inbox.ru](mailto:spise@inbox.ru)

**Abstract.** The presented work deals with the numerical modeling of the two-phase flows, namely, the computation of a blunt body supersonic flow-around by a viscous gas flow with an admixture of a small amount of large particles, which, after reflection from the surface, go outward the shock layer, being moved by the inertia towards the incoming flow. Test-bench and numerical experiments reveal that the motion of high inertia particles changes the structure of the gas flow in the shock layer, and impact jets herewith directed to the body being formed cause the gas pressure increase near the surface areas and a multiple growth of the convective heat flow.

A computational model of the blunt body supersonic viscous flow-around with an admixture of large solid particles was developed in three-dimensional space. The system of non-stationary Navier-Stokes equations in conservative variables is being numerically solved by the meshless method, which employs the cloud of points in space of computational nodes for the gas flow parameters representation. The spatial partial derivatives of gas-dynamic values and functions, containing them, are being approximated by the least square method on the set of nodes distributed in the area of computation. Non-viscous flows computing is being performed by the AUSMPW+ method in conjunction with the third order MUSCL-reconstruction, while viscous flows are being computed by the second-order scheme.

Each particle, as well as a barrier streamlined by a flow, is being surrounded by a cloud of computational nodes belonging to its domain and moving together with the particle in space. The computational nodes position is being adapted to the body shape and allows resolving the flow in the boundary layer with enough accuracy to determine the convective heat flow from the gas surface. The gas state computing at the nodes associated with the particles is being performed by solving the Navier-Stokes system of equations in a moving coordinate system attached to the moving particle. A model of evolution of a single cloud of computational nodes is built. The nodes that fall into the domains overlapping zone are being temporarily excluded from the calculation, and external nodes of one domain become neighbors of the nodes of another domain to compute both viscous and convective fluxes between nodes with account for transformation of the gas state vectors between moving coordinate systems. Integration of the gas-dynamic system of equations in both basic and local systems of coordinates is being

performed by the explicit Runge-Kutta method. The proposed model was verified by comparing the gas flow-around of the stationary and moving particles while maintaining relative velocity of the incoming flow.

The software implementation of the presented algorithms based on the OpenCL parallel heterogeneous computing technology with the possibility of simultaneous usage of several GPUs for the calculation of the same task was performed.

The authors performed computations of the particles movement in the shock layer near the sphere surface flown around by the supersonic airflow with the Mach number of  $M = 6$ . The particle was being launched along the sphere axis of symmetry, as well as at an angle to it. Appearance of local zones of higher pressure and multiply strengthened heat flow on the sphere surface is being observed. Gas-dynamic interaction of a pair of particles in the shock layer, which started one after the other with a time interval between them, was simulated.

Having fallen into the supersonic wake region of the first particle, the second particle, moving under the action of aerodynamic drag force, moves away to a significantly smaller distance from the sphere surface than the first one.

The built computational model and the software, developed on its basis, provide wide opportunities for the numerical study of the gas-dynamic interaction of large particles with the shock layer.

**Keywords:** numerical simulation, meshless method, unsteady Navier-Stokes equations, supersonic flows around bodies, convective heat flux

**Funding:** the research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme No. FSFF-2020-0013)

**For citation:** Sposobin A.V. Calculation of the large particle interaction with a supersonic shock layer using the meshless algorithm. *Trudy MAI*, 2022, no. 125. DOI: [10.34759/trd-2022-125-07](https://doi.org/10.34759/trd-2022-125-07)

## Введение

Широкое освещение исследований гетерогенных потоков в современной научной литературе, обзор которых приведён в работе [1], вызван, в первую очередь, их высокой практической значимостью. Течения газов с различного рода примесями характерны как для широкого круга естественных явлений, так и для целого ряда технологических процессов [2-6]. Наряду с детальным изучением течений с мелкодисперсной примесью, для моделирования которых предложен целый ряд подходов и алгоритмов [7], немаловажную роль играют и потоки с высокоинерционными относительно крупными частицами. Даже при довольно низкой суммарной объемной концентрации такие частицы способны существенно изменять картину высокоскоростного течения газа, что наблюдалось в стендовых экспериментах [8-9], а впоследствии было воспроизведено в численных расчётах [10].

Статья продолжает серию работ по численному моделированию течения газа в ударном слое у поверхности преграды, обтекаемой сверхзвуковым потоком, в присутствии ограниченного количества крупнодисперсных частиц [11-13]. В стендовых

испытаниях движение частицы навстречу набегающему на тело потоку с выходом за пределы головной ударной волны приводило к возникновению конуса Маха с вершиной в частице. Отошедшая от частицы ударная волна взаимодействовала с головной ударной волной от преграды, формируя сложную нестационарную картину течения с направленными на тело импактными струями, создававшими у границы тела зоны повышенного давления, в которых кратно усиливался конвективный тепловой поток от газа к поверхности [9].

Построенная ранее вычислительная модель, основанная на решении уравнений газовой динамики методом конечных объемов на адаптивных скользящих декартовых сетках [14] в сочетании с методом погруженной границы с фиктивными ячейками [15], давала возможность численно исследовать осесимметричные и плоские двумерные течения. Необходимость исследования движения частиц вдоль сложных пространственных траекторий, а также газодинамического взаимодействия с ударным слоем групп из нескольких крупных частиц, потребовали реализации модели в полномасштабной трёхмерной постановке. Применение декартовых сеток, даже адаптивных, несмотря на сравнительную простоту их генерации, было нецелесообразным ввиду их изотропной природы, что влекло, прежде всего, повышенный расход памяти вычислительных устройств. Требовался менее ресурсоёмкий подход, и выбор пал на набирающий в последние годы популярность бессеточный метод решения систем уравнения газовой динамики [16]. Не прибегая к генерации сложных расчётных сеток, свойственных методу конечных объемов,

бессеточный метод использует относительно просто формируемые наборы расчётных узлов, которые, благодаря анизотропному распределению точек в пространстве, позволяют существенно снизить объемы используемой памяти компьютера. При этом метод обладает достаточной для рассматриваемых задач точностью расчётов, а также прост в реализации с точки зрения распараллеливания вычислений.

В предыдущих статьях цикла детально описано использование бессеточного алгоритма для численного моделирования сверхзвуковых невязких [17] и вязких течений вблизи поверхностей стационарных затупленных тел [18]. Настоящая работа расширяет область применения метода на решение задач обтекания газом движущихся в потоке крупных частиц. Каждая частица, как и основная преграда, окружается облаком расчётных закреплённых за ней узлов, принадлежащих её домену. Перемещающиеся в пространстве вместе с частицами облака вычислительных узлов взаимодействуют между собой, формируя единое связное множество точек. Попавшие в область перекрытия облаков узлы временно исключаются из расчёта по мере необходимости, а внешние узлы различных доменов образуют пары соседей для вычисления векторов вязких и конвективных потоков между узлами.

Приведены результаты расчёта движения одиночной частицы как вдоль оси симметрии сферы, обтекаемой сверхзвуковым потоком, так и под углом к оси, а также газодинамического взаимодействия пары крупных частиц в ударном слое.

## Система уравнений течения вязкого газа

Система нестационарных уравнений Навье-Стокса в консервативных переменных в сочетании с уравнением состояния идеального газа описывают течение вязкого теплопроводного газа в трёхмерной декартовой системе координат [19]:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{q})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{q})}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{F}^v(\mathbf{q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}^v(\mathbf{q})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}^v(\mathbf{q})}{\partial z},$$

$$p = \rho RT,$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho uH \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho vH \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho wH \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xx}u + \tau_{xy}v + \tau_{xz}w - q_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{yx}u + \tau_{yy}v + \tau_{yz}w - q_y \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{zx}u + \tau_{zy}v + \tau_{zz}w - q_z \end{pmatrix},$$



$$H = e + \frac{p}{\rho}, \quad e = \frac{p}{\rho(\gamma-1)} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2),$$

где  $t$  - время,  $\rho$  - плотность,  $p$  - давление,  $T$  - температура,  $u, v, w$  - компоненты вектора скорости газа  $\mathbf{v}$  по осям координат  $x, y$  и  $z$  соответственно,  $R$  - газовая постоянная,  $\gamma$  - показатель адиабаты,  $H$  - полная энтальпия газа,  $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$  - вектора невязких, а  $\mathbf{F}^v, \mathbf{G}^v, \mathbf{H}^v$  - вязких потоков вдоль координатных осей.

Компоненты тензора вязких напряжений:

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3}\mu \left( 2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad \tau_{yy} = \frac{2}{3}\mu \left( 2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad \tau_{zz} = \frac{2}{3}\mu \left( 2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right),$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

Компоненты вектора плотности теплового потока:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Величина коэффициента динамической вязкости определяется известной формулой Сазерленда [20]:

$$\mu = \mu^* \left( \frac{T}{T^*} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T^* + C^*}{T + C^*},$$

при  $T^* = 273,15 \text{ K}$ ,  $C^* = 110,4 \text{ K}$ ,  $\mu^* = 0,0000178 \frac{\text{H} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}$ .

