

Колесник Сергей Александрович



**РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ЧИСЛЕННО-
АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ
СОПРЯЖЕННОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА МЕЖДУ ВЯЗКИМИ
ГАЗОДИНАМИЧЕСКИМИ ТЕЧЕНИЯМИ И АНИЗОТРОПНЫМИ ТЕЛАМИ**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2016

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Научный консультант: Заслуженный деятель науки РФ,
доктор физико-математических наук, профессор
Формалев Владимир Федорович

Официальные оппоненты: **Карташов Эдуард Михайлович,**
Заслуженный деятель науки РФ, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Московский технологический университет», профессор кафедры «Высшая и прикладная математика» при институте тонких химических технологий

Волков Игорь Куприянович, Лауреат премии правительства РФ в области науки и техники, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», профессор кафедры «Математическое моделирование»

Кондратов Дмитрий Вячеславович, доктор физико-математических наук, доцент, Поволжский институт управления имени П.А. Столыпина – филиал ФГБОУ ВО «Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации», заведующий кафедрой «Прикладная информатика и информационные технологии в управлении»

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет»

Защита состоится «21» октября 2016 года в 10:00 на заседании диссертационного совета Д 212.125.04 Московского авиационного института (национального исследовательского университета) по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института (национального исследовательского университета) или на сайте института www.mai.ru.

Автореферат разослан «___» _____ 2016 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук, доцент

Северина
Наталья Сергеевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена разработке математического аппарата численного и аналитического решения прямых и обратных задач переноса потенциальных векторных полей в сопрягаемых гомо- и гетерогенных средах и применению его к математическому моделированию аэрогазодинамического нагрева элементов конструкций высокоскоростных летательных аппаратов (ЛА).

Актуальность исследования. Многие физические процессы, протекающие в контактирующих (сопрягаемых) средах (гетерогенных, находящихся в различных фазах, и гомогенных – в одинаковых фазах), такие как перенос массы, теплоты, импульса, электрического заряда и т.д., описываются градиентными законами переноса потенциалов, а следовательно, являются потенциальными векторными полями. Математически перенос потенциалов в таких полях моделируется задачами для уравнений в частных производных параболического и (или) эллиптического типов.

В авиации и ракетно-космической технике такими контактирующими средами являются высокотемпературные газодинамические течения и обтекаемые тела, а границами сопряжения являются границы «газ – твердое тело». Математическое моделирование переноса потенциалов между высокотемпературными газодинамическими течениями и элементами конструкций ЛА называют математическими моделями сопряженного теплопереноса. При этом на границе сопряжения должны выполняться условия непрерывности тепловых потоков и температур со стороны газа и со стороны тела. Однако эти условия могут быть выполнены только после решения задач теплогазодинамики в газодинамическом потоке и теплопереноса в теле, причем, поскольку тепловая защита высокоскоростных ЛА в основном состоит из композиционных материалов, графитов и графитосодержащих материалов, то обтекаемые тела считаются анизотропными с тензорным характером переноса теплоты. Сложность математического моделирования сопряженного теплопереноса между теплогазодинамическими течениями и анизотропными телами заключается в следующем:

- в различных средах протекают различные физические процессы, а следовательно, перенос потенциалов в них описывается различными системами уравнений в частных производных;

- в различных средах используются уравнения в частных производных различных типов, причем для одной среды они могут содержать смешанные дифференциальные операторы, в другой – нет, и следовательно, для различных сред используются различные численные и аналитические методы.

Однако основная трудность заключается в выполнении условий непрерывности тепловых потоков и температур на границах сопряжения, поскольку из решения задачи теплогазодинамики необходимо определить тепловые потоки от газа к границе сопряжения, по которым необходимо определить нестационарные температурные поля в теле и распределение температур по границе «газ – твердое тело», без чего невозможно решить задачу теплогазодинамики.

Решение сопрягаемых задач в отдельности приводит к погрешностям в определении тепловых потоков и температур в теле до 50% и более.

Кроме этого, многие физические характеристики в сопрягаемых средах можно определить только через экспериментальные замеры других характеристик, связанных с первыми математическими зависимостями, вследствие чего возникают задачи идентификации тепловых и газодинамических характеристик.

Вместе с тем, математическое моделирование прямых и обратных задач сопряженного теплопереноса *чрезвычайно востребовано* при проектировании авиационной и ракетно-космической техники, особенно в задачах аэрогазодинамического нагрева.

Наибольший вклад в математическое моделирование сопряженного теплопереноса внесли академики А. В. Лыков, А. А. Самарский, А. И. Леонтьев и их школы. Кроме этого, данными проблемами занимались Н. Ф. Краснов, В. Ф. Формалев, В. Д. Совершенный, В. С. Зарубин, И. К. Волков, А. В. Аттетков, Э. М. Карташов, Г. Н. Кувыркин, Г. Шлихтинг, Д. Л. Ревизников, А. А. Алексашенко, Г. Карслоу и Д. Егер. Численные методы решения таких задач опубликованы в трудах А. А. Самарского, Н. Н. Яненко, Г. И. Марчука, И. В. Фрязинова, В. Ф. Формалева, Д. Писмена и Г. Рэчфорда, Дугласа и Гана и многих других. Среди работ по обратным задачам теплообмена следует отметить работы А. Н. Тихонова и В. Я. Арсенина, А. А. Самарского и П. Н. Вабищевича, О. М. Алифанова, С. И. Кабанихина, В. Б. Гласко, Д. В. Бэка, Ц. Э. Хуанта, Н. Оцизика и многих других.

Однако публикации по методам математического моделирования и численного решения прямых и обратных задач сопряженного теплопереноса между вязкими газодинамическими течениями и анизотропными телами отсутствуют.

В этой связи тема диссертационной работы *«Разработка математического аппарата численно-аналитического решения прямых и обратных задач сопряженного теплопереноса между вязкими газодинамическими течениями и анизотропными телами»* является **актуальной**.

Цель и задачи работы. Нерешенность перечисленных актуальных проблем позволяет сформулировать **цель данной диссертации: разработка математического аппарата на основе комплексных математических моделей, численных и аналитических методов решения прямых и обратных задач теплопереноса между вязкими газодинамическими течениями и анизотропными телами и применение его в задачах аэрогазодинамического нагрева высокоскоростных ЛА.**

Для достижения данной цели необходимо было разработать:

– методы построения комплексных физико-математических моделей совместного теплопереноса между вязкими теплогазодинамическими течениями в ударных слоях и анизотропными телами, теплоперенос в которых носит тензорный характер;

– новые и модифицировать существующие экономичные абсолютно устойчивые численные методы решения задач теплогазодинамики и теплопереноса в анизотропных телах, обосновать их по аппроксимации, устойчивости и сходимости;

– численный метод сопряжения на границе «газ – твердое тело» в условиях неопределенных потенциалов с обеих сторон границы сопряжения; методы аналитического решения класса задач для уравнений параболического типа, содержащих смешанные дифференциальные операторы с граничными условиями различных типов;

– методы численного решения задач идентификации по восстановлению линейных и нелинейных характеристик сопряженного теплопереноса;

– класс программных комплексов по решению прямых и обратных задач сопряженного теплопереноса, получение и анализ результатов компьютерного моделирования.

Методы исследования. Для решения перечисленных задач используются: методы математического моделирования, численные методы как для газодинамических течений, так и в твердых анизотропных телах, интегральные методы, в том числе методы операционного исчисления и граничных функций Грина, методы задач идентификации, в том числе методы параметрической идентификации и неявных градиентных методов минимизации, методы построения регуляризирующих функционалов и методы параллельных вычислений.

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

– новые методы построения комплексных физико-математических моделей теплопереноса между вязкими теплогазодинамическими течениями и телами с анизотропией свойств переноса тепла;

– разработан новый экономичный абсолютно устойчивый метод расщепления с экстраполяцией по пространственным переменным (МРЭП) с использованием апостериорной информации и процедуры «предиктор-корректор» численного решения задач теплогазодинамики между ударной волной и анизотропным телом, доказаны теоремы об аппроксимации со вторым порядком и об абсолютной устойчивости;

– разработана и обоснована по аппроксимации и устойчивости модификация метода расщепления с экстраполяцией по времени (МРЭВ) численного решения задач для уравнений параболического типа, содержащих смешанные дифференциальные операторы, с использованием апостериорной информации в левых сечениях на верхних временных слоях, доказаны теоремы об аппроксимации и абсолютной устойчивости, в том числе в условиях сопряжения;

- разработан новый численный метод высокоточного определения параметра сопряжения – температуры границы «газ – твердое тело», сохраняющий высокий порядок точности и абсолютную устойчивость за счет неявной аппроксимации существенно нелинейных тепловых потоков, действующих на границе сопряжения с обеих сторон;

– впервые, на основе построения граничных функций влияния (функций Грина) и интегральных методов, получены аналитические решения класса задач для уравнений параболического типа со смешанными производными с граничными условиями II–IV родов; эти решения затем используются для приближенно-аналитического решения сопряженных задач теплогазодинамики и анизотропной теплопроводности;

– впервые разработана методология численного решения обратных коэффициентных и граничных задач сопряженного теплопереноса в анизотропных телах с регуляризацией функционала квадратичной невязки по восстановлению нелинейных компонентов тензора теплопроводности и тепловых потоков от газодинамического течения к границе «газ – анизотропное твердое тело»; методология основана на неявном методе градиентного спуска, методе параметрической идентификации, методе решения сопряженных (в математическом смысле) задач и методах построения регуляризирующих функционалов.

Практическая ценность работы состоит в том, что ее основные положения могут быть использованы при проектировании тепловой защиты высокоскоростных летательных аппаратов. Полученные результаты компьютерного моделирования показали, что на основе формирования характеристик тензора теплопроводности теплозащитных материалов, можно существенно снизить тепловые потоки от газа к телу.

Достоверность результатов, представленных в диссертационной работе, подтверждается адекватными математическими моделями, строгими математическими доказательствами, точными аналитическими решениями, согласованием с результатами численных экспериментов.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертационной работы докладывались на следующих всероссийских и международных научных конференциях: 16–22 Международных симпозиумах «Динамические и технологические проблемы конструкций и механики сплошных сред им. А.Г. Горшкова (Ярополец, Моск. обл. 2010–2016); 11–18 Международных конференциях по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (Алушта, Крым, 2001–2013); 4, 6, 8, 9, 10-й Международных конференциях по неравновесным процессам в соплах и струях (Алушта, Крым, 2002–2014); 4-th International Conference «Inverse problems: Identification, Design and Control (Moscow, Russia, 2003); 9, 12, 13 Международных конференциях «Математические модели физических процессов» (Таганрог, Россия, 2003–2008); 1-й Международной конференции, посвященной 90-летию акад. В.Н. Челомея (Москва – Реутов, 2004); 5-й Российской национальной конференции по теплообмену (Москва, 2015); 11-й Всероссийской конференции молодых ученых «Актуальные вопросы, теплофизики и физической гидрогазодинамики» (Новосибирск, 2012); 1–4 Международных семинарах «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» (Москва, Вятчи, 2014–2016).

Результаты диссертации использованы в научно-исследовательских работах по грантам Российского фонда фундаментальных исследований, в двух из которых автор был научным руководителем (№12-01-31231, 14-01-00488) , в трех грантах Минобрнауки РФ «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России 2009–2013 гг.», в двух грантах Российского научного фонда, в НИР в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки РФ (проект №118, 2014–2016 гг.).

В 2008–2014 гг. автор трижды стал победителем конкурса на право получения гранта Президента РФ по господдержке молодых ученых кандидатов наук (МК-

1669.2009.8, МК-164.2011.8, МК-299.2013.8). Дважды лауреат конкурса «Грант Москвы в области наук и технологий в сфере образования 2004, 2005 гг.

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в одной монографии, в 26 научных статьях в журналах из Перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий (в том числе 15 в журналах, реферируемых в международных базах Web of Science или Scopus). Получено 8 свидетельств о государственной регистрации программных комплексов для ЭВМ. Помимо этого, результаты опубликованы в других журналах, сборниках статей и трудах конференций, общее число научных публикаций — 64.

Личный вклад. Все исследования, результаты которых изложены в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию вошел лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка использованной литературы и двух приложений с кратким описанием двух программных комплексов. Работа изложена на 356 страницах, содержит 66 рисунка и 9 таблиц. Список литературы содержит 178 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулированы цель и задачи исследования, показана ее научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, их достоверность, основные положения защищаемые автором, а также приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

В первой главе, на основе законов сохранения массы, импульса, энергии, соотношений на головной ударной волне и непрерывности потенциалов и потенциальных векторных полей, разработан метод математического моделирования сопряженного теплообмена между вязкими теплогазодинамическими течениями на основе уравнений Навье-Стокса в ударных газодинамических слоях и притупленными осесимметричными или плоскими телами с анизотропией свойств переноса тепловой энергии. Математическая модель теплогазодинамики в R^2 в квазистационарной постановке включает в себя уравнения сохранения импульса, неразрывности, состояния, сохранения концентраций и уравнение энергии с учетом энергии сил давления, энергии передаваемой теплопроводностью и диффузией, а также диссипативной энергии.

Уравнения теплопереноса в составном анизотропном теле рассматриваются в различных комбинированных криволинейных координатах, для чего разработан новый алгебраический метод формирования компонентов тензора теплопроводности в различных системах координат. Рассмотрены различные алгебраические и дифференциальные модели турбулентности. В качестве краевых условий для газа приведены отношения газодинамических функций на ударной волне, а на границе тела – условия прилипания. Для анизотропного тела на наружной границе используются условия сопряжения по тепловым потокам и

температурам, а на внутренней границе задаются тепловые потоки в нормальном направлении.

Во второй главе разработаны и обоснованы по аппроксимации и устойчивости новые экономичные, абсолютно устойчивые методы расщепления численного решения задач вязкой теплогазодинамики, нестационарных задач теплопроводности, содержащих смешанные дифференциальные операторы и сопряженных задач вязкой теплогазодинамики и анизотропной теплопроводности.

