

Научная статья

УДК 539.3

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=178457>

О МЕХАНИЗМАХ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ МОДИФИЦИРОВАННЫХ КОМПОЗИТОВ С ВИСКЕРИЗОВАННЫМИ ВОЛОКНАМИ

Денис Сергеевич Шавелкин

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Москва, Россия

dshavelkin@inbox.ru

Аннотация: В работе исследуется устойчивость модифицированных композитов с вискеризованными волокнами. В рамках исследования решаются следующие задачи – статическая задача о локальном нагружении и задача устойчивости слоистых консольно закрепленных стержней, изготовленных из изучаемых композитов. При решении статической задачи о локальном нагружении рассматривается волокнистый модифицированный композит, который нагружается сжимающими силами вдоль волокон, что сопровождается различными механизмами разрушения, обусловленных изгибом волокон. Оказалось, что межфазный слой с регулируемой жесткостью, позволяет при одной и той же объемной доле армирующих волокон (для классического композита армирующим элементом выступает волокно, а для рассматриваемого модифицированного композита – волокно с выращенными на его поверхности наноструктурами) добиться существенно большей локальной

устойчивости, определяющей характерный тип микроповреждений при сжатии. При решении задачи устойчивости стержней, изготовленных из изучаемых композитов, рассматривались слоистые стержни с различными схемами укладок и различными объемными содержаниями включений. Определялись коэффициенты критических нагрузок для каждого из исследуемых образцов. Полученные результаты для слоистых стержней из модифицированных композитов сравнивались с результатами, полученными для слоистых стержней из классического композита с теми же схемами укладок и с теми же объемными содержаниями включений.

Ключевые слова: композитный материал, устойчивость по Эйлеру, локальная устойчивость, эффективные свойства, метод трех фаз

Для цитирования: Шавелкин Д.С. О механизмах потери устойчивости модифицированных композитов с вискеризованными волокнами // Труды МАИ. 2024. № 134. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=178457>

Original article

ON THE MECHANISMS OF BUCKLING OF MODIFIED COMPOSITES WITH VISCOUS FIBERS

Denis S. Shavelkin

Moscow Aviation Institute (National Research University), MAI, Moscow, Russia
dshavelkin@inbox.ru

Abstract: The presented work studies stability of modified composites with whiskerized fibers. The following problems are being solved within the framework of the study: the static

problem of local loading and the problem of stability of layered cantilever rods made from the composites under study. When solving the static problem of local loading, a modified fiber composite, loaded by compressive forces along the fibers, which is accompanied by various fracturing mechanisms stipulated by the of the fibers bending, is being considered. It appeared that an interfacial layer with adjustable rigidity allowed, with the same volume fraction of reinforcing fibers (for a classical composite, the reinforcing element is fiber, and for the modified composite under consideration, a fiber with nanostructures grown on its surface) achieving significantly greater local stability, determining the characteristic type of micro-damage at compression. When solving the problem of stability of the rods made from the composites under study, layered rods with different laying patterns and different volumetric contents of inclusions were considered. Critical load factors were determined for each of the studied samples. An analysis of the influence of the volume content of the modified fiber on the minimum critical values of compressive stresses showed that the stability of the modified composite can be increased by more than 2 times compared to the stability of a similar classical composite. When studying the stability of layered cantilever rods, it turned out that modification of the fiber with a mustache makes it possible to increase the value of the critical load withstood by the rod by more than 1.9 times compared to the critical load withstood by a rod made of a classic fiber composite with the same volumetric content of inclusions for any of the considered schemes laying of reinforcing fibers.

Keywords: composite material, Euler stability, local stability, effective properties, three-phase method

For citation: Shavelkin D.S. On the mechanisms of buckling of modified composites with viscous fibers. *Trudy MAI*, 2024, no. 134. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=178457>

Введение

При сжатии стержней из композиционного слоистого материала реализуются следующие механизмы потери устойчивости: 1) выпучивание образца как целого (по Эйлеру), 2) отслоение и выщелкивание слоя характерной толщины, 3) расщепление на несколько частей с выпучиванием образовавшихся слоев [1]. Потери устойчивости на различных масштабных уровнях приводят к тому, что конструкция выходит из строя и перестает выполнять свои функции. Поэтому предотвращение потери устойчивости является важным критерием при проектировании конструктивных элементов. Анализ потери устойчивости методом конечных элементов может обеспечить высокую точность прогнозирования механических характеристик деталей, а аналитические решения обеспечивают более высокую эффективность вычислений при предварительном проектировании [2].

Внутренние формы потери устойчивости армирующих элементов в волокнистых композитах в условиях различных видов нагружения на различных масштабных уровнях широко исследовались Паймушиным и др. [3-5]. Авторами было показано, что процесс нагружения исследуемых образцов сопровождается непрерывной перестройкой структуры композита из-за реализации и непрерывной сменой исследуемых внутренних форм потери устойчивости при непрерывном изменении параметра волнообразования.

Проблема потери устойчивости имеет относительно короткую историю для ламинированных композитных пластин по сравнению с изотропными однородными пластинами. Тем не менее, за это короткое время были проведены значительные исследования и получены обширные результаты [6-8]. В первую очередь это связано с тем, что было разработано множество слоистых композитов, которые очень эффективны по сравнению с другими материалами, используемыми в конструкции, и все чаще применяются в дизайне. Аналогичная ситуация обстоит с композитными стержнями [9-12]. Например, в работе [12] представлена аналитическая методика расчета и проектирования конструктивных параметров элементов пространственных композитных конструкций в виде штанг опорной конструкции с учетом свойств выбранного материала и схемы армирования.

В последнее время с целью улучшения различных свойств волокнистых композитов исследуются различные способы модификации поверхности армирующего волокна, например, было показано, что выращивание перпендикулярно поверхности волокна специальных наноструктур – вискерсов позволяет улучшить жесткостные [13-14], прочностные [15], демпфирующие [14, 16] и тепловые свойства [17] таких композитов. А также выращивание вискерсов приводит к увеличению межфазной прочности при продольном и поперечных сдвигах [18-20]. Испытания, проведенные авторами работы [18] показали, что вискеризация волокна углеродными нанотрубками (УНТ) приводит к увеличению межфазной прочности композитного материала при продольном сдвиге на 206% сравнению с классическим волокнистым композитом. Аналогичные испытания, проведенные авторами работ [19, 20],

показали увеличение межфазной прочности у вискеризованных композитов по сравнению с классическими на 175% и 150% соответственно.

Также уже было проведено несколько экспериментальных исследований по определению прочности на сжатие [21,22]. Было показано [21], что на наноуровне продольная прочность композита армированного углеродного волокнами с выращенными на их поверхности УНТ увеличивается на 43 % по сравнению с аналогичным классическим композитом, а поперечная прочность увеличивается на 94 %. Также было показано [22], что при использовании метода вискеризации в тканых композитах из углеродного волокна прочность на сжатие в направлении поперек укладки ткани и прочность на сжатие в направлении вдоль укладки ткани можно увеличить соответственно на 32 % и на 115 %.

В этой работе изучается локальное выпучивание волокна в модифицированном композите с вискеризованными волокнами, определяется критическое сжимающее напряжение, при котором образец композитного материала прямой, в то время как волокна внутри материала изогнуты. Кроме этого, в работе исследуется устойчивость стержней, изготовленных из слоев с различными схемами укладки модифицированных вискерсами волокон. Оценивается влияние укладки армирующего волокна с вискеризованными волокнами и влияние объемного содержания включения на значение критической силы потери устойчивости при нагружении осевой силой. Полученные результаты сравниваются с результатами, полученными для аналогичного слоистого композиционного материала с немодифицированными волокнами с тем же объемным содержанием включения. Определяются оптимальные

параметры структуры композитного материала в условиях рассматриваемого нагружения.

1. Постановка задачи

На рисунке 1 показана ячейка исследуемого модифицированного композита с вискеризованными волокнами (А), в которой выделены различные зоны (Б и В). Такой модифицированный композит имеет дополнительный межфазный слой между базовым волокном и матрицей, который образован вискерсами и матрицей (зона Б). При рассмотрении поперечного сечения волокнистой системы (В) отчетливо видно, что исследуемый композит имеет три слоя (фазы) – волокно, вискеризованный межфазный слой и матрица. Такой композит обладает трансверсально-изотропными свойствами с плоскостью изотропии поперек волокна. Свойства межфазного слоя являются трансверсально-изотропными с плоскостью изотропии поперек оси вискерса.

