

УДК 528.06:528.83.

## **Численный анализ эффективности применения ретрорефлектора нового типа при лазерной локации космических аппаратов**

**Анжеуров А.С.<sup>1\*</sup>, Денисова И.П.<sup>1\*</sup>, Костиков Ю.А.<sup>1\*</sup>, Пасисниченко М.А.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*

<sup>2</sup>*Компания «СИБИНТЕК», Загородное шоссе, 1, стр. 1, Москва, 117152, Россия*

*\*e-mail: [kaf.pmitet.mai@yandex.ru](mailto:kaf.pmitet.mai@yandex.ru)*

### **Аннотация**

Построена математическая модель лазерной локации космического аппарата, оснащенного ретрорефлектором нового типа, у которого за счет изменения технологии изготовления максимум кольцевой диаграммы направленности отраженного светового импульса смещен на 1, 2 угловой секунды относительно центрального луча. Проведенный численный анализ показал, что для достижения наиболее благоприятных условий лазерной локации такая величина смещения недостаточна. Из результатов численных расчетов следует, что для высокоорбитальных космических аппаратов (высота орбиты от 6000 км до 34000 км) максимум кольцевой диаграммы направленности должен быть смещен примерно на 5 угловых секунд, а для низкоорбитальных аппаратов (высота орбиты от 300 км до 550 км) примерно на 9,7 угловой секунды.

**Ключевые слова:** ретрорефлектор, низкоорбитальный космический аппарат, высокоорбитальный космический аппарат, лазерная локация, максимум интенсивности.

## **Введение**

Для точного определения элементов орбит космических аппаратов вместо радиолокации используется лазерная локация [1-5].

При проведении лазерной локации космического аппарата отраженный от ретрорефлектора световой импульс образует на поверхности Земли пятно, центр которого из-за эффекта скоростной абберации [6-7] обычно находится на значительном (от сотен до тысяч метров) расстоянии от приемного телескопа станции. Поэтому приемный телескоп оказывается на периферии пятна [8].

Из-за того, что поток энергии электромагнитного излучения в импульсе убывает по мере удаления от оси импульса к его периферии [9], то на приемный телескоп попадает лишь незначительная часть световой энергии, зачастую недостаточная для регистрации времени прихода отраженного импульса на лазерную станцию. Для устранения этого недостатка в работе [10] был предложен ретрорефлектор нового типа, у которого в кольцевой диаграмме направленности отраженного импульса максимум интенсивности был вытеснен с оптической оси к периферии, так чтобы пятно превратилось в светящееся кольцо. Для этого в работе было предложено управлять сдвигом фаз ортогональных компонент вектора  $\mathbf{E}$  путем нанесения на грани ретрорефлектора различных градиентных покрытий. Это позволило [10] сдвинуть максимум интенсивности примерно на 1,2 угловой секунды

от оптической оси отражателя с угловой шириной на уровне половинной мощности примерно равной 1 угловой секунды.

Целью настоящей работы является математическое моделирование и численный анализ [11,12] эффективности применения ретрорефлектора нового типа для лазерной локации высокоорбитальных и низкоорбитальных космических аппаратов, что, несомненно, является весьма актуальной задачей для ракетно-космической отрасли.