Эти методы, кроме идеологии расщепления по координатным направлениям, активно используют апостериорную информацию о решении, полученную на верхних временных слоях в левых от расчетного сечения и на нижних временных слоях. Такой подход позволяет получить существенные преимущества по сравнению с существующими методами, поскольку экономичность достигается использованием только скалярных прогонок по координатным направлениям, а абсолютная устойчивость – использованием полностью неявных конечно-разностных схем с сильным диагональным преобладанием в результирующих системах линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

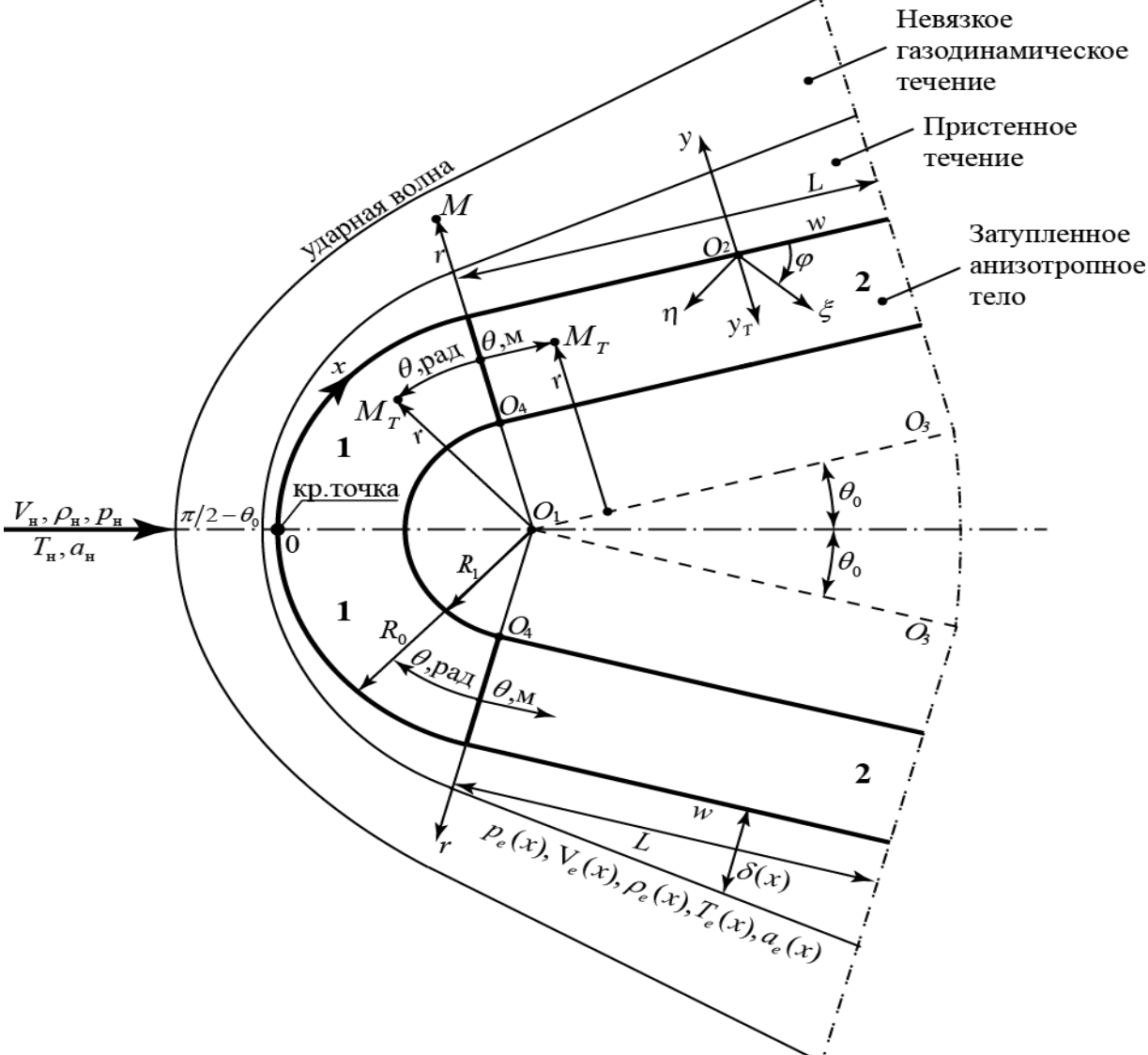


Рис. 1. Связанная система координат: M – точка в газодинамическом течении, M_T – в анизотропном теле

Математическая модель, приведенная в первой главе, в декартовых прямоугольных координатах не пригодна для решения сопряженных задач теплогазодинамики и многомерной теплопроводности в областях с криволинейными границами и тем более не пригодна для использования методов расщепления. Наиболее удобна для этих целей система координат, связанная с поверхностью обтекаемого тела (рис. 1), причем поперечные координатные линии проводятся в нормальном к поверхности тела направлении до пересечения с ударной волной, а продольные – кривые, эквидистантные обтекаемой поверхности и отсчитываются либо от линии полного торможения, либо от ударной волны. Такую систему координат очень легко совместить с системой координат в анизотропном теле. В этой системе координат математическая модель включает в себя следующую систему уравнений:

для газодинамического течения

$$\begin{aligned} \frac{\rho u}{1+y/R_0} \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho \frac{uv}{R_0+y} = -\frac{1}{1+y/R_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \\ + \frac{1}{1+y/R_0} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v(1+y/R_0)}{\partial y} \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left[R_0 \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \\ |x| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L, \quad 0 < y < y_{y\partial.s.}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho u}{1+y/R_0} \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} - \rho \frac{v^2}{R_0+y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ R_0 \mu \left[2 \frac{\partial v(1+y/R_0)}{\partial y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v(1+y/R_0)}{\partial y} \right) \right] \right\} + \\ + \frac{1}{1+y/R_0} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \quad |x| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L, \quad 0 < y < y_{y\partial.s.}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho ru)}{\partial x} + \frac{\partial[\rho v(1+y/R_0)r]}{\partial y} = 0, \quad |x| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L, \quad 0 < y < y_{y\partial.s.}; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho u}{1+y/R_0} \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D_{12} \frac{\partial c_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((1+y/R_0) \rho D_{12} \frac{\partial c_i}{\partial y} \right) + \dot{w}_i, \\ |x| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L, \quad 0 < y < y_{y\partial.s.}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$p = \rho \bar{R} T, \quad |x| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L, \quad 0 < y < y_{y\partial.s.}; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho u c_p}{1+y/R_0} \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{1+y/R_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((1+y/R_0) \cdot \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \\ + \frac{u}{1+y/R_0} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} + \\ + \frac{1}{1+y/R_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D_{12} \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((1+y/R_0) \rho D_{12} \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial y} \right), \quad h_i = \int_0^T c_{pi} dT + h_i^0, \quad i=1,2, \\ |x| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L, \quad 0 < y < y_{y\partial.s.}; \end{aligned} \quad (6)$$

для анизотропного тела (область 1)

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^{\nu+1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{\nu+1} \lambda_{rr}(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^{\nu+1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{\nu} \lambda_{r\theta}(T) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) +$$

$$+ \frac{1}{r \cdot \sin^{\nu} \theta'} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^{\nu} \theta' \cdot \lambda_{\theta r}(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^{\nu} \theta'} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^{\nu} \theta' \cdot \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right),$$

$$R_1 < r < R_0, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \theta_0, \quad (7)$$

где $\nu = 0$ или 1 для цилиндрической и сферической системы координат соответственно, $\theta' = \theta + \theta_0$;

$$\lambda_{rr}(T) = \lambda_{\xi}(T) \sin^2(\theta + \theta_0 - \varphi) + \lambda_{\eta}(T) \cos^2(\theta + \theta_0 - \varphi),$$

$$\lambda_{\theta\theta}(T) = \lambda_{\xi}(T) \cos^2(\theta + \theta_0 - \varphi) + \lambda_{\eta}(T) \cdot \sin^2(\theta + \theta_0 - \varphi), \quad (8)$$

$$\lambda_{r\theta}(T) = \lambda_{\theta r}(T) = [\lambda_{\xi}(T) - \lambda_{\eta}(T)] \sin(\theta + \theta_0 - \varphi) \cos(\theta + \theta_0 - \varphi).$$

для анизотропного тела (область 2)

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_{rr}(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_{r\theta}(T) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta r}(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + p \frac{\partial T}{\partial r} + p_1 \frac{\partial T}{\partial \theta}, \quad R_1 < r < R_0, \quad 0 < \theta < L, \quad (9)$$

$$p = \frac{\lambda_{rr} + \lambda_{\theta r} \operatorname{tg} \theta_0}{r + \theta \cdot \operatorname{tg} \theta_0}, \quad p_1 = \frac{\lambda_{r\theta} + \lambda_{\theta\theta} \operatorname{tg} \theta_0}{r + \theta \cdot \operatorname{tg} \theta_0};$$

$$\lambda_{rr}(T) = \lambda_{\xi}(T) \sin^2(\theta_0 - \varphi) + \lambda_{\eta} \cos^2(\theta_0 - \varphi),$$

$$\lambda_{\theta\theta}(T) = \lambda_{\xi}(T) \cos^2(\theta_0 - \varphi) + \lambda_{\eta} \sin^2(\theta_0 - \varphi), \quad (10)$$

$$\lambda_{r\theta}(T) = \lambda_{\theta r}(T) = [\lambda_{\xi}(T) - \lambda_{\eta}(T)] \cdot \sin(\theta_0 - \varphi) \cos(\theta_0 - \varphi).$$

Условия на границе w «газ – твердое тело» (условия сопряжения)

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{w+0} + h_{Aw} \rho_w D_{12} \frac{\partial c_A}{\partial y} \Big|_{w-0} = \lambda_n \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{w-0} - \varepsilon_w \sigma T_w^4; \quad (11)$$

$$T(x, y) \Big|_{w+0} = T(x, y) \Big|_{w-0} = T_w(x); \quad (12)$$

$$u_w(x) = 0; \quad v_w(x) = 0; \quad c_{iw}(x) = \frac{\rho_{iw}(x)}{\rho_w(x)} = \frac{p_{iw}(x)R}{p_w(x)R_i}, \quad i = 1, 2; \quad (13)$$

на внутренней границе тела w_1 :

$$\lambda_n \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{w_1} = q_{w_1}. \quad (14)$$

В соотношениях (11), (14) λ_n – теплопроводность анизотропного тела в нормальном к поверхности тела направлении, определяется соотношением

$$\lambda_n = [\lambda_{11} f'^2(x) + 2\lambda_{12} f'(x) + \lambda_{22}] \cdot [1 + f'^2(x)]^{-1}, \quad (15)$$

в котором граница тела задана функцией $y = f(x)$.

В системе уравнений (1)–(15) введены следующие обозначения: $u(x, y)$, $v(x, y)$, $\rho(x, y)$, $p(x, y)$, $T(x, y)$ – продольный и поперечный компонент вектора скорости, плотность, давление, температура; μ , λ , D_{12} , \bar{R} , h , h^0 – динамическая вязкость, теплопроводность, коэффициент бинарной диффузии, газовая постоянная смеси, энтальпия, энтальпия образования газа; \dot{w}_i , c_p – скорость образования i -го

компонента, теплоемкость при постоянном давлении; c_i – концентрация i -го компонента; $\lambda_{rr}, \lambda_{r\theta} = \lambda_{\theta r}, \lambda_{\theta\theta}$ – компоненты тензора теплопроводности; $\lambda_\xi, \lambda_\eta, \varphi$ – главные компоненты и угол ориентации главных осей $O\xi, O\eta$ тензора теплопроводности.

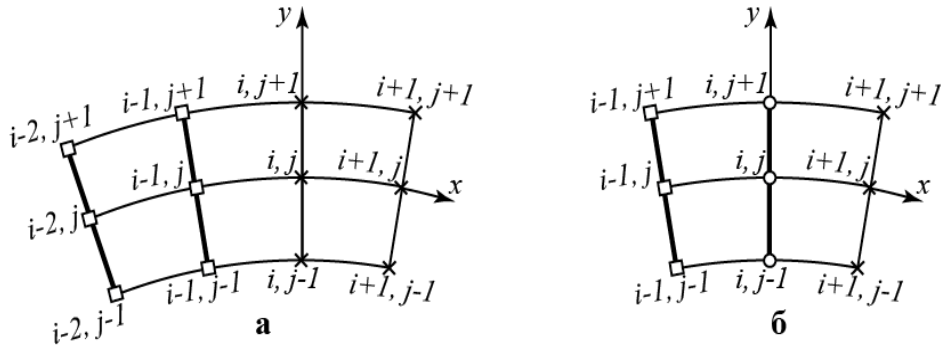


Рис. 2. Шаблоны схемы метода МРЭП для радиальных координатных линий: а – шаг предиктор; б – шаг корректор; □, ○, × – узлы с известными, искомыми и экстраполяционными значениями сеточных функций

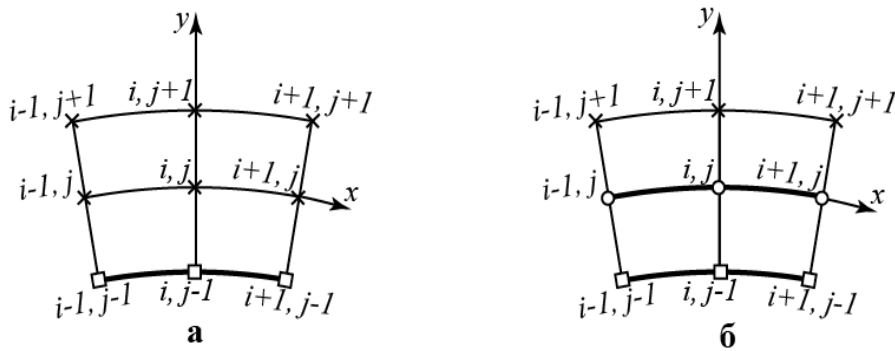


Рис. 3. Шаблоны схемы метода МРЭП для продольных координатных линий: а – шаг предиктор; б – шаг корректор; □, ○, × – узлы с известными, искомыми и вычисленными в поперечном направлении значениями сеточных функций

Для численного решения существенно нелинейных уравнений теплогазодинамики (1)–(15) разработан новый метод расщепления с экстраполяцией по пространственным переменным (МРЭП) с использованием процедуры «предиктор–корректор». На конечно-разностной сетке

$$\omega_{i,j} = \{x_i = i\Delta x_i, i = \overline{0, I}; y_j = j\Delta y, j = \overline{0, J_{y.d.s.}}\} \quad (16)$$