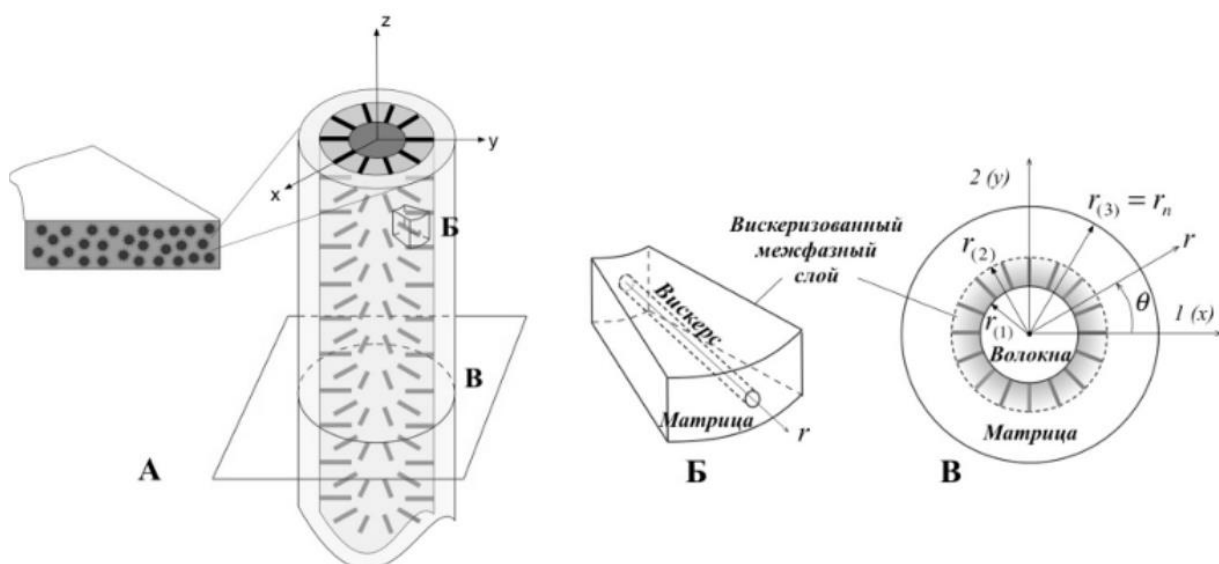


Рисунок 1 – Однонаправленный модифицированный композит с вискеризованным волокном

При решении статической задачи о локальном нагружении волокнистый модифицированный композит нагружается сжимающими силами вдоль волокон (Рисунок 2). При таком нагружении волокна изгибаются и прогиб модифицированных волокон при изгибе можно представить в виде функций $v_1(z) = V \sin(\pi z / l_n)$, $v_2(z) = V \sin(\pi(z - c) / l_n)$, где V – неизвестное значение амплитуды, одинаковое для всех волокон, l_n – половина длины волны волокна, $c = (a + d) \cot \alpha$ – фазовый сдвиг, a – толщина связующего слоя, d – диаметр включения (волокна или модифицированного волокна).

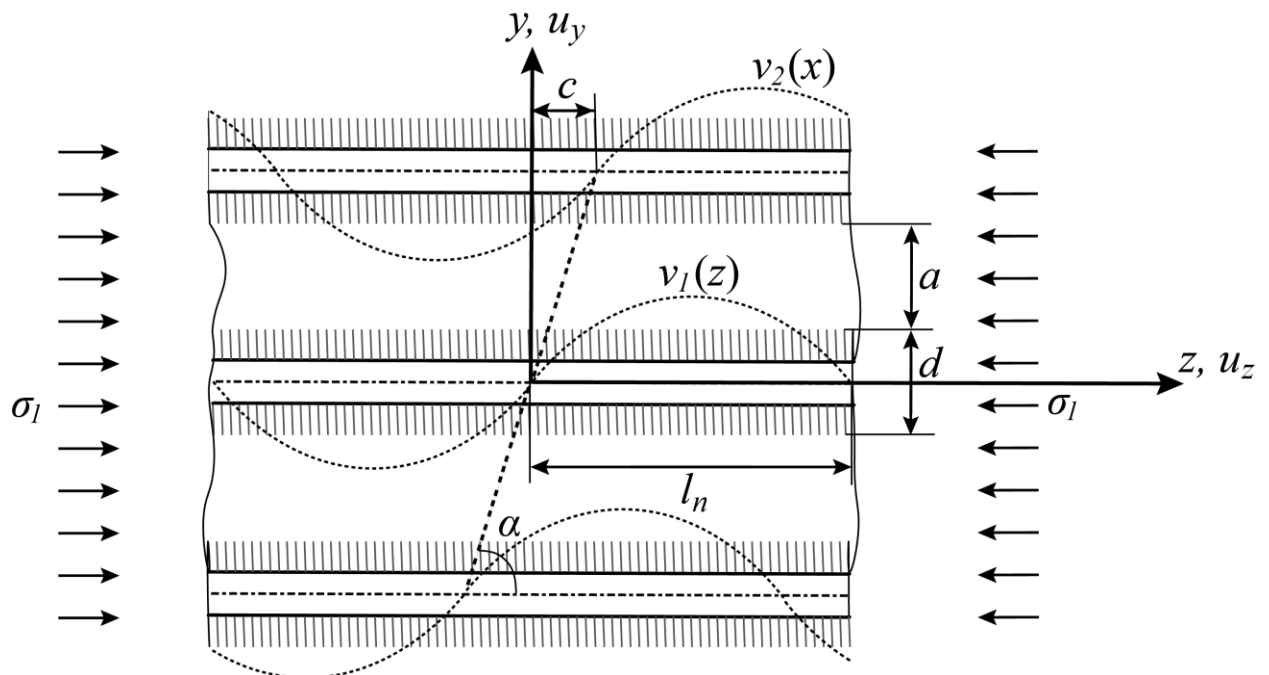


Рисунок 2 – Локальное выпучивание в однонаправленном слое волокон с выращенными на их поверхности вискерсами

При решении задачи устойчивости стержней, изготовленных из изучаемых композитов, образцы с поперечным сечением 3x3 мм и длиной 60 мм, слои которых укладывались под различными углами, нагружались единичной нагрузкой.

Варьировалось также объемное содержание включения (волокна с вискеризованным слоем) в связующем за счет изменения длины вискерсов. Исследуемые образцы моделировались методом конечных элементов (МКЭ) в среде Femap with NX Nastran элементами Laminate толщиной 0,03 мм.

Критическое значение локальной потери устойчивости оценивается аналитически, с использованием формулы, представленной в работе [23]:

$$\sigma_1 = \frac{\pi^2 D_f}{\bar{l}_n^2 \bar{d} (1 + \bar{d}) a^4} + \frac{G_m (1 + \bar{d})}{2(1 + \frac{\pi^2 G_m}{12 \bar{l}_n^2 E_m})} (1 + \cos \frac{\pi \bar{c}}{\bar{l}_n}) + \frac{2 \bar{l}_n^2 E_m}{\pi^2 (1 + \bar{d})} (1 - \cos \frac{\pi \bar{c}}{\bar{l}_n}), \quad (1)$$

где $D_f = E_f \frac{\pi d^4}{64}$ - изгибная жесткость включения, E_f - модуль упругости включения,

E_m - модуль упругости связующего, G_m - модуль сдвига связующего, $\bar{l}_n = l_n / a$,

$\bar{d} = d / a$, $\bar{c} = c / a$.

Критическая нагрузка, выдерживаемая исследуемыми стержнями, определялась численно путем решения задачи устойчивости методом конечных элементов и нахождения коэффициентов критической нагрузки.

2. Статическая задача о локальном нагружении. Эффективные свойства композита

Исследуем критическое значение потери устойчивости композитного материала, где в качестве включения рассматривается волокно с выращенными на его поверхности специальными наноструктурами – вискерсами (волокно с

вискеризованным слоем), а в качестве связующего – матрица с вискеризованным слоем, то есть, в рамках этой задачи считается, что вискеризованный слой входит в состав как включения, так и связующего.

На значение потери устойчивости оказывают влияние продольный модуль упругости включения E_f , продольный модуль упругости связующего E_m и модуль сдвига связующего G_m вдоль волокна (см. формулу 1). Найдем эти эффективные свойства используя процедуру двухэтапной гомогенизации. Сначала определим свойства вискеризованного межфазного слоя используя метод трех фаз, который позволяет учитывать одновременно эффект плотности, диаметра, длины, объемной доли и свойства вискерсов в вискеризованном межфазном слое, а затем, используя методы осреднения по Фойхту и Рейссу, учитывающие объемное содержание и модули составных частей волокнистого композита, определим эффективные свойства включения и связующего рассматриваемого композита.

Метод трех фаз основан на разрешающих уравнениях классической теории упругости. Выражения, определяющие перемещения во включении, матрице и эквивалентной гомогенной среде определяются из уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

Используя дифференциальные соотношения Коши находятся выражения для деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right), \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right), \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Для нахождения напряжений используется закон Гука:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{rr} & C_{r\theta} & C_{rz} & 0 & 0 & 0 \\ C_{r\theta} & C_{\theta\theta} & C_{\theta z} & 0 & 0 & 0 \\ C_{rz} & C_{\theta z} & C_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{\theta z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{rz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{r\theta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{\theta z} \\ 2\varepsilon_{rz} \\ 2\varepsilon_{r\theta} \end{pmatrix} \quad (6)$$

На основе условий непрерывности перемещений и напряжений на границе фаз и условия на бесконечности (внешнего граничного условия) формируется система алгебраических уравнений, из которой с помощью интегральной формулы Эшелби находятся все неизвестные константы, в число которых включены эффективные модули.