### **Постановка задачи**

Предположим, что на поверхности Земли, которую для простоты будем считать шаром радиуса  $R_0$ , в точке со сферическими координатами  $R_0$ ,  $\theta_0$  и  $\varphi_0$  находится лазерная станция. Поместим в эту точку начало топоцентрической системы отсчета, ось  $Z$  которой направлена по местной вертикали, ось  $X$  – по касательной к местному меридиану, а ось  $Y$  – по касательной к местной параллели. Введем также геоцентрическую невращающуюся систему отсчета, начало которой помещено в центр Земли, а ось  $Z$  совместим с осью ее вращения. В плоскости, перпендикулярной оси  $Z$ , введем прямоугольные декартовы координаты  $X$  и  $Y$ , направленные на далекие звезды, так чтобы система координат  $X, Y, Z$  была правая. Рассмотрим космический аппарат, находящийся на околоземной круговой орбите радиуса  $R_s$ , наклоненной к плоскости экватора под углом  $\theta$ . В топоцентрической системе отсчета закон движения этого аппарата согласно [13,14] будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
x_s(t) &= R_s \left\{ \left[ \cos(\omega t + \psi_0) \cos(\Omega t + \varphi_0 - \varphi) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \cos \theta \sin(\omega t + \psi_0) \sin(\Omega t + \varphi_0 - \varphi) \right] \cos \theta_0 - \sin \theta \sin \theta_0 \sin(\omega t + \psi_0) \right\}, \\
y_s(t) &= R_s \left[ \cos \theta \sin(\omega t + \psi_0) \cos(\Omega t + \varphi_0 - \varphi) - \cos(\omega t + \psi_0) \sin(\Omega t + \varphi_0 - \varphi) \right], \quad (1) \\
z_s(t) &= R_s \left\{ \sin \theta \cos \theta_0 \sin(\omega t + \psi_0) + \left[ \cos(\omega t + \psi_0) \cos(\Omega t + \varphi_0 - \varphi) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \cos \theta \sin(\omega t + \psi_0) \sin(\Omega t + \varphi_0 - \varphi) \right] \sin \theta_0 \right\} - R_0,
\end{aligned}$$

где  $\omega = \sqrt{GM / R_s^3}$  — угловая частота обращения ИСЗ по круговой орбите,

$GM$  — произведение гравитационной постоянной на массу Земли,

$\varphi$  — долгота восходящего узла,

$\psi_0$  — константа, определяющая время первого нахождения аппарата в восходящем узле траектории.

Предположим далее, что космический аппарат оснащен ретрорефлектором нового типа, предложенным в работе [10]. Выясним на какой угол относительно оптической оси необходимо сдвигать максимум интенсивности диаграммы направленности отраженного сигнала для локации как низкоорбитальных, так и высокоорбитальных космических аппаратов.

Для уменьшения погрешностей, вносимых неоднородностью атмосферы, рабочими при лазерной локации считаются [15] участки небесной сферы, расположенные на  $20^\circ$  выше местного горизонта. Это условие в топоцентрической системе отсчета принимает вид:

$$z_s(t) > \sqrt{x_s(t)^2 + y_s(t)^2 + z_s(t)^2} \cos 70^\circ. \quad (2)$$

При проведении всех расчетов будем его учитывать.

Следует отметить, что вопросы создания нужной диаграммы направленности рефлекторов имеет важное значение и для решения проблемы орбитального освещения поверхности Земли [16,17].

### Математическая модель процесса лазерной локации

Запишем существенные уравнения и соотношения, которые составляют основу математической модели [18,19].

**Уравнение луча, по которому лазерная станция в момент времени  $t = t_N$**

**посылает световой импульс к космическому аппарату:**

$$\begin{aligned} x_L(t) &= R_0 \sin \theta_0 \cos \theta_0 [\cos \Omega(t-t_N) - 1] + \\ &+ c(t-t_N) \{ [n_x \cos[\Omega(t-t_N) + \varphi_0] + n_y \sin[\Omega(t-t_N) + \varphi_0]] \cos \theta_0 - n_z \sin \theta_0 \}, \\ y_L(t) &= -R_0 \sin \theta_0 \sin \Omega(t-t_N) - c(t-t_N) [n_x \sin[\Omega(t-t_N) + \varphi_0] - \\ &- n_y \cos[\Omega(t-t_N) + \varphi_0]], \\ z_L(t) &= R_0 \sin^2 \theta_0 [\cos \Omega(t-t_N) - 1] + \\ &+ c(t-t_N) \{ [n_x \cos[\Omega(t-t_N) + \varphi_0] + n_y \sin[\Omega(t-t_N) + \varphi_0]] \sin \theta_0 + n_z \cos \theta_0 \}, \end{aligned}$$

где  $n_x, n_y, n_z$  — постоянные интегрирования, определяющие ориентацию луча в пространстве:

