

УДК 629.7.015.3

Повышение топливной эффективности пассажирского самолета за счет минимизации веса неплоской несущей поверхности

Гуереш Д.*, Попов С.А.**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),

МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

**e-mail guaero.tech@gmail.com*

***e-mail: flowmech@mail.ru*

Аннотация

В статье приведена оценка влияния на топливную эффективность пассажирского самолета средней дальности различных проектных решений по улучшению аэродинамического качества крыла. В частности, подробно изучено проектное решение, состоящее в применении неплоской формы несущей поверхности в виде классического сочетания крыла с несущей законцовкой винглет. Разработана методика проектировочного расчёта величины аэродинамической нагрузки при различных схемах неплоского крыла с учётом местных углов атаки и скольжения. Сравнением весовых эквивалентов различных конфигураций была получена количественная оценка прироста топливной эффективности самолета в результате прироста аэродинамического качества, перераспределения аэродинамической нагрузки по размаху и соответствующего изменения конструкционно-весовых характеристик консоли крыла.

Ключевые слова: неплоское крыло пассажирского самолета, законцовка, градиенты взлётной массы, многодисциплинарная оптимизация, деформированное крыло

Введение

Топливная эффективность пассажирского самолета – это конечный показатель совершенства заложенных в нем проектировочных решений и технологий его изготовления, определяющий конкурентно-способность проекта на рынке и его окупаемость для ОКБ, а в дальнейшем рентабельность и экономическую целесообразность эксплуатации самолёта авиакомпаниями. С учётом ускоренного темпа развития авиационной техники, данный показатель может также оказаться решающим и для прогнозируемого срока службы лайнера, где в будущем ожидается появление всё более экологичных самолётов и всё более жестких ограничений, ведущих к преждевременному моральному старению и списанию не полностью отработавших свой ресурс самолётов. Наибольшие усилия по достижению максимальной топливной эффективности направлены на нахождение все более выгодных компромиссов между максимально возможным аэродинамическим качеством планера и минимально возможным весом его конструкции. Дело в том, что как правило оптимальные аэродинамические формы с минимальной омываемой площадью, минимальной строительной высотой и максимальным удлинением, обладают наименьшей удельной прочностью и жёсткостью, что может быть компенсировано лишь утяжелением конструкции, поддерживающей их форму.

Наиболее инновационными являются проектные решения, ведущие к улучшению аэродинамического качества при одновременном рациональном перераспределении аэродинамических нагрузок, сохраняя по возможности неизменной их общую величину, тем самым исключая необходимость в утяжелении конструкции. Такие решения, как правило, являются конечным результатом эволюционного развития и оптимизации ранее отработанной компоновки. Примером этого может служить рассмотренный в данной работе переход сначала от плоского крыла большого удлинения к неплоской схеме с меньшим индуктивным сопротивлением путем добавления законцовки, которая влечёт за собой рост изгибающего момента и массы конструкции крыла. Затем, в результате оптимизации геометрии законцовки, – переход от прямолинейной законцовки к законцовке с криволинейной на виде спереди форме. Оптимизация по критерию максимального качества была выполнена в работах [1]. В данной статье, сравнением весового эквивалента классической и криволинейной на виде спереди законцовок, получена оценка их оптимальности с точки зрения веса конструкции. Расчёт весового эквивалента через градиент взлётной массы самолета, который связан с ростом максимальных напряжений на консоли крыла, потребовал точную оценку приращения величины и распределения аэродинамической нагрузки по размаху законцовки при различных углах атаки крыла. Для этого была разработана методика проектировочного расчёта нагрузки, учитывающая приращения местных углов атаки и скольжения на неплоском участке крыла. В работе показано, что теоретически полученное распределение нагрузки по размаху криволинейного на виде

спереди крыла в зависимости от выбранной параметризирующей функции второго порядка. Такой подход может быть применен для проектировочной оценки аэродинамической нагрузки на деформированное крыло, форма которого в деформированном состоянии может быть, например, параметризована через коэффициенты параболы или другой кривой второго порядка.

В результате выполненной работы подтверждено преимущество криволинейной на виде спереди концевой части крыла, ввиду смещения нагрузки к корню и разгруженных по углам атаки концевых сечений с наибольшим плечом до корня крыла, а также благодаря снижению концентрации напряжения (рис. 8). Таким образом, криволинейная на виде спереди концевая часть крыла является наивыгоднейшей для топливной эффективности с одновременно оптимальными характеристиками аэродинамики и прочности конструкции.

1. Разработка целевой функции топливной эффективности пассажирского самолёта

Расчётным случаем для оценки топливной эффективности пассажирских самолетов является крейсерский режим полета, обладающий наибольшей протяженностью по времени работы двигателя. Для самолетов семейства Ту-204/214 [4], а также для зарубежных аналогов В-737 и А-320 [5-6] и для транспортных конфигураций [7-8], крейсерский режим полета отвечает за более чем 95% всего профиля полета. При обеспечении установившегося горизонтального полета на

заданной крейсерской скорости, необходимая тяга двигателя равна силе лобового сопротивления и прямо пропорциональна силе тяжести G , но обратно пропорциональна аэродинамическому качеству [9-10]: $P_{\text{нотр.}}^{\text{кр.}} = \frac{G}{K}$. Отсюда, при одинаковой силовой установке и прочих равных условиях, выбранное проектное решение по увеличению аэродинамического качества крыла улучшает топливную эффективность, и тем самым является целесообразным, только если качество растёт быстрее чем масса самолета. Так как только в данном случае необходимая тяга уменьшается по сравнению с исходным значением.

Диаграмма на рис. 1 показывает несколько проектных решений по снижению индуктивного сопротивления, все так или иначе ведущие к росту массы крыла. Ответ на вопрос: «На сколько можно утяжелить крыло, улучшая его аэродинамические характеристики», требует оценки «весовой стоимости» проектных решений, связанных с увеличением аэродинамического качества. Для каждого проектного решения, в качестве весового эквивалента $\Delta M_{1\%}^{\Delta K}$ (кг), соответствующего единице роста аэродинамического качества ΔK , можно считать общее приращение взлетной массы самолёта Δm_0 (кг), поделенное на общий рост качества ΔK :

$$\Delta M_{\text{ед.}}^{\Delta K} = \frac{\Delta m_0}{\Delta K} \quad (1)$$

Исходя из блок-схемы, приведенной на рис. 1, приращение взлетной массы самолёта Δm_0 складывается из роста массы крыла, обусловленного увеличением

нагрузок и/или требованием увеличения жёсткости, а также в виде дополнительной массы при установке концевых устройств и их крепления. Используя метод градиентов взлётной массы [11-13], можно выделить влияние каждой из этих составляющих:

$$\Delta m_0 = \frac{\partial m_0}{\partial \sigma_{\max}} \Delta \sigma_{\max} + \frac{\partial m_0}{\partial m_{\text{дон}}} \Delta m_{\text{дон}}. \quad (2)$$



Рис.1- Блок-схема причинно-следственной связи между ростом аэродинамического качества разными проектными решениями, и итоговым ростом массы крыла.

Сравнение частных производных взлётной массы $\frac{\partial m_0}{\partial \sigma_{\max}}$ и $\frac{\partial m_0}{\partial m_{\text{дон}}}$ позволяет

выделить параметры с наибольшим влиянием на массу крыла и направить оптимизацию для их улучшения в первую очередь. Они, как правило, постоянны на всех стадиях проектирования самолета и могут быть заранее вычислены. Приращение

взлётной массы в формуле (2) складывается из двух слагаемых: $\frac{\partial m_0}{\partial \sigma_{\max}} \Delta \sigma_{\max}$ и

$\frac{\partial m_0}{\partial m_{доп.}} \Delta m_{доп.}$. Первое слагаемое связано с ростом максимальных напряжений σ_{max} ,

требующих увеличения запаса прочности и жёсткости, где рост массы заложен в увеличенном поперечном сечении силовых элементов конструкции и/или в увеличенной плотности материала. К примеру, при неизменном поперечном сечении, одинаковой конструктивно-силовой схемы (КСС) и одинаковом запасе прочности

$n = \frac{\sigma_{\epsilon}}{\sigma_{max}} = 1.15$, рост максимальных напряжений вследствие роста или

перераспределения аэродинамической нагрузки компенсируется применением материала с более высокими пределом прочности и модулем упругости, который как

правило обладает более высокой плотностью (табл. 1). Для количественно анализа, в

табл. 1 приведены авиационные материалы с разными характеристиками, откуда

однако можно получить общую зависимость плотности материала от его предела

прочности: $\rho \approx 0.007 \cdot \sigma_{\epsilon}$. Учитывая запас прочности: $\rho \approx 0.007 \cdot 1.15 \cdot \sigma_{max}$. Таким

образом, масса (г) элементарного объёма конструкции в 1см^3 равна: $m_{1\text{см}^3} \approx 0.008 \cdot \sigma_{max}$,

а частная производная взлётной массы $\frac{\partial m_0}{\partial \sigma_{max}}$ – константа, зависящая от общего

объёма конструкции v : $\frac{\partial m_0}{\partial \sigma_{max}} = \frac{\partial (m_{1\text{см}^3} \cdot v)}{\partial \sigma_{max}} \approx v \cdot \frac{\partial (0.008 \cdot \sigma_{max})}{\partial \sigma_{max}} \approx 0.008 \cdot v$. Здесь учтено

только влияние нормальных напряжений растяжения σ_{max} . Учёт роста касательных

напряжений, а также критических напряжений сжатия на верхней поверхности крыла,

может быть легко произведён при известном положении линии центров изгиба КСС и

заданных, исходя из расчётного случая, центра давления и распределении аэродинамической нагрузки.