Так эффективный модуль упругости и эффективный коэффициент Пуассона находятся при решении задачи об одноосном растяжении вдоль вискерса, где полагается, что вне ячейки задано однородное поле деформаций ε_0 , и перемещения вдали от включения имеют вид $u_z(z) = \varepsilon_0 z$. А эффективный модуль продольного сдвига находится при решении задачи чистого сдвига вдоль вискерса, где, в свою очередь, полагается, что на внешней границе ячейки задано однородное поле деформаций ε_0 , и перемещения вдали от включения имеют вид $u_z(r, \theta) = 2\varepsilon_0 r \cos \theta$. Эффективный модуль плоской деформации находится при решении задачи

всесторонней нагрузки поперек вискерса, где полагается, что на внешней границе ячейки задано однородное поле деформаций ε_0 , и перемещения вдали от включения имеют вид $u_r = \varepsilon_0 r$.

В случае, когда композитный материал состоит только из двух фаз – матрицы и вискерса, формулы для определения эффективных свойств имеют вид [16]:

$$E_{11}^{eff} = c_b E_b + (1 - c_b) E_m + \frac{4c_b(1 - c_b)(v_b - v_m)^2 \mu_m}{(1 - c_b)\mu_m/(k_b + \mu_b/3) + c_b\mu_m/(k_m + \mu_m/3) + 1}, \quad (7)$$

$$v_{12}^{eff} = c_b v_b + (1 - c_b) v_m + \frac{c_b(1 - c_b)(v_b - v_m)(\mu_m/(k_m + \mu_m/3) - \mu_m/(k_b + \mu_b/3))}{(1 - c_b)(\mu_m/(k_b + \mu_b/3)) + c_b(\mu_m/(k_m + \mu_m/3)) + 1}, \quad (8)$$

$$\mu_{12}^{eff} = \frac{\mu_b(1 + c_b) + \mu_m(1 - c_b)}{\mu_m(\mu_b(1 - c_b) + \mu_m(1 + c_b))}, \quad (9)$$

$$K_{23}^{eff} = k_m + \frac{\mu_m}{3} + \frac{c_b}{1/(k_b - k_m + \frac{1}{3}(\mu_b - \mu_m)) + (1 - c_b)/(k_m + 4\mu_m/3)}, \quad (10)$$

где v_m, v_b - коэффициенты Пуассона соответственно матрицы и вискерса, k_m, k_b - модули плоской деформации соответственно матрицы и вискерса, μ_m, μ_b - поперечные модули сдвига соответственно матрицы и вискерса, c_b - объемное содержание вискерсов в вискеризованном межфазном слое, определяемое по формуле:

$$c_b = \frac{M_b^2 d_b^2}{4\pi(l_b + D)D}, \quad (11)$$

где M_b — число вискерсов, выращенных на поверхности волокна; d_b — диаметр вискерса; l_b — длина вискерса; D — диаметр базового волокна.

Эффективный модуль поперечного сдвига находится из задачи чистого сдвига поперек волокна, где полагается, что на внешней границе ячейки задано однородное поле деформации ε_0 , и перемещения вдали от включения имеют вид $u_{rr}(r, \theta) = \varepsilon_0 r \cos(2\theta)$, $u_{r\theta}(r, \theta) = -\varepsilon_0 r \sin(2\theta)$.

Общее решение для неоднородной среды имеет вид:

$$u_r = u_r(r) \cos(2\theta), \quad u_\theta = u_\theta(r) \sin(2\theta), \quad u_z = 0,$$

где $u_r(r)$, $u_\theta(r)$ - неизвестные функции. Для простоты введем обозначение $u_r(r) = u(r)$, $u_\theta(r) = w(r)$.

По соотношениям деформации Коши находим (5)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = u', & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) = \frac{u - 2w}{r} \cos(2\theta), \\ 2\varepsilon_{r\theta} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) = \left(-w' - \frac{2u + w}{r} \right) \sin(2\theta), \end{aligned} \quad (12)$$

и с помощью закона Гука (6) вместе с соотношениями (12) получаем определение не равных нулю компонент напряжений через перемещения

$$\sigma_{rr} = (C_{rr} u' + C_{r\theta} \frac{u - 2w}{r}) \cos(2\theta), \quad (13)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (C_{r\theta} u' + C_{\theta\theta} \frac{u - 2w}{r}) \cos(2\theta), \quad (14)$$

$$\sigma_{r\theta} = G_{r\theta} \left(-w' + \frac{w - 2u}{r} \right) \sin(2\theta). \quad (15)$$

Напряжения σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ должны удовлетворять двум уравнениям из уравнений равновесия (4):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr}^{(i)} - \sigma_{\theta\theta}^{(i)}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}^{(i)}}{r} &= 0.\end{aligned}\tag{16}$$

Оставшееся уравнение (4) равновесия выполняется тождественно.

Запишем уравнения равновесия (16) в перемещениях, учитывая соотношения (13)-(15):

$$\begin{aligned}C_{rr}(u''r^2 + u'r) - (4G_{r\theta} + C_{\theta\theta})u - 2(G_{r\theta} + C_{r\theta})w'r + 2(G_{r\theta} + C_{\theta\theta})w &= 0, \\ 2(G_{r\theta} + C_{r\theta})u'r + 2(G_{r\theta} + C_{\theta\theta})u + (w''r^2 + w'r)G_{r\theta} - (G_{r\theta} + 4C_{\theta\theta})w &= 0.\end{aligned}\tag{17}$$

Решение дифференциальных уравнений (17) ищем в виде

$$\begin{aligned}u(r) &= Fr^\lambda, \\ w(r) &= Dr^\lambda,\end{aligned}$$

где F и D – неизвестные константы, для которых имеется линейная зависимость

$$F = 2 \frac{G_{r\theta}\lambda + C_{r\theta}\lambda - G_{r\theta} - C_{\theta\theta}}{C_{rr}\lambda^2 - 4G_{r\theta} - C_{\theta\theta}} D,$$

λ определяется из характеристического уравнения, полученного из условия существования нетривиального нулевого решения системы уравнений (17), которое имеет вид

$$L\lambda^4 + M\lambda^2 + N = 0,\tag{18}$$

где $L = G_{r\theta}C_{rr}$, $M = 4(G_{r\theta} + C_{r\theta})^2 - C_{rr}(G_{r\theta} + 4C_{\theta\theta}) - G_{r\theta}(4G_{r\theta} + C_{\theta\theta})$, $N = 9G_{r\theta}C_{\theta\theta}$.

Очевидно, что корни λ выражения (18) зависят от свойств материалов. В классической теории упругости в соответствии с работами Хашина [24] и Цукрова [25] корни являются вещественными числами. В целом для любых действительных корней $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и λ_4 выражения $u(r)$ и $w(r)$ имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
u(r) &= F_1 r^{\lambda_1} + F_2 r^{\lambda_2} + F_3 r^{\lambda_3} + F_4 r^{\lambda_4}, \\
w(r) &= D_1 r^{\lambda_1} + D_2 r^{\lambda_2} + D_3 r^{\lambda_3} + D_4 r^{\lambda_4},
\end{aligned} \tag{19}$$

где λ^1, λ^3 — положительные величины; и λ^2, λ^4 — отрицательные величины.

Учитывая (19) поля перемещений ортотропных фаз в этой задаче принимают вид

$$\begin{aligned}
u_r^{(i)}(r, \theta) &= \left(\phi_1^{(i)} D_1^{(i)} r^{\lambda_1^{(i)}} + \phi_2^{(i)} D_2^{(i)} r^{\lambda_2^{(i)}} + \phi_3^{(i)} D_3^{(i)} r^{\lambda_3^{(i)}} + \phi_4^{(i)} D_4^{(i)} r^{\lambda_4^{(i)}} \right) \cos(2\theta) = \\
&= \left(\sum_{j=1}^4 \phi_j^{(i)} D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}} \right) \cos(2\theta), \\
u_\theta^{(i)}(r, \theta) &= \left(D_1^{(i)} r^{\lambda_1^{(i)}} + D_2^{(i)} r^{\lambda_2^{(i)}} + D_3^{(i)} r^{\lambda_3^{(i)}} + D_4^{(i)} r^{\lambda_4^{(i)}} \right) \sin(2\theta) = \\
&= \left(\sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}} \right) \sin(2\theta).
\end{aligned}$$

где $D_1^{(i)}, D_2^{(i)}, D_3^{(i)}, D_4^{(i)}$ — неизвестные константы, которые определяются из

граничных условий; $\lambda_j^{(i)}$ и $\phi_j^{(i)} = 2 \frac{G_{r\theta}^{(i)} \lambda_j^{(i)} + C_{r\theta}^{(i)} \lambda_j^{(i)} - G_{r\theta}^{(i)} - C_{\theta\theta}^{(i)}}{C_{rr}^{(i)} \lambda_j^{(i)2} - 4G_{r\theta}^{(i)} - C_{\theta\theta}^{(i)}}$ — константы.