Коэффициент теплопроводности рассчитывается исходя из постоянства числа Прандтля:

$$\lambda = \frac{C_p \mu}{Pr},$$

где  $C_p$  - удельная теплоёмкость газа при постоянном давлении,  $Pr = 0,72$  - число Прандтля для воздуха.

### Бессеточный алгоритм решения систем уравнений газовой динамики

Прежде всего отметим, что в настоящей работе термин «бессеточный» является дословным переводом английских слов *gridless* и *meshless*, которые и применяются к подобного рода методам в зарубежных источниках. В отечественной литературе бессеточными чаще именуются алгоритмы, подобные методу сглаженных частиц, где действительно отсутствует фиксированная расчётная сетка.

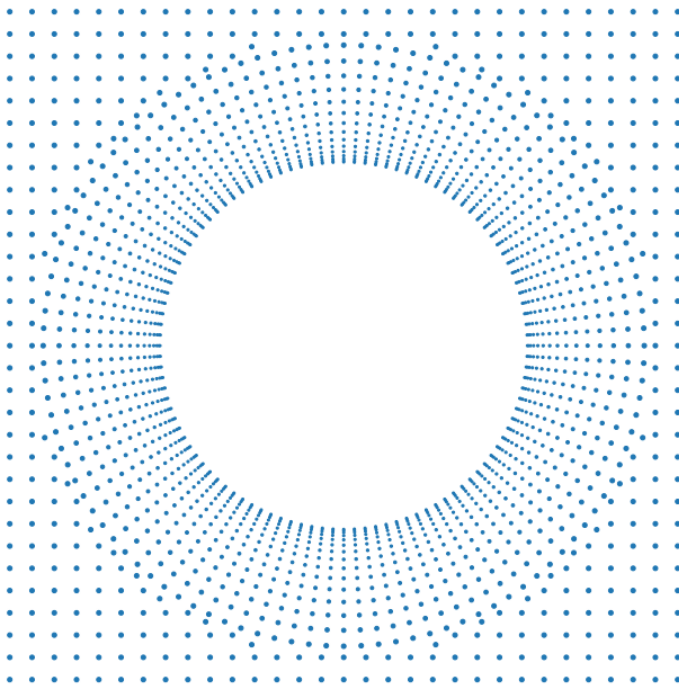


Рис. 1. Распределение узлов в центральном сечении расчётной области

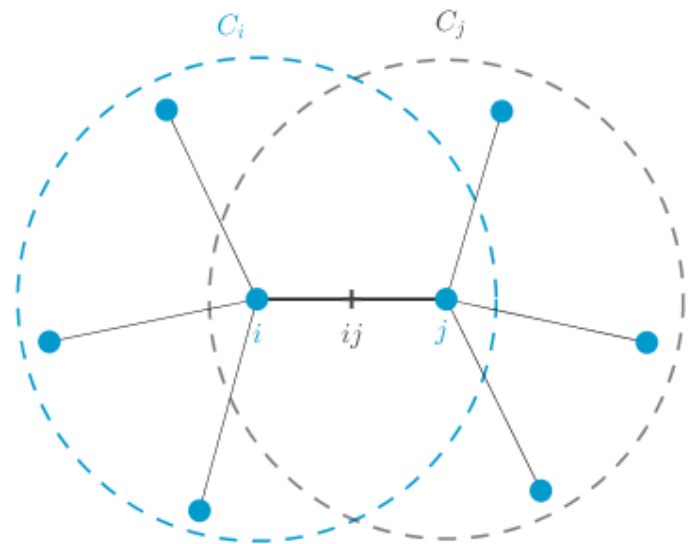


Рис. 2. Облака соседних вычислительных узлов

В рассматриваемом подходе расчётная область не разбивается сеткой на множество ячеек, как в методе конечных объемов. В ней формируется конечный набор фиксированных в пространстве дискретных точек - узлов, в которых и вычисляются параметры сплошной среды [21]. Положение узлов определяется геометрией области и особенностями течения газа, производится сгущение распределения узлов вблизи обтекаемых поверхностей в направлении внешней нормали с целью детального разрешения течения в пограничном слое (см. рис. 1). Для каждого узла  $i$  определяется облако окружающих его соседних узлов  $j \in C_i$  (см. рис. 2). Основой бессеточного метода является аппроксимация частных производных газодинамических параметров и содержащих их скалярных функций по пространственным координатам в виде линейной комбинации разностей значений в соседних узлах  $j \in C_i$  и расчётным узлом  $i$ . Коэффициенты линейной комбинации вычисляются методом наименьших квадратов [22]. В каждом из соседних узлов  $j \in C_i$  расчётного узла  $i$  поле скалярной величины  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  представляется в виде:

$$\varphi_j = \varphi_i + \Delta x_{ij} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_i + \Delta y_{ij} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_i + \Delta z_{ij} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_i + O(h^2),$$

$$\Delta x_{ij} = x_j - x_i, \Delta y_{ij} = y_j - y_i, \Delta z_{ij} = z_j - z_i, \Delta \varphi_{ij} = \varphi_j - \varphi_i.$$

Оптимальное приближение искомых частных производных  $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_i, \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_i, \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_i$  согласно

методу наименьших квадратов достигается минимизацией функционала

$$\sum_{j \in C_i} \omega_{ij} \left( \Delta \varphi_{ij} - \Delta x_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_i - \Delta y_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_i - \Delta z_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_i \right)^2 \rightarrow \min,$$

весовой коэффициент  $\omega_{ij}$  обратно пропорционален расстоянию  $d_{ij}$  между узлами с

подавляющим осцилляцией решения множителем [23]:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{d_{ij}} \cdot \frac{e^{-\left(\frac{d_{ij}}{d_{i \max}}\right)^2} - e^{-4}}{1 - e^{-4}},$$

$$d_{ij} = \sqrt{\Delta x_{ij}^2 + \Delta y_{ij}^2 + \Delta z_{ij}^2},$$

$$d_{i \max} = \max_{j \in C_i} d_{ij}.$$

Коэффициенты линейной комбинации  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$  для вычисления частных пространственных производных функции  $\varphi$  определяются исключительно взаимным геометрическим расположением соседних узлов и могут быть получены посредством решения системы линейных уравнений:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_i = \sum_{j \in C_i} \alpha_{ij} \Delta \varphi_{ij}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_i = \sum_{j \in C_i} \beta_{ij} \Delta \varphi_{ij}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_i = \sum_{j \in C_i} \gamma_{ij} \Delta \varphi_{ij},$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{ij} \\ \beta_{ij} \\ \gamma_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k \in C_i} \omega_{ik} \Delta x_{ik}^2 & \sum_{k \in C_i} \omega_{ik} \Delta x_{ik} \Delta y_{ik} & \sum_{k \in C_i} \omega_{ik} \Delta x_{ik} \Delta z_{ik} \\ \sum_{k \in C_i} \omega_{ik} \Delta x_{ik} \Delta y_{ik} & \sum_{k \in C_i} \omega_{ik} \Delta y_{ik}^2 & \sum_{k \in C_i} \omega_{ik} \Delta y_{ik} \Delta z_{ik} \\ \sum_{k \in C_i} \omega_{ik} \Delta x_{ik} \Delta z_{ik} & \sum_{k \in C_i} \omega_{ik} \Delta y_{ik} \Delta z_{ik} & \sum_{k \in C_i} \omega_{ik} \Delta z_{ik}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \omega_{ij} \Delta x_{ij} \\ \omega_{ij} \Delta y_{ij} \\ \omega_{ij} \Delta z_{ij} \end{bmatrix}.$$

В роли скалярной функции  $\varphi$  при численном решении системы уравнений газовой динамики бессеточным методом выступают компоненты вектора скорости вдоль осей координат, газодинамические переменные, такие как давление, температура, плотность, компоненты векторов вязких и конвективных потоков.