Материал	Характеристики механических свойств		
	σ_g , МПа	E , МПа	ρ , г/см ³
Алюминиевый сплав (типа Д16Т)	400	72000	2,7...2,8
Сталь (типа 30ХГСА)	1100	210000	7,8...7,85
Титановый сплав (типа ОТ4)	700	110000	4,5...4,85

Табл.1- Характеристики механических свойств некоторых авиационных металлов.

Второе слагаемое $\frac{\partial m_0}{\partial m_{дон}} \Delta m_{дон}$ связано с появлением дополнительной массы

нового агрегата – концевого устройства и его крепления к концевой нервюре крыла.

Очевидно, что приращение взлётной массы Δm_0 из-за добавления к ней $\Delta m_{дон}$, равна

величине этой дополнительной массы, то есть $\frac{\partial m_0}{\partial m_{дон}} = 1$, а формула (2) упростится:

$$\Delta m_0 = (0.008 \cdot v) \Delta \sigma_{\max} + \Delta m_{дон} \quad (3)$$

Исходя из формулы для нормального напряжения: $\sigma = F / S$, где F – нагрузка, и S – площадь поперечного сечения силовых элементов конструкции: при установке законцовки без изменений в конструкции ($S = const$), приращение $\Delta \sigma_{\max}^{зак}$ зависит только от величины и распределения аэродинамической нагрузки на крыло от законцовки $F_{зак}$. Проектировочный расчёт величины $F_{зак}$ на каждом режиме и угле атаки крыла может быть произведен исходя геометрических параметров законцовки, главным образом её площади и угла развала. Распределение нагрузки по размаху

крыла можно считать неизменным, т.к. законцовка заменяется сосредоточенными нагрузками (рис. 3). Распределение $F_{зак.}$ по размаху самой законцовки влияет на её собственную массу и, как следствие, на приращение $\Delta m_{дон.}$. Следует заметить что $\Delta m_{дон.}$ одновременно вызывает и снижение $\Delta \sigma_{max}^{зак}$ вследствие разгрузки консоли крыла.

2. Проектировочный расчёт аэродинамической нагрузки на неплоское крыло

2.1- Определение величины аэродинамической нагрузки на законцовку

Неплоские несущие системы характеризуются наличием одной или более составляющих, не лежащих в плоскости строительной горизонтали самолета и наклоненных к ней под углом развала ψ , во многом определяющим «степень плоскостности системы», где максимальная неплоскостность характеризует вертикальную законцовку с $\psi = 0$ (без развала), а для горизонтальной (точнее лежащей в плоскости крыла) законцовки с $\psi = \pi / 2$ – крыло плоское, а законцовка – это простое увеличение его удлинения. Параметр ψ определяет как величину аэродинамической нагрузки, так и ее боковую и несущую доли (рис.2-4) и напрямую влияет на местные углы атаки и скольжения, которые одновременно меняются при изменении угла атаки самолёта. Данные неплоские части могут также иметь свой угол стреловидности, отличный от χ крыла. Для крыла с законцовкой площадью $S_{зак.}$,

поскольку это профилированная несущая поверхность подобная крылу, аэродинамическая нагрузка [кгс], действующая на нее равна:

$$F_{\text{зак.}} = C_F^{\text{зак.}} \cdot S_{\text{зак.}} \cdot \rho \frac{V^2}{2} \quad (4)$$

Коэффициент аэродинамической силы, действующей на законцовку $C_F^{\text{зак.}}$ зависит от её собственного угла атаки и, в меньшей степени, – собственного угла скольжения:

$C_F^{\text{зак.}} = C_F^{\text{зак.}}(\alpha_{\text{зак.}}, \beta_{\text{зак.}})$. Приближённо можно определить его зависимость от угла

атаки $C_F^{\text{зак.}}(\alpha_{\text{зак.}})$ исходя из линейной части графика зависимости $C_{y_a}(\alpha)$ для профиля

законцовки. Для примера законцовки с профилем DFVLR-R4, исследованной в [1]:

$C_{y_a}^{\text{DFVLR-R4}}(\alpha^0) \approx 0.1\alpha + 0.45$. Для крыла с коэффициентом C_{y_a} без скольжения, известно,

что коэффициент подъёмной силы такого же крыла при скольжении с углом β равен

[14-15]: $C_{y_a}^{\text{скольж.}} = C_{y_a} \cdot \cos^2(\beta)$. Тогда, с учётом скольжения законцовки на DLR-F4

[1], коэффициент аэродинамической нагрузки, действующей на нее равен:

$$C_{F_{\text{зак.}}}^{\text{DLR-F4}}(\alpha_{\text{зак.}}, \beta_{\text{зак.}}) \approx [0.1\alpha_{\text{зак.}} + 0.45] \cdot \cos^2(\beta_{\text{зак.}}) \quad (5)$$

Площадь законцовки [1] $S_{\text{зак.}}^{\text{DLR-F4}} = 0.004 \text{ м}^2$ и скоростной напор при крейсерском $M=0.6$

и высоте полёта $H=11 \text{ км}$: $\rho \frac{V^2}{2} = 0.364 \cdot \frac{177^2}{2} = 5.7 \cdot 10^3 \text{ кгс} / \text{ м}^2$. Подставляя это в (4),

для нагрузки получим:

$$F_{\text{зак.}}^{\text{DLR-F4}}(\alpha_{\text{зак.}}, \beta_{\text{зак.}}) \approx [2.3\alpha_{\text{зак.}} + 10.26] \cos^2(\beta_{\text{зак.}}) \quad (6)$$

Геометрические углы атаки $\alpha_{зак.}$ и скольжения $\beta_{зак.}$ законцовки могут быть выражены через угол атаки крыла (самолёта), что позволяет упростить формулу (6):

- Угол атаки законцовки как функция от угла атаки крыла: В [1] установлено, что для законцовки без крутки, при пренебрежении поперечного потока и интерференции с крылом, угол атаки законцовки $\alpha_{зак.}$ прямо пропорционален углу атаки основного крыла, или самолета ($\alpha_{кр.}$):

$$\alpha_{зак.} = \alpha_{зак.}^0(z) + K_{\psi}^{\alpha} \alpha_{кр.} + \alpha_{попер.}^0 = K_{\psi}^{\alpha} \alpha_{кр.} \quad (7)$$

Где: коэффициент пропорциональности $0 \leq K_{\psi}^{\alpha} \leq 1$ и зависит от угла развала законцовки ψ следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Для вертикальной законцовки: } K_{\psi=0}^{\alpha} = 0, \\ \text{Для горизонтальной законцовки: } K_{\psi=\pi/2}^{\alpha} = 1, \end{array} \right. \longrightarrow \text{Для общего случая: } K_{\psi}^{\alpha} = \frac{\psi}{\pi/2}$$

Тогда собственный угол атаки законцовки есть линейная функция от угла атаки крыла с наклоном, зависящим от угла развала законцовки $\arctan(\frac{\psi}{\pi/2})$ (рис. 2а.):

$$\alpha_{зак.}(\alpha_{кр.}) = \frac{\psi}{\pi/2} \alpha_{кр.} \quad (8)$$

- Угол скольжения законцовки как функция от угла атаки крыла:

Угол скольжения законцовки $\beta_{зак.}$ равен ее углу стреловидности $\lambda_{зак.}$ при нулевом угле атаки крыла, а дальше также прямо пропорционален углу атаки крыла:

$$\beta_{зак.} = \lambda_{зак.} + K_{\psi}^{\beta} \alpha_{кр.} \quad (9)$$

Здесь: коэффициент пропорциональности K_{ψ}^{β} определяется в зависимости от угла развала ψ таким же образом исходя из частных случаев:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Для вертикальной законцовки: } K_{\psi=0}^{\beta} = 1, \\ \text{Для горизонтальной законцовки: } K_{\psi=\pi/2}^{\beta} = 0, \end{array} \right. \longrightarrow \text{Для общего случая: } K_{\psi}^{\beta} = 1 - \frac{\psi}{\pi/2}$$

Таким образом, угол скольжения законцовки по углу атаки крыла равен:

$$\beta_{зак.}(\alpha_{кр.}) = \lambda_{зак.} + [1 - \frac{\psi}{\pi/2}] \cdot \alpha_{кр.} \quad (10)$$

Подставляя (8) и (10) в (6), можно выразить величину аэродинамической нагрузки на законцовку в виде функции от угла атаки крыла $F_{зак.}^{DLR-F4}(\alpha_{кр.})$:

$$F_{зак.}^{DLR-F4}(\alpha_{кр.}) \approx [2.3 \frac{\psi}{\pi/2} \alpha_{кр.} + 10.26] \cdot \underbrace{\cos^2[\lambda_{зак.} + (1 - \frac{\psi}{\pi/2}) \cdot \alpha_{кр.}]}_{\text{от скольжения законцовки}} \quad (11)$$

Угол стреловидности законцовки [1] $\lambda_{зак.}^{DLR-F4} = 45^{\circ} = \frac{\pi}{4}$. Подставляя значений разных

углов развала в (11) можно получить зависимости $F_{зак.}^{DLR-F4}(\alpha_{кр.})$ для частных случаев:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Для горизонтальной законцовки } \psi = \frac{\pi}{2}: \quad F_{зак_ \psi = \frac{\pi}{2}}^{DLR-F4}(\alpha_{кр.}) \approx [2.3\alpha_{кр.} + 10.26] \cdot \cos^2(\frac{\pi}{4}) \\ \text{Для вертикальной законцовки } \psi = 0: \quad F_{зак_ \psi = 0}^{DLR-F4}(\alpha_{кр.}) \approx 10.26 \cdot \cos^2[\frac{\pi}{4} + \alpha_{кр.}] \quad (12) \\ \text{Для законцовки с развалом } \psi = \frac{\pi}{4}: \quad F_{зак_ \psi = \frac{\pi}{4}}^{DLR-F4}(\alpha_{кр.}) \approx [1.15\alpha_{кр.} + 10.26] \cdot \cos^2[\frac{\pi}{4} + 0.5 \cdot \alpha_{кр.}] \end{array} \right.$$

На рис. 2 ниже приведены графики данных зависимостей, показывающие критичное влияние угла развала законцовки ψ на величину нагрузки на нее, где при нулевом $\alpha_{кр.} F_{зак.}^{DLR-F4}$ не зависит от ψ , а вследствие роста собственного угла атаки с ростом угла атаки крыла, уже на $\alpha_{кр.} \approx 4^\circ$ горизонтальная законцовка испытывает аэродинамическую нагрузку в 2 раза большую чем вертикальная, нагрузка на которую наоборот уменьшается из-за роста ее собственного угла скольжения.

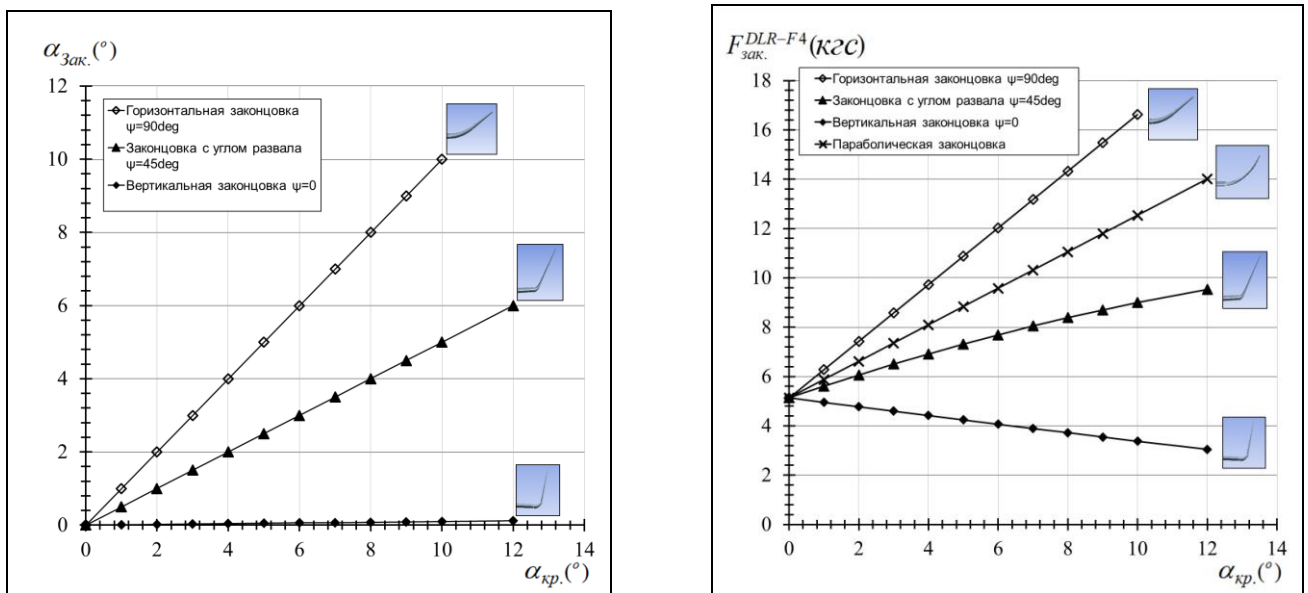


Рис.2. а. Теоретическая зависимость собственного угла атаки законцовки (без крутки) от угла атаки крыла (самолёта) при разных углах развала. б. Аэродинамическая нагрузка, действующая на законцовку DLR-F4 в зависимости от угла атаки крыла $\alpha_{кр.}$ для законцовок с разными углами развала.

2.2- Схема работы неплоского крыла под аэродинамической нагрузкой

Из приведенной на рис. 3 схемы нагружения консоли крыла с законцовкой, система крыло-законцовка может быть заменена свободнонесущей балкой, где законцовка заменяется сосредоточенными нагрузками в виде сосредоточенного

момента силы $F_{зак}$ на плечо в полуразмах законцовки: $M_{Зак.}^{Cocp.} = F_{зак.} \cdot \frac{L_{зак.}}{2}$ и

сосредоточенная подъёмная составляющая $Y_{зак.}$ увеличивает $M_{изг.}$ в корне крыла на

величину: $M_{зак.}^Y = Y_{зак.} \cdot L_{зак.}^Y$.

Из рис.4б видно, что подъёмная и боковая составляющие:
$$\begin{cases} Y_{зак.} = F_{зак.} \cdot \sin(\psi) \\ Z_{зак.} = F_{зак.} \cdot \cos(\psi) \end{cases}$$

