

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королева»

На правах рукописи



Ледков Александр Сергеевич

**Динамика и управление движением цилиндрического твердого тела относительно  
центра масс при его бесконтактной транспортировке ионным потоком на орбите**

Специальность 1.1.7. - Теоретическая механика, динамика машин

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Научный консультант:

д.т.н., профессор

Асланов Владимир Степанович

Самара - 2023

## Оглавление

<b>Введение.....</b>	<b>4</b>
<b>1 Состояние проблемы и методы исследования.....</b>	<b>15</b>
1.1 Увод космического мусора как твердого тела: пути решения этой проблемы.....	15
1.2 Бесконтактная транспортировка твердого тела ионным потоком на орбите .....	18
1.3 Моделирование ионного потока, вычисление ионных сил и моментов .....	22
1.4 Оценка параметров ионного потока и затрат топлива.....	32
<b>2 Вычисление ионных сил и моментов для твердых тел цилиндрической и близкой к цилиндрической формы.....</b>	<b>36</b>
2.1 Обсуждение вычислительной процедуры.....	36
2.2 Ионные силы и моменты, действующие на цилиндр в ионном потоке.....	39
2.3 Сравнение ионных сил и моментов для ступени ракеты и эквивалентного цилиндра .....	49
2.4 Ионные силы и моменты для спутника цилиндрической формы с панелями солнечных батарей.....	52
<b>3 Математические модели.....</b>	<b>55</b>
3.1 Системы координат.....	55
3.2 Модель плоского случая движения.....	60
3.3 Модель пространственного движения .....	65
3.4 Модель пространственного движения осесимметричного тела.....	70
3.5 Стационарные движения осесимметричного тела на круговой орбите.....	73
3.6 Обобщенный интеграл энергии для осесимметричного тела на круговой орбите.....	75
<b>4 Неуправляемое движение твердого тела вокруг центра масс под действием ионного момента .....</b>	<b>78</b>
4.1 Фазовый портрет и бифуркационная диаграмма.....	78
4.2 Хаотическое поведение твердого тела относительно центра масс в плоском случае.....	88
<b>5 Управление ионным потоком, обеспечивающим заданный режим движения твердого тела относительно центра масс.....</b>	<b>97</b>
5.1 Методы управления ионным потоком.....	97
5.2 Управление угловым движением твердого тела в плоском случае .....	98
5.2.1 Управление тягой генерирующего поток двигателя .....	100
5.2.2 Управление направлением оси ионного потока .....	105
5.2.3 Сравнение эффективности методов управления .....	109

5.2.4 Управление направлением ионного потока для перевода тела в заданный угловой режим движения .....	114
5.3 Управление движением твердого тела относительно центра масс на геостационарной орбите в пространственном случае .....	117
5.4 Управление движением осесимметричного тела в пространственном случае.....	127
<b>6 Поиск углового режима движения тела, обеспечивающего максимальную осредненную ионную силу.....</b>	<b>135</b>
6.1 Случай плоского движения.....	135
6.2 Случай пространственного движения осесимметричного тела .....	138
<b>7 Оценка эффективности предложенных методов и законов управления для проблемы увода космического мусора .....</b>	<b>147</b>
7.1 Затраты топлива при использовании различных стратегий управления.....	147
7.2 Повышение эффективности системы транспортировки при использовании нескольких двигателей .....	159
<b>Заключение.....</b>	<b>172</b>
<b>Список литературы.....</b>	<b>175</b>

## Введение

Разработка систем уборки космического мусора является одной из наиболее актуальных задач современной космонавтики [1,2]. В научной литературе обсуждается много различных способов ее решения [3,4]. Одним из перспективных направлений среди предлагаемых подходов является использование систем бесконтактной транспортировки. Их главным достоинством является отсутствие прямого механического контакта между активным космическим аппаратом-уборщиком и объектом космического мусора, что значительно снижает вероятность аварии и повышает безопасность системы уборки. В диссертационной работе рассматривается бесконтактная транспортировка космического мусора, имеющего форму цилиндра, с помощью генерируемого двигателем активного космического аппарата ионного потока. Выбор такой формы тела обусловлен тем, что среди наиболее опасных объектов космического мусора большую часть составляют верхние ступени ракет [2], которые в первом приближении могут рассматриваться как цилиндр.

Рассматриваемая схема предполагает, что активный космический аппарат подлетает к объекту космического мусора на расстояние порядка десяти метров и направляет на него реактивную струю своего электрореактивного двигателя, называемую в дальнейшем ионным потоком. Сталкиваясь с поверхностью космического мусора, частицы струи оказывают на него силовое воздействие. В результате на поверхности тела генерируется сила, которую можно использовать для его транспортировки. Идея бесконтактной транспортировки космического мусора была сформулирована независимо друг от друга тремя группами авторов [5–7]. Разработанный в рамках диссертационной работы метод бесконтактной транспортировки является развитием этой идеи и заключается в учете особенностей движения транспортируемого твердого тела вокруг его центра масс для разработки законов и способов управления ионным потоком. Идея необходимости учета движения объекта космического мусора относительно центра масс в задаче бесконтактной ионной транспортировки космического мусора была сформулирована профессором В.С. Аслановым в 2015 году и развита в серии совместных публикаций с автором диссертационной работы. Новой является проблема исследования движения цилиндрического твердого тела относительно центра масс под действием внешнего ионного потока на орбите.