С использованием коэффициентов линейной комбинации  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$  система уравнений Навье-Стокса записывается в полу-дискретной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial t} + 2 \sum_{j \in C_i} \left[ \alpha_{ij} (\mathbf{F}_{ij} - \mathbf{F}_i) + \beta_{ij} (\mathbf{G}_{ij} - \mathbf{G}_i) + \gamma_{ij} (\mathbf{H}_{ij} - \mathbf{H}_i) \right] = \\ = 2 \sum_{j \in C_i} \left[ \alpha_{ij} (\mathbf{F}_{ij}^v - \mathbf{F}_i^v) + \beta_{ij} (\mathbf{G}_{ij}^v - \mathbf{G}_i^v) + \gamma_{ij} (\mathbf{H}_{ij}^v - \mathbf{H}_i^v) \right], \end{aligned}$$

где  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}(\mathbf{q}_i)$ ,  $\mathbf{G}_i = \mathbf{G}(\mathbf{q}_i)$ ,  $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}(\mathbf{q}_i)$ ,  $\mathbf{F}_i^v = \mathbf{F}^v(\mathbf{q}_i)$ ,  $\mathbf{G}_i^v = \mathbf{G}^v(\mathbf{q}_i)$ ,  $\mathbf{H}_i^v = \mathbf{H}^v(\mathbf{q}_i)$ .

Компоненты векторов конвективных потоков  $\mathbf{F}_{ij}$ ,  $\mathbf{G}_{ij}$ ,  $\mathbf{H}_{ij}$  в серединах  $ij$  отрезков, соединяющих узел  $i$  с каждым из соседних  $j \in C_i$ , рассчитываются согласно схеме AUSMPW+ [24] применительно к векторам консервативных переменных  $\mathbf{q}^-$  и  $\mathbf{q}^+$ , полученным покомпонентной MUSCL-реконструкцией с ограничителем van Albada 2 [25]. Коэффициенты  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$  позволяют вычислить частные пространственные производные температуры и компонентов вектора скорости и определить компоненты тензора вязких напряжений и вектора теплового потока:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i = \sum_{j \in C_i} \alpha_{ij} (u_j - u_i), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_i = \sum_{j \in C_i} \beta_{ij} (u_j - u_i), \quad \dots, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_i = \sum_{j \in C_i} \gamma_{ij} (T_j - T_i),$$

$$\tau_{xx}|_i = \frac{2}{3} \mu_i \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i - \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_i - \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_i \right), \dots, \tau_{xy}|_i = \mu_i \left( \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_i + \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_i \right), \dots, q_z|_i = -\lambda_i \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_i,$$

которые необходимы для получения компонентов векторов вязких потоков  $\mathbf{F}_i^v = \mathbf{F}^v(\mathbf{q}_i)$ ,  $\mathbf{G}_i^v = \mathbf{G}^v(\mathbf{q}_i)$ ,  $\mathbf{H}_i^v = \mathbf{H}^v(\mathbf{q}_i)$  в узле  $i$ .

С целью обеспечения расчёта компонент векторов вязких потоков со вторым порядком точности по пространству [26] применяется осреднение вязкости и реконструкция векторов градиента физических переменных  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $T$ , необходимых для вычисления компонентов тензора вязких напряжений  $\tau|_{ij}$  и самих векторов  $\mathbf{F}_{ij}^v, \mathbf{G}_{ij}^v$ ,

$\mathbf{H}_{ij}^v$  в середине  $ij$  отрезка, соединяющего узлы  $i$  и  $j$ :

$$\mu_{ij} = \frac{\mu_i + \mu_j}{2},$$

$$\nabla \varphi|_{ij} = \overline{\nabla \varphi|_{ij}} - \left( \overline{\nabla \varphi|_{ij}} \cdot \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|} - \frac{\varphi_j - \varphi_i}{|\mathbf{r}_{ij}|} \right) \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|},$$

$$\overline{\nabla \varphi|_{ij}} = \frac{\nabla \varphi|_i + \nabla \varphi|_j}{2}.$$

Реализация граничных условий второго рода также построена на аппроксимации производной по нормали к поверхности  $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}$  методом наименьших квадратов [26]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_i = \mathbf{n} \cdot \nabla \varphi = n_x \sum_{j \in \tilde{C}_i} \alpha_{ij} (\varphi_j - \varphi_i) + n_y \sum_{j \in \tilde{C}_i} \beta_{ij} (\varphi_j - \varphi_i) + n_z \sum_{j \in \tilde{C}_i} \gamma_{ij} (\varphi_j - \varphi_i),$$

$$\eta_{ij} = \alpha_{ij}n_x + \beta_{ij}n_y + \gamma_{ij}n_z,$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right|_i = \sum_{j \in \tilde{\zeta}_i} \eta_{ij} (\varphi_j - \varphi_i) = \sum_{j \in \tilde{\zeta}_i} \eta_{ij} \varphi_j - \varphi_i \sum_{j \in \tilde{\zeta}_i} \eta_{ij},$$

$$\varphi_i = \frac{\sum_{j \in \tilde{\zeta}_i} \eta_{ij} \varphi_j - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right|_i}{\sum_{j \in \tilde{\zeta}_i} \eta_{ij}},$$

где  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  - компоненты вектора внешней нормали  $\mathbf{n}$  в узле  $i$  на границе поверхности,  $\tilde{\zeta}_i$  - множество его соседних узлов, не принадлежащих границе тела [17].

Данный подход используется для моделирования условий прилипания  $\mathbf{v} = 0$ ,

$\left. \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right|_i = 0$  к изотермической стенке с температурой  $T = T_w$ , которая задаётся в качестве

граничного условия на поверхности обтекаемого тела [18]:

$$T_i = T_w, \quad p_i = \frac{\sum_{j \in \tilde{\zeta}_i} \eta_{ij} p_j}{\sum_{j \in \tilde{\zeta}_i} \eta_{ij}}, \quad \rho_i = \frac{p_i}{RT_i}, \quad u_i = v_i = w_i = 0, \quad e_i = \frac{p_i}{\rho_i(\gamma - 1)}.$$

Численное интегрирование системы уравнений Навье-Стокса по времени выполняется явным методом Рунге-Кутты третьего порядка [25].

Верификация бессеточного метода применительно к решению задач обтекания выполнена автором в ранее опубликованных работах цикла [17-18].

### **Моделирование движения крупных частиц**

Построена вычислительная модель расчёта движения крупных частиц в газовом потоке, в основе которой лежит принцип формирования единого облака расчётных узлов.

Обтекаемая сверхзвуковым потоком преграда считается неподвижной в центральной системе координат. Сила аэродинамического сопротивления  $\mathbf{f}_D$ , определяющая движение частицы, рассчитывается по действию силы вязкого трения и давлению газа в вычислительных узлах на её поверхности:

$$\frac{d\mathbf{r}_p}{dt} = \mathbf{v}_p, \quad m_p \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \mathbf{f}_D, \quad \mathbf{f}_D = \sum_{i \in S_p} \left( -p_i \mathbf{n}_i + \mu_i \left. \frac{\partial \mathbf{v}_\tau}{\partial \mathbf{n}} \right|_i \right) S_i,$$

где  $m_p$  - масса частицы,  $\mathbf{v}_p$  - вектор её скорости,  $\mathbf{r}_p$  - радиус-вектор частицы в центральной системе координат, граничным узлам  $i$ , лежащим на поверхности частицы  $S_p$ , соответствуют элементы площадью  $S_i$  с вектором внешней нормали  $\mathbf{n}_i$ ,  $\mathbf{v}_\tau$  - касательная компонента скорости газа вблизи поверхности.