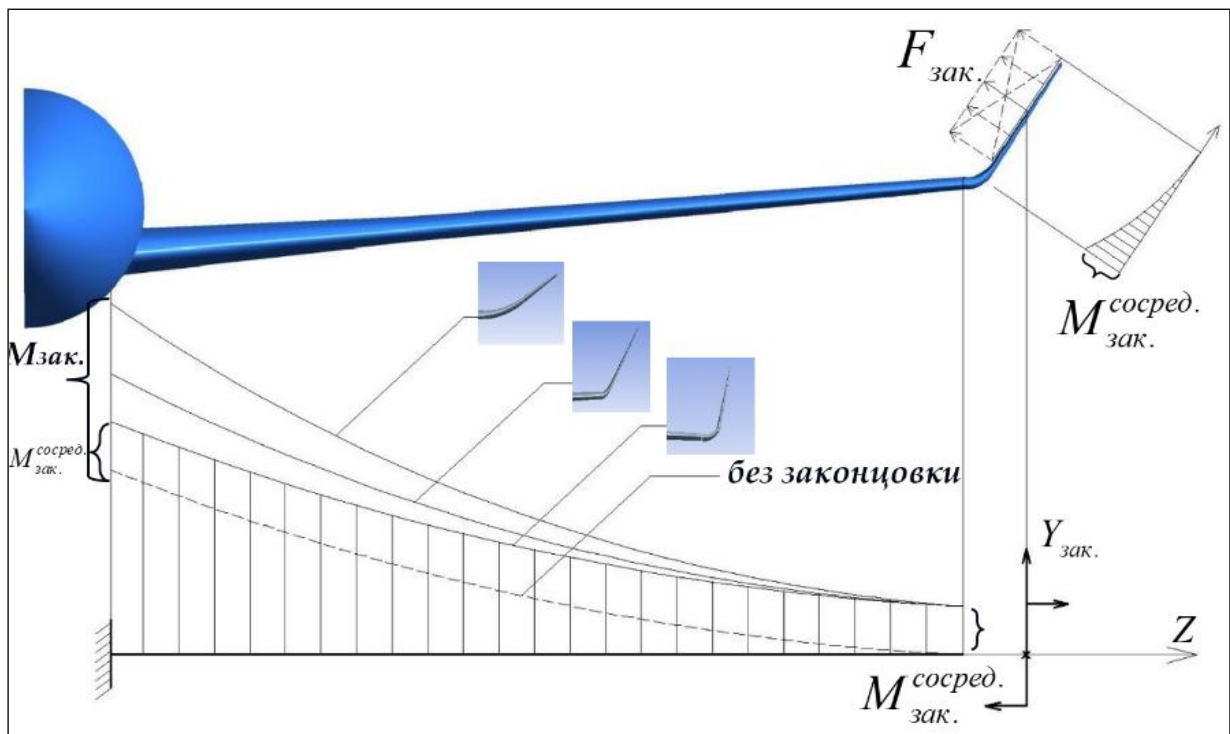


Рис.3. Схема нагружения консоли крыла с учётом дополнительной аэродинамической нагрузки $F_{зак.}$, действующей на законцовки с разными углами развала

Плечо несущей силы $Y_{зак.}$ складывается из размаха крыла и дополнительного плеча, в виде проекции полуразмаха законцовки, которая зависит от угла развала (см. рис.4б):

$L_{Зак.}^Y = L_{кр.} + \frac{L_{зак.}}{2} \cdot \sin(\psi)$. Тогда приращение $M_{изг.}$, обусловленное наличием

$Y_{зак.} : M_{зак.}^Y = Y_{зак.} \cdot \left[L_{кр.} + \frac{L_{зак.}}{2} \cdot \sin(\psi) \right]$, а общее приращение $M_{изг.} [кгс \cdot м]$ от

законцовки получается:

$$M_{зак.} = F_{зак.} \cdot \frac{L_{зак.}}{2} + Y_{зак.} \cdot \left[L_{кр.} + \frac{L_{зак.}}{2} \cdot \sin(\psi) \right] \quad (13)$$

Здесь, боковая $Z_{зак.}$ исключена т.к. она мало влияет на изгибающий момент, а лишь увеличивает не критичных для консоли крыла сжимающих усилий (пренебрегая влияние поперечного V крыла, ведущего к образованию внецентренного сжатия от $Z_{зак.}$). Подставляя в (13) значение $Y_{зак.} = F_{зак.} \cdot \sin(\psi)$ получим окончательное выражение приращения изгибающего момента от законцовки:

$$M_{зак.} = F_{зак.}(\psi) \cdot \left[\frac{L_{зак.}}{2} + \sin(\psi) \cdot L_{кр.} + \frac{L_{зак.}}{2} \cdot \sin^2(\psi) \right] \quad (14)$$

Из (14) видно, что увеличение $M_{зак.}$ из-за большего угла развала законцовки, складывается из одновременного увеличения величины нагрузки $F_{зак.}(\psi)$ (см. рис. 2 б), несущей составляющей этой нагрузки $Y_{зак.} = F_{зак.} \cdot \sin(\psi)$, а также несколько из-за увеличения плеча $Y_{зак.}$ до корня крыла, через увеличение проекции полуразмаха законцовки $\frac{L_{зак.}}{2} \cdot \sin(\psi)$ (рис. 4б). Для количественного сопоставления теоретической величины изгибающего момента в корне крыла при установке разных законцовок, можно подставлять в (14) значения аэродинамической нагрузки из (12), полуразмах

крыла DLR-F4 $L_{кр.}^{DLR-F4} = 0.58м$ и размах законцовки, исследованной в [1]

$$L_{зак.}^{DLR-F4} = 0.1м :$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Для горизонтальной законцовки } \psi = \frac{\pi}{2} : M_{зак-\psi=\frac{\pi}{2}}^{DLR-F4}(\alpha_{кр.}) \approx [2.3\alpha_{кр.} + 10.26] \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot 0.68 \\ \text{Для вертикальной законцовки } \psi = 0 : M_{зак-\psi=0}^{DLR-F4}(\alpha_{кр.}) \approx 10.26 \cdot \cos^2\left[\frac{\pi}{4} + \alpha_{кр.}\right] \cdot 0.05 \\ \text{Для законцовки с развалом } \psi = \frac{\pi}{4} : M_{зак-\psi=\frac{\pi}{4}}^{DLR-F4}(\alpha_{кр.}) \approx [0.56\alpha_{кр.} + 4.97] \cdot \cos^2\left[\frac{\pi}{4} + 0.5 \cdot \alpha_{кр.}\right] \end{array} \right. \quad (15)$$

На рис. 4а., приведены графики приращения изгибающего момента в корне крыла модели DLR-F4 при установке вертикальной, горизонтальной и законцовки общего случая с $\psi = \frac{\pi}{4}$, из формул (15).

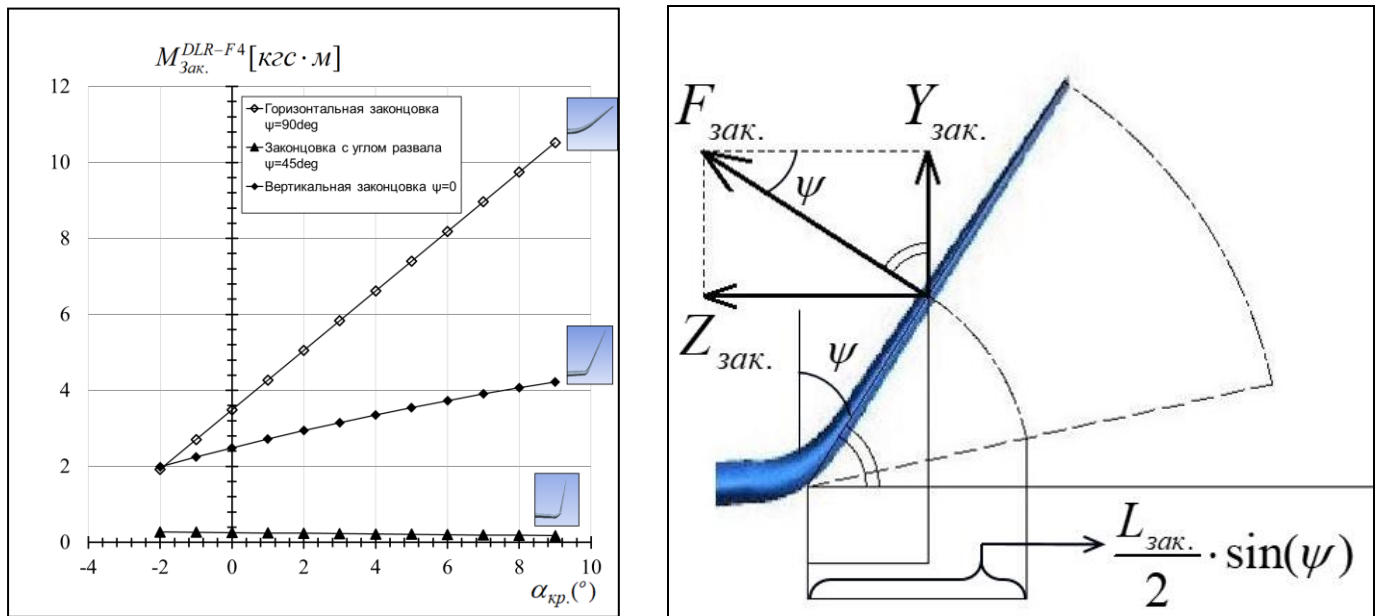


Рис.4. а. Приращение изгибающего момента в корне крыла в зависимости от угла атаки крыла DLR-F4 для законцовок с разными углами развала. б. Боковая и подъёмная составляющие, плечо аэродинамической нагрузки на законцовку $F_{зак.}$

Из графика на рис. 4 а. можно сделать вывод, что поскольку вся аэродинамическая нагрузка, действующая на вертикальную законцовку, боковая и уменьшающаяся с ростом $\alpha_{кр.}$, данная законцовка практически не увеличивает $M_{изг.}$ в корне крыла и ничтожно малое его приращение обусловлено лишь сосредоточенным моментом в ее корне. В сравнении с законцовкой общего случая, горизонтальная законцовка в 3 раза быстрее увеличивает $M_{изг.}$ из-за роста как величины нагрузки на нее вместе с ее несущей составляющей, которая является основной, так и плеча данной нагрузки до корня крыла. Также заметим, что несмотря на одинаковую величину нагрузки на разных законцовках при нулевом угле атаки крыла (см. рис. 2 б), приращение изгибающего момента получается разной вследствие разной несущей составляющей, а также разного ее плеча.