Следовательно, используя соотношения малых деформаций, можно записать поля деформаций ортотропных фаз в виде

$$\varepsilon_{rr}^{(i)}(r, \theta) = \left(\sum_{j=1}^4 \phi_j^{(i)} \lambda_j^{(i)} D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1} \right) \cos(2\theta), \tag{20}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}(r, \theta) = \left(\sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1} (\phi_j^{(i)} - 2) \right) \cos(2\theta), \tag{21}$$

$$\varepsilon_{r\theta}^{(i)}(r, \theta) = \left(\sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1} (-\lambda_j^{(i)} - 2\phi_j^{(i)} - 1) \right) \sin(2\theta). \tag{22}$$

Напряжения в каждой фазе определяются формулами:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^{(2)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(2)} \\ \sigma_{zz}^{(2)} \\ \sigma_{\theta z}^{(2)} \\ \sigma_{rz}^{(2)} \\ \sigma_{r\theta}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(2)} & C_{12}^{(2)} & C_{12}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(2)} & C_{22}^{(2)} & C_{23}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(2)} & C_{23}^{(2)} & C_{22}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}^{(2)} - C_{23}^{(2)}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^{(2)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(2)} \\ \varepsilon_{zz}^{(2)} \\ 2\varepsilon_{\theta z}^{(2)} \\ 2\varepsilon_{rz}^{(2)} \\ 2\varepsilon_{r\theta}^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^{(3)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(3)} \\ \sigma_{zz}^{(3)} \\ \sigma_{\theta z}^{(3)} \\ \sigma_{rz}^{(3)} \\ \sigma_{r\theta}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(3)} & C_{12}^{(3)} & C_{12}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(3)} & C_{11}^{(3)} & C_{12}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(3)} & C_{12}^{(3)} & C_{11}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}^{(3)} - C_{12}^{(3)}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}^{(3)} - C_{12}^{(3)}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}^{(3)} - C_{12}^{(3)}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^{(3)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(3)} \\ \varepsilon_{zz}^{(3)} \\ 2\varepsilon_{\theta z}^{(3)} \\ 2\varepsilon_{rz}^{(3)} \\ 2\varepsilon_{r\theta}^{(3)} \end{pmatrix}$$

В случае изотропной или трансверсально-изотропных сред с осью симметрии, направленной вдоль волокон материальные константы равны

$$\lambda_1^{(i)} = 1, \lambda_2^{(i)} = -1, \lambda_3^{(i)} = 3, \lambda_4^{(i)} = -3,$$

так как в этом случае, исходя из законов Гука, имеются равенства

$$C_{rr}^{(i)} = C_{\theta\theta}^{(i)} \text{ или } C_{11}^{(i)} = C_{22}^{(i)},$$

$$C_{rz}^{(i)} = C_{\theta z}^{(i)} \text{ или } C_{13}^{(i)} = C_{23}^{(i)}.$$

С учетом соотношений для деформаций (20)-(22) выражения для определения напряжений в каждой из фаз приобретают явную форму как функции от координат r и θ , и зависят от констант $D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, D_3^{(1)}, D_4^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_3^{(2)}, D_4^{(2)}, D_1^{(N)}, D_2^{(N)}, D_3^{(N)}, D_4^{(N)}$.

Неизвестные константы $D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, D_3^{(1)}, D_4^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_3^{(2)}, D_4^{(2)},$

$D_1^{(N+1)}, D_2^{(N+1)}, D_3^{(N+1)}, D_4^{(N+1)}$ находятся из условий:

- условия несингулярности напряжений в центре волокна ($r=0$) для фазы 1:

$$D_2^{(1)} = D_4^{(1)} = 0;$$

- условия непрерывности перемещений и напряжений на границах идеального контакта фаз:

$$\begin{aligned} u_r^{(i)}(r_{(i)}, \theta) &= u_r^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta), & u_\theta^{(i)}(r_{(i)}, \theta) &= u_\theta^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta), \\ \sigma_{rr}^{(i)}(r_{(i)}, \theta) &= \sigma_{rr}^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta), & \sigma_{r\theta}^{(i)}(r_{(i)}, \theta) &= \sigma_{r\theta}^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta), \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3, N);$$

- внешнего граничного условия на бесконечности ($r_{N+1} \rightarrow \infty$):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{N+1}(r_{N+1}, \theta) &= \cos(2\theta), \\ \sigma_{r\theta}^{N+1}(r_{N+1}, \theta) &= \sin(2\theta); \end{aligned}$$

- условия энергетической поверхности на контакте ($r = r_N$):

$$\int_S \left(\sigma_{rr}^{N+1} u_r^{eff} + \sigma_{r\theta}^{N+1} u_\theta^{eff} - \sigma_{rr}^{eff} u_r^{N+1} - \sigma_{r\theta}^{eff} u_\theta^{N+1} \right)_{r=r_N} dS = 0,$$

где $u_r^{eff}(r, \theta) = \varepsilon_0 r \cos(2\theta)$, $u_\theta^{eff}(r, \theta) = -\varepsilon_0 r \sin(2\theta)$, $\sigma_{rr}^{eff}(r, \theta) = 2\varepsilon_0 \mu_{12}^{N+1} \cos(2\theta)$,

$\sigma_{r\theta}^{eff}(r, \theta) = 2\varepsilon_0 \mu_{12}^{N+1} \sin(2\theta)$, μ_{12}^{N+1} - эффективный поперечный модуль сдвига.

Таким образом, получаем систему из 8 уравнений с 8 неизвестными, среди которых $D_1^{(1)}, D_3^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_3^{(2)}, D_4^{(2)}, D_4^{(N+1)}$ и эффективный поперечный модуль сдвига μ_{23}^{eff} :

$$\begin{aligned} 1) \quad & \phi_1^{(1)} D_1^{(1)} r_1^{\lambda_{(11)}} + \phi_3^{(1)} D_3^{(1)} r_1^{\lambda_{(31)}} - \phi_1^{(2)} D_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(12)}} - \phi_2^{(2)} D_2^{(2)} r_1^{\lambda_{(22)}} - \phi_3^{(2)} D_3^{(2)} r_1^{\lambda_{(32)}} - \phi_4^{(2)} D_4^{(2)} r_1^{\lambda_{(42)}} = 0, \\ 2) \quad & \phi_1^{(2)} D_1^{(2)} r_2^{\lambda_{(12)}} + \phi_2^{(2)} D_2^{(2)} r_2^{\lambda_{(22)}} + \phi_3^{(2)} D_3^{(2)} r_2^{\lambda_{(32)}} + \phi_4^{(2)} D_4^{(2)} r_2^{\lambda_{(42)}} - (-D_4^{(N+1)} / r_3^3 + r_3 \varepsilon_0) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \quad & -D_1^{(1)}r_1^{\lambda_{(11)}} - \phi_3^{(1)}D_3^{(1)}r_1^{\lambda_{(31)}} - (-D_1^{(2)}r_1^{\lambda_{(12)}} - D_2^{(2)}r_1^{\lambda_{(22)}} - D_3^{(2)}r_1^{\lambda_{(32)}} - D_4^{(2)}r_1^{\lambda_{(42)}}) = 0, \\
4) \quad & -D_1^{(2)}r_2^{\lambda_{(12)}} - \phi_2^{(2)}D_2^{(2)}r_2^{\lambda_{(22)}} - \phi_3^{(2)}D_3^{(2)}r_2^{\lambda_{(32)}} - \phi_4^{(2)}D_4^{(2)}r_2^{\lambda_{(42)}} - (-D_4^{(N+1)} / r_3^3 - r_3 \varepsilon_0) = 0, \\
5) \quad & D_1^{(1)}r_1^{\lambda_{(11)}-1} (C_{11}^{(1)}\lambda_{(11)}\phi_1^{(1)} + C_{12}^{(1)}(-2 + \phi_1^{(1)})) + D_3^{(1)}r_1^{\lambda_{(31)}-1} (C_{11}^{(1)}\lambda_{(31)}\phi_3^{(1)} + C_{12}^{(1)}(-2 + \phi_3^{(1)})) - \\
& (D_1^{(2)}r_1^{\lambda_{(12)}-1} (C_{11}^{(2)}\lambda_{(12)}\phi_1^{(2)} + C_{12}^{(2)}(-2 + \phi_1^{(2)})) + D_2^{(2)}r_1^{\lambda_{(22)}-1} (C_{11}^{(2)}\lambda_{(22)}\phi_2^{(2)} + C_{12}^{(2)}(-2 + \phi_2^{(2)})) \\
& + D_3^{(2)}r_1^{\lambda_{(32)}-1} (C_{11}^{(2)}\lambda_{(32)}\phi_3^{(2)} + C_{12}^{(2)}(-2 + \phi_3^{(2)})) + D_4^{(2)}r_1^{\lambda_{(42)}-1} (C_{11}^{(2)}\lambda_{(42)}\phi_4^{(2)} + C_{12}^{(2)}(-2 + \phi_4^{(2)}))) = 0, \\
6) \quad & D_1^{(2)}r_2^{\lambda_{(12)}-1} (C_{11}^{(2)}\lambda_{(12)}\phi_1^{(2)} + C_{12}^{(2)}(-2 + \phi_1^{(2)})) + D_2^{(2)}r_2^{\lambda_{(22)}-1} (C_{11}^{(2)}\lambda_{(22)}\phi_2^{(2)} + C_{12}^{(2)}(-2 + \phi_2^{(2)})) \\
& + D_3^{(2)}r_2^{\lambda_{(32)}-1} (C_{11}^{(2)}\lambda_{(32)}\phi_3^{(2)} + C_{12}^{(2)}(-2 + \phi_3^{(2)})) + D_4^{(2)}r_2^{\lambda_{(42)}-1} (C_{11}^{(2)}\lambda_{(42)}\phi_4^{(2)} + C_{12}^{(2)}(-2 + \phi_4^{(2)})) - \\
& 2(3D_4^{(N+1)}r_3^{\lambda_{(4N+1)}-1} + \varepsilon_0)\mu_{23}^{eff} = 0, \\
7) \quad & C_{66}^{(1)}(D_1^{(1)}r_1^{\lambda_{(11)}-1} (-\lambda_{(11)} - 1 - 2\phi_1^{(1)})) + D_3^{(1)}r_1^{\lambda_{(31)}-1} (-\lambda_{(31)} - 1 - 2\phi_3^{(1)}) - \\
& C_{66}^{(2)}(D_1^{(2)}r_1^{\lambda_{(12)}-1} (-\lambda_{(12)} - 1 - 2\phi_1^{(2)})) + D_2^{(2)}r_1^{\lambda_{(22)}-1} (-\lambda_{(22)} - 1 - 2\phi_2^{(2)}) \\
& + D_3^{(2)}r_1^{\lambda_{(32)}-1} (-\lambda_{(32)} - 1 - 2\phi_3^{(2)}) + D_4^{(2)}r_1^{\lambda_{(42)}-1} (-\lambda_{(42)} - 1 - 2\phi_4^{(2)}) = 0, \\
8) \quad & C_{66}^{(2)}(D_1^{(2)}r_2^{\lambda_{(12)}-1} (-\lambda_{(12)} - 1 - 2\phi_1^{(2)})) + D_2^{(2)}r_2^{\lambda_{(22)}-1} (-\lambda_{(22)} - 1 - 2\phi_2^{(2)}) \\
& + D_3^{(2)}r_2^{\lambda_{(32)}-1} (-\lambda_{(32)} - 1 - 2\phi_3^{(2)}) + D_4^{(2)}r_2^{\lambda_{(42)}-1} (-\lambda_{(42)} - 1 - 2\phi_4^{(2)}) - \\
& (4D_4^{(N+1)}\mu_{23}^{eff}r_3^{\lambda_{(4N+1)}-1} - 4\varepsilon_0\mu_{23}^{eff}) = 0.
\end{aligned}$$