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{1}{c(t_r - t_N)} \{ R_S [\cos(\Omega t_N - \varphi) \cos(\omega t_r + \psi_0) + \\ &+ \sin(\Omega t_N - \varphi) \sin(\omega t_r + \psi_0) \cos \theta] - R_0 \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \}, \\ n_y &= \frac{1}{c(t_r - t_N)} \{ R_S [\cos(\Omega t_N - \varphi) \sin(\omega t_r + \psi_0) \cos \theta - \\ &- \sin(\Omega t_N - \varphi) \cos(\omega t_r + \psi_0)] - R_0 \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \}, \\ n_z &= \frac{R_S \sin \theta \sin(\omega t_r + \psi_0) - R_0 \cos \theta_0}{c(t_r - t_N)}. \end{aligned}$$

Момент времени  $t = t_r$  находится из трансцендентного уравнения:

$$c^2(t_r - t_N)^2 = R_S^2 - 2R_0R_S \{ \sin \theta_0 [\cos(\omega t_r + \psi_0) \cos(\Omega t_N + \varphi_0 - \varphi) + \cos \theta \sin(\omega t_r + \psi_0) \sin(\Omega t_N + \varphi_0 - \varphi)] + \cos \theta_0 \sin \theta \sin(\omega t_r + \psi_0) \} + R_0^2.$$

Согласно общей теории относительности [20-22] в геоцентрической не вращающейся системе отсчета вектор скорости отраженного светового импульса  $\mathbf{V}_{ref}$  связан с вектором скорости космического аппарата  $\mathbf{V}_S$  и вектором скорости импульса  $\mathbf{V}_{(ph)}$ , испущенного лазерной станцией, соотношением:

$$\mathbf{V}_{ref} = 2\mathbf{V}_S - \mathbf{V}_{(ph)} - 2(\mathbf{V}_{(ph)} \mathbf{V}_S) \mathbf{V}_{(ph)} / c^2 + O(V_S^2 / c^2) \mathbf{V}_{(ph)}, \quad (3)$$

Эти уравнения будут использоваться при решении поставленной задачи.

**Вычисление угла  $\alpha$  между центральным лучом и лучом, соединяющим ретрорефлектор с лазерной станцией**

$$\alpha = \frac{|[\mathbf{L} \mathbf{V}_{ref}]|}{|\mathbf{L}| |\mathbf{V}_{ref}|}, \quad (4)$$

где вектор  $\mathbf{V}_{ref}$  определяется выражением (3), а вектор  $\mathbf{L}$  имеет компоненты:

$$\begin{aligned} L_x &= \frac{1}{c(t_G - t_r)} \left\{ R_0 \cos(\Omega t_G + \varphi_0) \sin \theta_0 - \right. \\ &\quad \left. - R_S [\cos(\omega t_r + \psi_0) \cos \varphi - \cos \theta \sin(\omega t_r + \psi_0) \sin \varphi] \right\}, \\ L_y &= \frac{1}{c(t_G - t_r)} \left\{ R_0 \sin(\Omega t_G + \varphi_0) \sin \theta_0 - \right. \\ &\quad \left. - R_S [\cos(\omega t_r + \psi_0) \sin \varphi + \cos \theta \sin(\omega t_r + \psi_0) \cos \varphi] \right\}, \\ L_z &= \frac{R_0 \cos \theta_0 - R_S \sin \theta \sin(\omega t_r + \psi_0)}{c(t_G - t_r)}. \end{aligned}$$

Входящий в последние выражения момент времени  $t_G$  является меньшим корнем трансцендентного уравнения:

$$c^2(t_G - t_r)^2 = R_S^2 + R_0^2 - 2R_0R_S \{ \sin \theta_0 [\cos(\omega t_r + \psi_0) \cos(\Omega t_G + \varphi_0 - \varphi) + \cos \theta \sin(\omega t_r + \psi_0) \sin(\Omega t_G + \varphi_0 - \varphi)] + \cos \theta_0 \sin \theta \sin(\omega t_r + \psi_0) \}.$$