2.3- Аэродинамическая нагрузки по размаху криволинейного на виде спереди крыла

Результатом оптимизации геометрии законцовки по критерию максимального аэродинамического качества в [1] является концепция криволинейной на виде спереди законцовки, имеющей переменный по размаху (координате z) угол развала: $\psi(z)$. Для такой законцовки, в ранее полученных для прямолинейной законцовки зависимостях (11) и (14), постоянная аэродинамическая нагрузка на законцовку (11) и постоянный угол развала заменяются функциями от координаты z , задающими местную величину аэродинамической нагрузки. Местный угол атаки по размаху законцовки есть функция

от местного угла развала: $\alpha_{зак.}(z) = \frac{\psi(z)}{\pi/2} \alpha_{кр.}$, где при увеличении угла атаки крыла,

местный угол атаки по размаху законцовки $\alpha_{зак.}(z)$ увеличивается тем в меньшей степени, чем ближе к концевым сечениям криволинейной на виде спереди законцовки, обладающим меньшими углами развала $\psi(z)$. Это ведёт к неравномерному росту аэродинамической нагрузки $F_{зак.}(z)$ по размаху законцовки в сторону разгрузки ее концевых сечений (рис. 5 б.). Таким образом, из формулы (5) видно, что каждое элементарное сечение z по размаху законцовки имеет свой коэффициент аэродинамической нагрузки, который для законцовки с профилем DFVLR-R4, исходя из (5), примерно равен:

$$C_{F_{зак.}}^{DLR-F4}(z) \approx [0.1\alpha_{зак.}(z) + 0.45] \cdot \cos^2[\beta_{зак.}(z)] \quad (16)$$

Подставляя (8) и (10), получим выражение $C_{F_{зак.}}^{DLR-F4}(z)$ по углу атаки крыла:

$$C_{F_{зак.}}^{DLR-F4}(z) \approx [0.1 \frac{\psi(z)}{\pi/2} \alpha_{кр.} + 0.45] \cdot \cos^2[\lambda_{зак.} + (1 - \frac{\psi(z)}{\pi/2}) \cdot \alpha_{кр.}] \quad (17)$$

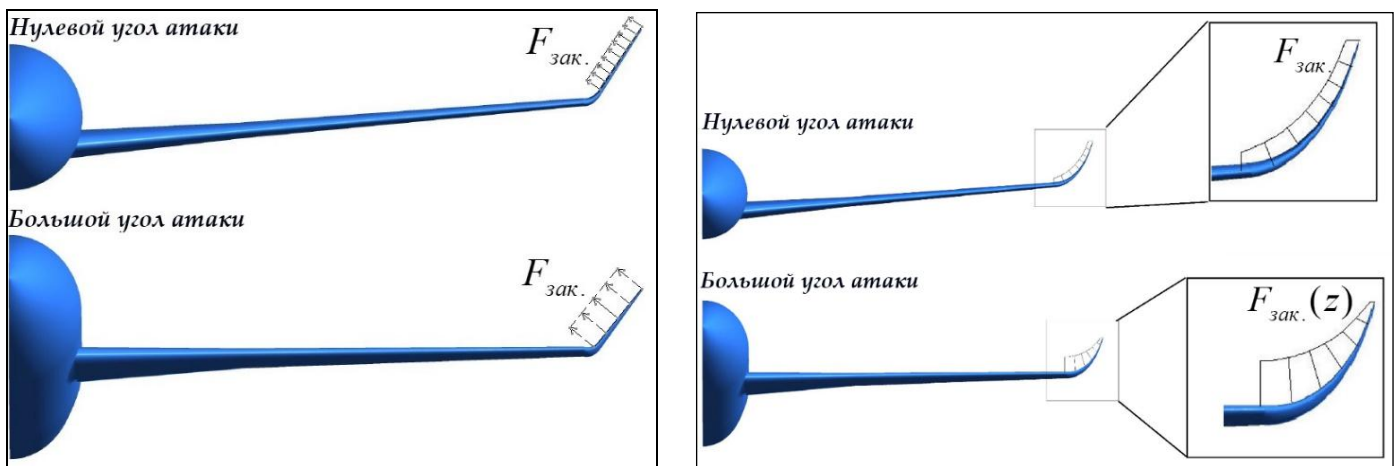


Рис. 5. а. Примерно одинаковый рост аэродинамической нагрузки по размаху прямой законцовки при росте $\alpha_{кр.}$ б. Неравномерный рост аэродинамической нагрузки по размаху криволинейной на виде спереди законцовки крыла вследствие неодинакового местного угла атаки в разных сечениях.

Из исследования [1], функция переменного развала по размаху криволинейной на виде спереди законцовки, фронтальная проекция которой задаётся в виде параметризирующей функции второго порядка $Y(z)$, равна:

$$\psi(z) = \frac{\pi}{2} - \arctan[Y'(z)] \quad (18)$$

Кроме того, исходя из местной величины хорды (при известном сужении законцовки), и элементарной длины дуги кривой $Y(z)$: $dL_{зак.}(z)$, можно определить площадь элементарного сечения криволинейного на виде спереди крыла как:

$$S_{зак.}(z) = b_{зак.}(z) \cdot dL_{зак.}(z) = b_{зак.}(z) \cdot \sqrt{1 + [Y'(z)]^2} \quad (19)$$

Из (4), аэродинамическая нагрузка в каждом сечении по координате (z) криволинейной на виде спереди законцовки:

$$F_{зак.}(z) = C_F^{зак.}(z) \cdot S_{зак.}(z) \cdot \rho \frac{V^2}{2} \quad (20)$$

Подставляя сюда (17), (18) и (19) получим окончательно функцию распределения аэродинамической нагрузки по размаху законцовки с профилем DFVLR-R4, заданной произвольной параметризирующей функцией второго порядка $Y(z)$:

$$F_{зак.}(z) = \left[0.1 \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan[Y'(z)]}{\pi/2} \alpha_{кр.} + 0.45 \right] \cdot \cos^2 \left[\lambda_{зак.} + \left(1 - \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan[Y'(z)]}{\pi/2} \right) \cdot \alpha_{кр.} \right] \cdot b_{зак.}(z) \cdot \sqrt{1 + [Y'(z)]^2} \cdot \rho \frac{V^2}{2} \quad (21)$$

А ее общая величина может быть просуммирована интегрированием (20) или (21) по размаху законцовки:

$$F_{зак.}^{DLR-F4}(\alpha_{кр.}) = \int_{z_0}^{z_1} C_F^{зак.}(z) \cdot S_{зак.}(z) \cdot \rho \frac{v^2}{2} \cdot dz = \left(\rho \frac{v^2}{2}\right) \cdot \int_{z_0}^{z_1} C_F^{зак.}(z) \cdot S_{зак.}(z) \cdot dz \quad (22)$$

В качестве примера для количественного сопоставления величины нагрузки на криволинейную на виде спереди законцовку и её изменение по углу атаки крыла (в сравнении с классическими законцовками той же площади), рассмотрим простейший частный случай параболической законцовки (рис. 6 а.). Передняя проекция параболической законцовки приведённой на рис. 6 задаётся с помощью параметризирующей функции параболы $Y^{Параб.}(z) = 10 \cdot z^2$. Из (18), ее местный угол развала задаётся функцией:

$$\psi(z) = \frac{\pi}{2} - \arctan[Y'(z)] = \frac{\pi}{2} - \arctan[20 \cdot z] \quad (23)$$

Подставляя (23) в (21) получим распределение аэродинамической нагрузки по размаху этой параболической законцовки при скоростном напоре крейсерского режима

$\rho \frac{V^2}{2} = 5.7 \cdot 10^3 \text{ кгс} / \text{м}^2$ и крейсерском угле атаки крыла $\alpha_{кр.} = 2^\circ \approx 0.035 \text{ рад}$:

$$F_{параб_зак.}^{DLR-F4}(z) = [0.1 \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan[20z]}{\pi/2} \cdot 0.035 + 0.45] \cdot \cos^2[\frac{\pi}{4} + (1 - \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan[20z]}{\pi/2}) \cdot 0.035] \cdot [0.06 - 0.55z] \cdot \sqrt{1 + [20z]^2} \cdot 5.7 \cdot 10^3 \quad (24)$$

Распределение нагрузки $F_{параб_зак.}^{DLR-F4}(z)$ по размаху параболической законцовки согласно (24) приведено на рис. 6 б., где видно смещение нагрузки к корню и разгружение концевых сечений. Интегрируя (24) по размаху законцовки, можно

вычислить общую величину нагрузки $F_{\text{параб_зак.}}^{DLR-F4}$. Для упрощения интегрирования, пренебрегаем эффектом скольжения (косинус), который проявляется только на концевых сечениях с малыми $\psi(z) \ll \frac{\pi}{2}$, и принимаем местный угол скольжения постоянным по размаху и равным углу стреловидности законцовки: $\lambda_{\text{зак.}} = \frac{\pi}{4}$.