система уравнений теплогазодинамики (1)–(15) аппроксимируется по шаблонам рис. 2 и 3. Обозначая вектор искоемых функций $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^T = (uv\rho p c_i T)^T$, заметим, что для аппроксимации газодинамических характеристик **в поперечном направлении** необходимо каким-либо образом вычислить нелинейные коэффициенты и искомые функции в узле i, j , а для определения производных первого и второго порядков в продольном направлении необходимо знать значения сеточных функций в узлах $i+1, s$ ($s = j-1, j, j+1$). Полагая, что в узлах $i-1, s$ и $i-2, s$ сеточные функции известны, на этапе «предиктор» в узлах i, s они определяются с помощью *линейной* экстраполяции со вторым порядком ($\Delta x \equiv h_1, \Delta y \equiv h_2$)

$$(\bar{f}_k)_{i,s} = 2(f_k)_{i-1,s} - (f_k)_{i-2,s} + O(h_1^2), s = j-1, j, j+1, k = \overline{1, 6}. \quad (17)$$

Тогда производные первого порядка $\left(\frac{\partial f_k}{\partial x}\right)_{i,j}$ аппроксимируются с помощью

выражения

$$\left(\frac{\partial f_k}{\partial x}\right)_{i,j} = \left[(\bar{f}_k)_{i+1,j} - (f_k)_{i-1,s} \right] / 2h_1 + O(h_1^m), \quad (18)$$

где $(\bar{f}_k)_{i+1,s}$ – экстраполяционные значения, подбираемые так, чтобы $m=2$. Полагая, что вторые производные по переменной x непрерывны (они входят в дифференциальные уравнения), делается предположение, что на этапе «предиктор»

$$\left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2}\right)_{i-1,j} \text{ и, следовательно}$$

$$(\bar{f}_k)_{i+1,s} = 3(f_k)_{i,s} - 3(f_k)_{i-1,s} + (f_k)_{i-2,s} + O(h_1^2), \quad s = j-1, j, j+1, \quad (19)$$

а первая производная (18) примет вид:

$$\frac{\partial (f_k)_{i,j}}{\partial x} = \frac{3(f_k)_{i,j} - 4(f_k)_{i-1,j} + (f_k)_{i-2,j}}{2h_1} + O(h_1^2), \quad k = \overline{1,6}. \quad (20)$$

В соответствии с этими рассуждениями вторая производная на этапе «предиктор» имеет вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2}\right)_{i,j} &= \left[(\bar{f}_k)_{i+1,j} - 2(f_k)_{i,j} + (f_k)_{i-1,j} \right] / h_1^2 + O(h_1^2) = \\ &= \left[(f_k)_{i,j} - 2(f_k)_{i-1,j} + (f_k)_{i-2,j} \right] / h_1^2 + O(h_1^2). \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом, нелинейные коэффициенты, искомые функции, входящие в коэффициенты и их первые и вторые производные на этапе «предиктор» определены со вторым порядком, что дает возможность на этапе «корректор» линеаризовать конечно-разностные операторы по шаблону рис. 2б в поперечном направлении (ось Oy) и использовать операторы скалярных прогонок.

В продольном направлении конечно-разностные аппроксимации уравнений газовой динамики аналогичны (шаблоны рис. 3).

Используя идеологии расщепления и экстраполяции, представим конечно-разностную **аппроксимацию уравнения энергии** (6) в поперечном направлении в виде следующих систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трехдиагональными матрицами

$$a_{i,j}T_{i,j-1} - b_{i,j}T_{i,j} + c_{i,j}T_{i,j+1} = d_{i,j} + O(|h|^2), \quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2, \quad |i| \leq I, \quad 0 < j < J_{y \partial.с.}, \quad (22)$$

где коэффициенты $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, $c_{i,j}$ определяются соотношениями

$$a_{i,j} = \frac{(\bar{\rho}v\bar{c}_p)_{i,j}}{2h_2} + \frac{(\lambda_y)_{i,j-1/2}}{h_2^2} + \frac{(\bar{\rho}D_{12}c_p c_A)_{yi,j-1/2}}{h_2^2}; \quad (23)$$

$$c_{i,j} = \frac{(\bar{\rho}v\bar{c}_p)_{i,j}}{2h_2} + \frac{(\lambda_y)_{i,j+1/2}}{h_2^2} + \frac{(\rho D_{12})_{yi,j+1/2} (c_p c_A)_{i,j+1/2}}{h_2^2}; \quad (24)$$

$$b_{i,j} = \left[\frac{3(\bar{\rho}u\bar{c}_p)_{i,j}}{(1+y_j/R_0) \cdot 2h_1} \right] + \frac{\lambda_{i,j}}{(1+y_j/R_0)h_1^2} + \frac{(\bar{\rho}D_{12}c_p c_A)_{i,j}}{(1+y_j/R_0)h_1^2} + \frac{(\lambda_y)_{i,j+1/2} + (\lambda_y)_{i,j-1/2}}{h_2^2} +$$

$$+ \frac{1}{h_2^2} [(\rho D_{12})_{yi,j+1/2} + (\rho D_{12})_{yi,j-1/2}] (c_p c_A)_{i,j}; \quad (25)$$

$$d_{i,j} = \frac{(\bar{\rho} u \bar{c}_p)_{i,j}}{(1+y_j/R_0)2h_1} (-4T_{i-1,j} + T_{i-2,j}) - \frac{\lambda_{i,j} + (\bar{\rho} \bar{D}_{12} c_p c_A)_{i,j}}{(1+y_j/R_0)h_1^2} (-2T_{i-1,j} + T_{i-2,j}) - \frac{(\bar{\rho} v \bar{c}_p)_{i,j}}{2h_2} T_{i,j-1} - \frac{u_{i,j}}{1+y_j/R_0} \frac{3p_{i,j} - 4p_{i-1,j} + p_{i-2,j}}{2h_1} - v_{i,j} \frac{\bar{p}_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2h_2} - \Phi_{i,j}, \quad (26)$$

в которых значения u , v , c_A должны быть уже определены из решения уравнений сохранения импульса и концентраций атомарной компоненты. $\Phi_{i,j}$ – конечно-разностная аппроксимация диссипативной функции. Теплофизические характеристики усреднены по значениям температур в соседних узлах.

За счет процедуры экстраполяции СЛАУ (22) имеют сильное диагональное преобладание. Имеет место следующая лемма:

Л е м м а 1. Коэффициенты $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, $c_{i,j}$ систем конечно-разностных уравнений (22) обладают свойством $a_{i,j} + c_{i,j} > 0$ и $b_{i,j} > 0$ и удовлетворяют условию диагонального преобладания

$$|b_{i,j}| \gg |a_{i,j}| + |c_{i,j}|. \quad (27)$$

Свойство коэффициентов (27) и предположение о $T(x,y) \in C_4$ позволяют доказать теорему:

Т е о р е м а 1. Пусть функция $T(x,y) \in C_4$ в области $|x| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) R_0 + L$, $0 < y < y_{\text{д.в.}}$ и выполняются условия леммы 1. Тогда схема (22) обладает вторым порядком аппроксимации $O(|h|^2)$ на точном решении $T(x,y)$.

Т е о р е м а 2 (об устойчивости по входным данным). Пусть выполнены условия леммы 1, то есть СЛАУ (22) имеет сильное диагональное преобладание. Тогда она абсолютно устойчива при возмущении входных данных со значительным запасом устойчивости

$$\delta_{z,y} = |b_{i,j}| - (|a_{i,j}| + |c_{i,j}|). \quad (28)$$

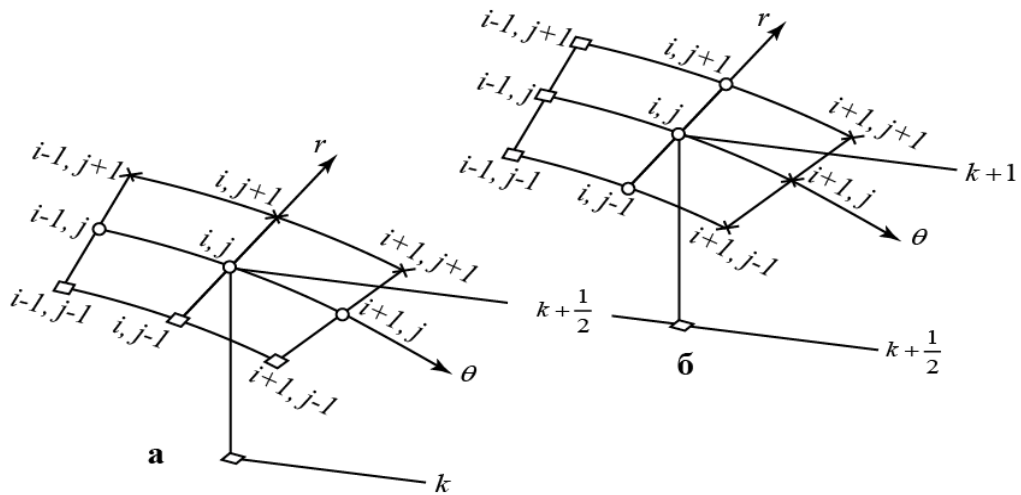


Рис. 4. Шаблоны схемы метода МРЭВ: а – подсхема (30), б – подсхема (31); \square , \circ , \times – узлы с известными, искомыми и экстраполяционными значениями сеточной функции $T_{i,j}$

Поскольку в методе МРЭП требуется знание сеточных функций как минимум в двух левых сечениях от расчетного, то предварительно в окрестности критической точки эти функции определяются для несжимаемого течения методом введения функции тока и относительной функции тока.

Для численного решения задач теплопереноса в анизотропных телах (уравнения (7)–(10)) модифицирован разработанный ранее экономичный абсолютно устойчивый метод расщепления с экстраполяцией по времени (МРЭВ), причем в модификации учитываются нелинейность задач, криволинейные координаты, сопряженность с другими средами.

На согласованной по продольной переменной с газодинамическим течением пространственно-временной сетке

$$\omega_{\Delta r, \Delta \theta, \tau} = \{ \theta_i = i \Delta \theta, \quad i = \overline{0, I}; \quad r_j = j \Delta r, \quad j = \overline{0, J}; \quad t^k = k \tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots \} \quad (29)$$

с шаблонами на рис. 4 уравнение (7) для области 1 аппроксимируется соотношениями:

$$\begin{aligned} c\rho \frac{T_{i,j}^{k+1/2} - T_{i,j}^k}{\tau/2} = & \left[(\lambda_{rr})_{i,j+1/2}^{k+1/2} \frac{\tilde{T}_{i,j+1}^{k+1/2} - T_{i,j}^{k+1/2}}{\Delta r^2} - (\lambda_{rr})_{i,j-1/2}^{k+1/2} \frac{T_{i,j}^{k+1/2} - T_{i,j-1}^{k+1/2}}{\Delta r^2} \right] + \\ & + 2 \left[(\lambda_{r\theta})_{i,j+1}^{k+1/2} \frac{\tilde{T}_{i+1,j+1}^{k+1/2} - \tilde{T}_{i-1,j+1}^{k+1/2}}{4\Delta r \cdot r_j \Delta \theta} - (\lambda_{r\theta})_{i,j-1}^{k+1/2} \frac{T_{i+1,j-1}^{k+1/2} - T_{i-1,j-1}^{k+1/2}}{4\Delta r \cdot r_j \Delta \theta} \right] + \\ & + \left[(\lambda_{\theta\theta})_{i+1/2,j}^{k+1/2} \frac{T_{i+1,j}^{k+1/2} - T_{i,j}^{k+1/2}}{(r_j \Delta \theta)^2} - (\lambda_{\theta\theta})_{i-1/2,j}^{k+1/2} \frac{T_{i,j}^{k+1/2} - T_{i-1,j}^{k+1/2}}{(r_j \Delta \theta)^2} \right] + O\left(\tau + \Delta r^2 + (r_j \Delta \theta)^2 + \tau(\Delta r + r_j \Delta \theta)\right), \\ i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \tilde{T}_{s,j+1}^{k+1/2} = & 2T_{s,j+1}^k - T_{s,j+1}^{k-1/2} + O(\tau^2), \quad s = i-1, i, i+1; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} c\rho \frac{T_{i,j}^{k+1/2} - T_{i,j}^{k+1}}{\tau/2} = & \left[(\lambda_{rr})_{i,j+1/2}^{k+1} \frac{T_{i,j+1}^{k+1} - T_{i,j}^{k+1}}{\Delta r^2} - (\lambda_{rr})_{i,j-1/2}^{k+1} \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j-1}^{k+1}}{\Delta r^2} \right] + \\ & + 2 \left[(\lambda_{\theta r})_{i+1,j}^{k+1} \frac{\tilde{T}_{i+1,j+1}^{k+1} - \tilde{T}_{i+1,j-1}^{k+1}}{4\Delta r \cdot r_j \Delta \theta} - (\lambda_{\theta r})_{i-1,j}^{k+1} \frac{T_{i-1,j+1}^{k+1} - T_{i-1,j-1}^{k+1}}{4\Delta r \cdot r_j \Delta \theta} \right] + \\ & + \left[(\lambda_{\theta\theta})_{i+1/2,j}^{k+1/2} \frac{\tilde{T}_{i+1,j}^{k+1} - T_{i,j}^{k+1}}{(r_j \Delta \theta)^2} - (\lambda_{\theta\theta})_{i-1/2,j}^{k+1/2} \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i-1,j}^{k+1}}{(r_j \Delta \theta)^2} \right] + O\left(\tau + \Delta r^2 + (r_j \Delta \theta)^2 + \tau(\Delta r + r_j \Delta \theta)\right), \\ i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \tilde{T}_{i+1,s}^{k+1} = & 2T_{i+1,s}^{k+1/2} - T_{i+1,s}^k + O(\tau^2), \quad s = j-1, j, j+1. \end{aligned} \quad (31)$$

В подсхемах (30), (31) коэффициенты вычисляются усредненными по соседним узлам и по температурам $\tilde{T}_{i,j}^{k+1/2}$, $\tilde{T}_{i,j}^{k+1}$ соответственно. Подсхемы (30), (31) полностью аппроксимируют дифференциальную задачу.

Каждая подсхема имеет три неизвестных значения сеточной функции и следовательно их можно реализовывать скалярными прогонками вдоль криволинейных координатных линий. Схема (30), (31) обладает полной аппроксимацией на каждом временном полуслое, является экономичной, так как использует только скалярные прогонки и обладает сильным диагональным преобладанием, так как на каждом дробном шаге все дифференциальные операторы, включая и смешанные, аппроксимируются неявно.

Для анализа порядка аппроксимации доказывается следующая теорема.