(25)

Эффективный модуль упругости поперек оси вискерса найдем по формуле:

$$E_{22}^{eff} = \frac{4\mu_{23}^{eff} K_{23}^{eff}}{K_{23}^{eff} + \mu_{23}^{eff} + 4(v_{12}^{eff})^2 \mu_{23}^{eff} K_{23}^{eff} / E_{11}^{eff}}. \quad (26)$$

Таким образом, определены все выражения, необходимые для расчета эффективных свойств вискеризованного межфазного слоя. А эффективные свойства включения, образованного волокном и вискеризованным слоем, и связующего, образованного вискеризованным слоем и матрицей определим по известным формулам осреднения по Фойхту и Рейссу:

$$\frac{1}{\mu_{eff}} = \frac{f}{\mu_1} + \frac{1-f}{\mu_2}; \quad (27)$$

$$E_{eff} = E_1 f + (1 - f) E_2, \quad (28)$$

где μ_{eff} - эффективный модуль сдвига, E_{eff} - эффективный модуль упругости, f - объемное содержание включения, μ_1 и μ_2 - соответственно модуль сдвига включения и модуль сдвига связующего, E_1 и E_2 - соответственно модуль упругости включения и модуль упругости связующего.

3. Устойчивость стержней, изготовленных из изучаемых композитов.

Эффективные свойства

Эффективные свойства элементарной композитной ячейки, необходимые для моделирования слоистого композитного стержня МКЭ, определялись в два этапа с использованием метода трех фаз. На первом этапе определялись эффективные свойства вискеризованного межфазного слоя по формулам, приведенным в разделе 2, а на втором этапе определялись эффективные свойства всей элементарной ячейки по методу трех фаз, расширенного на многофазную среду. Объемное содержание включения f (волокна с вискеризованным слоем) в связующем варьировалось за счет толщины слоя матрицы l :

$$f = (D/2 + l_b)^2 / (D/2 + l_b + l)^2 \quad (29)$$

Ниже приведены формулы для определения эффективных механических свойств волокнистого композита по методу трех фаз, расширенного на четырехфазную среду. Эффективный продольный модуль Юнга определяется по формуле:

$$E_{eff33} = \frac{2}{\varepsilon_0 r_3^2} \sum_{i=1}^3 \int_{r_{i-1}}^{r_i} \sigma_{zz}^{(i)} r dr,$$

где $\sigma_{zz}^{(i)} = 2D_1^{(i)}C_{13}^{(i)} + C_{33}^{(i)}\varepsilon_0$ – поле напряжений в каждой из изотропных фаз радиусом

$$r, \quad C_{13}^{(i)} = \frac{\nu^{(i)}E^{(i)}}{(1+\nu^{(i)})(1-2\nu^{(i)})}, \quad C_{33}^{(i)} = \frac{\nu^{(i)}E^{(i)}}{(1+\nu^{(i)})(1-2\nu^{(i)})} + \frac{E^{(i)}}{(1+\mu^{(i)})}, \quad \nu^{(i)}, \quad E^{(i)}, \quad \mu^{(i)} \quad -$$

коэффициент Пуассона, модуль упругости и модуль сдвига материала, $\varepsilon_0 = 1$ –

однородное поле деформации, нагружающее волокнистый композит, $D_1^{(i)}$ –

константа, которая определяется из системы шести уравнений, полученных из:

- условий непрерывности на границах идеального контакта фаз

$$u_r^{(i)}(r_{(i)}) = u_r^{(i+1)}(r_{(i)}), \quad \sigma_{rr}^{(i)}(r_{(i)}) = \sigma_{rr}^{(i+1)}(r_{(i)}), \quad (i=1,2,\dots,N), \quad (30)$$

- условий несингулярности в центре волокна ($r=0$):

$$D_2^{(1)} = 0, \quad (31)$$

- внешнего граничного условия на бесконечности ($r_{N+1} \rightarrow \infty$)

$$\sigma_{rr}^{N+1}(r_{N+1}) = 0, \quad (32)$$

- условия энергетической поверхности на контакте ($r=r_N$)

$$\int_S \left(\sigma_{zz}^{N+1} u_z^{eff} - \sigma_{zz}^{eff} u_z^{N+1} \right)_{r=r_N} dS = 0, \quad (33)$$

где $\sigma_{zz}^{N+1}(r) = -4K_{12}^{N+1}\nu_{31}^{N+1}\nu_{31}^{N+1}\varepsilon_0 + 4K_{12}^{N+1}(\nu_{31}^{N+1})^2\varepsilon_0 + E_{33}^{N+1}\varepsilon_0$, $u_z^{N+1}(z) = \varepsilon_0 z$,

$$\sigma_{zz}^{eff}(r) = -4K_{eff12}\nu_{eff31}\nu_{eff31}\varepsilon_0 + 4K_{eff12}(\nu_{eff31})^2\varepsilon_0 + E_{eff33}\varepsilon_0, \quad u_z^{eff}(z) = \varepsilon_0 z, \quad K_{eff12} \quad -$$

эффективный объемный модуль плоской деформации.

$$\nu_{eff31} = -\frac{1}{\varepsilon_0 r_3} (D_1^{(3)} r_3 + D_2^{(3)} r_3^{-1}),$$

где константы $D_1^{(3)}$, $D_2^{(3)}$ находятся из системы шести уравнений, полученных из условий (30)-(33).