Значение конечной координаты z_1 можно определить из площади законцовки, равной

$S_{\text{зак.}}^{DLR-F4} = 0.004 \text{ м}^2 \approx L_{\text{зак.}} \cdot \frac{b_{\text{зак.}}^0 + b_{\text{зак.}}^1}{2}$. В случае криволинейной на виде спереди

законцовки, её общий размах равен длине дуги кривой $Y(z): L_{\text{зак.}} = \int_{z_0}^{z_1} \sqrt{1+[Y'(z)]^2} dz$.

Для параболической законцовки с корневой хордой $b_{\text{зак.}}^0 = 0.06 \text{ м}$, концевой

$b_{\text{зак.}}^1 = 0.018 \text{ м}$ и площадью $S_{\text{зак.}}^{DLR-F4} = 0.004 \text{ м}^2$:

$$0.004 \approx \int_0^{z_1} \sqrt{1+[Y'(z)]^2} dz \cdot \frac{0.06+0.018}{2} \approx \int_0^{z_1} \sqrt{1+[20 \cdot z]^2} dz \cdot 0.039 \longrightarrow z_1 \approx 0.076 \text{ м}$$

Местная хорда меняется по закону: $b_{\text{зак.}}(z) = b_{\text{зак.}}^0 - \frac{b_{\text{зак.}}^0 - b_{\text{зак.}}^1}{z_1} z = 0.06 - 0.55z$

Подставляя в (21) и (22) найдем общую величину аэродинамической нагрузки на параболическую законцовку по углу атаки крыла как интеграл по размаху:

$$F_{\text{параб_зак.}}^{DLR-F4}(\alpha_{\text{кр.}}) \approx \rho \frac{V^2}{2} \cdot \int_0^{0.076} [0.1 \frac{\pi - \arctan(20z)}{\pi/2} \alpha_{\text{кр.}} + 0.45] \cdot \cos^2(\lambda_{\text{зак.}}) \cdot (0.06 - 0.55z) \cdot \sqrt{1+[20z]^2} dz \quad (25)$$

Подставляя сюда скоростной напор: $\rho \frac{V^2}{2} = 5.7 \cdot 10^3 \text{ кгс} / \text{м}^2$ и $\lambda_{\text{зак.}} = \frac{\pi}{4}$, применением программного комплекса математического расчёта MathCAD prime 3.0, находим:

$$F_{\text{параб_зак.}}^{DLR-F4}(\alpha_{\text{кр.}}) \approx 0.74\alpha_{\text{кр.}} + 5.364 \quad (26)$$

График $F_{\text{параб_зак.}}^{DLR-F4}(\alpha_{\text{кр.}})$ из (26) был внесен на рис.2 б. вместе с графиками нагрузок, действующих на другие (прямые) законцовки для наглядного сравнения. Можно заметить, что рост аэродинамической нагрузки по углу атаки, быстрее чем у прямолинейной законцовки среднего развала $\psi = \frac{\pi}{4}$, однако заметно медленнее чем у горизонтальной законцовки. Если при интегрировании учесть скольжение на концевых сечениях и падение нагрузки на них, рост по синусоиде (вместо приближённо полученного линейного роста) получился бы еще более заметно медленнее, особенно на больших углах атаки крыла.

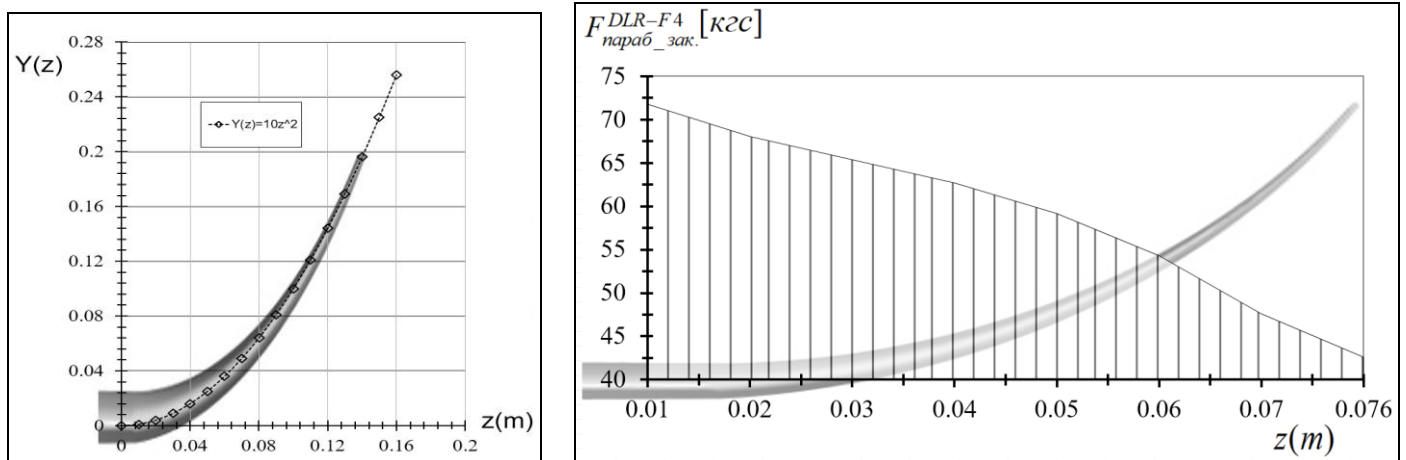


Рис. 6. а. Пример параметризации криволинейной на виде спереди законцовки через функцию второго порядка (парабола) б. Теоретическое распределение аэродинамической нагрузки по размаху параболической концевой части крыла, полученное применением формулы (21)

Из зависимости (14), вклад в рост изгибающего момента в корне крыла от каждого элементарного сечения координаты z законцовки равен:

$$M_{зак.}(z) = F_{зак.}(z) \cdot \left[\frac{L_{зак.}}{2} + \sin(\psi(z)) \cdot L_{кр.} + \frac{L_{зак.}}{2} \cdot \sin^2(\psi(z)) \right] \quad (27)$$

А общее приращение изгибающего момента при установке криволинейной на виде спереди законцовки суммируется интегрированием функции (27) по размаху законцовки:

$$M_{зак.} = \int_{z_0}^{z_1} F_{зак.}(z) \cdot \left[\frac{L_{зак.}}{2} + \sin(\psi(z)) \cdot L_{кр.} + \frac{L_{зак.}}{2} \cdot \sin^2(\psi(z)) \right] \cdot dz \quad (28)$$

3. Экспериментально-вычислительный расчёт аэродинамической нагрузки на неплоское крыло

В качестве экспериментальной проверки для разработанной в пункте 2. методики проектировочного расчета аэродинамической нагрузки по размаху разных конфигураций неплоского, в т. ч. криволинейного на виде спереди крыла, можно привести некоторых результатов многодисциплинарного вычислительного расчёта, выполненного в [1] и [16]. Сравнение вычислительных величин максимальных напряжений по размаху крыла с разными законцовками с крылом без законцовки на рис. 7, подтверждает полученные проектировочным расчётом величины аэродинамической нагрузки и изгибающего момента в корне крыла на рис. 2. б. и рис.

4, а., где заметно малое приращение напряжений при установке вертикальной законцовки.