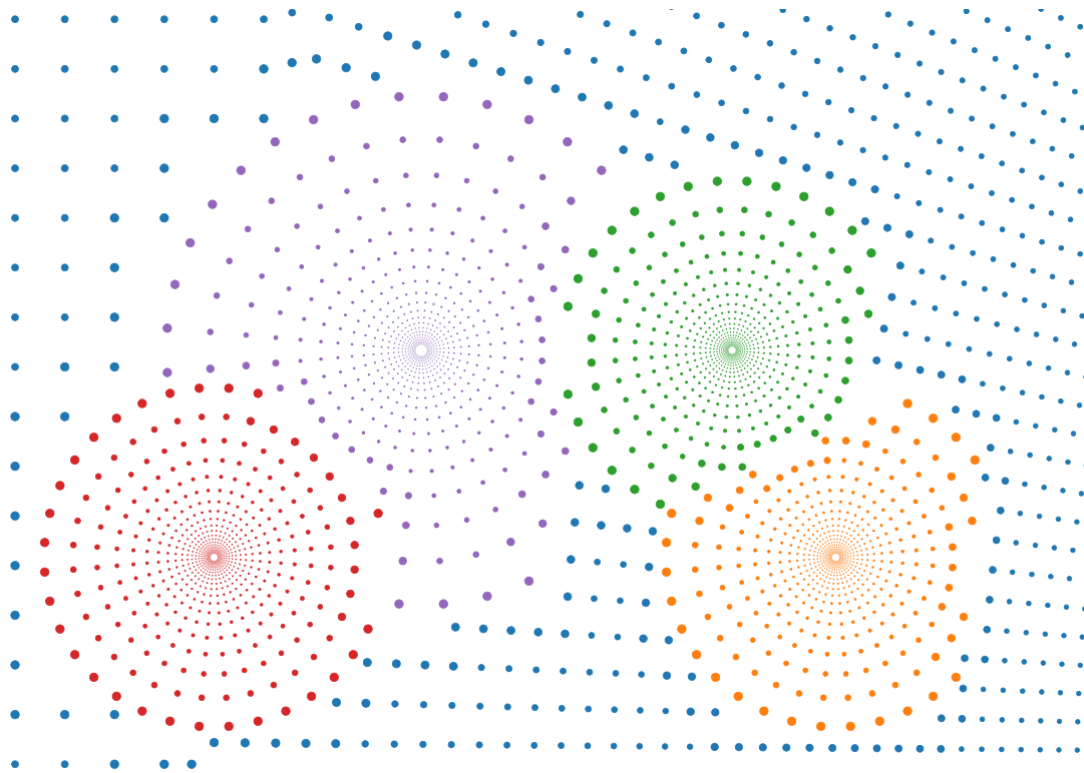


Рис. 3. Единое облако расчётных узлов

В расчётной области формируется адаптированный к границам области и геометрии преграды стационарный набор вычислительных узлов, относящихся к основному домену. Каждая частица окружена облаком расчётных узлов, принадлежащих её домену и перемещающихся вместе с ней в пространстве. Решение системы уравнений газовой динамики в связанных с частицей узлах производится в локальной движущейся системе координат, а в узлах основного домена – центральной неподвижной системе координат. По мере перемещения частицы в пространстве часть вычислительных узлов временно исключается из расчёта, а внешние граничные узлы домена частицы становятся соседями узлов основного домена или домена другой частицы (см. рис. 3). При численном интегрировании системы уравнений газовой динамики бессеточным методом определение вязких и конвективных потоков между

узлами, относящимся к разным доменам, требует преобразования векторов консервативных переменных  $\mathbf{q}$ , а также градиентов их компонентов  $\nabla\mathbf{q}$  в локальную систему координат узла, для которого производится расчёт.

Подход, основанный на применении единого облака расчётных узлов, позволяет моделировать газодинамическое взаимодействие частицы с преградой, нескольких частиц между собой, их сближение и соударения.

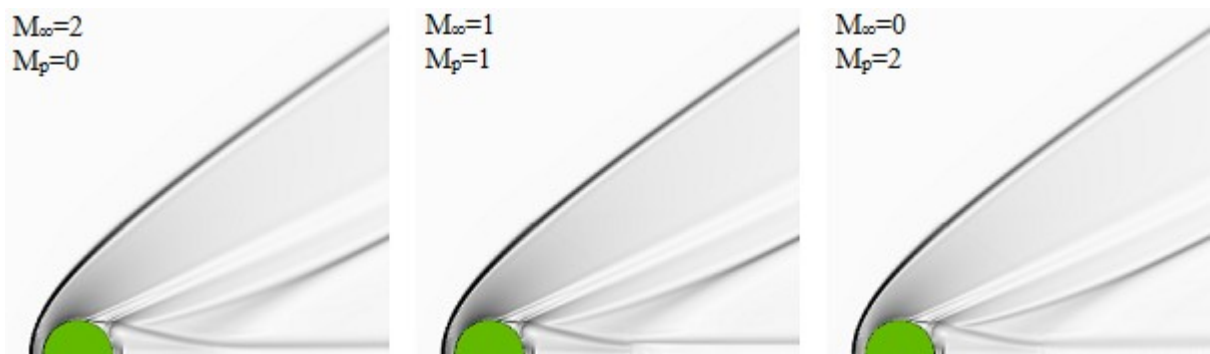


Рис. 4. Верификация модели движения частицы

По аналогии с верификацией метода скользящих декартовых сеток [14] проведена проверка предложенной модели путём расчёта обтекания неподвижной частицы набегающим потоком, движения частицы в первоначально покоящемся газе, а также промежуточных режимах с сохранением скорости частицы относительно набегающего потока. Во всех случаях были получены идентичные картины течения, а также параметры газа на поверхности частицы (см. рис. 4).

### **Программная реализация и вычислительный эксперимент**

Программная реализация представленных алгоритмов основана на открытой технологии параллельных гетерогенных вычислений OpenCL [27-28], которая даёт

возможность единообразно использовать различные вычислительные ресурсы. Разработанный программный код ядер OpenCL универсален и может исполняться как исключительно на центральном процессоре с распараллеливанием на ядрах CPU, так и с применением графических процессоров GPU. В отличие от проприетарной технологии CUDA компании Nvidia [29], OpenCL позволяет использовать графические процессоры различных производителей, таких как Nvidia, AMD, а также интегрированную графическую подсистему процессоров Intel. Основной код разработан на языке программирования C++ и предназначен для работы в ОС Linux и Windows. Вычисления на GPU применяются с целью ускорения численного решения системы уравнений газовой динамики.

При численном решении задач газовой динамики в областях с фиксированной геометрией бессеточным алгоритмом поиск соседних узлов с получением коэффициентов аппроксимации частных производных  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$  производится однократно и требует порядка  $O(N \log N)$  вычислительных операций, где  $N$  – число расчётных узлов. Решение системы уравнений газовой динамики в дальнейшем требует порядка  $O(N)$  вычислительных операций на каждом временном шаге. При моделировании движения частиц эволюция геометрии расчётной области требует порядка  $O(N^{2/3} \log N)$  операций для актуализации связей с соседними узлами на внешних границах доменов частиц. Актуализация может выполняться не на каждом расчётном шаге явного метода, поскольку временной интервал довольно мал и

обусловлен разрешением течения газа в пограничном слое, а при преодолении частицей порогового расстояния  $\Delta r$  от точки предыдущей актуализации состояния.

Численное моделирование течения газа с частицами в полномасштабной трёхмерной постановке с детальным разрешением пограничного слоя у поверхности каждого тела требует очень высокой степени детализации и десятков миллионов вычислительных узлов, занимающих десятки гигабайт оперативной памяти. Память каждого графического процессора, как правило, кратно меньше общей оперативной памяти компьютера, при этом один сервер может быть оборудован несколькими графическими процессорами. Именно под такое аппаратное обеспечение, оснащённое одновременно четырьмя графическими ускорителями профессионального класса Nvidia Tesla A100, имеющиеся в лаборатории Московского Авиационного Института, и был оптимизирован программный код. Вычислительные узлы распределяются между графическими процессорами и статически закрепляются за ними. На каждом графическом ускорителе выделяется буфер для хранения векторов параметров газа соседних узлов, закреплённых за другими графическим ускорителями, это необходимо для расчёта потоков между узлами. Синхронизация состояния узлов производится на каждом шаге расчёта и требует относительно небольшого объема передачи данных между графическими процессорами. По мере перемещения частиц связи между соседними узлами разных доменов эволюционируют, что влечёт обновление коэффициентов расчёта градиентов и индексов соседних узлов.

В проведённых вычислительных экспериментах по моделированию движения ансамбля частиц объем используемой основной памяти достигал 350 Гб, суммарной памяти графических процессоров – 70 Гб, время расчёта – 7 суток.

Проведена серия вычислительных экспериментов по моделированию движения крупных сферических частиц диаметром  $d_p = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$  в ударном слое у поверхности сферы диаметром  $D = 0,075 \text{ м}$ . Число Маха набегающего воздушного потока  $M_\infty = 6$ , Рейнольдса  $Re|_{L=D} = 1,09 \cdot 10^6$ .