Эффективный поперечный модуль Юнга определяется по формуле:

$$E_{eff11} = \frac{4\mu_{eff12}K_{eff12}}{K_{eff12} + \mu_{eff12} + 4(v_{eff31})^2 \mu_{eff12}K_{eff12} / E_{eff33}},$$

где μ_{eff12} – эффективный модуль поперечного сдвига.

$$K_{eff12} = \frac{1}{2\varepsilon_0} (D_1^{(3)}(C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) + D_2^{(3)}(-C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)})r^{-2}),$$

где константы $D_1^{(3)}$ и $D_2^{(3)}$ определяются из условий: несингулярности в центре волокна ($r=0$) $D_2^{(1)}=0$, непрерывности на границах идеального контакта фаз

$u_r^{(i)}(r_i) = u_r^{(i+1)}(r_i)$, $\sigma_{rr}^{(i)}(r_i) = \sigma_{rr}^{(i+1)}(r_i)$, ($i=1,2,\dots,N$), внешнего граничного условия

на бесконечности ($r_{N+1} \rightarrow \infty$) $u_r^{N+1}(r_{N+1}) = \varepsilon_0 r_{N+1}$ и условия энергетической поверхности

на контакте ($r=r_N$) $\int_S (\sigma_{rr}^{N+1} u_r^{eff} - \sigma_{rr}^{eff} u_r^{N+1})_{r=r_N} dS = 0$, где $u_r^{eff}(r) = D_1^{eff} r$,

$$\sigma_{rr}^{eff}(r) = 2K_{eff12} D_1^{eff}, \sigma_{rr}^{N+1}(r) = 2K_{eff12} D_1^{N+1} - 2\mu_{eff12} D_2^{N+1} r^{-2}.$$

Эффективный модуль поперечного сдвига μ_{eff12} находится в результате решения системы уравнений, включающей в себя нелинейное характеристическое уравнение.

Система уравнений формируется из условий несингулярности в центре волокна (

($r=0$)) $D_2^{(1)} = D_4^{(1)} = 0$; непрерывности перемещений и напряжений на границах

идеального контакта фаз $u_r^{(i)}(r_i, \theta) = u_r^{(i+1)}(r_i, \theta)$, $u_\theta^{(i)}(r_i, \theta) = u_\theta^{(i+1)}(r_i, \theta)$,

$\sigma_{rr}^{(i)}(r_i, \theta) = \sigma_{rr}^{(i+1)}(r_i, \theta)$, $\sigma_{r\theta}^{(i)}(r_i, \theta) = \sigma_{r\theta}^{(i+1)}(r_i, \theta)$, ($i=1,2,\dots,N$) и внешнего

граничного условия на бесконечности ($r_{N+1} \rightarrow \infty$)

$$\sigma_{rr}^{N+1}(r_{N+1}, \theta) = \cos(2\theta), \quad \sigma_{r\theta}^{N+1}(r_{N+1}, \theta) = \sin(2\theta).$$

Эффективный модуль продольного сдвига $\mu_{eff\ 23}$ находится в результате решения системы уравнений, полученной из условий непрерывности перемещений и напряжений на границах фаз, а также следующих условий: условия несингулярности в центре волокна ($r = 0$) $D_2^{(1)} = 0$; условие непрерывности на границах идеального контакта фаз $u_z^{(i)}(r_{(i)}, \theta) = u_z^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta)$, $\sigma_{rz}^{(i)}(r_{(i)}, \theta) = \sigma_{rz}^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta)$, ($i = 1, 2, \dots, N$); внешнее граничное условие на бесконечности ($r_{N+1} \rightarrow \infty$) $u_z^{N+1}(r_{N+1}) = 2\varepsilon_0 r_{N+1} \cos \theta$ и условия энергетического взаимодействия по поверхности на контакте ($r = r_N$)

$$\int_S (\sigma_{rz}^{N+1} u_r^{eff} - \sigma_{rz}^{eff} u_z^{N+1})_{r=r_N} dS = 0.$$

Таким образом определены все эффективные характеристики, необходимые для задания свойств материала, необходимых при решении задачи устойчивости методом конечных элементов.

4. Численные результаты. Критические значения потери устойчивости

Физические и геометрические свойства композита, необходимые для проведения численного анализа критического значения сжимающего напряжения потери устойчивости и анализа критической нагрузки, выдерживаемой исследуемыми стержнями, приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Физические и геометрические свойства исследуемого композита

Материалы Параметры	Фаза		
	Базовое волокно	Вискерс	Матрица
	Углеродное Т-650	УНТ	Эпоксидная
Свойства			
- Продольный модуль Юнга, E_L (ГПа)	241	1100	3
- Поперечный модуль Юнга, E_T (ГПа)	14,5	-	-
- Модуль продольного сдвига, μ_L (ГПа)	22,8	-	-
- Модуль поперечного сдвига, μ_T (ГПа)	4,8	-	-
- Коэффициент Пуассона ν_{LT}	0,27	0,14	0,3
Размеры			
- Диаметр, мкм	5	0,00051	-
- Длина, мкм	-	1	-

При решении статической задачи о локальном нагружении объемное содержание вискерсов в межфазном слое принято предельным и равно 65 % (см. формулу 11). Эффективные свойства вискеризованного межфазного слоя были получены по формулам (25-26), а эффективные свойства включения и связующего (продольный модуль упругости включения E_f , продольный модуль упругости

связующего E_m и модуль сдвига связующего G_m вдоль волокна) были получены по формулам (27-28).

Оценим влияние объемного содержания волокна, модифицированного УНТ, на критическое значение потери устойчивости. Объемное содержание включения определялось по формуле (29). На рисунке 3 приведены графики для классического композита и модифицированного композита. Видно, что увеличение объемного содержания включения позволяет увеличить критическое значение потери устойчивости волокнистого композита при сжимающем нагружении вдоль волока. Такой эффект наблюдается как для классического композита, так и для модифицированного, однако при увеличении объемного содержания включения более 0,4 свойства модифицированного композита значительно начинают расти, в то время как для классического композита изменяются незначительно. А при достижении максимального значения объемного содержания равного 0,78 (характерного для квадратной упаковки включения в композите) критическое значение потери устойчивости модифицированного композита превышает критическое значение потери устойчивости классического композита с тем же объемным содержанием включения более чем в 2 раза.

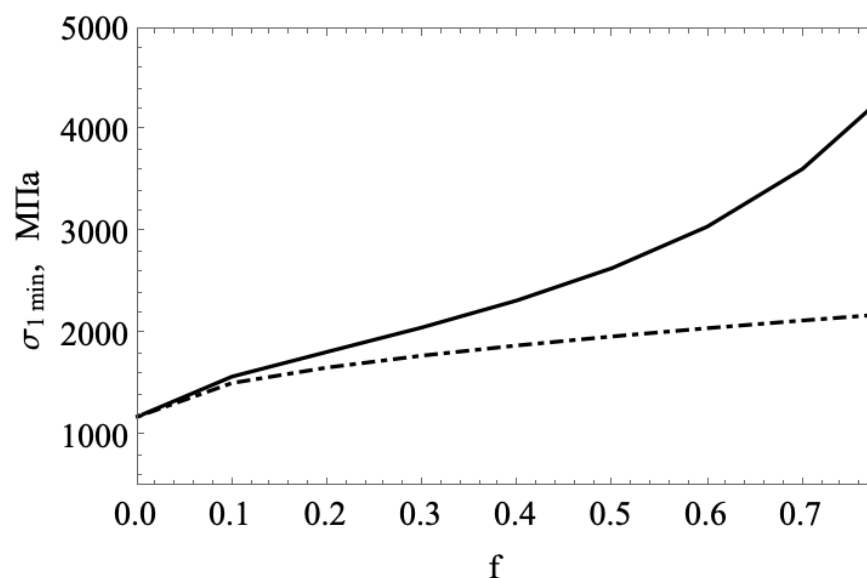


Рисунок 3 - Графики зависимости $\sigma_{1\min}$ от f для модифицированного композита (сплошная линия) и классического композита (штрихпунктирная линия)

В таблице 2 приведены параметры композитов, из которых изготавливаются исследуемые на устойчивость слоистые консольно закрепленные стержни.

Таблица 2 – Различные модификации композитов, применяемых при исследовании устойчивости стержней

Наименование композита	Объемное содержание включения, %	Длина вискерсов, мкм
Модифицированный композит 1	50	1
Классический композит 1	50	0
Модифицированный композит 2	60	1
Классический композит 2	60	0

Модифицированный композит 3	70	1
Классический композит 3	70	0
Модифицированный композит 4	78	1
Классический композит 4	78	0

В таблице 3 приведены численные значения эффективных характеристик исследуемых модифицированных и классических композитов, которые используются для задания свойств материалов элементов типа Laminate при анализе устойчивости стержней МКЭ. Численные значения были получены с использованием метода трех фаз, расширенного на многофазную среду, по формулам, приведенным в разделе 3.