Т е о р е м а 3. Пусть решения уравнений (7), (9) принадлежат классу функций, дважды непрерывно дифференцируемых по времени и четырежды по пространственным переменным ($T(r, \theta) \in C_4^2$). Тогда конечно-разностная схема (30), (31) МРЭВ аппроксимирует дифференциальное уравнение с порядком $O(\tau + \Delta r^2 + (r_j \Delta \theta)^2 + \tau(\Delta r + r_j \Delta \theta))$.

Методом энергетических неравенств в гильбертовом пространстве сеточных функций $T_{i,j}^k$ доказывается следующая теорема об абсолютной устойчивости:

Т е о р е м а 4. Пусть компоненты тензора теплопроводности $\lambda_{\alpha,\beta}$ в уравнениях (7), (9) удовлетворяют условиям сильной эллиптичности

$$c_1 \sum_{\alpha=1}^2 \gamma_\alpha^2 \leq \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \lambda_{\alpha,\beta} \cdot \gamma_\alpha \gamma_\beta \leq c_2 \sum_{\alpha=1}^2 \gamma_\alpha^2, \quad \gamma \in R^2, \quad (32)$$

где γ – произвольный вектор и главные миноры матрицы теплопроводности положительны

$$\lambda_{11} > 0, \quad \lambda_{22} > 0, \quad \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2 > 0. \quad (33)$$

Тогда схема (7), (9) абсолютно устойчива по начальным данным и выполняется принцип максимума

$$\|T^{k+1}\|_D \leq \|T^k\|_D \leq \dots \leq \|T^0\|_D = \|T_0(r, \theta)\|, \quad (34)$$

являющийся достаточным признаком устойчивости.

На основе теоремы 4 доказывается теорема об устойчивости схемы МРЭВ (30), (31) по правым частям.

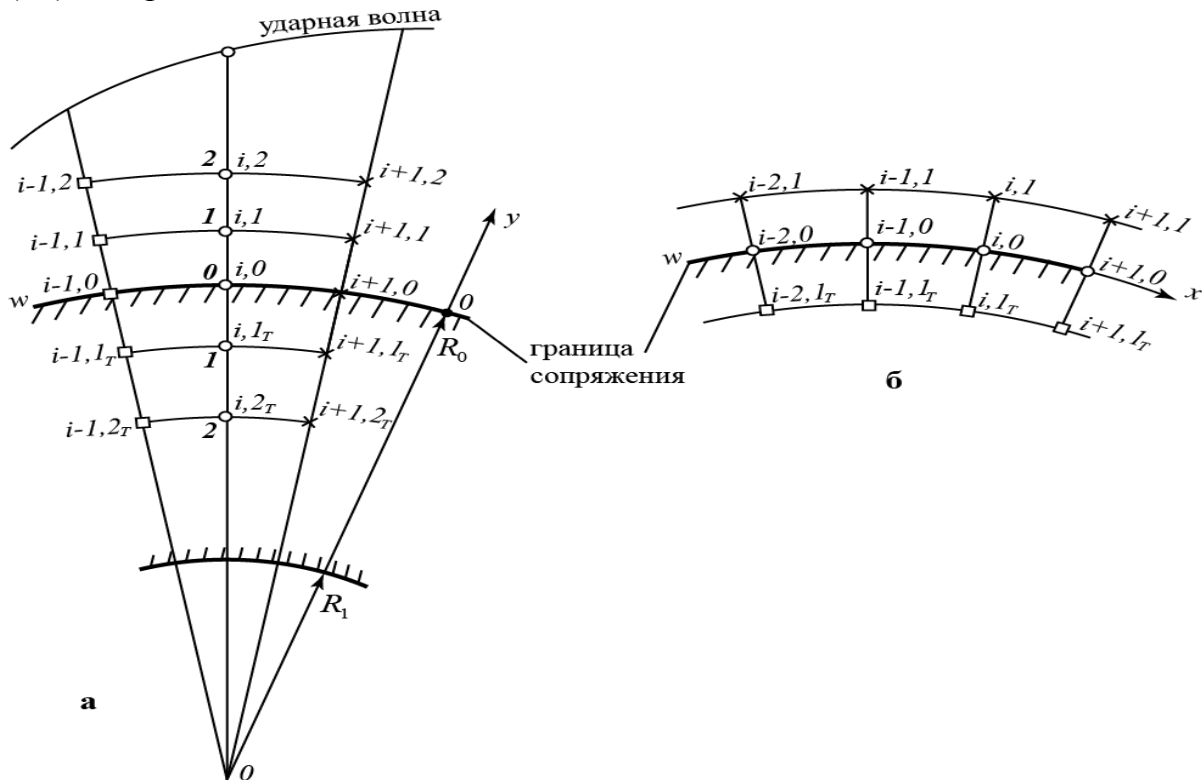


Рис. 5. Шаблоны конечно-разностных схем в окрестности границы w сопряжения: а – поперечное, б – продольное направление; □, ○, × – узлы с известными, искомыми и экстраполяционными значениями сеточной функции

Т е о р е м а 5. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда схема МРЭВ (30), (31) устойчива по правым частям и для решения справедлива оценка

$$\|T\|^{k+1} \leq \|T_0\| + \sum_{n=0}^k \tau \|B^{-1}F^{(n)}\|, \quad (35)$$

где B – оператор эквивалентной схемы МРЭВ, $F(r, \theta, t)$ – правые части.

В главе на основе методов МРЭП и МРЭВ разработан высокоточный метод сопряжения на границе «газ – твердое тело» для чего рассматриваются конечно-разностные схемы метода МРЭП для уравнения энергии (6) при $y = 0 + 0 (u = 0, v = 0)$ и уравнения теплопроводности (7) по схеме МРЭВ при $r = R_0 - 0$, полагая на границе сопряжения функцию температуры дважды дифференцируемой по x, y и r, θ (шаблоны методов на границе сопряжения представлены на рис. 5).

Для поперечного направления ($i - fix$) прямой ход метода прогонки по определению прогоночных коэффициентов $A_{i,j}, B_{i,j}$ осуществляется от узла $j = J_{y\theta.6.}$ на ударной волне к узлу $j = 0$ на границе сопряжения, а для тела определение прогоночных коэффициентов A_{i,j_T}, B_{i,j_T} осуществляется в направлении от границы $r = R_1 (j_T = J_T)$ к границе $r = R_0 (j_T = 0)$.

Таким образом, в газе решения СЛАУ находится по формулам

$$T_{i,j} = A_{i,j} T_{i,j-1} + B_{i,j}; \quad A_{i,j} = \frac{-a_{i,j}}{b_{i,j} + c_{i,j} A_{i,j+1}}; \quad B_{i,j} = \frac{d_{i,j} - c_{i,j} B_{i,j+1}}{b_{i,j} + c_{i,j} A_{i,j+1}}, \quad (36)$$

а в теле – по формулам

$$T_{i,j_T} = A_{i,j_T} T_{i,(j-1)_T} + B_{i,j_T}; \quad A_{i,j_T} = \frac{-a_{i,j_T}}{b_{i,j_T} + c_{i,j_T} A_{i,(j+1)_T}}; \quad B_{i,j_T} = \frac{d_{i,j_T} - c_{i,j_T} B_{i,(j+1)_T}}{b_{i,j_T} + c_{i,j_T} A_{i,(j+1)_T}}. \quad (37)$$

Определяя с помощью этих формул приграничные значения температур $T_{i,1}, T_{i,2}$ со стороны газа и $T_{i,1_T}, T_{i,2_T}$ со стороны тела, разлагая на точном решении приграничные значения $T_{i,1}$ и $T_{i,1_T}$ в окрестности граничного узла $y = 0, r = R_0$ в ряды Тейлора до третьих производных, выражая из них производные первого порядка и подставляя их в условие (11) с использованием (12), получим алгебраическое уравнение четвертой степени относительно $T_{i,w}^{k+1/2}$:

$$\begin{aligned} (T_{i,w}^{k+1/2})^4 + b T_{i,w}^{k+1/2} = d, \quad (38) \\ b = \frac{1}{\varepsilon_w \sigma} \left\{ \left(\frac{\tilde{\lambda}}{h_2} A_{i,1} - \frac{\tilde{\lambda}}{h_2} \right) - \frac{\tilde{\lambda} h_2}{h_1^2} A_{i,1} + \left(\frac{\tilde{\lambda}_n}{\Delta r} - \frac{\tilde{\lambda}_n}{\Delta r} A_{i,j_T} \right) + \frac{c \rho \Delta r}{2 \tau \lambda_{rr}} + \frac{\tilde{\lambda}_{\theta\theta} \Delta r}{\tilde{\lambda}_{rr} R_0 \Delta \theta} \right\}; \\ d = \frac{1}{\varepsilon_w \sigma} \left\{ -\frac{\tilde{\lambda}}{h_2} B_{i,1} - \frac{\tilde{\lambda} h_2}{2 h_1^2} (\tilde{T}_{i+1,w}^{k+1/2} - T_{i-1,w}^{k+1/2}) + \frac{\tilde{\lambda} h_2}{h_1^2} B_{i,1} + \left(\frac{\tilde{\lambda}_n}{\Delta r} B_{i,1_T} - \frac{\tilde{\lambda}_n}{\Delta r} \right) + \right. \\ \left. + \frac{c \rho \cdot \tilde{\lambda}_n \Delta r}{2 \tau \lambda_{rr}} T_{i,w}^k - \frac{\tilde{\lambda}_{r\theta} \tilde{\lambda}_n}{2 \tilde{\lambda}_{rr}} \left(\frac{T_{i+1,w}^{k+1/2} - T_{i-1,w}^{k+1/2}}{2 R_0 \Delta \theta} - \frac{T_{i+1,j_T}^{k+1/2} - T_{i-1,j_T}^{k+1/2}}{2 R_0 \Delta \theta} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\tilde{\lambda}_{\theta\theta} \tilde{\lambda}_n \Delta r}{2 \lambda_{rr} R_0 \Delta \theta} (\tilde{T}_{i+1,w} - T_{i-1,w}^{k+1/2}) \right\}. \end{aligned}$$

Точным решением уравнения (38) будет единственный положительный корень

$$T_{i,w}^{k+1/2} = 10^3 \left[-\sqrt{\frac{u-v}{2}} + \sqrt{-\frac{u-v}{2} + \frac{10b}{\sqrt{8(u-v)}}} \right], \quad (39)$$

$$u = \sqrt[3]{(2,5b)^2 + \sqrt{(2,5b)^2 + (d/300)^3}}, \quad v = \sqrt[3]{-(2,5b)^2 + \sqrt{(2,5b)^2 + (d/300)^3}}.$$

После определения $T_{i,w}^{k+1/2}$ по формулам (38), (39) определяются распределения температур в газе и в теле. Изложенный метод имеет второй порядок аппроксимации по пространственным переменным, а неявный учет существенно нелинейного лучистого члена сохраняет устойчивость и точность.

Для продольного направления (временной слой $k+1$) значения сеточных функций на этапе «предиктор» используются из распределений функций на предыдущем временном полушаге ($k+1/2$).

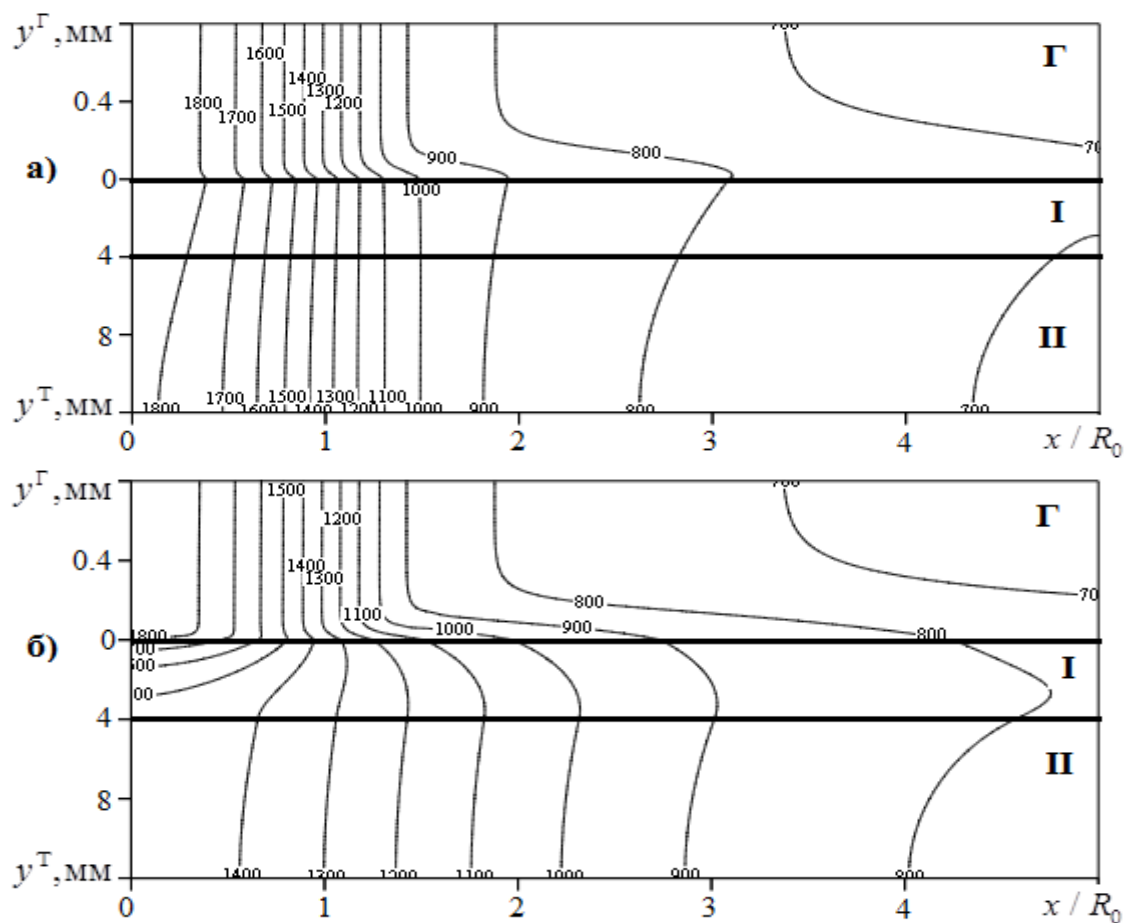


Рис. 6. Распределение температур в газе и в теле при $t = 250$ с для $\lambda_\eta^I = \lambda_\xi^{II} = \lambda_\eta^{II} = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$:

а) $\lambda_\xi^I = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$; б) $\lambda_\xi^I = 400 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$

В третьей главе, на основе методов численного моделирования сопряженного теплопереноса между вязкими теплогазодинамическими течениями и составными анизотропными телами, а также на основе разработанного программного комплекса, получены и проанализированы многочисленные результаты. Исследуется влияние на динамические и тепловые характеристики газодинамического течения компонентов тензоров теплопроводности обтекаемого анизотропного тела. Часть

этих результатов приведена ниже. Верхний индекс I относится к наружному слою, II – к внутреннему. На рис. 6, 7 представлены температурные поля в газе и составном теле и тепловые потоки к телу q_w в момент времени $t = 100$ с для $\lambda_\eta^I = \lambda_\xi^{II} = \lambda_\eta^{II} = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$. Параметры набегающего потока соответствовали стандартной атмосфере на высоте 10000 м, $M_\infty = 6$.