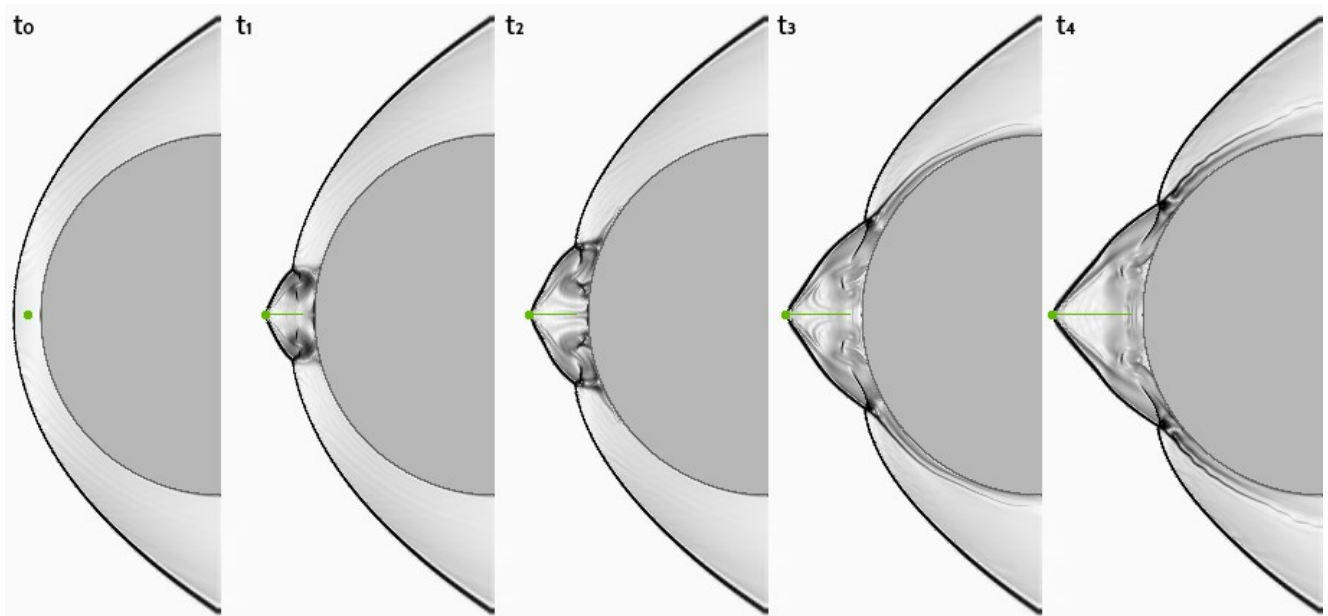


Рис. 5. Движение одиночной частицы вдоль оси симметрии сферы

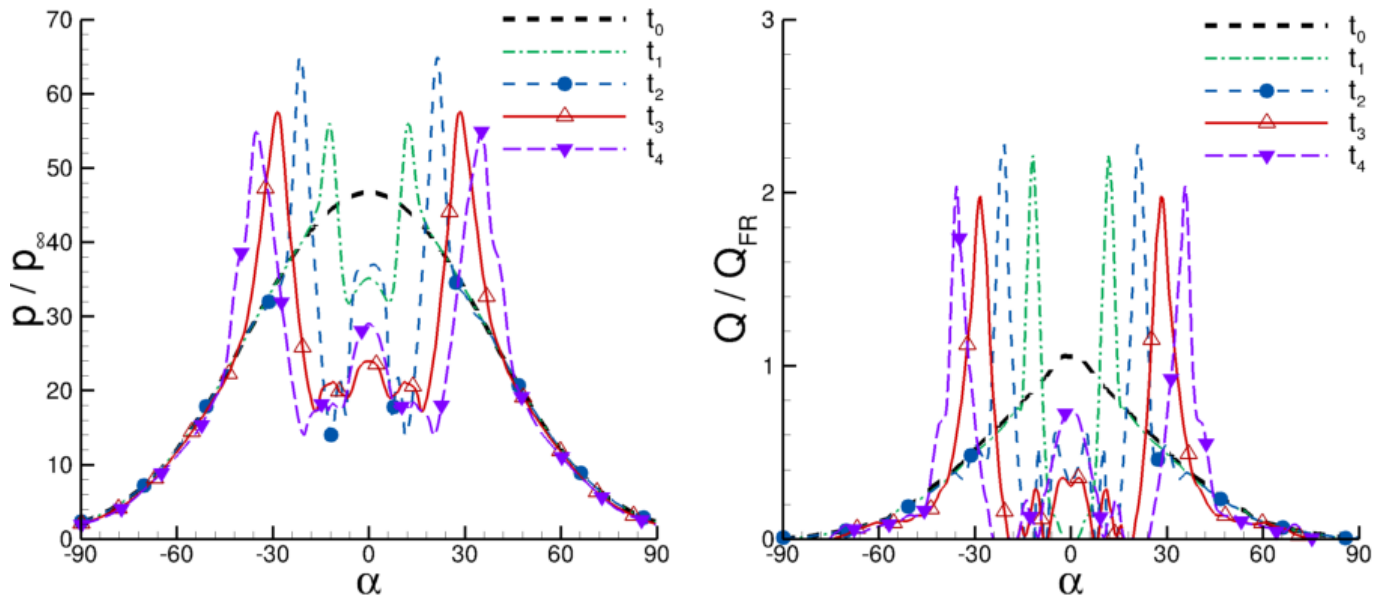


Рис. 6. Распределение давления и теплового потока на поверхности сферы при движении одиночной частицы вдоль оси симметрии сферы

На рис. 5 показаны теневые картины течения [30] в последовательные моменты времени для одиночной частицы, движущейся навстречу набегающему потоку с начальной скоростью  $u_{p0} = 75 \text{ м/с}$  вдоль оси симметрии сферы, а на рис. 6 – соответствующие этим моментам времени графики распределения давления и конвективного теплового потока от газа к поверхности сферы.

При взаимодействии ударной волны от частицы с головной ударной волной формируется направленная к поверхности струя газа, вызывающая рост давления и теплового потока в локальной зоне, которая смещается к периферии по мере удаления частицы от поверхности. Детальный анализ наблюдаемых процессов приведён в работе [11]. Величина конвективного теплового потока от газа к поверхности  $Q = \lambda \frac{\partial T}{\partial n}$  нормирована значением  $Q_{FR}$  в критической точке на поверхности сферы, вычисленным согласно известной приближённо-аналитической зависимости Фэя-Ридделла [31].

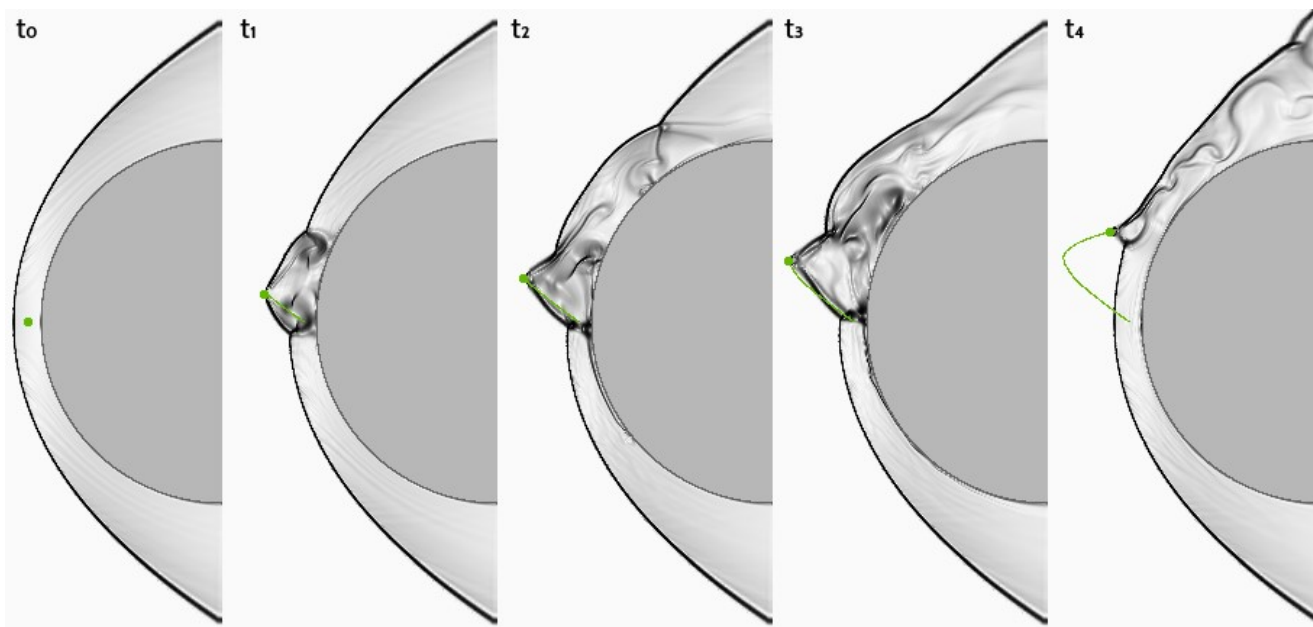


Рис. 7. Движение одиночной частицы под углом к оси симметрии сферы

На рис. 7 показаны теньевые картины течения в последовательные моменты времени для одиночной частицы, стартовавшей навстречу набегающему потоку под углом  $35^\circ$  к оси симметрии сферы. В данной конфигурации наблюдается ярко выраженная и относительно продолжительное время существующая импактная струя, направленная в область критической точки, действие которой вызывает четырёхкратное локальное усиление конвективного теплового потока (см. рис. 8).