В диссертационной работе, на основании выполненных лично автором исследований решена имеющая важное хозяйственное значение **научная проблема** разработки эффективного способа бесконтактной транспортировки цилиндрического твердого тела за счет использования генерируемого двигателем активного космического аппарата ионного потока.

**Актуальность** темы исследования обусловлена практической значимостью проблемы разработки систем транспортировки тел, в том числе космического мусора, на орбите и определяется возможностью повышения эффективности системы бесконтактной транспортировки за счет учета особенностей движения транспортируемого тела относительно его центра масс.

**Целью** диссертационной работы является разработка эффективных методов бесконтактной транспортировки твердого тела цилиндрической формы на орбите с учетом его движения относительно центра масс за счет использования ионного потока, генерируемого двигателем активного космического аппарата.

**Задачами** диссертационной работы являются: разработка методов бесконтактной транспортировки твердого тела цилиндрической формы с учетом его движения относительно центра масс; разработка математических моделей, описывающих движение твердого тела в ионном потоке; анализ регулярных и хаотических режимов движения твердого тела цилиндрической формы в ионном потоке; разработка метода определения наиболее благоприятных для бесконтактной транспортировки режимов движения твердого тела цилиндрической формы при которых осредненная величина генерируемой ионной силы максимальна; разработка законов и методов управления ионным потоком для осуществления бесконтактной транспортировки; оценка эффективности использования разработанных законов и методов управления с точки зрения временных затрат и затрат топлива активного космического аппарата по сравнению с транспортировкой без управления движением тела относительно центра масс

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 184 страницах, содержит 140 рисунков, 13 таблиц и 112 источников.

**Во введении** описывается проблема исследования, обосновывается актуальность темы, ставятся цели и задачи, описывается структура диссертации, используемые методы и подходы, дается оценка научной новизны работы, ее теоретической и практической значимости, приводятся выносимые на защиту положения, даются сведения об апробации результатов, личном вкладе автора и публикациях.

**В главе 1** описывается текущее состояние решаемой проблемы. Приводится обзор литературы по теме различных способов уборки космического мусора с упором на бесконтактные способы транспортировки. Описываются существующие подходы к моделированию распространения ионного потока и вычислению генерируемых потоком ионных сил и моментов. Описываются методики вычисления необходимых для моделирования ионного

потока параметров на основе характеристик электрореактивного двигателя и расчета затрат топлива активного космического аппарата при бесконтактной транспортировке твердого тела.

В главе 2 приводятся результаты расчета ионных сил и моментов для твердых тел различной формы. Описываются тонкости расчетной процедуры. Изучается влияние геометрических параметров цилиндрического объекта и параметров ионного потока на генерируемые ионную силу и момент. Проводится сравнение результатов расчета ионной силы и момента для верхней ступени Космос-3М и цилиндра соответствующих размеров. Исследуется влияние панелей солнечных батарей спутника на величину генерируемых ионных сил и моментов.

В главе 3 разрабатываются математические модели, описывающие движение механической системы, состоящей из транспортируемого твердого тела и активного космического аппарата при наличии бесконтактного ионного взаимодействия между ними. Описываются используемые системы координат и матрицы перехода. С помощью уравнений Лагранжа 2 рода получены уравнения плоского движения механической системы. Записаны упрощенные уравнения колебаний тела под действием ионного потока на кеплеровой и круговой орбитах. С помощью второго закона Ньютона и теоремы об изменении момента количества движения получены уравнения пространственного движения рассматриваемой механической системы. Для случая твердого тела с малой асимметрией осуществлен переход от углов Эйлера к  $R-G$  переменным и получены упрощенные уравнения движения объекта космического мусора цилиндрической формы в ионном потоке. На основе этой модели получены упрощенные уравнения движения твердого тела под действием ионного потока на кеплеровой и геостационарной орбитах. Найдены стационарные движения и обобщенный интеграл энергии для динамически симметричного цилиндра на круговой орбите под действием ионного момента.

В главе 4 исследуется плоское движение твердого тела относительно его центра масс при неизменном относительном положении активного космического аппарата. Введен параметр, описывающий отношение ионного и гравитационного моментов, и исследовано влияние этого параметра на невозмущенное движение цилиндрического тела на круговой орбите. С помощью сечений Пуанкаре и спектра показателей Ляпунова проводится анализ хаотических режимов движения тела под действием ионного момента на эллиптической орбите.