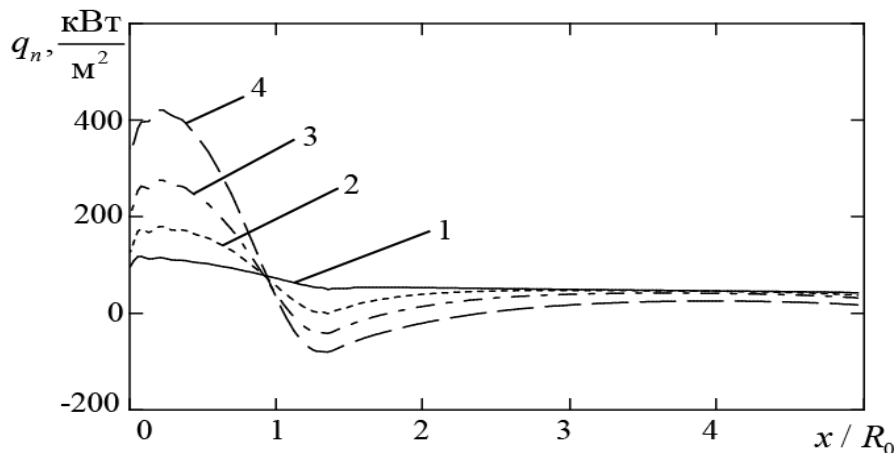


Рис. 7. Тепловые потоки к телу при $t = 100$ с для $\lambda_\eta^I = \lambda_\xi^{II} = \lambda_\eta^{II} = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$

- 1) $\lambda_\xi^I = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$; 2) $\lambda_\xi^I = 50 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$; 3) $\lambda_\xi^I = 150 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$; 4) $\lambda_\xi^I = 400 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$

Сравнивая сопряженный теплообмен для изотропного наружного материала (рис. 6а) с анизотропным со степенью анизотропии $\lambda_\xi^I / \lambda_\eta^I = 200$ (рис. 6б), можно отметить, что благодаря высоким значениям λ_ξ^I в анизотропном случае тело в направлении оси Ox имеет значительно большие продольные составляющие тепловых потоков, чем в поперечном направлении. Поэтому наблюдается значительный отток теплоты из области затупления в хвостовую часть, температура в области критической точки падает, а в хвостовой части растет, а тепловые потоки наоборот – в носовой части растут, а в хвостовой части падают (рис. 7). Это явление усиливается с ростом степени продольной анизотропии $\lambda_\xi^I / \lambda_\eta^I$ наружного материала и увеличением времени. Такое явление объясняется уменьшением градиента температур на границе сопряжения со стороны газа за счет роста температуры этой границы, уменьшением плотности газа и увеличением динамической вязкости (уменьшением местных чисел Рейнольдса), причем все три фактора действуют в сторону уменьшения тепловых потоков.

На рис. 8, 9 аналогичные результаты приведены для момента времени $t = 250$ с. На рис. 8 представлена картина температурных полей в газе и в теле для изотропного наружного материала (рис. 8а) и анизотропного материала (рис. 8б), из которого видно, что температура в обтекаемом теле почти вышла на стационарный режим и существенно влияет на температурные поля в газе, которые вытянуты в продольном направлении таким образом, что касательные к изотермам температурного профиля на границе сопряжения со стороны газа образуют тупой угол (отрицательные тепловые потоки), т.е. тело остывает. Этот факт хорошо

иллюстрируют результаты, представленные на рис. 9 для тепловых потоков от газа к телу.

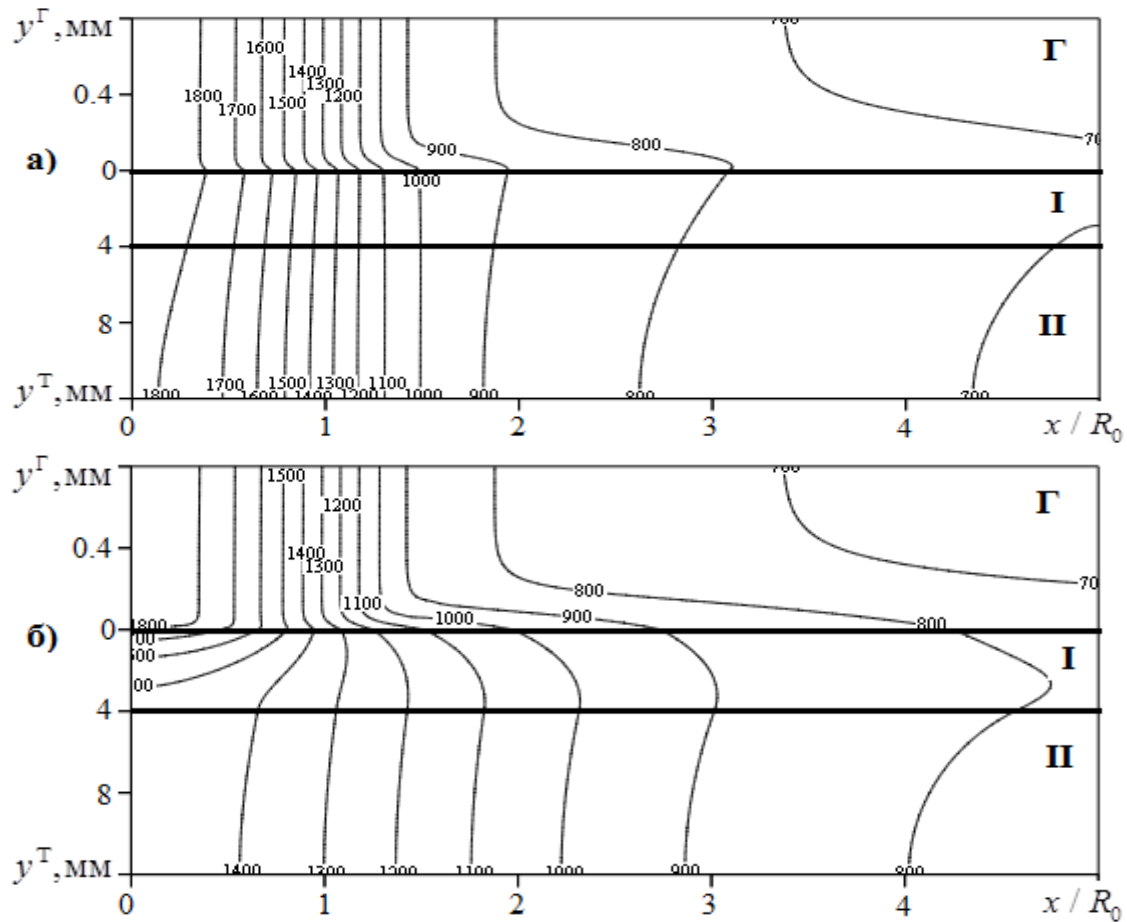


Рис. 8. Распределение температур в газе и в теле при $t = 250$ с для $\lambda_{\eta}^I = \lambda_{\xi}^{II} = \lambda_{\eta}^{II} = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$:

- а) $\lambda_{\xi}^I = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$; б) $\lambda_{\xi}^I = 400 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$

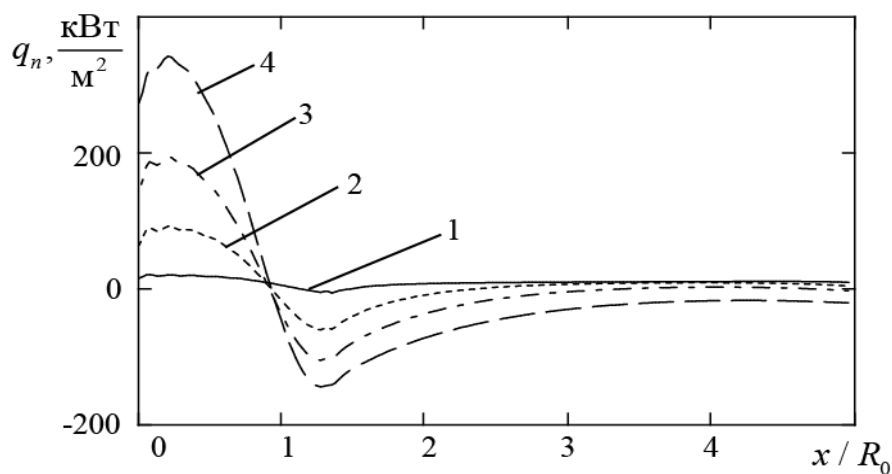


Рис. 9. Тепловые потоки к телу при $t = 250$ с для $\lambda_{\eta}^I = \lambda_{\xi}^{II} = \lambda_{\eta}^{II} = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$

- 1) $\lambda_{\xi}^I = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ 2) $\lambda_{\xi}^I = 50 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$; 3) $\lambda_{\xi}^I = 150 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$; 4) $\lambda_{\xi}^I = 400 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$

Такое явление еще в большей степени, чем для случая $t=100$ с, объясняется уменьшением градиента температур на границе сопряжения со стороны газа за счет роста температуры этой границы, уменьшением плотности газа и увеличением динамической вязкости (уменьшением местных чисел Рейнольдса), причем все три фактора действуют в сторону уменьшения тепловых потоков.

При изменении степени анизотропии от 1 (кривые 1) до 200 (кривые 4) тепловой поток в окрестности затупления существенно возрастает, а на боковой поверхности становится отрицательным.

Это явление можно использовать для построения эффективной тепловой защиты боковых поверхностей высокоскоростных ЛА только выбором теплозащитного материала с высокой степенью продольной анизотропии.

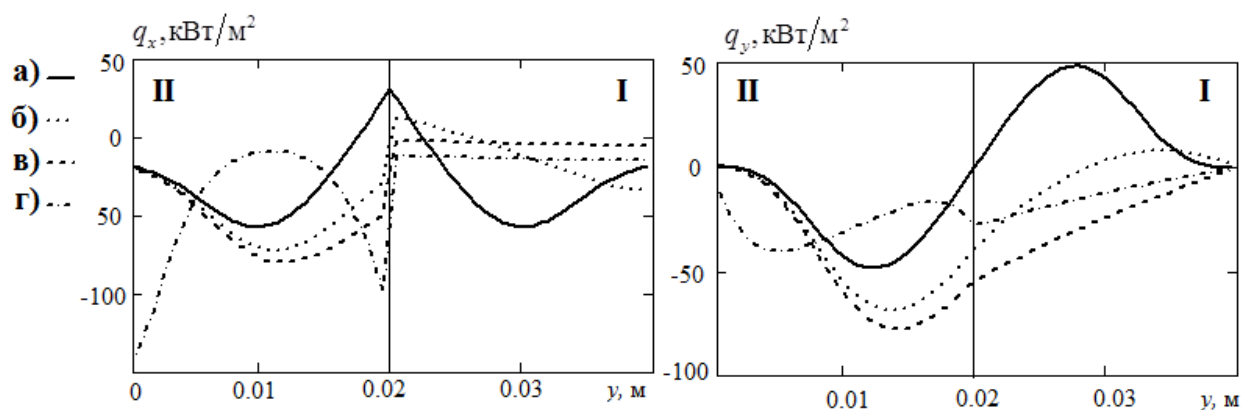


Рис. 10. Поведение составляющих плотностей тепловых потоков q_x и q_y на границе сопряжения анизотропных тел

Анализ сопряженного теплопереноса между анизотропными твердыми средами показал, на первый взгляд, парадоксальные результаты, связанные с непрерывностью нормальных составляющих **плотностей тепловых потоков** q_y на границе сопряжения, где разрываются не только компоненты тензоров теплопроводности, но и углы ориентации главных осей тензоров теплопроводности, и наличием разрывов первого рода для касательных составляющих плотностей тепловых потоков q_x . Это иллюстрируется результатами сопряженного теплопереноса между двумя анизотропными средами, приведенными на рис. 10. На первый взгляд, не соблюдается первое начало термодинамики. Однако оказалось, что тепловой поток на всей границе (а не плотность теплового потока), конечно же, непрерывны.

В четвертой главе, на основе методов построения граничных функций влияния (граничных функций Грина) с помощью интегральных методов, впервые получены точные аналитические решения класса задач теплопроводности в анизотропных телах с граничными условиями второго и третьего родов.

На основе этих аналитических решений получены приближенно-аналитические решения сопряженных задач теплопереноса между теплогазодинамическими пристенными течениями и анизотропным телом, а также между ударным газодинамическим слоем и поперечно обтекаемым анизотропным телам.