Учитывая, что вектор  $\mathbf{L}$  - единичный, а модуль вектора  $\mathbf{V}_{ref}$  с требуемой точностью равен скорости света, угол  $\alpha$  представим в виде:

$$\alpha = \frac{|\mathbf{L} \mathbf{V}_{ref}|}{|\mathbf{L}| |\mathbf{V}_{ref}|} = \sqrt{\frac{(L_x V_y^{ref} - L_y V_x^{ref})^2 + (L_x V_z^{ref} - L_z V_x^{ref})^2 + (L_z V_y^{ref} - L_y V_z^{ref})^2}{c^2}}. \quad (5)$$

Так как аналитические выражения для входящих в формулы компонент векторов очень громоздки, то дальнейшее исследование возможно проводить на основе численных вычислений.

### Результаты численных расчетов

Полученные формулы позволяют исследовать, как изменяется угол между центральным лучом оптической системы и отраженным лучом, который соединяет ретрорефлектор с лазерной станцией.

Предположим, что космический аппарат оснащен ретрорефлектором нового типа, имеющим диаметр вписанной окружности, равный 27 мм. При лазерной локации обычно используется излучение с длиной волны  $\lambda = 25\text{нм}$ .

В качестве ИСЗ выберем два космических аппарата: низкоорбитальный спутник европейского космического агентства «**Swarm-C**» (высота орбиты 530 км, период обращения 5795 секунд, наклонение  $88.95^\circ$ ) и американский высокоорбитальный аппарат «**GPS-36**» (высота орбиты 20030 км, период обращения 718 минут, наклонение  $64.8^\circ$ ). Предположим далее, что лазерная локация этих ИСЗ осуществляется со станции "Иркутск" ( $52.2191^\circ$  северной широты,  $104.3164^\circ$  восточной долготы). Будем считать, что эта лазерная станция посылает световые импульсы с интервалом 1 секунда.

Проведенный численный расчет показал, что угол  $\alpha$ , определяемый соотношением (5), при нахождении аппарата «GPS-36» в области локации (2) находится в коридоре значений от 4,94 угловой секунды до 5,03 угловой секунды (см. рис.1).