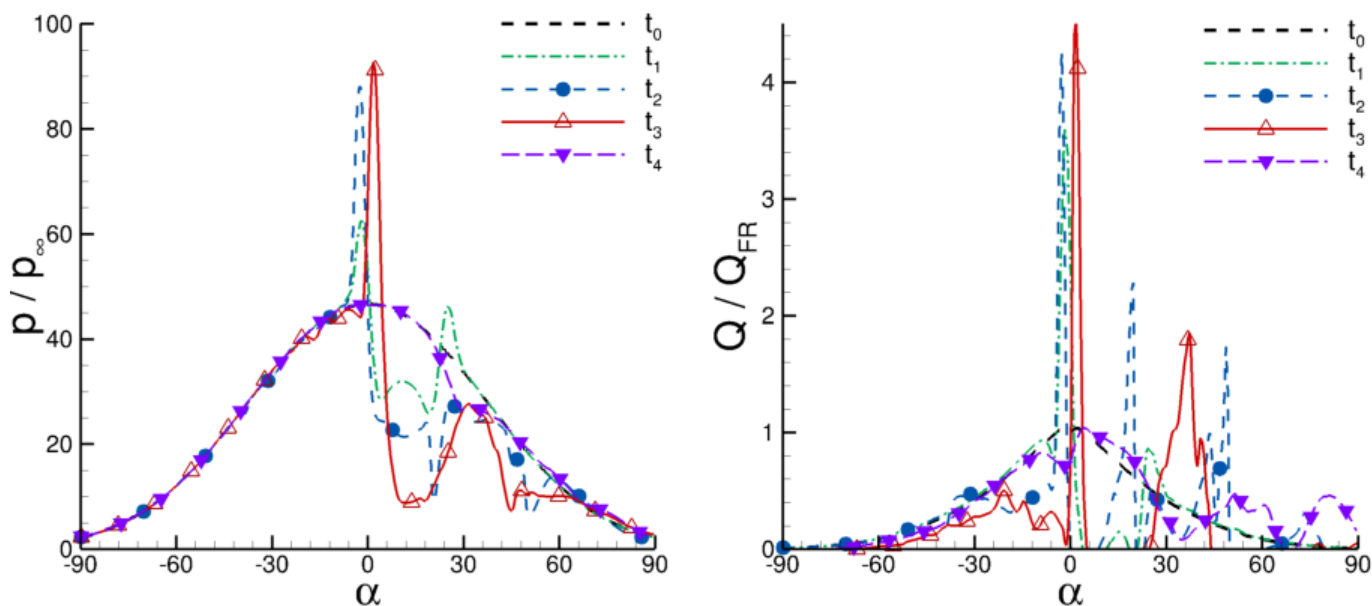


Рис. 8. Распределение давления и теплового потока на поверхности сферы при движении одиночной частицы под углом к оси симметрии сферы

На рис. 9 показаны теневые картины течения при последовательном запуске через временной интервал двух одинаковых частиц с идентичными начальными условиями.

В рассматриваемой конфигурации вторая частица оказывается в сверхзвуковом следе первой частицы, быстрее тормозится и отходит на заметно меньшее удаление от сферы. Интенсификация теплового потока в данной конфигурации оказалась менее выраженной, чем в случае одиночной частицы (см. рис. 10).



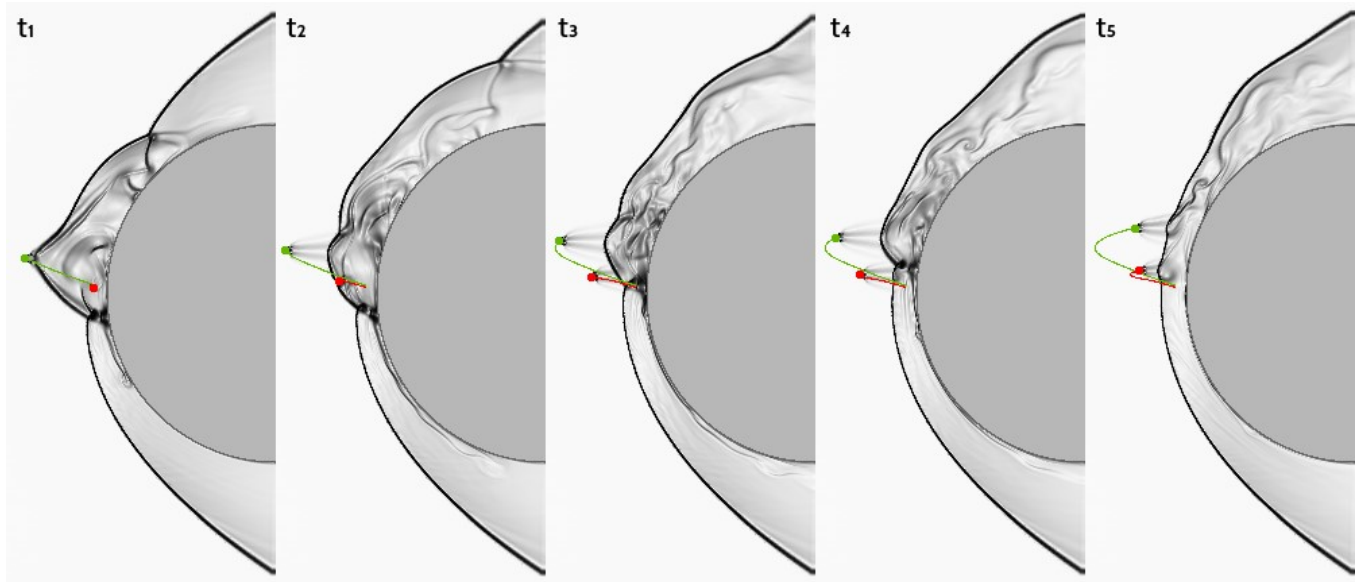


Рис. 9. Движение двух частиц в ударном слое

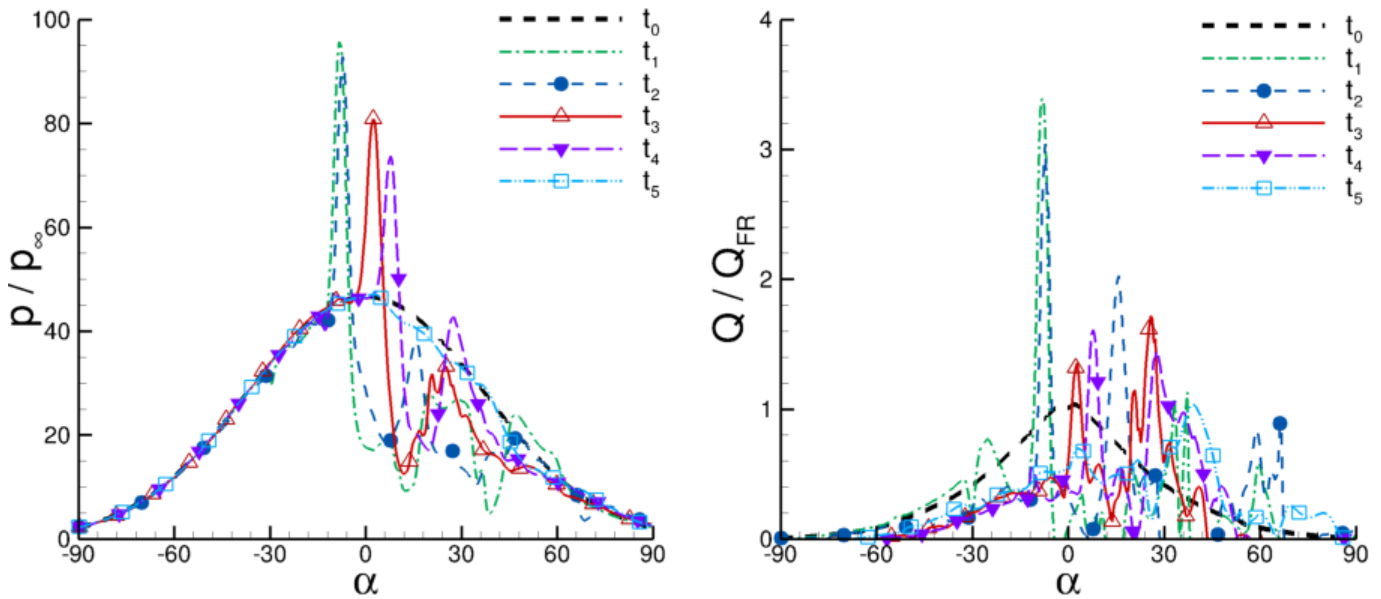


Рис. 10. Распределение давления и теплового потока на поверхности сферы при движении двух частиц в ударном слое

### Заключение

Представленная вычислительная модель, а также её программная реализация, использующая мощности современных графических процессоров, открывают широкие возможности для детального исследования газодинамического взаимодействия крупных

частиц с ударным слоем в полномасштабной трёхмерной постановке, позволяя рассчитать перемещение частицы вдоль сложной траектории и одновременное движение нескольких частиц. Продемонстрирована возможность возникновения кратного усиления конвективного теплового потока на отдельных участках поверхности. Данное явление наблюдалось в стендовых экспериментах и послужило мотивацией для начала работ по этой теме.