Таблица 3 – Численные значения эффективные характеристики исследуемых КОМПОЗИТОВ

Наименование композита	$E_{eff\ 33}$, МПа	$E_{eff\ 11}$, МПа	$\mu_{eff\ 23}$, МПа	$\mu_{eff\ 12}$, МПа
Модифицированный композит 1	63700	6880	2480	2260
Классический композит 1	63800	4530	1850	1690
Модифицированный композит 2	75800	7580	2950	2680

Классический композит 2	76000	4920	2040	1840
Модифицированный композит 3	86700	10500	3560	3260
Классический композит 3	88200	5350	2250	2020
Модифицированный композит 4	127000	97600	4200	3860
Классический композит 4	97800	5740	2450	2170

Оценим влияние объемного содержания волокна, модифицированного УНТ, на значение критической нагрузки $P_{кр}$, выдерживаемой исследуемыми слоистыми консольно закрепленными стержнями. На рисунке 4 приведены графики для классического композита и модифицированного композита. Значение критической нагрузки было получено в результате решения задачи устойчивости МКЭ в среде Femap with NX Nastran. Рассматривались слоистые стержни, в которых армирующие волокна в слоях были уложены под углами 0/90°. В рамках этой задачи определялся коэффициент критической нагрузки, при умножении которого на прикладываемую к образцу силу было определено значение критической нагрузки. Видно, что при увеличении объемного содержания включения увеличивается критическая нагрузка, выдерживаемая слоистыми стержнями. Такой эффект наблюдается как для стержня

из классического композита, так и для стержня из модифицированного композита. Однако, в случае, когда стержень составлен из слоев из классического композита, увеличение объемного содержания включения приводит к увеличению критической нагрузки не более чем на 25 %, в то время как в случае, когда стержень составлен из слоев из модифицированного композита, увеличение объемного содержания включения приводит к увеличению критической нагрузки более чем в 1,9 раза. А при достижении максимального значения объемного содержания включения значение критической нагрузки, выдерживаемой исследуемым слоистым консольно закрепленным стержнем из модифицированного композита, превышает значение критической нагрузки, выдерживаемой исследуемым слоистым консольно закрепленным стержнем из классического композита более чем в 2,4 раза.

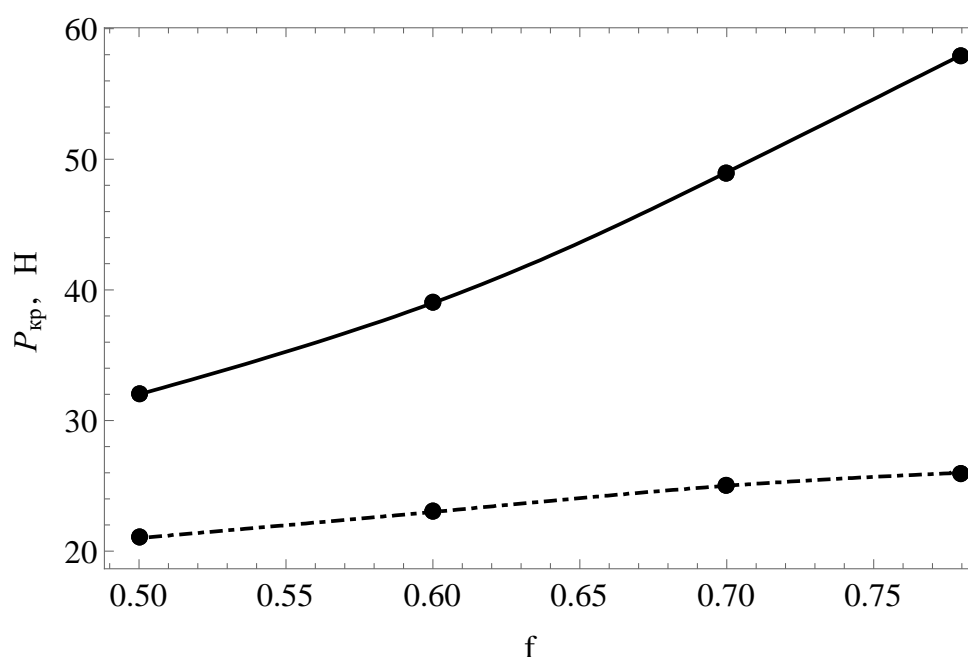


Рисунок 4 – Графики зависимости критической нагрузки $P_{кр}$, выдерживаемой стержнями, изготовленными из модифицированного композита (сплошная линия) и классического композита (штрихпунктирная линия), от f

Также задача устойчивости решалась для слоистых консольно закрепленных стержней со схемами укладок армирующих волокон в слоях $+45/-45^\circ$ и $0/45/90/135^\circ$. Оказалось, что рассмотренные схемы укладок не оказывают значительного влияния на критические нагрузки, выдерживаемыми исследуемыми стержнями, изготовленными из материалов, параметры которых приведены в таблицах 1-3.

Однако, необходимо отметить, что анализ потери устойчивости стержней по Эйлеру должен сопровождаться исследованием напряжений в компонентах (фазах) композитной ячейки, так как композитные стержни могут начать разрушаться до потери устойчивости, если напряжения в фазах достигают предельных сжимающих напряжений материала [23].

Заключение

Была исследована локальная потеря устойчивости композитного материала, состоящего из волокна, вискеризованного межфазного слоя и матрицы, при сжимающих напряжениях вдоль волокна. Анализ влияния объемного содержания модифицированного волокна на минимальные критические значения сжимающего напряжения показал, что устойчивость модифицированного композита может быть увеличена более чем в 2 раза по сравнению с устойчивостью аналогичного классического композита. Также была исследована устойчивость слоистых консольно закрепленных стержней. Оценивалось влияние объемного содержания включения и схемы укладки армирующих волокон в слоях на критическую нагрузку, выдерживаемую стержнями. Оказалось, что модификация волокна вискерсами позволяет повысить значение критической нагрузки, выдерживаемой стержнем,

более чем в 1,9 раза по сравнению с критической нагрузкой, выдерживаемой стержнем из классического волокнистого композита с тем же объемным содержанием включения при любой из рассматриваемых схем укладки армирующих волокон.

Список источников

1. Полилов А.Н. Экспериментальная механика композитов – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. – 376 с.
2. Xu J., Zhao Q., Qiao P. A critical review on buckling and post-buckling analysis of composite structures // *Frontiers in Aerospace Engineering*, 2013, vol. 2 (3), pp. 157-168.
3. Паймушин В.Н., Полякова Н.В., Холмогоров С.А., Шишов М.А. Разномасштабные внутренние формы потери устойчивости армирующих элементов в волокнистых композитах // *Известия вузов. Математика*. 2017. № 9. С. 89–95.
4. Паймушин В.Н., Газизуллин Р.К., Шишов М.А. Мини- и микромасштабные плоские внутренние формы потери устойчивости элементов волокнистых композитов в условиях растяжения и сжатия // *Прикладная механика и техническая физика*. 2019. Т. 60. № 3. С. 173-185.
5. Паймушин В.Н., Холмогоров С.А., Макаров М.В., Бадриев И.Б. Численные исследования микро-, мезо- и макромасштабных плоских внутренних форм потери устойчивости элементов волокнистых композитов со структурой $[\pm 45]_s$ в условиях растяжения и сжатия // *Материалы XXIV международного симпозиума имени А.Г. Горшкова (Вятичи, 19–23 марта 2018)*. – М.: Изд-во ТРЦ, 2018. Т. 1. С. 177-179.
6. Arthur W.L. A review of laminated composite plate buckling // *Applied mechanics reviews*, 1987, vol. 40 (5), pp. 575-591. DOI: [10.1115/1.3149534](https://doi.org/10.1115/1.3149534)

7. Ерков А.П., Дудченко А.А. К вопросу об устойчивости пластин переменной жесткости // Труды МАИ. 2018. № 103. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=100622>
8. Дудченко А.А., Кыонг Л.К., Лурье С.А. Расчет и проектирование контурно подкрепленной композитной панели, нагруженной поперечной силой // Труды МАИ. 2012. № 50. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=28792>
9. Васильев В.В. Композиционные материалы: Справочник – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
10. Ерков А.П. К вопросу об устойчивости композитных слоистых пластин и стержней переменной жесткости // Прочность конструкций летательных аппаратов. Сборник статей научно-технической конференции. Сер. "Труды ЦАГИ". 2018. № 2782. С. 161-163.
11. Сапунов В.Т. Устойчивость композитных элементов конструкции в трактовке теории надежности // Композиты и наноструктуры. 2017. Т. 9. № 1 (33). С. 45-51.
12. Дудченко А.А., Лурье С.А., Соляев Ю.О., Жаворонок С.И., Халиулин В.И., Батраков В.В. Расчет, проектирование и технология изготовления термостабильного композитного стержня // Конструкции из композиционных материалов. 2016. № 1 (141). С. 3-11.
13. Lurie S.A., Minhat M. Application of generalized self-consistent method to predict effective elastic properties of bristled fiber composites // Composites B, 2014, vol. 61, pp. 26-40. DOI: [10.1016/j.compositesb.2014.01.021](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.01.021)