В главе 5 предлагаются два метода управления движением транспортируемого твердого тела относительно его центра масс с помощью ионного потока: за счет изменения скорости частиц ионного потока и за счет изменения направления оси ионного потока. Для плоского случая движения разработаны законы управления скоростью частиц и направлением ионного потока, обеспечивающие перевод твердого тела в положение равновесия. Разработан основанный

на оценке энергии закон управления, обеспечивающий перевод тела в требуемый угловой режим движения. Предложены законы управления скоростью частиц потока, обеспечивающие перевод осесимметричного объекта в положение равновесия. С помощью теорем Ляпунова доказана асимптотическая устойчивость положения равновесия цилиндрического твердого тела в плоском случае и в пространственном случае для геостационарной орбиты при изменении скорости частиц потока в соответствии с разработанными законами управления.

В главе 6 приводится методика определения наиболее эффективных для ионной транспортировки угловых режимов движения твердого тела цилиндрической формы в плоском случае движения и в случае пространственного движения на круговой орбите. Под наиболее эффективным понимается режим движения тела относительно центра масс, при котором осредненная величина модуля генерируемой ионной силы максимальна.

В главе 7 на основе численного моделирования проводится сравнение затрат топлива и времени транспортировки космического мусора в плоском случае движения при использовании разработанных законов управления ионным потоком. Рассматриваются четыре стратегии управления активным космическим аппаратом: без управления угловым движением транспортируемого твердого тела, управление с целью перевода в положение равновесия, управление с целью перевода в угловой режим движения с максимальной осредненной ионной силой, управление с целью перевода в положение с максимальной по модулю ионной силой. Производится расчет времени и затрат топлива, требуемых для уменьшения высоты перигея орбиты тела на 50 км. Предлагается метод повышения эффективности бесконтактной транспортировки за счет использования нескольких ионных потоков, генерируемых несколькими электрореактивными двигателями. Для управления угловым положением твердого тела в процессе транспортировки предлагается реализовать релейное управление двигателями и управление направлением оси ионного потока одного из двигателей. Производится расчет временных затрат и масс топлива, необходимых для транспортировки тела при использовании различного числа двигателей и различных методов управления.

В заключении приводятся основные результаты работы, отмечается их научная новизна и значимость.

**Используемые методы исследования** основываются на методах теоретической и аналитической механики, механики космического полета, нелинейной и хаотической динамики, теории устойчивости и оптимального управления, методах качественной теории дифференциальных уравнений, методах математического моделирования. Для вычисления генерируемых ионным потоком сил и моментов использована приближенная автоподобная

модель распространения частиц в потоке и гипотеза о полном диффузионном отражении частиц от поверхности обдуваемого объекта.

**Научная новизна** диссертационной работы состоит в следующем:

1. Предложены новые методы бесконтактной транспортировки твердого тела цилиндрической формы, основанные на использовании особенностей его углового движения в ионном потоке.
2. Разработаны математические модели, описывающие движение твердого тела относительно центра масс с учетом сил и моментов, генерируемых ионным потоком:
  - 2.1. Модель плоского движения механической системы, состоящей из транспортируемого твердого тела и активного космического аппарата;
  - 2.2. Модель пространственного движения механической системы, состоящей из твердого тела и активного космического аппарата;
  - 2.3. Модель пространственного движения механической системы при наличии у твердого тела малой асимметрии;
  - 2.4. Модель пространственного движения осесимметричного твердого тела под действием ионного потока.
3. Проведен анализ хаотических режимов неуправляемого движения цилиндрического твердого тела в ионном потоке.
  - 3.1. Исследована топология фазового пространства, описывающего плоское движение цилиндрического твердого тела на круговой орбите под действием ионного потока; введен параметр, определяющий отношение ионного и гравитационного моментов и проведен анализ влияния этого параметра на расположение и тип положений равновесия системы.
  - 3.2. С помощью сечений Пуанкаре и спектра показателей Ляпунова продемонстрирована возможность существования хаоса в случае неуправляемой ионной транспортировки цилиндрического тела в плоском случае движения.
4. Предложен метод определения наиболее эффективного с точки зрения величины генерируемой ионной силы углового режима движения цилиндрического тела в плоском и пространственном случаях движения.
5. Разработаны новые законы и методы управления ионным потоком, обеспечивающие перевод транспортируемого цилиндрического тела в положение равновесия или требуемый режим углового движения. Выполнен анализ устойчивости управляемого движения твердого тела.
  - 5.1. Предложены методы управления движением твердого тела относительно центра масс посредством ионного потока за счет:



- изменения скорости частиц потока за счет управления тягой генерирующего ионный поток двигателя;
  - изменения направления оси ионного потока;
  - релейного управления генерирующими ионные потоки двигателями в случае использования нескольких транспортировочных ионных двигателей;
  - изменения направления одного из генерирующих поток двигателей в случае использования нескольких транспортировочных ионных двигателей.
- 5.2. Разработан закон управления скоростью ионного потока, обеспечивающий перевод цилиндрического твердого тела в устойчивое положение равновесия в плоском случае движения. Доказана асимптотическая устойчивость положения равновесия при управляемом движении.
- 5.3. Разработан закон управления направлением оси ионного потока, обеспечивающий перевод цилиндрического тела в устойчивое положение равновесия в плоском случае движения.
- 5.4. Разработан основанный на вычислении энергии закон управления ионным потоком для случая плоского движения системы, который обеспечивает перевод цилиндрического тела в требуемый угловой режим движения. Закон может быть реализован с помощью изменения направления оси ионного потока либо с помощью включения и выключения двигателей при использовании нескольких транспортировочных ионных двигателей.
- 5.5. Разработан закон управления скоростью ионного потока, обеспечивающий стабилизацию пространственного движения осесимметричного твердого тела на геостационарной орбите. Доказана асимптотическая устойчивость положения равновесия при управляемом движении.
- 5.6. Разработан закон управления скоростью ионного потока, обеспечивающий перевод цилиндрического твердого тела в положение равновесия.
6. На основе проведения серии численных экспериментов осуществлена оценка эффективности использования разработанных законов и методов управления ионным потоком с точки зрения затрат времени и топлива, требуемых для осуществления бесконтактной транспортировки цилиндрического тела в случае использования одного или нескольких ионных потоков в плоском случае движения.

**Теоретическая значимость** работы заключается в том, что разработанные методы, математические модели и законы управления цилиндрическим твердым телом на орбите способствуют развитию *фундаментальных* аспектов механики космического полета, теории динамических систем и процессов управления.

**Практическая значимость работы** заключается в возможности непосредственного использования полученных результатов при подготовке миссий по бесконтактной уборке космического мусора цилиндрической формы, для повышения эффективности использования топлива при бесконтактной ионной транспортировке, а также для разработки систем бесконтактной стабилизации пассивных объектов перед их захватом роботизированными манипуляторами.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Новые методы бесконтактной транспортировки твердого тела за счет изменения скорости, направления и количества ионных потоков с учетом особенностей углового движения тела.
2. Математические модели, описывающие движение твердого тела относительно центра масс с учетом сил и моментов, генерируемых ионным потоком.
3. Анализ хаотических режимов неуправляемого движения цилиндрического твердого тела в ионном потоке, основанный на изучении топологии фазового пространства невозмущенного движения цилиндрического тела, построении сечений Пуанкаре и вычислении спектра показателей Ляпунова.
4. Метод определения наиболее эффективного с точки зрения величины генерируемой ионной силы углового режима движения цилиндрического твердого тела.
5. Законы управления ионным потоком, обеспечивающие перевод цилиндрического тела в положение равновесия или требуемый режим углового движения для случаев плоского и пространственного движения. Анализ устойчивости управляемого движения твердого тела.
6. Оценка эффективности использования разработанных законов и методов управления ионным потоком с точки зрения затрат времени транспортировки и затрат топлива в случае использования одного или нескольких ионных потоков.

**Достоверность и обоснованность результатов работы** обеспечивается строгим и корректным использованием известных методов теоретической механики, механики космического полета и теории устойчивости движения; сравнением полученных результатов численного моделирования с приводимыми в литературе результатами; сравнением полученных аналитических результатов с результатами численного моделирования.

**Апробация результатов работы** осуществлялась на различных научных конференциях:

- 71-ом Международном Астронавтическом Конгрессе (71st International Astronautical Congress) (Дубай, Объединенные Арабские Эмираты, 2020);
- VI Международной конференции и молодежной школе ИТНТ-2020 (Самара, 2020);

- XLV Академических чтениях по космонавтике (Москва, 2021);
- Международной молодёжной научной конференции «XVI Королёвские чтения» (Самара, 2021);
- XLVI Академических чтениях по космонавтике (Москва, 2022);
- XIII Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Санкт-Петербург, 2023).

Результаты исследований были внедрены в учебный процесс кафедры теоретической механики Самарского университета и составили основу курса магистерской подготовки “Динамика космических систем при бесконтактном взаимодействии”.

Результаты работы вошли в научные отчеты по следующим грантам:

- РФФ 22-19-00160 “Разработка систем бесконтактной транспортировки космического мусора посредством ионного потока” (2022-2024 гг.);
- РФФ 19-19-00085 “Выявление и устранение хаоса в динамических процессах и движении космических систем сложной структуры” (2019-2023 гг.);
- РФФИ 18-01-00215А “Динамика космического аппарата и многомерных космических систем с учетом влияния внешних силовых полей и сред” (2018-2020 гг.).

**Публикации.** Основные результаты исследований опубликованы в 17 печатных работах, среди которых монография, опубликованная в 2022 году в издательстве Elseiver в соавторстве с профессором В.С. Аслановым [8]; 15 статей в журналах, входящих в базы Web of Science и Scopus [9–23], включая 7 в журналах квартиля Q1 [11, 13, 14, 16, 20, 22, 27] и 3 в журналах квартиля Q2 [9, 12, 15]; одна статья в рецензируемом научном журнале, из перечня ВАК РФ [24].

Помимо указанных выше работ, в период с 2007 по 2023 год автором опубликована монография: Aslanov V.S., Ledkov A.S., "Dynamics of tethered satellite systems", Elseiver, 2012, 356 p. и 18 статей по динамике космических тросовых систем и спускаемых аппаратов в изданиях, проиндексированных Web of Science и Scopus.