Дальнейшая работа может быть связана с развитием модели, таким, например, как учёт вращения частиц [32, 33], реализацией моделей турбулентного течения, исследованиями газодинамического взаимодействия с потоком частиц несферической формы [34, 35].

### **Список источников**

1. Вараксин А.Ю. Обтекание тел дисперсными газовыми потоками // Теплофизика высоких температур. 2018. Т. 56. № 2. С. 282–305. DOI: [10.7868/S0040364418020175](https://doi.org/10.7868/S0040364418020175)
2. Ревизников Д.Л., Сухарев Т.Ю. Гиперзвуковое обтекание затупленных тел в условиях атмосферы Земли и Марса. Сравнительный анализ математических моделей // Тепловые процессы в технике. 2018. Т. 10. № 1-2. С. 5–15.
3. Егоров И.В., Кунсик Конг, Новиков А.В. Моделирование обтекания носовой части спускаемого космического аппарата в атмосфере Марса // Ученые записки ЦАГИ. 2021. Т. 52. № 4. С. 20–33.

4. Романюк Д.А., Циркунов Ю.М. Нестационарные двухфазные течения газа с частицами в решетках профилей // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2020. № 5. С. 33–45. DOI: [10.31857/S0568528120050126](https://doi.org/10.31857/S0568528120050126)
5. Михатулин Д.С., Полежаев Ю.В., Ревизников Д.Л. Исследование разрушения углеродного теплозащитного материала при полете в запыленной атмосфере // Теплофизика высоких температур. 2003. Т. 41. № 1. С. 98–105.
6. Михатулин Д.С., Полежаев Ю.В., Ревизников Д.Л. Теплообмен и разрушение тел в сверхзвуковом гетерогенном потоке. - М.: ЯНУС-К, 2007. — 391 с.
7. Садин Д.В. Приложение гибридного метода крупных частиц к расчету взаимодействия ударной волны со слоем газозвеси // Компьютерные исследования и моделирование. 2020. Т. 12. № 6. С. 1323–1338. DOI: [10.20537/2076-7633-2020-12-6-1323-1338](https://doi.org/10.20537/2076-7633-2020-12-6-1323-1338)
8. Fleener W.A., Watson R.H. Convective Heating in Dust-Laden Hypersonic Flows // AIAA Paper, 1973, no. 73, pp. 761. URL: <https://doi.org/10.2514/6.1973-761>
9. Holden M.S., Gustafson G.Q., Duryea G.R., Hudack L.T. An Experimental Study of Particle-Induced Convective Heating Augmentation // AIAA Paper, 1976, no. 76, pp. 320. URL: <https://doi.org/10.2514/6.1976-320>
10. Sposobin A., Reviznikov D. Impact of High Inertia Particles on the Shock Layer and Heat Transfer in a Heterogeneous Supersonic Flow around a Blunt Body // Fluids, 2021, vol. 6, no. 11, pp. 406. DOI: [10.3390/fluids6110406](https://doi.org/10.3390/fluids6110406)

11. Ревизников Д.Л., Способин А.В., Иванов И.Э. Изменение структуры течения под воздействием высокоинерционной частицы при обтекании тела сверхзвуковым гетерогенным потоком // Теплофизика высоких температур. 2018. Т. 56. № 6. С. 908–913. DOI: [10.31857/S004036440003569-9](https://doi.org/10.31857/S004036440003569-9)
12. Способин А.В., Ревизников Д.Л., Иванов И.Э., Крюков И.А. Колебания давления и теплового потока, индуцированные газодинамическим взаимодействием высокоинерционной частицы с ударным слоем // Известия вузов. Авиационная техника. 2020. № 4. С. 108–115.
13. Ревизников Д.Л., Способин А.В., Иванов И.Э. Сравнительный анализ расчетных и экспериментальных данных об осциллирующем течении, индуцированном газодинамическим взаимодействием частицы с ударным слоем // Теплофизика высоких температур. 2020. Т. 58. № 6. С. 901–908. DOI: [10.31857/S0040364420060162](https://doi.org/10.31857/S0040364420060162)
14. Способин А.В. Метод скользящих адаптивных декартовых сеток расчёта газодинамического взаимодействия частиц с ударным слоем в сверхзвуковом потоке // Тепловые процессы в технике. 2022. Т. 14. № 4. С. 178–185. DOI: [10.34759/tpt-2022-14-4-178-185](https://doi.org/10.34759/tpt-2022-14-4-178-185)
15. Винников В.В., Ревизников Д.Л. Метод погруженной границы для расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел на прямоугольных сетках // Труды МАИ. 2007. № 27. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=34018>

16. Толстых А.И., Ширококов Д.А. Бессеточный метод на основе радиальных базисных функций // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2005. Т. 45. № 8. С. 1498–1505.
17. Способин А.В. Бессеточный алгоритм расчёта сверхзвуковых течений невязкого газа // Труды МАИ. 2021. № 119. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=159777>. DOI: [10.34759/trd-2021-119-04](https://doi.org/10.34759/trd-2021-119-04)
18. Способин А.В. Бессеточный алгоритм расчёта сверхзвуковых течений вязкого теплопроводного газа // Труды МАИ. 2021. № 121. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=162656>. DOI: [10.34759/trd-2021-121-09](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-09)
19. Молчанов А.М. Математическое моделирование задач газодинамики и теплообмена. - М.: Изд-во МАИ, 2013. - 206 с.
20. Башкин В.А., Егоров И.В. Численное исследование задач внешней и внутренней аэродинамики. - М.: Физматлит, 2013. - 331 с.
21. Sattarzadeh S., Jahangirian A. 3D implicit mesh-less method for compressible flow calculations // Scientia Iranica, 2012, vol. 19, no. 3, pp. 503–512. DOI: [10.1016/j.scient.2012.04.013Y](https://doi.org/10.1016/j.scient.2012.04.013Y)
22. Пирумов У.Г. Численные методы. - М.: Юрайт, 2021. - 421 с.
23. Sattarzadeh S., Jahangirian A., Hashemi M. Y. Unsteady Compressible Flow Calculations with Least-Square Mesh-less Method // Journal of Applied Fluid Mechanics, Jan. 2016, vol. 9, no. 1, pp. 233–241. DOI: [10.18869/acadpub.jafm.68.224.24052](https://doi.org/10.18869/acadpub.jafm.68.224.24052)

24. Kim K.H., Kim C., Rho O.H. Methods for the accurate computations of hypersonic flows: I. AUSMPW+ Scheme // Journal of Computational Physics, 2001, vol. 174, pp. 38-80. DOI: [10.1006/jcph.2001.6873](https://doi.org/10.1006/jcph.2001.6873)
25. Wang Y., Cai X., Zhang M., Ma X., Ren D., Tan J. The study of the three-Dimensional meshless solver based on AUSM+-up and MUSCL scheme // Proceedings of the 2015 International Conference on Electromechanical Control Technology and Transportation, URL: <https://dx.doi.org/10.2991/icectt-15.2015.52>
26. Hashemi M.Y., Jahangirian A. Implicit fully mesh-less method for compressible viscous flow calculations // Journal of Computational and Applied Mathematics, 2011, no. 235, pp. 4687–4700. DOI: [10.1016/j.cam.2010.08.002](https://doi.org/10.1016/j.cam.2010.08.002)
27. Антонюк В.А. OpenCL. Открытый язык для параллельных программ. - М.: Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2017. - 88 с.
28. Малявко А.А. Параллельное программирование на основе технологий OpenMP, CUDA, OpenCL, MPI. - М.: Юрайт, 2021. - 135 с.
29. Боресков А.В., Харламов А.А. Основы работы с технологией CUDA. - М.: ДМК Пресс, 2010. - 232 с.
30. Бодрышев В.В., Абашев В.М., Тарасенко О.С., Миролюбова Т.И. Интенсивность изображения, как количественная характеристика параметров газового потока // Труды МАИ. 2016. № 88. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=70428>

31. Никитин П.В., Павлюк Е.А. Расчёт тепло – и массообмена на поверхности спускаемого космического аппарата // Труды МАИ. 2014. № 72. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=47266>
32. Tsirkunov Yu. M. Gas-particle flows around bodies – key problems, modeling and numerical analysis // Proc. Fourth Int. Conf. on Multiphase Flow (ICMF'01). New Orleans, USA, 2001, Paper no. 607, pp. 1–31.
33. Сидоренко Д.А., Уткин П.С. Численное моделирование взаимодействия проходящей ударной волны со слоем частиц методом декартовых сеток // Горение и взрыв. 2020. Т. 13. № 2. С. 62–74.
34. Циркунов Ю.М., Панфилов С.В., Клычников М.Б. Полуэмпирическая модель ударного воздействия дисперсной частицы примеси с поверхностью, обтекаемой потоком газозвеси // Инженерно-физический журнал. 1994. Т. 67. № 5–6. С. 379–386.
35. Панфилов С.В., Циркунов Ю.М. Модель отскока и рассеяния несферических частиц при высокоскоростном взаимодействии с обтекаемой поверхностью // Журнал технической физики. 2022. Т. 92. № 5. С. 665-675. DOI: [10.21883/JTF.2022.05.52370.324-21](https://doi.org/10.21883/JTF.2022.05.52370.324-21)