14. Lurie S.A., Minhat M., Tuchkova N. Estimation of effective dynamic properties of bristled fiber composite materials based on self-consistent Eshelby method // Journal of Engineering Mathematics, 2015, vol. 95 (31), pp. 7-29. DOI: [10.1007/s10665-014-9719-0](https://doi.org/10.1007/s10665-014-9719-0)
15. Лурье С.А., Кривень Г.И., Рабинский Л.Н. О прочности модифицированного композита с вискеризованными волокнами // Композиты и наноструктуры. 2019. Т. 11. № 1. С. 1-15.
16. Кривень Г.И., Маковский С.В. О демпфирующих свойствах вискеризованного слоя в модифицированных волокнистых композитах // Труды МАИ. 2020. № 114. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=118729>. DOI: [10.34759/trd-2020-114-03](https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-03)
17. Кривень Г.И., Шавелкин Д.С. Моделирование тепловых свойств модифицированных композитных материалов с вискеризованными волокнами // Механика композиционных материалов и конструкций. 2023. Т. 29. № 1. С. 81-97.
18. Qiang S., Ke-zhi L., Hai-liang L., He-jun L., Chang R. Grafting straight carbon nanotubes radially onto carbon fibers and their effect on the mechanical properties of carbon/carbon composites // Carbon, 2012, no. 50, pp. 3943-3960. DOI: [10.1016/j.carbon.2012.03.023](https://doi.org/10.1016/j.carbon.2012.03.023)
19. Peng L., Yi-yu F., Peng Z., Hui-min C., Naiqin Z., Wei F. Increasing the interfacial strength in carbon fiber/epoxy composites by controlling the orientation and length of carbon nanotubes grown on the fibers // Carbon, 2011, no. 49, pp. 4665-4673. DOI: [10.1016/j.carbon.2011.06.064](https://doi.org/10.1016/j.carbon.2011.06.064)
20. Fu-Hua Z., Rong-Guo W., Xiao-Dong H., Chao W., Li-Ning R. Interfacial shearing strength and reinforcing mechanisms of an epoxy composite reinforced using a carbon

nanotube/carbon fiber hybrid // Journal of Material Science, 2019, vol. 44 (13), pp. 3574-3577. DOI: [10.1007/s10853-009-3484-x](https://doi.org/10.1007/s10853-009-3484-x)

21. Sharma S.P., Lakkad S.C. Compressive strength of carbon nanotubes grown on carbon fiber reinforced epoxy matrix multi-scale hybrid composites // Surface coatings technology, 2010, vol. 205, pp. 350-355. DOI: [10.1016/j.surfcoat.2010.06.055](https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2010.06.055)

22. Lei F., Ke-zhi L., Zi-shu S., Qiang S., He-jun L., Jin-hua L., Ling-jun G. Compressive and interlaminar shear properties of carbon/carbon composite laminates reinforced with carbon nanotube-grafted carbon fibers produced by injection chemical vapor deposition // Materials Science Engineering A, 2015, vol. 626, pp. 449–457. DOI: [10.1016/j.msea.2014.12.044](https://doi.org/10.1016/j.msea.2014.12.044)

23. Vasiliev V.V., Morozov E.V. Advanced mechanics of composite materials and structures, Elsevier, 2018, 856 p.

24. Hashin Z. Thermoelastic properties and conductivity of carbon/carbon fiber composites // Mechanics of Materials, 1990, vol. 8, pp. 293–308. DOI: [10.1016/0167-6636\(90\)90049-L](https://doi.org/10.1016/0167-6636(90)90049-L)

25. Tsukrov I., Drach B. Elastic deformation of composite cylinders with cylindrically orthotropic layers // International Journal of Solids and Structures, 2010, vol. 42, pp. 2577–2593. DOI: [10.1016/j.ijsolstr.2009.09.005](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.09.005)

References

1. Polilov A.N. Eksperimental'naya mekhanika kompozitov (Experimental mechanics of composites), Moscow, MGTU im. N.E. Baumana, 2016, 376 p.

2. Xu J., Zhao Q., Qiao P. A critical review on buckling and post-buckling analysis of composite structures, *Frontiers in Aerospace Engineering*, 2013, vol. 2 (3), pp. 157-168.
3. Paımushin V.N., Polyakova N.V., Kholmogorov S.A., Shishov M.A. *Izvestiya vuzov. Matematika*, 2017, no. 9, pp. 89–95.
4. Paımushin V.N., Gazizullin R.K., Shishov M.A. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2019, vol. 60, no. 3, pp. 173-185.
5. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Makarov M.V., Badriev I.B. *Materialy XXIV mezhdunarodnogo simpoziuma imeni A.G. Gorshkova*, Moscow, Izd-vo TRP, 2018, vol. 1, pp. 177-179.
6. Arthur W.L. A review of laminated composite plate buckling, *Applied mechanics reviews*, 1987, vol. 40 (5), pp. 575-591. DOI: [10.1115/1.3149534](https://doi.org/10.1115/1.3149534)
7. Erkov A.P., Dudchenko A.A. *Trudy MAI*, 2018, no. 103. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=100622>
8. Dudchenko A.A., Kyong L.K., Lur'e S.A. *Trudy MAI*, 2012, no. 50. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=28792>
9. Vasil'ev V.V. *Kompozitsionnye materialy: Spravochnik* (Composite materials: Directory), Moscow, Mashinostroenie, 1990, 512 p.
10. Erkov A.P. *Prochnost' konstruktsii letatel'nykh apparatov*, Trudy TsAGI, no. 2782, 2018, pp. 161-163.
11. Sapunov V.T. *Kompozity i nanostruktury*, 2017, vol. 9, no. 1 (33), pp. 45-51.
12. Dudchenko A.A., Lur'e S.A., Solyaev Yu.O., Zhavoronok S.I., Khaliulin V.I., Batrakov V.V. *Konstruktsii iz kompozitsionnykh materialov*, 2016, no. 1 (141), pp. 3-11.

13. Lurie S.A., Minhat M. Application of generalized self-consistent method to predict effective elastic properties of bristled fiber composites, *Composites B*, 2014, vol. 61, pp. 26-40. DOI: [10.1016/j.compositesb.2014.01.021](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.01.021)
14. Lurie S.A., Minhat M., Tuchkova N. Estimation of effective dynamic properties of bristled fiber composite materials based on self-consistent Eshelby method, *Journal of Engineering Mathematics*, 2015, vol. 95 (31), pp. 7-29. DOI: [10.1007/s10665-014-9719-0](https://doi.org/10.1007/s10665-014-9719-0)
15. Lur'e S.A., Kriven' G.I., Rabinskii L.N. *Kompozity i nanostruktury*, 2019, vol. 11, no. 1, pp. 1-15.
16. Kriven' G.I., Makovskii S.V. *Trudy MAI*, 2020, no. 114. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=118729>. DOI: [10.34759/trd-2020-114-03](https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-03)
17. Kriven' G.I., Shavelkin D.S. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 81-97.
18. Qiang S., Ke-zhi L., Hai-liang L., He-jun L., Chang R. Grafting straight carbon nanotubes radially onto carbon fibers and their effect on the mechanical properties of carbon/carbon composites, *Carbon*, 2012, no. 50, pp. 3943-3960. DOI: [10.1016/j.carbon.2012.03.023](https://doi.org/10.1016/j.carbon.2012.03.023)
19. Peng L., Yi-yu F., Peng Z., Hui-min C., Naiqin Z., Wei F. Increasing the interfacial strength in carbon fiber/epoxy composites by controlling the orientation and length of carbon nanotubes grown on the fibers. *Carbon*, 2011, no. 49, pp. 4665-4673. DOI: [10.1016/j.carbon.2011.06.064](https://doi.org/10.1016/j.carbon.2011.06.064)
20. Fu-Hua Z., Rong-Guo W., Xiao-Dong H., Chao W., Li-Ning R. Interfacial shearing strength and reinforcing mechanisms of an epoxy composite reinforced using a carbon

nanotube/carbon fiber hybrid, *Journal of Material Science*, 2019, vol. 44 (13), pp. 3574-3577. DOI: [10.1007/s10853-009-3484-x](https://doi.org/10.1007/s10853-009-3484-x)

21. Sharma S.P., Lakkad S.C. Compressive strength of carbon nanotubes grown on carbon fiber reinforced epoxy matrix multi-scale hybrid composites, *Surface coatings technology*, 2010, vol. 205, pp. 350-355. DOI: [10.1016/j.surfcoat.2010.06.055](https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2010.06.055)

22. Lei F., Ke-zhi L., Zi-shu S., Qiang S., He-jun L., Jin-hua L., Ling-jun G. Compressive and interlaminar shear properties of carbon/carbon composite laminates reinforced with carbon nanotube-grafted carbon fibers produced by injection chemical vapor deposition, *Materials Science Engineering A*, 2015, vol. 626, pp. 449–457. DOI: [10.1016/j.msea.2014.12.044](https://doi.org/10.1016/j.msea.2014.12.044)

23. Vasiliev V.V., Morozov E.V. *Advanced mechanics of composite materials and structures*, Elsevier, 2018, 856 p.

24. Hashin Z. Thermoelastic properties and conductivity of carbon/carbon fiber composites, *Mechanics of Materials*, 1990, vol. 8, pp. 293–308. DOI: [10.1016/0167-6636\(90\)90049-L](https://doi.org/10.1016/0167-6636(90)90049-L)

25. Tsukrov I., Drach B. Elastic deformation of composite cylinders with cylindrically orthotropic layers, *International Journal of Solids and Structures*, 2010, vol. 42, pp. 2577–2593. DOI: [10.1016/j.ijsolstr.2009.09.005](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.09.005)

Статья поступила в редакцию 23.01.2024

Одобрена после рецензирования 24.01.2024

Принята к публикации 27.02.2024

The article was submitted on 23.01.2024; approved after reviewing on 24.01.2024; accepted for publication on 27.02.2024.