**Личный вклад соискателя.** Все представленные в диссертации научные результаты получены автором лично. Вклад автора в публикации, выполненные в соавторстве, состоял в следующем:

- в статье [9] разработана математическая модель, описывающая плоское движение цилиндрического твердого тела под действием гравитационных и ионных сил и моментов при неизменном относительном положении активного космического аппарата;
- в статье [10] разработана математическая модель, описывающая плоское движение цилиндрического твердого тела под действием гравитационных, ионных и

аэродинамических сил и моментов; проведен анализ неуправляемого движения тела относительно центра масс в ионном потоке;

- в статье [11] разработана математическая модель, описывающая плоское движение механической системы, состоящей из тела и активного космического аппарата, под действием гравитационных и ионных сил и моментов; предложен основанный на вычислении энергии невозмущенной системы закон управления ионным потоком; предложены различные стратегии управления движением тела относительно центра масс в процессе транспортировки и проведено сравнение их эффективности со случаем неуправляемой транспортировки с точки зрения временных затрат и затрат топлива;
- в статье [12] разработана математическая модель, описывающая пространственное движение твердого тела под действием гравитационных и ионных сил и моментов при неизменном относительном положении активного космического аппарата; упрощенная математическая модель, описывающая движение осесимметричного тела в случае, когда его центр масс движется по кеплеровой орбите; найдены стационарные движения осесимметричного тела; разработан закон управления тягой транспортировочного двигателя, обеспечивающий перевод тела в стационарный режим движения; проведен численный анализ влияния эксцентриситета орбиты центра масс тела на его колебания в процессе управляемого движения;
- в статье [13] проведен анализ исследований по теме бесконтактной ионной транспортировки космического мусора ионным потоком;
- в статье [14] предложен метод повышения эффективности системы ионной транспортировки за счет использования нескольких ионных потоков; разработаны законы управления транспортировочными двигателями активного космического аппарата, основанные на вычислении энергии транспортируемого твердого тела в случае, когда ионная транспортировка осуществляется массивом ионных двигателей; проведен анализ эффективности использования нескольких ионных потоков при использовании различных законов управления с точки зрения временных затрат и затрат топлива;
- в статье [16] получено уравнение, описывающее невозмущенное движение твердого тела под действием ионного момента на круговой орбите; предложен закон управления тягой транспортировочного двигателя, обеспечивающий перевод тела в положение устойчивого равновесия, и проведен анализ устойчивости управляемого движения; предложен закон управления направлением оси ионного потока, с помощью метода Беллмана показано, что оптимальное по времени управление является релейным; проведен анализ и сравнение

результатов численного моделирования управляемых колебаний твердого тела при использовании предложенных законов управления;

- в статье [17] разработана упрощенная модель, описывающая пространственное движение динамически симметричного цилиндрического твердого тела на геостационарной орбите; предложен закон управления тягой двигателя, переводящий твердое тело в стационарный режим движения;
- в статье [18] разработана математическая модель, описывающая плоское движение механической системы, состоящей из тела и активного космического аппарата, под действием гравитационных и ионных сил и моментов; предложен закон управления двигателями активного космического аппарата и закон управления направлением оси ионного потока для перевода твердого тела в требуемый угловой режим движения; проведен анализ влияния угловых режимов движения твердого тела на величину генерируемой осредненной ионной силы;
- в статье [19] получено дифференциальное уравнение, приближенно описывающее плоское движение твердого тела вокруг его центра масс на эллиптической орбите с малым эксцентриситетом под действием ионного момента; построены бифуркационные диаграммы, описывающие влияние параметра уравнения движения на расположение и тип положений равновесия для различных положений центра масс; с помощью сечений Пуанкаре и спектра показателей Ляпунова проведен анализ хаотических режимов движения тела; введен параметр, отражающий отношение ионного и гравитационного моментов; исследовано влияние этого параметра на топологию фазового пространства;
- в статье [20] получено уравнение, описывающее плоское движение твердого тела вокруг его центра масс при его движении по кеплеровой орбите; с помощью сечений Пуанкаре и спектра показателей Ляпунова проведен анализ хаотических режимов движения тела на кеплеровой орбите;
- в статье [21] разработана математическая модель, описывающая плоское движение тела под действием гравитационных и ионных сил и моментов; проведен численный анализ влияния высоты орбиты на расположение и тип положений равновесия твердого тела; предложен закон управления тягой двигателя, обеспечивающий перевод тела в требуемый угловой режим движения;
- в статье [22] разработана упрощенная математическая модель, описывающая пространственное движение осесимметричного тела под действием гравитационных и ионных сил и моментов на геостационарной орбите; найдены стационарные режимы движения тела; предложен закон управления тягой транспортировочного двигателя, и

исследована устойчивость управляемого движения; численно построена диаграмма областей притяжения асимптотически устойчивого положения равновесия;

- в статье [23] записано уравнение, описывающее плоские колебания цилиндрического твердого тела относительно центра масс на кеплеровой орбите под действием гравитационного и ионного моментов; исследовано влияние положения центра масс цилиндра на вид ионного момента и ионной силы; записано уравнение невозмущенного движения тела на круговой орбите; для различных положений центра масс исследовано влияние отношения гравитационного и ионного моментов на положения равновесия невозмущенной системы; с помощью сечений Пуанкаре проведен анализ влияние эксцентриситета орбиты на хаотические движения системы.