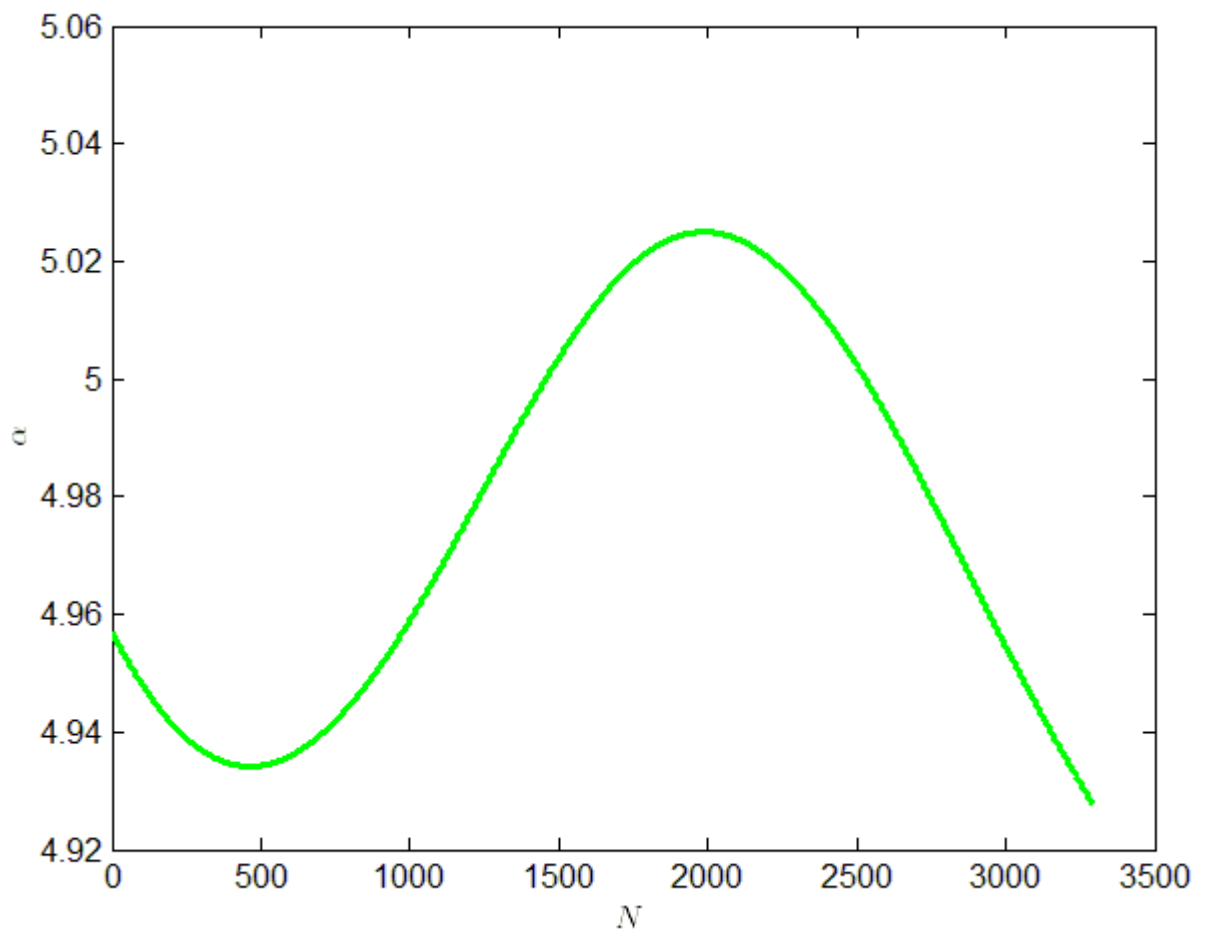


Рис. 1. Зависимость угла  $\alpha$  между осью отраженного светового импульса и направлением на приемный телескоп (в угловых секундах) от номера импульса  $N$  при лазерной локации аппарата «GPS-36».



При локации низкоорбитального спутника «Swarm-C» угол  $\alpha$  сначала возрастает от 9,4 до 10,05 угловой секунды, а затем убывает до 9,1 угловой секунды (см. рис.2).