Для задачи теплопереноса в анизотропной пластине с нестационарными и произвольными тепловыми потоками на границах

$$\lambda_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2\lambda_{12} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = c\rho \frac{\partial T}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \quad y \in (0; \delta), \quad t > 0; \quad (40)$$

$$-\left(\lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = q_1(x, t) \eta(l_1 - |x|), \quad -\infty < x < \infty, \quad y = 0, \quad t > 0; \quad (41)$$

$$\left(\lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = q_2(x, t) \cdot \eta(l_2 - |x|), \quad -\infty < x < \infty, \quad y = \delta, \quad t > 0; \quad (42)$$

$$\lambda_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{12} \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad 0 \leq y \leq \delta, \quad t > 0; \quad (43)$$

$$T(x, y, 0) = T_0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq y \leq \delta, \quad t = 0. \quad (44)$$

доказывается теорема:

Т е о р е м а 6 (о построении граничной функции влияния). Пусть функции $q_1(x, t)$, $q_2(x, t)$ имеют конечное число точек разрыва первого рода и пусть при $x \rightarrow \pm\infty$ $q(y, t) = 0$. Тогда можно построить граничную функцию влияния $G(x, \xi, y, \tau, t)$ точечного источника теплоты $q(\xi, \tau)$ единичной мощности, помещенного в точку (ξ, τ) на границе замкнутой области, с помощью которой решением задачи (40)–(44) будет интеграл

$$T(x, y, t) = \int_0^t \oint_C G(x, \xi, y, \tau, t) q(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (45)$$

Условия этой теоремы удовлетворяют условиям существования интегральных преобразований Фурье по переменной x и Лапласа по переменной t , в соответствии с которыми находится аналитическое решение для функции влияния $G(x, \xi, y, \tau, t)$ и решение задачи (40)–(44) в виде

$$\begin{aligned} T(x, y, t) = & \frac{1}{2\gamma\delta\lambda_{22}\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-l_1}^{l_1} q_1(\xi, \tau) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(n\pi \frac{\delta - y}{\delta}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{\gamma\delta^2}(t - \tau)\right) \right] \times \\ & \times \left[\frac{1}{\sqrt{\beta(t - \tau)/\gamma}} \exp\left(-\frac{(\xi + (\alpha y - x))^2}{4\beta(t - \tau)/\gamma}\right) \right] d\xi d\tau + \frac{1}{2\gamma\delta\lambda_{22}\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-l_2}^{l_2} q_2(\xi, \tau) \times \\ & \times \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\frac{n\pi y}{\delta} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{\gamma\delta^2}(t - \tau)\right) \right] \times \\ & \times \left[\frac{1}{\sqrt{\beta(t - \tau)/\gamma}} \exp\left(-\frac{(\xi - \alpha(\delta - y) - x)^2}{4\beta(t - \tau)/\gamma}\right) \right] d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (46)$$

где $\alpha = \lambda_{12} / \lambda_{22}$, $\beta = (\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2) / \lambda_{22}^2 = \lambda_{\xi}\lambda_{\eta} / \lambda_{22}^2$, $\gamma = c\rho / \lambda_{22}$.

Аналогично для третьей начально-краевой задачи в анизотропном полупространстве

$$\lambda_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2\lambda_{12} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = c\rho \frac{\partial T}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0, \quad t > 0; \quad (47)$$

$$-\left(\lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \alpha_1 [F_e(x, t) \cdot \eta(l - |x|) - T(x, 0, t)]; \quad -\infty < x < \infty, \quad y = 0, \quad t > 0; \quad (48)$$

$$T(x, y, 0) = 0; \quad (49)$$

$$T(x, \infty, t) = 0, \quad T(\pm\infty, y, t) = 0, \quad \frac{\partial T(\pm\infty, y, t)}{\partial x} = 0, \quad t > 0. \quad (50)$$

найдено аналитическое решение в следующем виде:

$$T(x, y, t) = \frac{\alpha_1}{2\lambda_{22}\sqrt{\pi\beta}} \int_0^t \int_{-l}^l \frac{F_e(\xi, \tau)}{\sqrt{(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(\alpha y - x + \xi)^2}{4\beta(t-\tau)/\gamma}\right) \exp(\varphi_1(\alpha_1, y, t-\tau)) \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp(-\varphi_2^2(\alpha_1, y, t-\tau)) - \frac{\alpha_1}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}} \operatorname{erfc}(\varphi_2(\alpha_1, y, t-\tau)) \right\} d\xi d\tau, \quad (51)$$

где

$$\varphi_1(\alpha_1, y, t-\tau) = \frac{\alpha_1^2}{\lambda_{22}^2 \gamma} (t-\tau) + \frac{\alpha_1 y}{\lambda_{22}}, \quad \varphi_2(\alpha_1, y, t-\tau) = \frac{y\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{t-\tau}} + \frac{\alpha_1 \sqrt{t-\tau}}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}}.$$

Решение (51) используется для получения приближенно-аналитического решения сопряженной задачи пограничного слоя и анизотропной теплопроводности. В этой задаче система уравнений динамического и температурного пограничных слоев имеет вид:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad 0 < y < \delta(x), \quad -l < x < l; \quad (52)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu(T) \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad 0 < y < \delta(x), \quad -l < x < l; \quad (53)$$

$$0 = -\frac{dp}{dy}; \quad p = p_e(x), \quad \frac{dp_e}{dx} = -\rho_e u_e \frac{du_e}{dx}, \quad y = \delta(x), \quad -l < x < l; \quad (54)$$

$$\rho u \frac{\partial I}{\partial x} + \rho v \frac{\partial I}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu(T)}{\operatorname{Pr}} \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\mu(T)}{2} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{Pr}} \right) \frac{\partial u^2}{\partial y} \right], \quad 0 < y < \delta(x); \quad -l < x < l; \quad (55)$$

$$p = \rho RT, \quad 0 < y < \delta(x), \quad -l < x < l. \quad (56)$$

При $y = 0$:

$$u(x, 0) = 0; \quad v(x, 0) = 0; \quad T(x, 0) = T_w(x); \quad \rho(x, 0) = \rho_w = p_e(x) / RT_w(x). \quad (57)$$

Здесь энтальпия $I = \int_0^T c_p(T) dT + \frac{u^2}{2}$ (при $u = 0$ $I_w = c_{pw} T_w$), $\delta(x)$ – толщина

динамического пограничного слоя, при числе Прандтля $\operatorname{Pr} = 0,71$ примерно равна толщине температурного пограничного слоя.

При допущениях о несжимаемом, совершенном газе, числе $\operatorname{Pr} = 1$, использовании зависимости вязкости $\mu(T)$ от температуры по формуле Сезерленда, аналитическое решение задачи (52)–(57) для энтальпии газа имеет вид:

$$I(x, y) = I_w(x) + \frac{I_e(x) - I_w(x)}{\delta(x)} y - 0,2 \cdot \operatorname{Pr} \left[\frac{u_e^2(x)}{\delta(x)} y - u^2(x, y) \right], \quad (58)$$

продифференцировав которое по y при $y=0$, получаем

$$q_w(x) = T_w(x) \left(\frac{\lambda_w}{\delta(x)} \right) + \left(\frac{0,4\mu_w}{\rho_e(x)\delta(x)} (p_0 - p_e(x)) - \frac{\lambda_w T_e(x)}{\delta(x)} \right). \quad (59)$$

Вводя обозначения

$$\alpha_1 = - \left(\frac{\lambda_w}{\delta_{cp}} \right), \quad \alpha_1 F_e(x,t) = \left(\frac{0,4\mu_w}{\rho_e(x)\delta(x)} (p_0 - p_e(x)) - \frac{\lambda_w T_e(x)}{\delta(x)} \right)$$

и объединяя выражения (59) и (51), получим распределение температуры границы сопряжения $T_w(x,t)$:

$$\begin{aligned} T_w(x,t) &= \frac{1}{2\lambda_{22}\sqrt{\pi\beta}} \int_0^t \int_{-l}^l \frac{1}{\sqrt{(t-\tau)}} \left(\frac{0,4\mu_w}{\rho_e(\xi)\delta(\xi)} (p_0 - p_e(\xi)) - \frac{\lambda_w T_e(\xi)}{\delta(\xi)} \right) \times \\ &\times \exp\left(-\frac{(\xi-x)^2}{4\beta(t-\tau)/\gamma} \right) \exp\left(\varphi_1 \left(-\frac{\lambda_w}{\delta_{cp}}, 0, t-\tau \right) \right) \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\varphi_1^2 \left(-\frac{\lambda_w}{\delta_{cp}}, 0, t-\tau \right) \right) + \frac{\lambda_w}{\delta_{cp}\lambda_{22}\sqrt{\gamma}} \operatorname{erfc} \left(\varphi_2 \left(-\frac{\lambda_w}{\delta_{cp}}, 0, t-\tau \right) \right) \right\} d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (60)$$

где δ_{cp} – усредненная толщина пограничного слоя, «e» – относится к наружной границе пограничного слоя, p_0 – давление торможения. С помощью выражения (60) можно определить распределение энтальпий или температур в газодинамическом течении из выражения (58), тепловых потоков из выражения (59), а температурное поле в анизотропном теле определено формулой (51).

Аналогичное аналитическое решение можно получить для задачи сопряженного теплообмена между несжимаемым, недиссоциирующим теплогазодинамическим течением на основе уравнений Навье-Стокса (1)–(6) и поперечно обтекаемыми полубесконечными анизотропными телами (решение (51)), получим распределение температур в ударном газодинамическом слое, тепловые потоки к телу, распределение температур в теле и на границе сопряжения:

$$T(\eta) = T_w \left[1 - \frac{I_1(\eta)}{I_1(\eta_0)} \right] + [T_1 + I_2(\eta_0)] \frac{I_1(\eta)}{I_1(\eta_0)} - I_2(\eta), \quad (61)$$

$$q_1 = \left. \frac{\partial T(\eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \frac{\lambda}{I_1(\eta_0)} T_w(x,t) + \frac{T_1 + I_2(\eta_0)}{I_1(\eta_0)}, \quad (62)$$

$$\begin{aligned} T_w(x,t) &= \frac{T_1 + I_2(\eta_0)}{2I_1(\eta_0)\lambda_{22}\sqrt{\gamma}} \int_0^t 1(\tau) \cdot \exp\left(\varphi_1 \left(\frac{\lambda}{I_1(\eta_0)}, 0, t-\tau \right) \right) \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\varphi_2^2 \left(\frac{\lambda}{I_1(\eta_0)}, 0, t-\tau \right) \right) - \frac{\alpha_1}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}} \operatorname{erfc} \left(\varphi_2 \left(\frac{\lambda}{I_1(\eta_0)}, 0, t-\tau \right) \right) \right\} \times \\ &\times \left[\operatorname{erf} \frac{l+x}{2\sqrt{\beta(t-\tau)/\gamma}} + \operatorname{erf} \frac{l-x}{2\sqrt{\beta(t-\tau)/\gamma}} \right] d\tau, \end{aligned} \quad (63)$$

где

$$\varphi_1\left(\frac{\lambda}{I_1(\eta_0)}, y, t-\tau\right) = \frac{\lambda^2(t-\tau)}{I_1(\eta_0)^2 \lambda_{22}^2 \gamma} + \frac{\lambda y}{I_1(\eta_0) \lambda_{22}}; \quad \varphi_2\left(\frac{\lambda}{I_1(\eta_0)}, y, t-\tau\right) = \frac{y\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{t-\tau}} + \frac{\lambda\sqrt{t-\tau}}{\lambda_{22} I_1(\eta_0) \sqrt{\gamma}};$$

$$I_1(\eta) = \int_0^\eta e^{-\psi(\alpha)} d\alpha; \quad I_2(\eta) = \int_0^\eta e^{-\psi(\alpha)} \cdot \left(\int_0^\alpha \Phi(\xi) e^{\psi(\xi)} d\xi \right) d\alpha; \quad \psi(\eta) = 0,71 \int_0^\eta \varphi(\xi) d\xi;$$

$$\Phi(\xi) = \left[\frac{1,42\beta\nu}{c_p} (\varphi'(\xi))^2 + \frac{0,71}{c_p} U_e^2 (\varphi''(\xi))^2 \right];$$

$\nu = \mu / \rho$, U_e – скорость газа в невязком потоке; $\varphi(\eta)$ – относительная функция тока (затабулирована в главе 2); $\mu = \sqrt{\frac{\beta}{\nu}} y$; $\beta = -V_1 / S_0$; V_1, T_1 – скорость и температура за ударной волной; S_0 – отход ударной волны.

В пятой главе разработана методология численного решения обратных граничных и коэффициентных задач, в том числе, и нелинейных, по восстановлению тепловых потоков и компонентов тензоров теплопроводности при сопряженном теплопереносе между вязкими теплогазодинамическими течениями и анизотропными телами. Методология включает в себя следующие процедуры и методы: неявный метод градиентного спуска, метод параметрической идентификации, численные методы прямых задач, методы регуляризации квадратичных функционалов невязки, численные методы решения сопряженных задач, методы исследования сходимости итерационных алгоритмов минимизации. *Все эти составляющие в комплексе разработаны впервые.*

Восстановление нелинейных компонентов $\lambda_{11}(T)$, $\lambda_{12}(T)$, $\lambda_{21}(T)$, $\lambda_{22}(T)$, $T_{\min} \leq T \leq T_{\max}$, рассматривается для следующей нелинейной задачи нестационарной теплопроводности в анизотропном прямоугольнике:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{11}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{12}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{21}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{22}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) = c\rho(T) \frac{\partial T}{\partial t},$$

$$x \in (0; l_1), \quad y \in (0; l_2), \quad t > 0; \quad (64)$$

$$T(x, 0, t) = T(0, y, t) = T_{\max}, \quad T(x, l_2, t) = T(l_1, y, t) = T_{\max}, \quad (65)$$

$$T(x, y, 0) = T_{\min}, \quad (66)$$

$$T((x, y)_i, t^k) = \tilde{T}_{i,k}, \quad i = \overline{1, I}, \quad k = \overline{1, K}. \quad (67)$$

Искомые функции представляются в виде следующих линейных комбинаций линейно-непрерывных базисных функций $N_m(T)$ на конечных элементах по температуре $T_{m-1} \leq T \leq T_{m+1}$, $1 < m < M$:

$$\lambda_{pr}(T) = \sum_{m=1}^M \lambda_{pr}^m N_m(T), \quad p, r = \overline{1, 2} \quad (68)$$

с подлежащими определению коэффициентами линейных комбинаций в виде $\lambda = (\lambda_{11}^1, \dots, \lambda_{11}^M; \lambda_{22}^1, \dots, \lambda_{22}^M; \lambda_{12}^1, \dots, \lambda_{12}^M)^T$. Для определения этого вектора составляется квадратный функционал невязки

$$S(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K [T_{i,k}(\lambda) - \tilde{T}_{i,k}]^2. \quad (69)$$

для минимизации которого используется *неявный метод градиентного спуска*

$$\lambda^{(n+1)} = \lambda^{(n)} - \alpha_n \text{grad } S(\lambda^{(n+1)}), \quad (70)$$

α_n выбирается из условия $S(\lambda^{(n+1)}) < S(\lambda^{(n)})$. Для вычисления функционала $S(\lambda^{(n+1)})$ и его градиента, функции $T_{i,k}(\lambda^{(n+1)})$ разлагаются в ряды Тейлора в окрестности $\lambda^{(n)}$ с сохранением линейных относительно $\Delta\lambda^{(n)}$ членов

$$S(\lambda^{(n+1)}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K \left[\left(T_{i,k}(\lambda^{(n)}) + \sum_{l=0}^{3M} \frac{\partial T_{i,k}(\lambda^{(n)})}{\partial \lambda_l} \Delta\lambda_l^{(n)} \right) - \tilde{T}_{i,k} \right]^2 + O(\|\Delta\lambda\|^2) \quad (71)$$

Компоненты градиента функционала (71) имеют вид:

$$\frac{\partial S(\lambda^{(n+1)})}{\partial \lambda_l} \approx \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K \left[\left(T_{i,k}(\lambda^{(n)}) - \tilde{T}_{i,k} \right) + \sum_{l=0}^{3M} \frac{\partial T_{i,k}(\lambda^{(n)})}{\partial \lambda_l} \Delta\lambda_l^{(n)} \right] \frac{\partial T_{i,k}(\lambda^{(n)})}{\partial \lambda_l}, \quad l = \overline{0, 3M}. \quad (72)$$

Для вычисления коэффициентов чувствительности $\frac{\partial T_{i,k}(\lambda^{(n)})}{\partial \lambda_l}$ строятся

сопряженные (в математическом смысле) задачи путем дифференцирования прямой задачи (64)–(66) по каждому компоненту λ_l и решаются полученные $3 \cdot (M+1)$ задач методом МРЭВ. Подставляя эти коэффициенты чувствительности в (72), приходим к векторно-матричному выражению

$$\text{grad } S(\lambda^{(n+1)}) \approx Z^T(\lambda^{(n)}) \left(T(\lambda^{(n)}) - \tilde{T} \right) + Z^T(\lambda^{(n)}) Z(\lambda^{(n)}) \Delta\lambda^{(n)}, \quad (73)$$

где $Z(\lambda^{(n)})$ – матрица чувствительности.