В монографии [8], помимо указанных выше полученных автором результатов, содержатся результаты численных расчетов ионных сил и моментов и анализ влияния параметров тела на величину проекций ионных сил и моментов, которые были получены автором лично. Во всех случаях использования результатов других исследований в диссертации приводятся ссылки на источники.

## **1 Состояние проблемы и методы исследования**

Очистка околоземного пространства от космического мусора является одной из наиболее актуальных проблем современной космонавтики. Этой проблеме посвящено огромное количество научных работ. В данной главе дается краткое описание текущего состояния проблемы с упором на бесконтактные способы уборки космического мусора. Описываются подходы к моделированию ионного потока, методика вычисления необходимых для моделирования потока параметров на основе характеристик электрореактивного двигателя и методика расчета затрат топлива активного космического аппарата при бесконтактной транспортировке объекта космического мусора.

Результаты данной главы опубликованы в работах автора [8,13].

### **1.1 Увод космического мусора как твердого тела: пути решения этой проблемы**

Космический мусор является одной из наиболее острых проблем, стоящих перед современной космонавтикой. В настоящее время в околоземном пространстве находится огромное количество крупных объектов космического мусора, к которым относятся нефункционирующие спутники, ступени ракет, разгонные блоки и их фрагменты. Двигаясь с огромными скоростями, эти объекты представляют серьезную угрозу как для функционирующих на орбите спутников, так и для вновь выводимых космических аппаратов. В 1978 г. Д.Дж. Кесслер и Б.Г. Кур-Пале опубликовали работу [25], в которой описали драматичный сценарий развития ситуации на орбите, получивший в дальнейшем название “синдром Кесслера”. Столкновение крупных объектов космического мусора может запустить цепную реакцию взаимных столкновений, в результате которых вокруг Земли образуется облако мелких обломков, которое сделает невозможным практическое использование космоса. Согласно данным, приведенным на сайте ESA, к настоящему времени на орбите произошло более 640 инцидентов, сопровождавшихся образованием космического мусора [26]. Наиболее значимым из них является столкновение спутников Космос-2251 с Иридиум-33, в результате которого оба спутника были разрушены. Согласно существующим оценкам, некоторые из образовавшихся при этом осколков останутся на орбите до 2090 года [27]. Еще более усугубляют ситуацию планы коммерческих компаний развернуть свои группировки малых спутников [28], так размещение дополнительных 6000 космических аппаратов на низкой околоземной орбите увеличит прогнозируемую частоту столкновений на 20-30% [29].

Размеры и масса объектов космического мусора могут существенно различаться, соответственно, различаются и способы борьбы с ними. Космический мусор по размеру принято

разделять на три группы: большой космический мусор, размер которого превосходит 10 см; средний космический мусор, куда относят объекты размером от 1 см до 10 см; и маленький космический мусор размером менее 1 см. Единственной эффективной мерой по борьбе с маленьким космическим мусором сегодня являются различные щиты и защитные оболочки [30]. Эти щиты не способны защитить спутник от космического мусора среднего и большого размера. Основными способами борьбы с ним являются: управление космическим трафиком посредством корректировки орбиты спутника при обнаружении потенциальной угрозы столкновения [31]; “just-in-time collision avoidance” меры, которые заключаются в кратковременном воздействии на объект космического мусора с целью изменения его траектории [32]; меры по уводу спутников и ступеней ракет с орбиты после завершения их основной миссии; активная уборка космического мусора, которая подразумевает использование внешнего космического аппарата для осуществления спуска с орбиты объекта космического мусора или перемещение его на орбиту захоронения. Эти меры направлены на уменьшение количества крупногабаритных объектов на орбите, что в свою очередь уменьшает вероятность столкновений. В диссертационной работе исследуются различные аспекты миссии по активной уборке космического мусора.

Согласно рекомендациям Межагентского координационного комитета по космическому мусору (IADC Guidelines) в околоземном пространстве выделяются два защищенных региона, имеющие большое практическое значение: регион на низкой околоземной орбите (LEO) и регион на геостационарной орбите (GEO) [33]. Первый из них ограничен сферой радиуса  $R_{LEO} = 8371$  км, второй – четырьмя поверхностями: двумя сферами радиуса  $R_{GEO} \pm 200$  км, где  $R_{GEO} = 42164$  км, и двумя симметричными относительно плоскости экватора конусами, чьи боковые поверхности образуют с плоскостью экватора углы  $15^\circ$  (рисунок 1.1). Согласно рекомендациям, космический мусор из первого региона перемещается на орбиту, где время его существования не превышает 25 лет, а из второго - убирается на орбиту захоронения, которая не пересечет GEO-защищенный регион в ближайшие 100 лет. Исследование [29] показывает, что эти требования недостаточны, и все вновь выводимые объекты после завершения их миссий должны уводиться с орбиты как можно быстрее, при этом процент успешных спусков должен составлять не менее 95%. В [34] показано, что правило 25 лет существенно увеличивает вероятность столкновения объектов космического мусора на высотах ниже 700 км, поэтому необходимы более жесткие требования. По существующим оценкам, для того, чтобы остановить рост числа объектов космического мусора и стабилизировать ситуацию на орбите, необходимо ежегодно убирать по крайней мере пять крупногабаритных объектов космического мусора [35,36].