## References

1. Varaksin A.Yu. *Teplofizika vysokikh temperature*, 2018, vol. 56, no. 2, pp. 282–305. DOI: [10.7868/S0040364418020175](https://doi.org/10.7868/S0040364418020175)

2. Reviznikov D.L., Sukharev T.Yu. *Teplovye protsessy v tekhnike*, 2018, vol. 10, no. 1-2. pp. 5–15.
3. Egorov I.V., Kunsik Kong, Novikov A.V. *Uchenye zapiski TsAGI*, 2021, vol. 52, no. 4, pp. 20–33.
4. Romanyuk D.A., Tsirkunov Yu.M. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 2020, no. 5, pp. 33–45. DOI: [10.31857/S0568528120050126](https://doi.org/10.31857/S0568528120050126)
5. Mikhatulin D.S., Polezhaev Yu.V., Reviznikov D.L. *Teplofizika vysokikh temperature*, 2003, vol. 41, no. 1, pp. 98–105.
6. Mikhatulin D.S., Polezhaev Yu.V., Reviznikov D.L. *Teploobmen i razrushenie tel v sverkhzvukovom geterogennom potoke* (Heat transfer and fracture of bodies in supersonic heterogeneous flow), Moscow, YaNUS-K, 2007, 391 p.
7. Sadin D.V. *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie*, 2020, vol. 12, no. 6, pp 1323–1338. DOI: [10.20537/2076-7633-2020-12-6-1323-1338](https://doi.org/10.20537/2076-7633-2020-12-6-1323-1338)
8. Fleener W.A., Watson R.H. Convective Heating in Dust-Laden Hypersonic Flows, *AIAA Paper*, 1973, no. 73, pp. 761. URL: <https://doi.org/10.2514/6.1973-761>
9. Holden M.S., Gustafson G.Q., Duryea G.R., Hudack L.T. An Experimental Study of Particle-Induced Convective Heating Augmentation, *AIAA Paper*, 1976, no. 76, pp. 320. URL: <https://doi.org/10.2514/6.1976-320>
10. Sposobin A., Reviznikov D. Impact of High Inertia Particles on the Shock Layer and Heat Transfer in a Heterogeneous Supersonic Flow around a Blunt Body, *Fluids*, 2021, vol. 6, no. 11, pp. 406. DOI: [10.3390/fluids6110406](https://doi.org/10.3390/fluids6110406)



11. Reviznikov D.L., Sposobin A.V., Ivanov I.E. *Teplofizika vysokikh temperature*, 2018, vol. 56, no. 6, pp. 908–913. DOI: [10.31857/S004036440003569-9](https://doi.org/10.31857/S004036440003569-9)
12. Sposobin A.V., Reviznikov D.L., Ivanov I.E., Kryukov I.A. *Izvestiya vuzov. Aviatsionnaya tekhnika*, 2020, no. 4, pp. 108-115.
13. Reviznikov D.L., Sposobin A.V., Ivanov I.E. *Teplofizika vysokikh temperature*, 2020, vol. 58, no. 6, pp. 901-908. DOI: [10.31857/S0040364420060162](https://doi.org/10.31857/S0040364420060162)
14. Sposobin A.V. *Teplovye protsessy v tekhnike*, 2022, vol. 14, no. 4, pp. 178–185. DOI: [10.34759/tpt-2022-14-4-178-185](https://doi.org/10.34759/tpt-2022-14-4-178-185)
15. Vinnikov V.V., Reviznikov D.L. *Trudy MAI*, 2007, no. 27. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=34018>
16. Tolstykh A.I., Shirobokov D.A. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*, 2005, vol. 45, no. 8, pp. 1498-1505.
17. Sposobin A.V. *Trudy MAI*, 2021, no. 119. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=159777>. DOI: [10.34759/trd-2021-119-04](https://doi.org/10.34759/trd-2021-119-04)
18. Sposobin A.V. *Trudy MAI*, 2021, no. 121. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=162656>. DOI: [10.34759/trd-2021-121-09](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-09)
19. Molchanov A.M. *Matematicheskoe modelirovanie zadach gazodinamiki i teplomassoobmena* (Mathematical Modeling of Problems of Gas Dynamics and Heat and Mass Transfer), Moscow, Izd-vo MAI, 2013, 206 p.

20. Bashkin V.A., Egorov I.V. *Chislennoe issledovanie zadach vneshnei i vnutrennei aerodinamiki* (Numerical Study of Exterior and Interior Aerodynamic Problems), Moscow, Fizmatlit, 2013, 331 p.
21. Sattarzadeh S., Jahangirian A. 3D implicit mesh-less method for compressible flow calculations, *Scientia Iranica*, 2012, vol. 19, no. 3, pp. 503–512. DOI: [10.1016/j.scient.2012.04.013](https://doi.org/10.1016/j.scient.2012.04.013)
22. Pirumov U.G. *Chislennyye metody* (Numerical Methods), Moscow, Yurait, 2021, 421 p.
23. Sattarzadeh S., Jahangirian A., Hashemi M. Y. Unsteady Compressible Flow Calculations with Least-Square Mesh-less Method, *Journal of Applied Fluid Mechanics*, Jan. 2016, vol. 9, no. 1, pp. 233–241. DOI: [10.18869/acadpub.jafm.68.224.24052](https://doi.org/10.18869/acadpub.jafm.68.224.24052)
24. Kim K.H., Kim C., Rho O.H. Methods for the accurate computations of hypersonic flows: I. AUSMPW+ Scheme, *Journal of Computational Physics*, 2001, vol. 174, pp. 38-80. DOI: [10.1006/jcph.2001.6873](https://doi.org/10.1006/jcph.2001.6873)
25. Wang Y., Cai X., Zhang M., Ma X., Ren D., Tan J. The study of the three-Dimensional meshless solver based on AUSM+-up and MUSCL scheme, *Proceedings of the 2015 International Conference on Electromechanical Control Technology and Transportation*, URL: <https://dx.doi.org/10.2991/icectt-15.2015.52>
26. Hashemi M.Y., Jahangirian A. Implicit fully mesh-less method for compressible viscous flow calculations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2011, no. 235, pp. 4687–4700. DOI: [10.1016/j.cam.2010.08.002](https://doi.org/10.1016/j.cam.2010.08.002)

27. Antonyuk V.A. OpenCL. *Otkrytyi yazyk dlya parallel'nykh program* (Open language for parallel programs), Moscow, Fizicheskii fakul'tet MGU im. M.V. Lomonosova, 2017, 88 p.
28. Malyavko A.A. *Parallel'noe programmirovaniye na osnove tekhnologii OpenMP, CUDA, OpenCL, MPI* (Parallel programming based on OpenMP, MPI, CUDA technology), Moscow, Yurait, 2021, 135 p.
29. Boreskov A.V., Kharlamov A.A. *Osnovy raboty s tekhnologiei CUDA* (The basics of working with CUDA technology), Moscow, DMK Press, 2010, 232 p.
30. Bodryshev V.V., Abashev V.M., Tarasenko O.S., Mirolyubova T.I. *Trudy MAI*, 2016, no. 88. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=70428>
31. Nikitin P.V., Pavlyuk E.A. *Trudy MAI*, 2014, no. 72. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=47266>
32. Tsirkunov Yu. M. Gas-particle flows around bodies – key problems, modeling and numerical analysis, *Proc. Fourth Int. Conf. on Multiphase Flow (ICMF'01)*. New Orleans, USA, 2001, Paper no. 607, pp. 1–31.
33. Sidorenko D.A., Utkin P.S. *Gorenie i vzryv*, 2020, vol. 13, no. 2, pp. 62–74.
34. Tsirkunov Yu.M., Panfilov S.V., Klychnikov M.B. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal*, 1994, vol. 67, no. 5–6, pp. 379–386.
35. Panfilov S.V., Tsirkunov Yu.M. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*, 2022, vol. 92, no. 5, pp. 665–675. DOI: [10.21883/JTF.2022.05.52370.324-21](https://doi.org/10.21883/JTF.2022.05.52370.324-21)

Статья поступила в редакцию 21.07.2022

Статья после доработки 22.07.2022

Одобрена после рецензирования 01.08.2022

Принята к публикации 25.08.2022

The article was submitted on 21.07.2022; approved after reviewing on 01.08.2022; accepted for publication on 25.08.2022