Объединяя (73) и (70), получим основное итерационное соотношение

$$\Delta\lambda^{(n)} = \lambda^{(n+1)} - \lambda^{(n)} = -\alpha_n \left(E + \alpha_n Z^T(\lambda^{(n)}) Z(\lambda^{(n)}) \right)^{-1} Z^T(\lambda^{(n)}) \left(T(\lambda^{(n)}) - \tilde{T} \right). \quad (74)$$

Поскольку малым возмущениям экспериментальных данных $\tilde{T}_{i,k}$ могут соответствовать значительные возмущения вектора λ , строится регуляризирующий функционал на основе требования $\lambda(T) \in C_1$:

$$R_a(\lambda) = \frac{a}{2} \|B\lambda\|^2, \quad (75)$$

где a – параметр регуляризации. Он добавляется к функционалу (69).

С учетом регуляризирующего функционала (75) итерационный алгоритм имеет вид

$$\lambda^{(n+1)} = \lambda^{(n)} + \alpha_n \left[E + \alpha_n \left(Z^{T(n)} Z^{(n)} + a \cdot B^T B \right) \right]^{-1} \times \left[Z^{T(n)} \left(T^{(n)} - \tilde{T} \right) + a \cdot B^T \cdot B \cdot \lambda^{(n)} \right]. \quad (76)$$

Необходимые и достаточные условия сходимости итерационного процесса устанавливаются следующей теоремой:

Т е о р е м а 7. Для сходимости итерационного процесса (76) необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\left\| E + \alpha_{n+1} \left(Z^{T(n+1)} Z^{(n+1)} + a B^T B \right) \right\| \leq \left| \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \right|. \quad (77)$$

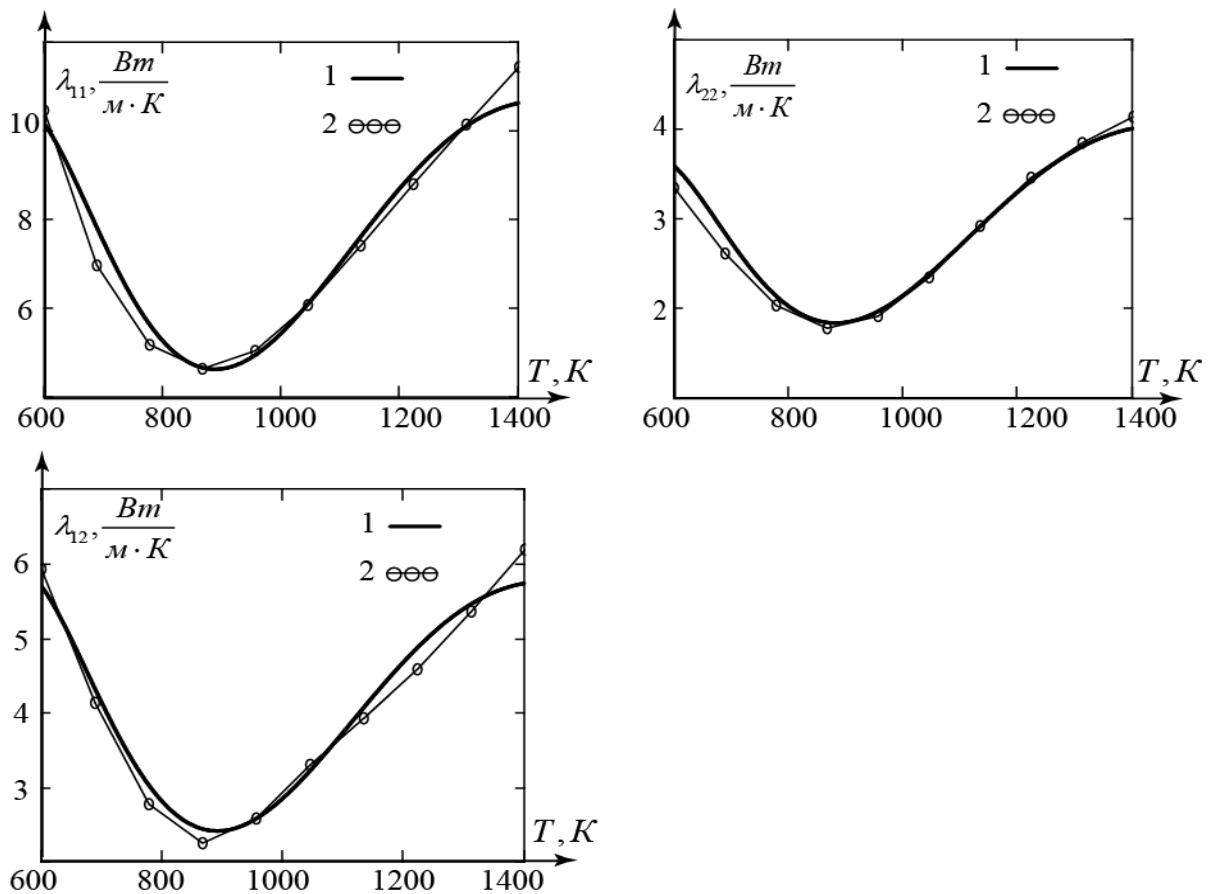


Рис. 11. Идентификация компонентов тензора теплопроводности с погрешностью в $\tilde{T}_{i,k}$: 1 – искомые кривые; 2 – восстановленные

С помощью разработанного программного комплекса, получены многочисленные результаты восстановления нелинейных компонентов тензоров теплопроводности, причем введение регуляризирующего функционала позволяет получать результаты с погрешностями в окрестности погрешностей экспериментальных данных.

На рис. 11 представлены результаты для одного из вариантов восстановления компонентов $\lambda_{11}(T), \lambda_{12}(T), \lambda_{22}(T)$

Аналогичная методология применена к восстановлению тепловых потоков от газодинамического течения к анизотропному телу с нелинейными компонентами тензора теплопроводности. На рис. 12 приведены результаты восстановления тепловых потоков для некоторых вариантов довольно произвольных искомых функций тепловых потоков (наличие экстремумов, точек перегиба и т.п.).

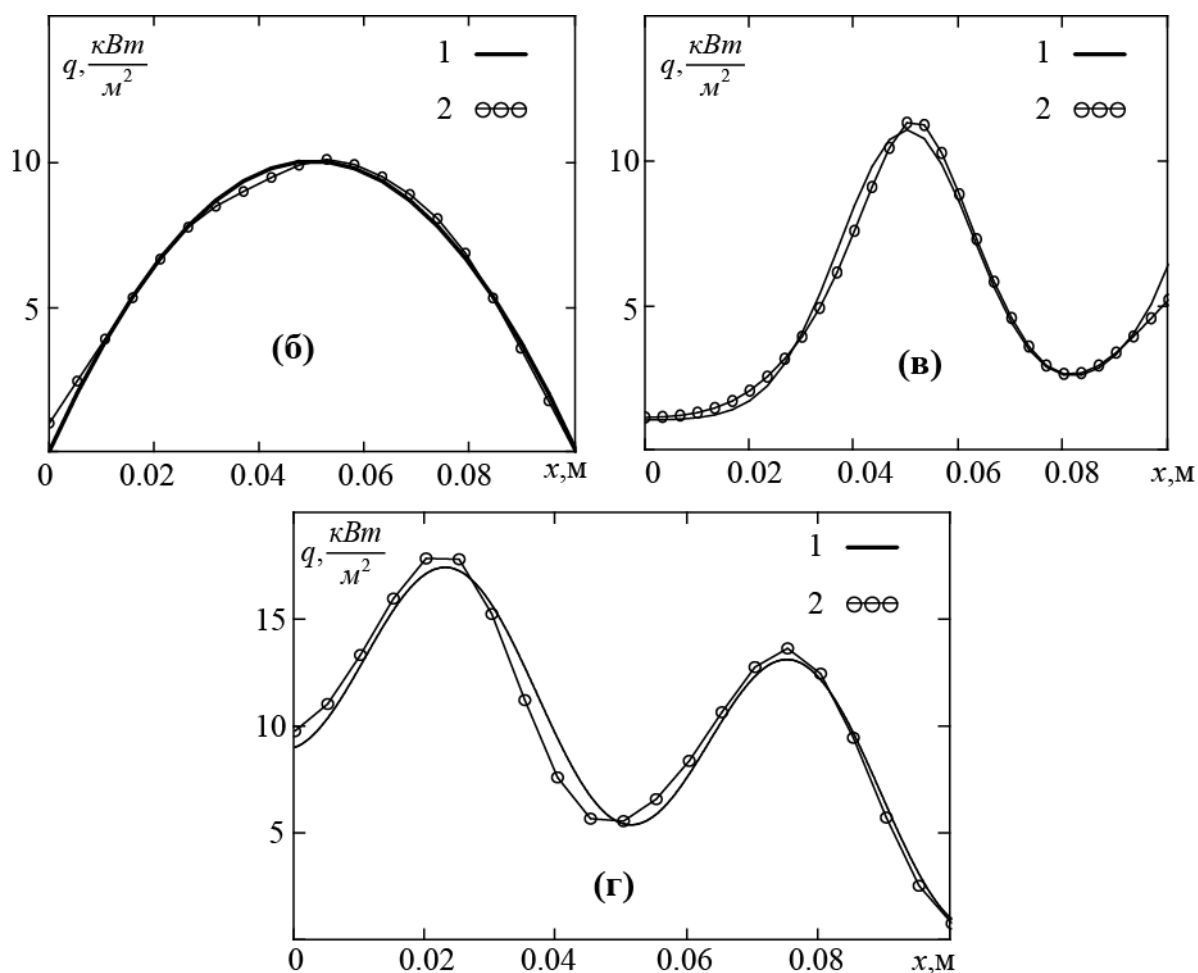


Рис. 12. Восстановленный тепловой поток: 1 – искомая функция; 2 – восстановленная. б) $M = 20$, $a = 0,01$; в) $M = 30$, $a = 0,01$; г) $M = 20$, $a = 0,001$. (M – число конечных элементов по переменной x)

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Разработаны методы построения комплексных математических моделей теплопереноса между вязкими газодинамическими течениями и анизотропными телами в условиях аэрогазодинамического нагрева высокоскоростных ЛА [1–5, 12, 14, 18, 22–24].

2. Разработаны и обоснованы по аппроксимации и устойчивости новые экономичные абсолютно устойчивые методы МРЭП и МРЭВ численного решения задач вязкой теплогазодинамики и теплопроводности в анизотропных телах, на основе идеологии расщепления по координатным направлениям с экстраполяцией по пространственным переменным и времени соответственно [3, 8, 10, 17].

3. Предложен новый численный метод высокоточного определения параметра сопряжения – температуры границы «газ – твердое тело», сохраняющий высокий порядок точности и абсолютную устойчивость за счет неявной аппроксимации существенно нелинейных тепловых потоков, действующих на границе сопряжения с обеих сторон [9, 12, 22].

4. Разработан интегрированный программный комплекс по определению газодинамических характеристик в газе, в анизотропном теле и на границе «газ –

твердое тело», на основе которого получены многочисленные результаты сопряженного теплообмена, которые показали, что при степени продольной анизотропии, большей десяти, наблюдается существенное уменьшение тепловых потоков к боковым поверхностям тела. *По-существу, с помощью только математического моделирования найден новый эффективный экономный метод тепловой защиты ЛА* [12, 13, 18].

5. На основе построения граничных функций влияния (функций Грина) впервые получены аналитические решения класса задач теплопереноса в анизотропных средах (наличие смешанных дифференциальных операторов) с граничными условиями II-го и III-го родов, которые использованы для приближенно-аналитического решения задач сопряженного теплопереноса (граничные условия IV-го рода) [6, 7, 9, 11, 15, 16, 19, 20, 21, 25].

6. Впервые разработан математический аппарат численного решения граничных и коэффициентных обратных задач сопряженного теплопереноса, включающий в себя неявные методы градиентного спуска, параметрическую идентификацию, численные методы решения сопряженных (в математическом смысле) задач, построение и использование регуляризирующих функционалов [4, 5, 15, 16, 19, 20].

7. Разработаны программные комплексы, позволяющие по экспериментальным замерам температур в анизотропном теле, восстанавливать тепловые потоки от газа к телу, нелинейные компоненты тензора теплопроводности анизотропного тела и углы ориентации главных осей тензоров теплопроводности. Многочисленные эксперименты показали существенное увеличение точности восстанавливаемых функций с погрешностями не превышающими погрешности экспериментальных значений, для восстанавливаемых функций из класса C_1 или C_2 [26, 27].