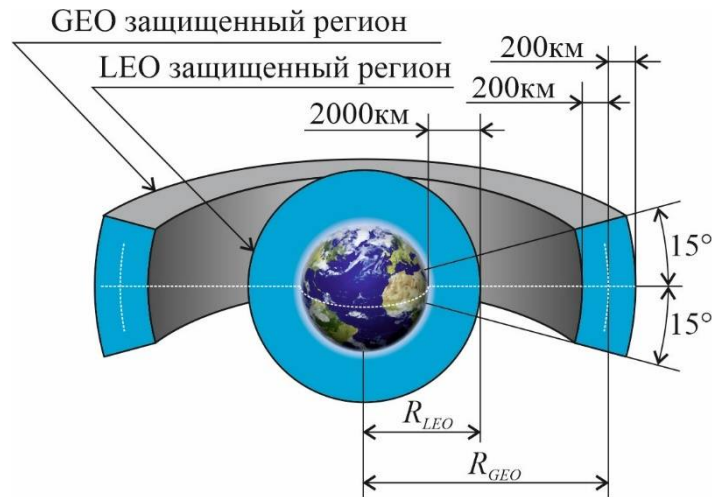


Рисунок 1.1 – Защищенные регионы

В научной литературе активно обсуждаются различные методы уборки космического мусора. Обзор существующих подходов и решений может быть найден в статьях [4,13,37]. При этом основными сложностями на пути практической реализации программ по уборке космического мусора являются: высокая стоимость, юридические сложности, отсутствие консенсуса по выбору первостепенных целей и опасность усугубления ситуации на орбите из-за потенциально возможных аварий в процессе осуществления миссии [2]. Миссия по уборке космического мусора может включать в себя следующие этапы: запуск активного космического аппарата, сближение активного космического аппарата с космическим мусором, оценка и уточнение параметров движения и массово-геометрических характеристик объекта космического мусора, стабилизация объекта космического мусора, стыковка или захват, транспортировка, контролируемый вход в атмосферу либо отстыковка космического аппарата и полет к следующей цели. В зависимости от конкретной миссии тот или иной этап может отсутствовать. По способу транспортировки пассивного объекта можно разделить системы уборки космического мусора на три группы: жесткий захват, транспортировка на тросе либо бесконтактная транспортировка (рисунок 1.2). В первую группу входят системы, подразумевающие захват или жесткую стыковку с объектом космического мусора, после чего активный космический аппарат-уборщик и космический мусор движутся как единое твердое тело (рисунок 1.2а). Для транспортировки могут использоваться как двигатели активного космического аппарата, так и вспомогательные устройства, такие как электродинамическая тросовая система или солнечный парус. В отличие от тросового и бесконтактного методов, при транспортировке в режиме жесткого захвата возможно использование двигателей большой тяги для реализации импульсных перелетов. Методы первой группы наиболее просты с точки зрения управления системой. Основная сложность заключается в создании надежной и безопасной

системы стыковки или захвата. Ошибки на этапе захвата могут привести к столкновению активного космического аппарата с космическим мусором и выводу космического аппарата из строя. Использование троса позволяет уменьшить вероятность потери активного космического аппарата, поскольку захват осуществляет прикрепленный к тросу модуль, поломка которого не приведет к потере всего космического аппарата (рисунок 1.2b). После захвата активный космический аппарат буксирует объект космического мусора на тросе. Тросовая буксировка предполагает создание более сложной системы управления, учитывающей упругие колебания троса. При тросовой буксировке невозможно использование импульсных двигателей из-за опасности обрыва троса. Кроме того, реактивная струя двигателя активного космического аппарата может пережечь трос, что необходимо принимать во внимание при проектировании активного космического аппарата. Методы третьей группы не предполагают прямого механического контакта между активным космическим аппаратом и объектом космического мусора, что значительно уменьшает вероятность их столкновения и потери активного космического аппарата (рисунок 1.2c). Кроме того, бесконтактные способы позволяют осуществлять транспортировку быстро вращающихся объектов. Бесконтактное воздействие на объект космического мусора может оказываться через гравитационные [38] и электромагнитные [39,40] поля, посредством лазера [41,42] или потока частиц, генерируемого двигателем активного космического аппарата [8].