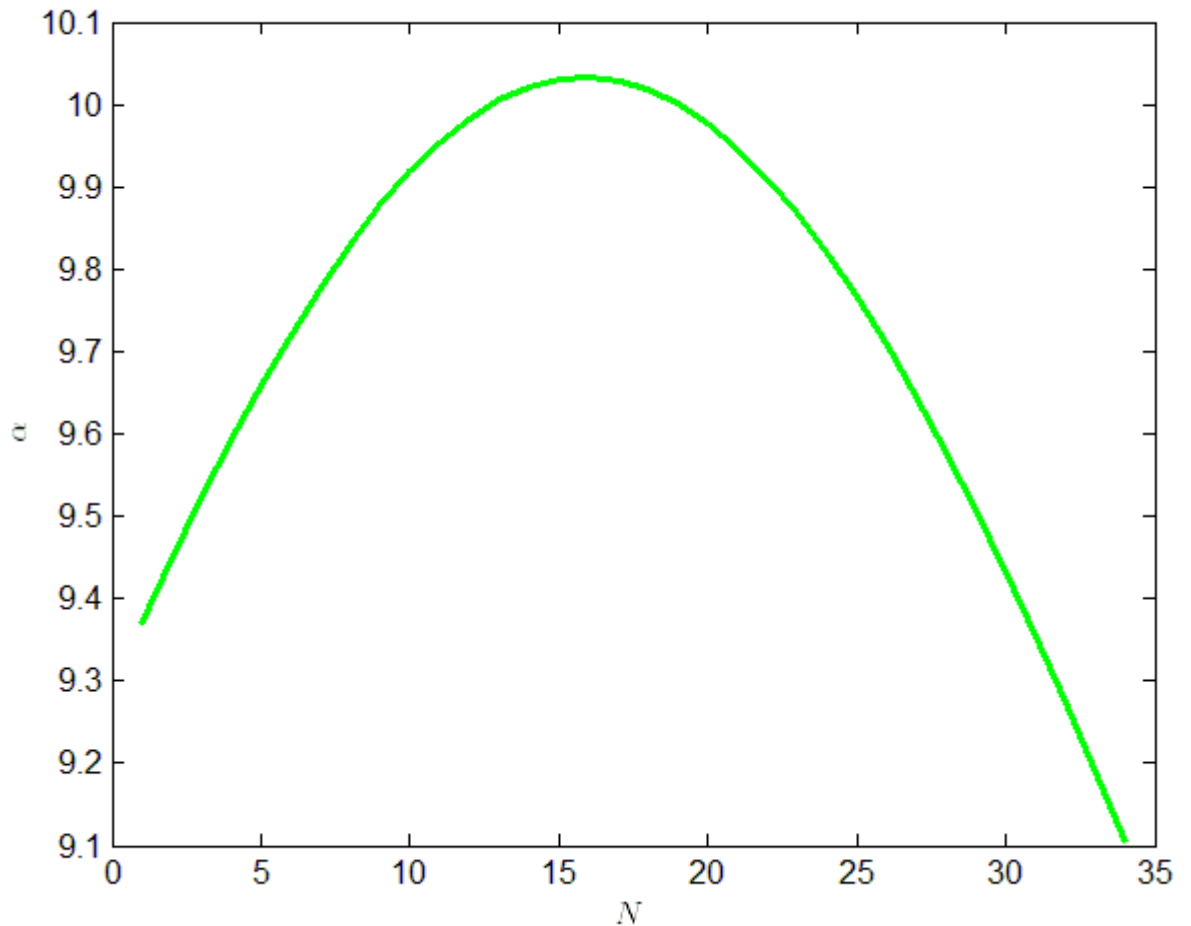


Рис. 2. Зависимость угла  $\alpha$  между осью отраженного светового импульса и направлением на приемный телескоп (в угловых секундах) от номера импульса N при лазерной локации аппарата «Swarm-C».

Большее значение угла  $\alpha$  для низкоорбитальных аппаратов, по сравнению с высокоорбитальными аппаратами, связано с большей орбитальной скоростью первых по сравнению с последними. Действительно, из формулы (1) следует, что в невращающейся геоцентрической системе отсчета максимум  $\alpha$  достигает значения

$2V_s/c$ . Так как орбитальная скорость космического аппарата обратно пропорциональна квадратному корню из радиуса орбиты, то  $\alpha \sim (1/R_s)^{1/2}$ .

Переход от невращающейся геоцентрической системы отсчета к топоцентрической системе отсчета, вращающейся вместе с Землей, в силу релятивистского закона преобразования углов, также вносит свой вклад в величину  $\alpha$ .

### **Заключение**

Проведенное исследование показало, что для обеспечения наиболее благоприятных условий локации в ретрорефлекторе нового типа максимум кольцевой диаграммы направленности отраженного импульса необходимо сдвинуть (в системе покоя ретрорефлектора) относительно центрального луча не на 1,2 угловой секунды, а в несколько раз больше: для низкоорбитальных космических аппаратов (высота орбиты 300-550 км) – примерно на 9,7 угловой секунды, а для высокоорбитальных космических аппаратов (высота орбиты 6000-34000 км) – примерно на 5 угловых секунд.

Таким образом, универсального ретрорефлектора, пригодного для всех космических аппаратов, не существует. Это означает, что на этапе создания каждого космического аппарата должен быть разработан и изготовлен уникальный ретрорефлектор нового типа, максимально эффективный для работы на планируемой орбите.