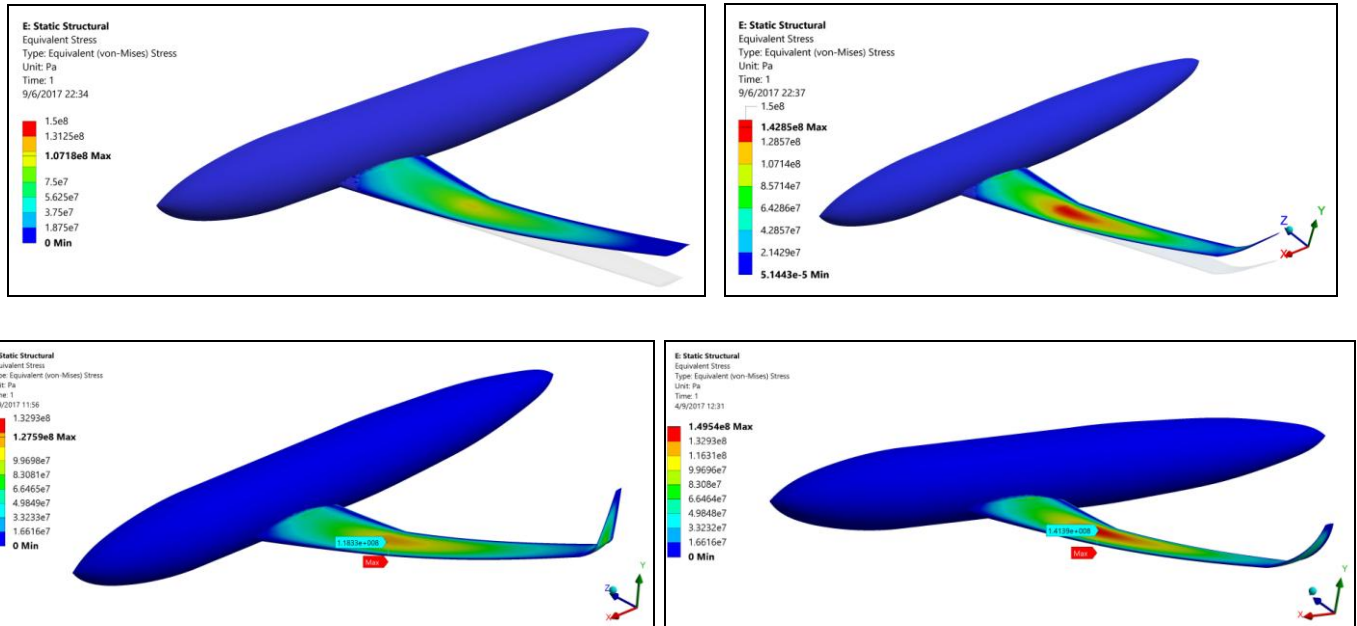


Рис. 7. Распределение максимальных напряжений по размаху крыла а. Без законцовки; б. С горизонтальной законцовкой; в. С вертикальной законцовкой г. С параболической законцовкой

Подставляя полученных вычислительным экспериментом значений максимальных напряжений из Рис. 7 в формуле (3), можно найти результирующие приращения взлётной массы, где общий объём крыла DLR-F4 $V_{DLR-F4}^{кр\text{было}} \approx 974.5 \text{ м}^3$, а масса законцовки вне зависимо от ее конфигурации $\Delta m_{\text{дон.}} = m_{\text{зак.}} \approx 766 \text{ г}$. (3) становится:

$$\Delta m_0 = (0.008 \cdot 974.5) \Delta \sigma_{\text{max}} + 766 \quad (29)$$

Подставляя Δm_0 в целевую функцию топливной эффективности (1) вместе с приращениями аэродинамического качества, полученных также вычислительно в [1], можно найти окончательно весовой эквивалент (кг на единицу роста качества) каждой конфигурации. Значения внесены табл.2, из которой следует, что для рассмотренной модели DLR-F4, весовая стоимость увеличения качества на единицу при установке

законцовки составляет 1,6...1,8кг. Можно заметить, что несмотря на меньший рост взлётной массы при установке вертикальной законцовки, весовой эквивалент оказывается выше вследствие более медленного роста аэродинамического качества.

Итоговая оценка улучшения топливной эффективности модели DLR-F4 при каждом из рассмотренных проектных решений была получена расчетом приращения (уменьшения) потребной тяги в % по сравнению с исходным значением, которое исходя из массы модели $m_{DLR-F4} \approx 40\text{кг}$ и ее максимального качества (которое будем считать крейсерским) из продувок в АТ [17-18] $K_{DLR-F4} \approx 17$: $P_{норм.}^{DLR-F4} \approx \frac{40}{17} \approx 2.35\text{кгс}$.

Тип законцовки	Максимальное напряжение σ_{\max} , МПА	Приращение $\Delta\sigma_{\max}^{зак}$, МПА	Приращение взлётной массы, кг	Приращение качества	Весовой эквивалент, кг	Приращение потребной тяги, %
Крыло DLR-F4 без законцовки	107,18	-	-	-	-	-
Горизонтальная	142,85	35,67	1,044	0,62	1,68	-1.77
Вертикальная	127,59	20,41	0,925	0,51	1,79	-1.24
Параболическая	149,54	42,36	1,096	0,67	1,63	-2.05

Табл. 2. Весовой эквивалент установки законцовки различных конфигураций к крылу DLR-F4 и приращение потребной тяги крейсерского режима полета

Сравнение распределения максимальных напряжений по размаху прямой и криволинейной на виде спереди законцовок на рис. 8 ниже, подтверждает теоретическое распределение нагрузки по размаху на рис. 5. б. и рис. 6. б., а также преимущество криволинейной на виде спереди формы, в плане снижения концентрации напряжения в корне законцовки. Более подробно, результаты

вычислительного эксперимента и картина трёхмерного обтекания концевой части крыла приведены в [1].

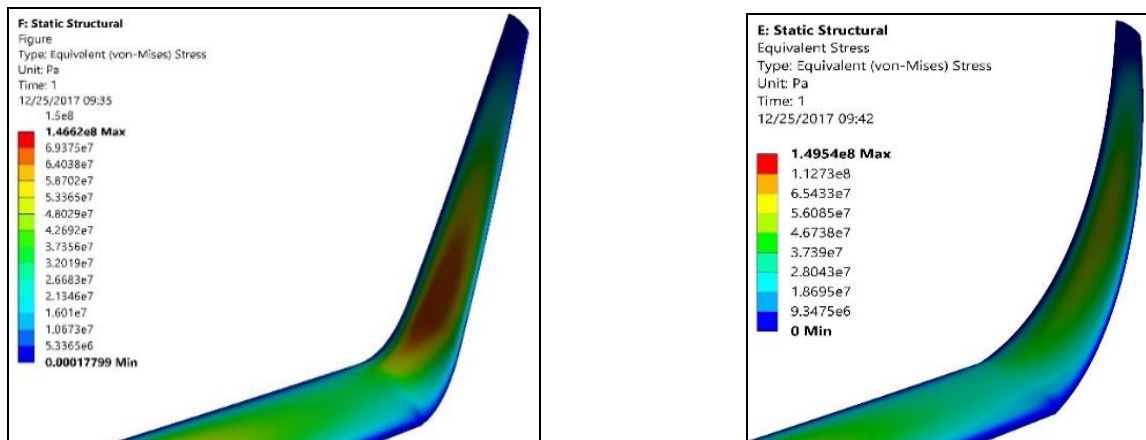


Рис. 8. а. Распределение максимальных напряжений по размаху прямой законцовки б. Распределение максимальных напряжений по размаху криволинейной на виде спереди законцовки, показывающее снижение концентрации напряжения около корня законцовки.

3- Применение распределения нагрузки по размаху крыла для анализа аэродинамики деформированного крыла и задач аэроупругости

Широкое применение композитных материалов в конструкции крыльев современных пассажирских самолетов позволяет увеличить удлинение крыла без потери жёсткости ввиду повышенного модуля Юнга у углепластиков в сравнении с алюминиевыми сплавами. Однако более легкая конструкция композитной консоли ведёт к значительной пассивной деформации под аэродинамической нагрузкой [19]. К примеру, перемещение концевки крыла самолета Boeing 787 [20] составляет около 3-х метров. Деформированное крыло, как правило, образует криволинейную на виде спереди форму, которую можно легко параметризовать через функцию второго порядка. На рис. 8 приведен пример деформированного крыла модели DLR-F4,

которая подвергалась вычислительной продувке дозвуковым потоком $M=0.6$ на угле атаки $\alpha = 2^\circ$. Как показано на рис. 8, форма деформированного крыла может быть задана параметризующей функцией параболы $Y(z) = 0.22 \cdot z^2$. Используя зависимость (21), подставляя геометрических параметров крыла вместо законцовки, можно получить распределение аэродинамической нагрузки по размаху деформированного крыла DLR-F4:

$$F_{\text{зак.}}(z) = [0.1 \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan[0.44 \cdot z]}{\pi/2} - 0.035 + 0.45] \cdot \cos^2[0.38 + (1 - \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan[0.44 \cdot z]}{\pi/2}) \cdot 0.035] \cdot (29) \cdot (0.24 - 0.25z) \cdot \sqrt{1 + [0.44 \cdot z]^2} \cdot 5.7 \cdot 10^3$$

Распределение нагрузки согласно (29) внесена на рис.8 ниже по размаху (z) деформированного крыла.

