

## ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

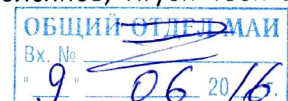
на диссертационную работу Рябова Павла Евгеньевича «Топологический анализ неклассических интегрируемых задач динамики твердого тела», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.01 – «Теоретическая механика»

### АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ

Диссертация посвящена изучению интегрируемых гамильтоновых систем с двумя и тремя степенями свободы, возникающих в задачах механики твердого тела и их обобщений на системы при наличии силовых полей. С математической точки зрения – это задачи о классификации топологии слоений Лиувилля и их перестроек при изменении параметров исследуемой интегрируемой системы, возникающие в некоторых конкретных задачах механического происхождения, а потому важные для задач динамики твердого тела.

Понятие интегрируемости, возникшее почти сразу при появлении дифференциальных уравнений, претерпело значительную эволюцию от желания получить решение дифференциального уравнения в виде элементарных функций, интегралов от них или обратных функций от интегралов (интегрирование в квадратурах) в работах Иоганна, Николая и Даниила Бернулли, Риккати, Эйлера, Клеро и других классиков, через нахождение важных частных случаев интегрируемых систем в работах Эйлера, Лагранжа, Якоби, Лиувилля, Неймана, Клебша, Ковалевской, и многих других, --- к современному пониманию интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системы с  $n$  степенями свободы как системы, имеющей  $n$  независимых почти всюду интегралов в инволюции. По-видимому, первым общим геометрическим результатом в теории интегрируемых систем и является теорема Лиувилля, поскольку эта теорема не опирается на конкретный вид системы, а только на существование  $n$  независимых интегралов в инволюции, и дает описание поведения всех траекторий системы в рассматриваемой окрестности. Арнольд придал этой теореме современную формулировку и глобализовал ее результат.

Примерно в начале 60-х годов XX века произошел новый взрыв интереса к интегрируемым системам, связанный с открытием бесконечномерных интегрируемых гамильтоновых систем типа уравнений с частными производными Кортевега-де Фриза, нелинейного уравнения Шредингера, уравнения синус-Гордон, уравнения Ландау-Лифшица, развитием метода обратной задачи рассеяния и алгебраических методов интегрирования (Гарднер, Грин, Крускал, Миура, Лакс, Хирота, Захаров, Фаддеев, Новиков, Шабат, Мозер, Мищенко, Фоменко, Дубровин, Кричевер, Богоявленский, и многие другие), которые привели также к открытию новых и переоткрытию найденных ранее (но забытых) конечномерных интегрируемых гамильтоновых систем. Однако все эти мощные аналитические методы, позволяющие обнаруживать интегрируемость (точнее -- не обнаруживать интегрируемость конкретных систем, а строить классы интегрируемых уравнений) и получать конкретные решения, плохо приспособлены к задачам глобального описания поведения данной интегрируемой системы, т.е. того, что в теории динамических систем понимается под ее фазовым портретом, структурой и т.д. Первый шаг на пути построения такой теории был сделан Смейлом, который сформулировал подход к изучению гамильтоновой системы, инвариантной относительно действия некоторой группы Ли, и Марсденом и Вейнстейном, развившим понятие редукции для гамильтоновой системы с симметриями. Затем это направление получило большое развитие в работах Лермана и Уманского, Фоменко и его школы (Болсинов, Нгуен Тьен Зунг, Ошемков и др.), Харламова.



К настоящему времени теория интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы и простыми особыми точками в основном завершена в принципиальном плане. Тем не менее, задачи о бифуркациях в таких системах остаются в основном нерешенными, что связано с необходимостью изучить переходы через непростые особые точки и развитием соответствующей полулокальной теории. Для интегрируемых систем с тремя степенями свободы результатов глобального исследования очень мало из-за отсутствия инвариантов полулокального описания даже в насыщенных окрестностях простых особых точек и бифуркаций в семействах особенностей ранга 1 и 2. Хотя имеются результаты Зунга о полулокальном описании накрытия насыщенных окрестностей простых особенностей, но возможные действия дискретной группы накрытия не изучены. Поэтому актуальность темы диссертации не вызывает сомнений: она важна как шаг в нужном направлении и подход к задачам указанного типа, хотя бы и для конкретных систем, где исследование облегчается относительной простотой интегралов. Кроме того, несомненно, изучение поставленных в диссертации задач дает большую информацию о динамике соответствующих механических систем.

## СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первой главе диссертации рассматривается гиростат типа Ковалевской в поле силы тяжести, для которого Яхья доказал полную интегрируемость. Исследуемая система сводится к семейству интегрируемых систем с двумя степенями свободы (параметром является значение интеграла площадей). Здесь дается анализ структуры слоения Лиувилля для этого семейства интегрируемых систем. Для этого изучаются бифуркационные диаграммы и их перестройки при изменении параметра, на основе чего получены области в плоскости момента, которые соответствуют одинаковому числу торов Лиувилля соответствующей интегрируемой системы и описываются одинаковым инвариантом изоэнергетической эквивалентности. При изменении параметра эти инварианты могут меняться, всего получено 29 неинвариантных структур. Следует сказать, что эта задача технически весьма нетривиальна, вся эта глава занимает половину объема диссертации.

Во второй главе диссертации изучается интегрируемая гамильтонова система с тремя степенями свободы, изучение которой не сводится к изучению систем меньшей размерности. Эта система описывает движение волчка Ковалевской в двойном силовом поле, ее фазовым пространством является кокасательное пространство к группе  $SO(3)$ . Полная интегрируемость этой системы, т.е. наличие третьего интеграла в дополнение к двум известным, было доказано Яхья, Богоявленским, Рейманом и Семеновым-Тянь-Шанским. В полной постановке задача до сих пор не исследована, в диссертации она изучается при нулевом значении гиростатического момента. Идея, предложенная Харламовым, состоит в первоначальном изучении т.н. критических подсистем системы с тремя степенями свободы, т.е. подмножеств (почти всюду они являются инвариантными четырехмерными симплектическими многообразиями), на которых ранг тройки интегралов равен двум. Эти критические подсистемы являются поэтому системами с двумя степенями свободы, исследование которых более продвинуто и оно здесь изучается. Само явное вычисление этих критических подсистем в данной задаче облегчается алгебраичностью интегралов и их относительной простотой. Изучение этих подсистем дополняется исследованием типов особых точек (особенностей ранга 0), семейств особых периодических траекторий (особенностей ранга 1) и семейств 2-торов (особенностей ранга 2). В замыкание соответствующих семейств входят и некомпактные орбиты действия.

Третья глава диссертации посвящена достаточно специальному, но классическому вопросу о возможности явного разделения переменных в уравнениях Кирхгофа движения твердого тела в

идеальной несжимаемой жидкости в случаях, когда имеется дополнительный интеграл четвертой степени по импульсам (Чаплыгин, Горячев, Яхья, Соколов). Здесь автор применил геометрический подход к разделению переменных, что позволило получить аналитические формулы и исследовать бифуркации торов Лиувилля.

В четвертой главе диссертации изучается интегрируемая система с тремя степенями свободы – гиростат под действием двух полей (случай Соколова-Цыганова). Здесь автору удалось найти аналитически четыре новых четырехмерных инвариантных подмногообразия, ограничение системы на которые является почти всюду интегрируемой системой с двумя степенями свободы. Для одного из многообразий соответствующая система оказалось известной, она соответствует случаю Боявленского вращения намагниченного твердого тела в однородном магнитном и гравитационном поле. Остальные три подсистемы оказались новыми. Найденные подмногообразия являются критическими подсистемами исходной системы, для них построены бифуркационные диаграммы и соответствующие изоэнергетические инварианты, которые также позволили продвинуться и в изучении системы в целом.

Последняя, пятая, глава диссертации посвящена изучению топологии слоения Лиувилля в интегрируемой гамильтоновой системе на конфигурационном пространстве группе Ли  $e(3)$ , обнаруженной В.В.Соколовым (2001). Эта система является обобщением волчка Ковалевской, когда к однородному потенциальному силовому полю добавляются гироскопические силы, зависящие только от точек из  $e(3)$ . Данная задача является интегрируемой системой с двумя степенями свободы, зависящей от значения интеграла площадей, а также физического параметра. Для этой задачи получено полное описание всех особых точек и их устойчивости при изменении параметров, указаны все возможные типа бифуркационных диаграмм и описана топология изоэнергетических уровней. Вся эта информация позволила описать топологию слоения Лиувилля.

В заключении диссертации перечислены полученные результаты и указаны их возможные применения.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

В диссертации получены следующие результаты.