## Библиографический список

1. Manuel Salvoldi, Daniel Choukroun. Intersatellite Laser Ranging and Attitude Robust Measurement Planning // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, San Diego, California, USA, 2016, available at: <https://doi.org/10.2514/6.2016-2094>
2. Filippo Ales, Peter F. Gath, Ulrich Johann, and Claus Braxmaier. Modeling and Simulation of a Laser Ranging Interferometer Acquisition and Guidance Algorithm // Journal of Spacecraft and Rockets, January 2014, vol. 51, no. 1 pp. 226 – 238, available at: <https://doi.org/10.2514/1.A32567>
3. Paul W. Schumacher, G. Charmaine Gilbreath, Mark A. Davis, and Edward D. Lydick. Precision of Satellite Laser Ranging Calibration of the Naval Space Surveillance System // Journal of Guidance, Control, and Dynamics, September 2001, vol. 24, no. 5. pp. 925 – 932, available at: <https://doi.org/10.2514/2.4829>
4. Dustin R. Buccino, Jill A. Seubert, Sami W. Asmar, and Ryan S. Park. Optical Ranging Measurement with a Lunar Orbiter: Limitations and Potential // Journal of Spacecraft and Rockets, May 2016, vol. 53, no. 3, pp. 457 – 463, available at: <https://doi.org/10.2514/1.A33415>
5. Michael E. Hough. Precise Orbit Determination Using Satellite Radar Ranging // Journal of Guidance, Control, and Dynamics, July 2012, vol. 35, no. 4, pp. 1048-1058. available at: <https://doi.org/10.2514/1.56873>
6. Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. - М.: Наука, 1972. - 382 с.
7. Останина М.В., Пасисниченко М.А., Ростовский В.С. Математическое моделирование релятивистского эффекта при лазерной локации искусственных

спутников Земли // Вестник Московского университета. Физика. Астрономия. 2013. № 6. С. 42 - 46.

8. Денисов М.М., Денисова И.П., Пасисниченко М.А. Математическое моделирование движения отраженных импульсов по поверхности Земли при лазерной локации космических аппаратов, находящихся на круговых орбитах // Электромагнитные волны и электронные системы. 2016. Т. 21. № 4. С. 3 - 10.

9. Degnan John. Presentation and Paper from ILRS Technical Laser Workshop // Satellite, Lunar and Planetary Laser Ranging: Characterizing the Space Segment. INFN-LNF. Frascati, Italy, November 05–09, 2012.

10. Мурашкин В.В., Садовников М.А., Соколов А.Л., Шаргородский В.Д. Исследование диаграммы направленности уголкового отражателя с различным покрытием граней // Электромагнитные волны и электронные системы. 2011. Т. 16. № 3. С. 47 - 50.

11. Самарский А.А. Введение в численные методы. - М.: Наука, 1997. – 239 с.

12. Самарский А.А. Численные методы и вычислительный эксперимент. - М.: Наука, 1998. – 518 с.

13. Дубошин Г.Н. Небесная механика. - М.: Наука, 1968. - 799 с.

14. Shatina A.V., Sherstnyov E.V. Satellite motion in the gravitational field of a viscoelastic planet with a core // Cosmic Research. 2015. Vol. 53, no. 2, pp. 163 - 170.

15. Денисов М.М. Закон отражения лазерного импульса от ретрорефлектора, установленного на космическом аппарате // Электромагнитные волны и электронные системы. 2010. Т. 15. № 4. С. 33 - 38.

16. Семенов В.Ф., Сизенцев Г.А., Сотников Б.И., Сытин О.Г. Система орбитального освещения приполярных городов // Известия РАН. Энергетика. 2006. № 1. С. 21 - 30.
17. Старовойтов Е.И. Выбор металлизации для отражателей космической системы орбитального освещения поверхности Земли // Труды МАИ. 2017. № 94. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=81048>
18. Денисов М.М., Денисова И.П. Единая параметризация для трех типов баллистических траекторий // Труды МАИ. 2016. № 85. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=67511>
19. Denisov V.I., Denisov M.M. Mathematical Modeling of Angular Distortions in Laser Ranging of the RadioAstron Satellite // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2008. Vol. 48. Issue 8, pp. 1418 - 1427.
20. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. - М.: Наука, 1965. Т. 2. - 878 с.
21. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. - М.: Наука, 1988. - 512 с.
22. Ashby N., Bertotti B. Relativistic effects in local inertial frames // Physical Review. 1986, vol. 34, no. 8, pp. 2246 – 2258.