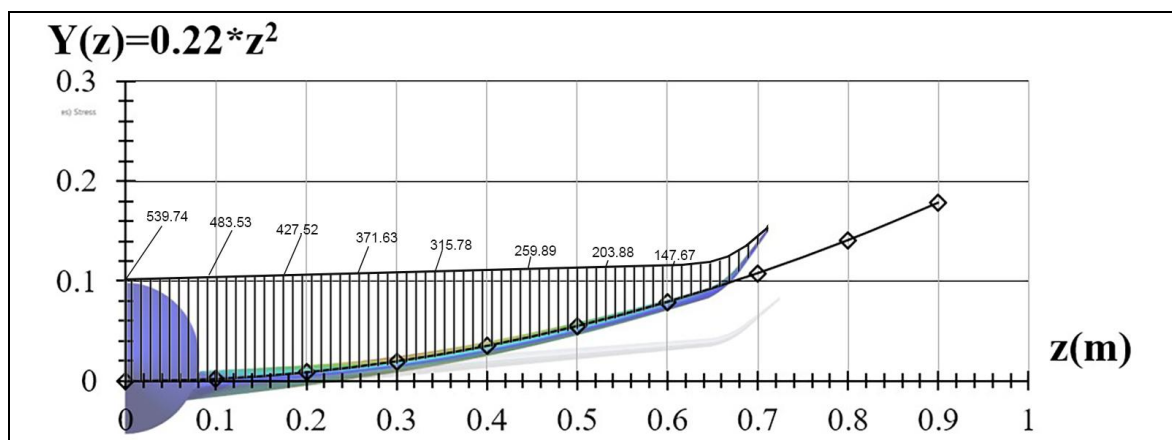


Рис.8. Применение функции распределения аэродинамической нагрузки по размаху криволинейной на виде спереди несущей поверхности из формулы (21) для проективного расчёта нагрузки по размаху деформированного крыла модели DLR-F4, которое в деформированном состоянии параметризуется параболой.

Заключение

Приведено теоретическое исследование работы крыла пассажирского самолета неплоской схемы под аэродинамической нагрузкой на различных углах атаки. На основе анализа приращений местных углов атаки и скольжения, которые меняются одновременно при изменении общего угла атаки самолета, разработана методика проектировочного расчёта величины аэродинамической нагрузки на конечном неплоском участке в виде законцовок типа винглет Уиткомба различных конфигураций, а также рост изгибающего момента в корне крыла. Детальное изучение криволинейной на виде спереди законцовки, как частный случай неплоского крыла, позволило получить функцию распределения аэродинамической нагрузки в зависимости от выбранной для параметризации криволинейной формы на виде спереди функции второго порядка. Обобщение полученной функции распределения нагрузки по размаху криволинейной на виде спереди несущей поверхности на весь размах деформированного крыла позволяет решить задачи аэроупругости. Так как форма крыла в деформированном состоянии может быть легко параметризована через любую функцию второго порядка.

Определение на этапе проектировочного расчёта точного значения приращения величины аэродинамической нагрузки и закономерностей изменения ее распределения по размаху позволяет выполнить оценку весового эквивалента пропорциональному росту аэродинамического качества при данном техническом решении. Итоговый рост максимальных напряжений, вызванный ростом нагрузки и/или ее перераспределения

по размаху, был заложен в целевую функцию топливной эффективности самолета, как конечный показатель совершенства выбранной компоновки.

Таким образом, приведенная в данной работе методика имеет достаточно большую практическую значимость при проектировочном расчёте крыльев большого удлинения с концевыми устройствами, что позволяет оптимизировать их параметры на этапе выбора компоновки крыла, в том числе с учетом его аэроупругих характеристик.

Библиографический список

1. Gueraiche D, Popov S. Winglet Geometry Impact on DLR-F4 Aerodynamics and an Analysis of a Hyperbolic Winglet Concept // Aerospace, 2017, 4(4), 60, available at: <https://doi.org/10.3390/aerospace4040060>
2. Гуереш Д. Исследование прироста аэродинамических нагрузок при установке законцовки на крыле дозвукового пассажирского самолета // XLIII Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские Чтения – 2017», Москва, 05-19 апреля 2017: тезисы докладов. - М.: Изд-во МАИ, 2017. С. 11 - 12.
3. Гуереш Д. Вычислительный и математический анализ вдохновлённых природой концепций концевых устройств: адаптированной передней кромки крыла и криволинейной законцовки // Международная Авиационно-Космическая Конференция и Выставка. ОАЭ «ICSAAE-2018». Абу-Даби, 26-27 февраля 2018: тезисы докладов. URL: <https://www.scientificfederation.com/aeronautical-engineering-2018/>

4. Кощеев А.Б., Платонов А.А., Хабров А.В. Аэродинамика самолетов семейства Ту-204/214. - М.: Полигон-Пресс, 2009. - 304 с.
5. Norton D.A., Olason M.L. Aerodynamic design philosophy of the Boeing 737 // Journal of Aircraft, 1966, vol. 3, no. 6, pp. 524 - 528, available at: <https://doi.org/10.2514/3.43771>
6. Christopher Gedeon, Shane Huffer, and Timothy T. Takahashi. Multi-Disciplinary Design of an Advanced Narrow-Body Transport Aircraft // Aviation Technology, Integration, and Operations Conference, AIAA AVIATION Forum, (AIAA 2013-4329), August 12-14, 2013, Los Angeles, available at: <https://doi.org/10.2514/6.2013-4329>
7. Крутов А.А., Пигусов Е.А., Чернавских Ю.Н., Черноусов В.И. Концептуальное проектирование тяжелого транспортного самолета нового поколения // Труды МАИ. 2018. №99. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=91810>
8. Арутюнов А.Г., Дыдышко Д.В., Ендогур А.И., Кузнецов К.В., Толмачев В.И. Перспективы развития транспортных самолетов // Труды МАИ. 2016. № 90. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=74704>
9. Ефремов А.В., Захарченко В.Ф., Овчаренко В.Н. Динамика полета. – М.: Машиностроение, 2011. - 775 с.
10. Anderson J.D. Introduction to Flight, McGraw-Hill, New York, Fourth Edition, 2012, 925 p.
11. Егер С.М. Проектирование самолетов. - М.: Логос, 2005. - 612 с.
12. Ендогур А.И. Конструкция самолетов. Конструирование деталей и узлов. – М.: Изд-во МАИ, 2013. - 546 с.

13. Войт Е.С., Ендогур А.И. Проектирование конструкций самолетов. – М.: Машиностроение, 1987. - 407 с.
14. Краснов Н.Ф. Аэродинамика. Основы теории. Аэродинамика профиля и крыла. – М.: URSS, 2010. Ч. 1. - 496 с.
15. Anderson J.D. Fundamentals of aerodynamics. McGraw-Hill Series in Aeronautical and Aerospace Engineering, New York, 2011, 1106 p.
16. Гуереш Д., Попов С.А. Улучшение аэродинамики крыла пассажирского самолета с помощью законцовки треугольной формы в плане // Научный вестник МГТУ ГА. 2018. Т. 21. № 1. С. 124 - 136.
17. Redeker G. DLR-F4 Wing Body Configuration/A Selection of Experimental Test Cases for the Validation of CFD Codes. In AGARD-AR-303. Advisory Group for Aerospace Research and Development, Neuilly-Sur-Seine, France, 1994, vol. II, pp. 1 – 24.
18. McDonald M.A. AGARD-AR-303. Advisory Group for Aerospace Research and Development, Neuilly-Sur-Seine, France, 1994, vol. 1B, pp. 863 - 876.
19. Nhan Nguyen, Khanh Trinh, Kevin Reynolds et al. Elastically Shaped Wing Optimization and Aircraft Concept for Improved Cruise Efficiency. NASA Report 2010, available at:
https://www.nas.nasa.gov/assets/pdf/staff/Aftosmis_M_Elastically_Shaped_Wing_Optimization_and_Aircraft_Concept_for_Improved_Cruise_Efficiency.pdf
20. Boeing 787, available at: <http://www.boeing.com/commercial/787/>