1. Используя представление Лакса, описаны критические множества отображения момента для задачи о движении гиростата Ковалевской-Яхья, дана полная аналитическая классификация бифуркаций вдоль особых периодических траекторий, описана топология слоения Лиувилля и все возможные инварианты эквивалентности.
2. Дано полное исследование неприводимой системы с тремя степенями свободы, описывающей движение волчка Ковалевской в двойном поле, в частности: описаны критические подсистемы и бифуркационные диаграммы, проклассифицированы особенности всех возможных рангов, определены их типы и бифуркации.
3. Используя геометрический подход, получено явное разделение переменных в интегрируемых случаях уравнений Кирхгофа с дополнительным интегралом четвертой степени, что позволило изучить топологию слоения Лиувилля системы.
4. Получены четыре новые инвариантные четырехмерные подмногообразия в интегрируемой системе с тремя степенями свободы – обобщенном двухполевом гиростате. Для этих подсистем

исследованы соответствующие системы с двумя степенями свободы. Это дало возможность изучить бифуркации торов Лиувилля в полной системе.

5. Изучены основные элементы топологии слоения Лиувилля для интегрируемой системы на  $e(3)$ , найденной Соколовым, изучены бифуркационные диаграммы, получена классификация изоэнергетических многообразий для систем с двумя степенями свободы, построены изоэнергетические диаграммы.

Все результаты диссертации являются новыми, в работе дано их полное математическое обоснование, они опубликованы в журналах из списка ВАК. Автореферат диссертации правильно отражает ее содержание.

#### ЗАМЕЧАНИЯ

Имеются следующие замечания по тексту и содержанию диссертации, не снижающие общей положительной характеристики работы и не влияющие на достоверность результатов.

1. Диссертация недостаточно хорошо структурирована и часто выглядит как собрание отдельных глав. Хотя главы связаны единой темой и методами исследования, но нужно было сделать отдельную главу со всеми определениями, понятиями, используемыми во всем тексте. Ее отсутствие приводит к большому числу повторов, в каждой главе даются одни и те же определения, понятия и т.д.

2. Система ссылок выглядит несколько странной: автор часто ссылается не на источники, а на вторичные работы – книги, обзоры и пр. Причина этого, видимо, в том, что он недостаточно осведомлен об истории появления этих результатов. Например, вся терминология о типах особенностей заимствована из нашей работы с Уманским 1981 г., она стала общепринятой, но автор ссылается во всем только на Фоменко и его школу. Ссылка на две наши первые работы дается также не на оригиналы, а на их переводы на английский, которые появились на 7-8 лет позже, ссылок же на три основные работы в «Математическом сборнике», где впервые дана полулокальная изоэнергетическая классификация насыщенных окрестностей особенностей ранга 0 (особых точек) вообще отсутствует.

3. Терминология, используемая автором, выглядит иногда забавной: например в формулировке теоремы 5 (стр.54) присутствуют и особые точки типа «седло-центр» и «центр-седло». Понятно, что это один и тот же тип особой точки, зачем их различать? Также постоянно по тексту употребляется как термин «интегральное отображение», так и более общепринятый «отображение момента». По-моему, было бы лучше сразу ввести и использовать один термин.

#### ВЫВОДЫ

Диссертация является научно-квалификационной работой, в ней содержатся важные результаты по топологическому анализу нескольких интегрируемых задач механики твердого тела, вносящие существенный вклад в развитие как теории интегрируемых систем с двумя и тремя степенями свободы, так и в понимание динамики таких систем. Основные результаты диссертации являются новыми и актуальными. Они строго доказаны. Тема и содержание диссертации соответствует специальности 01.02.01 – «теоретическая механика». Полученные в диссертации результаты могут быть включены в специальные курсы по динамике твердого тела, использованы при исследованиях задач механики движения твердого тела в сложных полях и идеальной жидкости,

а также могут найти применения при конструировании различных аппаратов, в робототехнике и механотронике.

Все вышеизложенное позволяет заключить, что диссертационная работа Рябова Павла Евгеньевича «Топологический анализ неклассических интегрируемых задач динамики твердого тела» удовлетворяет всем требованиям «Положения о присуждении ученых степеней» (в том числе пункту 9, абзац 1), а ее автор Рябов Павел Евгеньевич заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.01– «Теоретическая механика».

Лерман Лев Михайлович, профессор кафедры дифференциальных уравнений, численного и математического анализа, доктор физико-математических наук, профессор, специальность 01-01-02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»



Дата: 08.06.2016

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 6, ком. 409 Институт информационных технологий, математики и механики.  
Email: unn@unn.ru, т. 8(831) 462-33-20