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОТРАЖЕНЫ В РАБОТАХ

Монография:

1. Формалев В. Ф., Колесник С. А. Математическое моделирование аэрогазодинамического нагрева затупленных анизотропных тел. М.: Изд-во МАИ, 2016. 160с.

Статьи в журналах, входящих в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий:

2. Колесник С. А. Идентификация компонентов тензора теплопроводности анизотропных композиционных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. 2012. Т. 18, №1. С. 111-120.

3. Колесник С. А. Метод численного решения обратных нелинейных задач по восстановлению компонентов тензора теплопроводности анизотропных материалов // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18, №1. С. 34-45.

4. Колесник С. А. Метод восстановления тепловых потоков к анизотропным элементам конструкций силовых установок // Известия РАН. Энергетика. 2013. №5. С.146-153.

5. Колесник С. А. Метод идентификации нелинейных компонентов тензора теплопроводности анизотропных материалов // Математическое моделирование. 2014. Т. 26, №2. С. 119–132.
6. Формалев В. Ф., Колесник С. А. Аналитическое решение второй начально-краевой задачи анизотропной теплопроводности // Математическое моделирование. 2001. Т.13, №7. С. 21–25.
7. Формалев В. Ф., Колесник С. А. Аналитическое исследование сопряженного теплообмена на границах анизотропных тел // Теплофизика высоких температур. 2002. Т. 40, №6. С. 993–999.
8. Формалев В. Ф., Колесник С. А., Миканев С. В. Моделирование теплового состояния композиционных материалов // Теплофизика высоких температур. 2003. Т. 41, №6. С. 935–941.
9. Формалев В. Ф., Колесник С. А. Аналитическое исследование теплового состояния анизотропной пластины при наличии теплообмена на свободных границах // Математическое моделирование. 2003. Т. 15, №6. С. 107 – 110.
10. Формалев В. Ф., Колесник С.А., Чипашвили А.А. Численное моделирование теплопереноса в анизотропных телах с разрывными характеристиками // Математическое моделирование. 2004. Т. 16, №5. С. 94 – 102.
11. Формалев В. Ф., Колесник С.А., Чипашвили А.А. Аналитическое исследование теплопереноса при пленочном охлаждении тел // Теплофизика высоких температур. 2006. Т. 44, №1. С. 107-112.
12. Формалев В. Ф., Колесник С. А. Сопряженный теплоперенос между пристенными газодинамическими течениями и анизотропными телами // Теплофизика высоких температур. 2007. Т. 45, №1. С. 85–93.
13. Формалев В. Ф., Колесник С. А., Кузнецова Е. Л. Влияние продольной неизотермичности на сопряженный теплообмен между пристенными газодинамическими течениями и затупленными анизотропными телами // Теплофизика высоких температур. 2009. Т. 47, №2. С.456–463.
14. Кузнецова Е. Л., Колесник С.А., Формалев В.Ф. Сопряженный теплообмен на границах композиционных анизотропных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. Т. 16, №2. С. 232–240.
15. Колесник С. А., Кузнецова Е. Л. Восстановление тепловых потоков путем решения обратной граничной задачи теплопереноса в анизотропной полосе // Известия РАН. Энергетика. 2011. №6. С. 196–203.
16. Кузнецова Е. Л., Колесник С. А. Обратная коэффициентная задача теплопереноса в анизотропном полупространстве // Известия РАН. Энергетика. 2011. №4. С.117–123.
17. Кузнецова Е. Л., Колесник С. А. Моделирование тепломассопереноса в композиционных теплозащитных материалах в условиях высоких температур // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2012. №1. С. 31–36.
18. Колесник С. А., Кузнецова Е. Л. Моделирование сопряженного теплопереноса в условиях аэрогазодинамического нагрева анизотропных затупленных носовых частей гиперзвуковых летательных аппаратов // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2012. №3. С. 40–45.

19. Формалев В. Ф., Колесник С. А. Методология решения обратных коэффициентных задач по определению нелинейных теплофизических характеристик анизотропных тел // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51, №6. С.875–883.

20. Колесник С. А., Формалев В. Ф., Кузнецова Е. Л. О граничной обратной задаче теплопроводности по восстановлению тепловых потоков к границам анизотропных тел // Теплофизика высоких температур. 2015. Т. 53, №1. С.72–77.

21. Формалев В. Ф., Колесник С. А., Пегачкова Е. А. Аналитическое исследование тепломассопереноса при интенсивном газообразовании в теплозащитных композиционных материалах в условиях аэрогазодинамического нагрева // Механика композиционных материалов и конструкций. 2015. Т. 21, №3. С. 434–446.

22. Формалев В. Ф., Колесник С. А., Кузнецова Е.Л. Моделирование сопряженного теплообмена в пакетах малогабаритных плоских газодинамических сопел с охлаждением // Теплофизика высоких температур. 2015. Т. 53. №5, С.735-740.

23. Тепломассоперенос в теплозащитных композиционных материалах в условиях высокотемпературного нагружения / С. А. Колесник [и др.] // Теплофизика высоких температур. 2016. Т. 54, №3. С.415–422.

24. Колесник С. А., Кузнецова Е. Л. Моделирование сопряженного теплообмена на границе анизотропных тел с использованием аналитических решений // Вестник Московского авиационного института. 2010. Т. 17, №2. С.121–126.

25. Кузнецова Е.Л., Колесник С.А., Формалев В.Ф. Методология численного решения обратных граничных задач теплопереноса в анизотропных телах на основе аналитического решения// Нелинейный мир. 2011. Т.9, №2, С.71–77.

26. Формалев В.Ф., Колесник С.А. Методика, алгоритм и программный комплекс по определению теплового состояния охлаждаемых микроракетных двигателей// Труды МАИ. 2014. №78. Режим доступа: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=53710> (дата обращения 02.12.2014).

27. Колесник С. А., Формалев В. Ф., Селин И. А. Математическая модель и программный комплекс сопряженного теплообмена между вязкими газодинамическими течениями и охлаждаемыми лопатками газовых турбин// Труды МАИ. 2015. №80. Режим доступа: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=56941> (дата обращения 26.03.2015).

Учебное пособие

28. Колесник С.А. Численные методы решения задач для уравнений параболического типа со смешанными производными. М.: Изд-во Доброе слово, 2013. 96 с.

Авторские свидетельства

29. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012619143. Программа по расчету температурных полей и тепловых потоков на солнечных батареях космических аппаратов / С. А. Колесник [и др.]. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 09.10.2012.

30. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012617456. Программа расчета нестационарного одномерного теплопереноса в композиционных материалах в условиях высокотемпературного нагрева / С. А. Колесник [и др.]. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 17.08.2012.

31. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012618883. Программа по восстановлению компонентов тензора теплопроводности композиционных материалов с добавлением наночастиц / С. А. Колесник [и др.]. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 02.10.2012.

32. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012614637. Программа расчета характеристик ударных волн в нелинейных средах / С. А. Колесник [и др.]. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 18.07.2012.

33. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013660829. Программа по расчету остаточных термических напряжений в условиях высокого теплового нагружения композиционных материалов / С. А. Колесник [и др.]. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 20.11.2013.

34. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014610641. Программа по идентификации нелинейных компонентов тензора теплопроводности анизотропных материалов / С. А. Колесник [и др.]. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 15.01.2014.

35. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014660310. Программный комплекс Composite-Tanalyser по определению теплового состояния композиционных теплозащитных материалов в условиях аэродинамического нагрева гиперзвуковых летательных аппаратов / С. А. Колесник [и др.]. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 06.10.2014.

36. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015618550. Программный комплекс по расчету нестационарных температурных полей в многослойных анизотропных затупленных телах в условиях аэрогазодинамического нагрева / С. А. Колесник, В. Ф. Формалев. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 12.08.2015.

Публикации по теме диссертации в других изданиях

37. Формалев В. Ф., Колесник С. А. Исследование сопряженного теплообмена для анизотропного полупространства на основе аналитического решения // XI международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам: тезисы докладов. М., 2001. С. 324–325.

38. Формалев В. Ф., Колесник С. А. Сопряженный теплообмен на границе между пограничным слоем и анизотропными телами // IV международная конференция по неравновесным процессам в соплах и струях: тезисы докладов. М., 2002. С. 419.

39. Формалев В. Ф., Колесник С. А., Миканев С. В. Численное моделирование процессов тепломассопереноса в сложных пластиках при интенсивном нагреве // XII международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам: тезисы докладов. М., 2003. С. 620–621.

40. Формалев В. Ф., Колесник С. А., Миканев С. В. Численное моделирование теплопереноса в областях с разрывными анизотропными характеристиками переноса // XII международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам: тезисы докладов. М., 2003. С. 621–622.

41. Формалев В. Ф., Колесник С. А., Чипашвили А. А. О законе нелинейной неизотермической фильтрации в анизотропных пористых телах // Математические модели физических процессов: Сб. науч. тр. IX Международной конференции. Таганрог, 2003. Ч. 1. С. 46 – 51.

42. Формалев В. Ф., Колесник С. А., Миканев С. В. Метод численного решения задач теплопереноса в анизотропных областях с разрывными характеристиками // Математические модели физических процессов: Сб. науч. тр. IX Международной конференции. Таганрог, 2003. Ч. 1. С. 41 – 46.

43. Формалев В. Ф., Колесник С. А., Миканев С. В. Общий метод моделирования теплового состояния композиционного материала // Обратные задачи: Сб. науч. тр. IV международной конференции. М., 2003.

44. Формалев В. Ф., Колесник С. А. Численное моделирование сопряженного теплопереноса между пристенным течением и анизотропной двухслойной пластиной // XII международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам: тезисы докладов. М., 2005. С. 428-429.

45. Колесник С. А. Моделирование пристенного высокотемпературного градиентного газодинамического течения на неизотермической стенке // VI международная конференция по неравновесным процессам в соплах и струях: тезисы докладов. Алушта, 2006. С. 208.

46. Формалев В. Ф., Колесник С. А., Кузнецова Е. Л. О законе разложения связующих композиционных материалов при высокотемпературном нагружении // Математические модели физических процессов: Сб. науч. тр. XII Международной конференции. Таганрог, 2007. С. 95 – 98.

47. Формалев В. Ф., Колесник С. А., Кузнецова Е. Л. Аналитическое решение задачи типа Стефана с двумя подвижными границами // Математические модели физических процессов: Сб. науч. тр. XII Международной конференции. Таганрог, 2007. С. 98 – 102.

48. Формалев В. Ф., Колесник С. А., Кузнецова Е. Л. Аналитическое решение сопряженного теплообмена на границах анизотропных тел // Модели и

алгоритмы для имитации физико-химических процессов: материалы международной научно-технической конференции. Таганрог, 2008. С. 170–177.

49. Формалев В. Ф., Колесник С. А., Кузнецова Е. Л. Исследование тепломассопереноса при пленочном охлаждении тел в условиях высокоинтенсивного нагрева // Модели и алгоритмы для имитации физико-химических процессов: материалы международной научно-технической конференции. Таганрог, 2008 С. 177–185.

50. Колесник С. А. Численное моделирование сопряженного теплопереноса между пристенными газодинамическими течениями и затупленными анизотропными телами // Материалы VIII международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях. Алушта, 2010. С. 306–308.

51. Колесник С. А. Исследование сопряженного тепломассообмена в условиях аэрогазодинамического нагрева анизотропных тел // Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики: тезисы докладов XI Всероссийской школы-конференции молодых ученых. Новосибирск, 2010. С. 49.

52. Формалев В. Ф., Колесник С. А., Селин И. А. Сопряженный теплообмен между пристенными газодинамическими течениями и затупленными анизотропными телами // Труды V российской национальной конференции по теплообмену. М., 2010. Т.7. С. 179–182.

53. Формалев В. Ф., Колесник С. А., Селин И. А. Анализ тепловых волн в анизотропных пространствах // Труды V Российской национальной конференции по теплообмену. М., 2010. Т.7. С. 183–186.

54. Колесник С. А. Коэффициентная обратная задача теплопереноса в анизотропных материалах // XVII международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам: тезисы докладов. Алушта, 2011. С. 96-97.

55. Колесник С. А. Исследование теплопереноса в многослойных телах с анизотропией свойств // Динамические и технологические проблемы механики сплошных сред: тезисы докладов XVI международного симпозиума. Ярополец, 2010. Т.1, С.94–95.

56. Колесник С. А. Исследование влияния продольной неизотермичности на сопряженный теплообмен в условиях аэрогазодинамического нагрева затупленных анизотропных тел // Динамические и технологические проблемы механики сплошных сред: тезисы докладов XVII международного симпозиума. Ярополец, 2011. Т.1, С.95–96.

57. Колесник С. А. Метод решения обратных коэффициентных задач в анизотропных средах // Динамические и технологические проблемы механики сплошных сред: тезисы докладов XVIII международного симпозиума. Ярополец, 2012. Т.1, С.103-104.

58. Колесник С. А., Формалев В. Ф. Метод параметрической идентификации в нелинейных обратных задачах теплопроводности в анизотропных телах // Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики: тезисы докладов X Международной конференции молодых ученых. Новосибирск, 2012. С. 64.

59. Колесник С. А. Новый метод численного решения обратных коэффициентных задач теплопроводности в нелинейных анизотропных средах // Материалы IX международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях. Алушта, 2012. С. 556-557..

60. Колесник С. А. Новый метод численного решения граничных задач анизотропной теплопроводности // Динамические и технологические проблемы механики сплошных сред: тезисы докладов XIX международного симпозиума. Вятчи. 2013. Т.1, С.119.

61. Колесник С. А., Формалев В. Ф. Метод параметрической идентификации в обратных граничных задачах анизотропной теплопроводности // Тезисы XVIII международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам. Алушта, 2013. С. 98.

62. Колесник С. А. Особенности моделирования обратных граничных задач в анизотропных средах // Материалы X международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях. Алушта, 2014. С. 556–557.

63. Формалев В. Ф., Колесник С. А. , Кузнецова Е. Л. Общий подход к решению обратных граничных задач в анизотропных средах // Динамические и технологические проблемы механики сплошных сред: тезисы докладов XX международного симпозиума. Вятчи, 2014. Т.2, С.26–27.

64. Колесник С. А., Формалев В.Ф., Селин И. А. Об одном методе регуляризации при решении обратной граничной задачи теплопроводности в анизотропных телах // Динамические и технологические проблемы механики сплошных сред: тезисы докладов XXI международного симпозиума. Вятчи, 2015. Т.2, С.38.