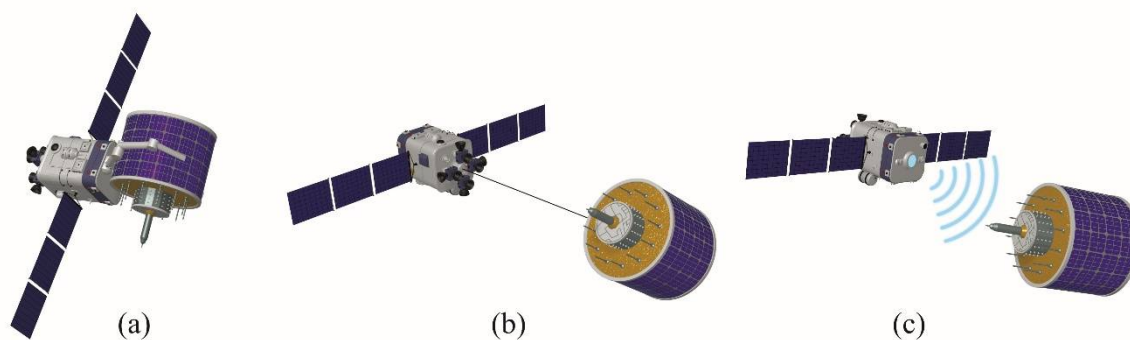


Рисунок 1.2 – Способы транспортировки космического мусора

### 1.2 Бесконтактная транспортировка твердого тела ионным потоком на орбите

Одним из перспективных способов бесконтактной уборки космического мусора является использование ионного потока, генерируемого электрореактивным двигателем активного космического аппарата. Для осуществления транспортировки космический аппарат подлетает на расстояние порядка десяти метров к объекту космического мусора и направляет на него струю своего “транспортировочного” двигателя. Сталкиваясь с поверхностью объекта, частицы струи

генерируют силу. Результирующую силу, генерируемую ионным потоком, будем в дальнейшем называть ионной силой. Эта сила зависит как от параметров ионного потока, так и от формы космического мусора и его расположения внутри потока. В общем случае точка приложения ионной силы не совпадает с центром масс обдуваемого ионным потоком объекта, в результате чего возникает момент, который будем в дальнейшем называть ионным моментом. Поскольку генерирующий ионный поток двигатель создает тягу, которая отдаляет активный космический аппарат от космического мусора, для поддержания неизменного расстояния между ними необходимо использовать еще один противоположно направленный “компенсационный” двигатель (рисунок 1.3). Описанная схема была предложена независимо друг от друга тремя группами авторов:

- S. Kitamura [5];
- J. M. Ruault, M. C. Desjean, C. Bonnal, P. Bultel [6];
- C. Bombardelli, J. Pelaez [7].

Проект S. Kitamura был посвящен уборке космического мусора с геостационарной орбиты, а два других проекта – спуску с низкой околоземной орбиты. C. Bombardelli и J. Pelaez развили свой проект, получивший название "Ion Beam Shepherd", в рамках гранта FP7 “Improving Low Earth Orbit Security With Enhanced Electric Propulsion” (LEOSWEEP) [43].

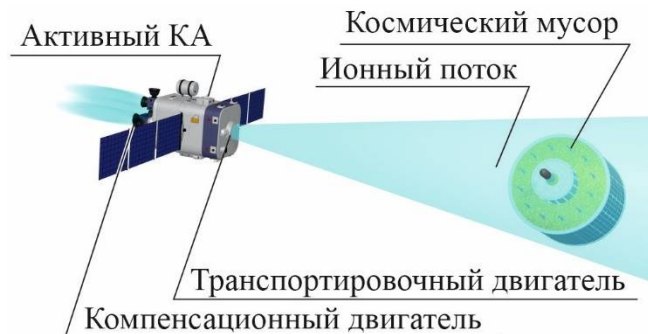


Рисунок 1.3 – Схема уборки космического мусора ионным потоком

Двойной расход топлива является основным недостатком ионного способа транспортировки. Одним из подходов к решению этой проблемы является разработка двунаправленных ионных двигателей [44,45]. Другой проблемой является загрязнение поверхности активного космического аппарата. При обдувании объекта космического мусора ионным потоком происходит эрозия поверхности. Часть распыленного с поверхности вещества может осесть на активном космическом аппарате. Поскольку длительность ионной транспортировки существенна, на панелях солнечных батарей и датчиках космического аппарата может образоваться непрозрачная пленка загрязнения, препятствующая нормальной работе

оборудования [46,47]. Кроме того, эрозия может привести к образованию вторичного космического мусора [48].

Сложность моделирования движения твердого тела под действием ионного потока заключается в том, что величины и направления ионной силы и момента, генерируемых потоком, зависят от многих параметров, включая форму тела, его ориентацию в потоке, расстояние между телом и активным космическим аппаратом, направление оси ионного потока, а также от параметры самого потока. Наличие ионного момента приводит к тому, что тело при бесконтактной транспортировке будет менять свою ориентацию в потоке, что в свою очередь приведет к изменению модуля и направления генерируемых ионной силы и момента. Управление ориентацией тела в потоке может увеличить эффективность системы, что выразится в сокращении продолжительности миссии и уменьшении количества топлива, необходимого для ее осуществления [11].

Для вычисления генерируемых ионной силы и момента широко используется методика, описанная в [49,50], которая заключается в представлении поверхности тела в виде совокупности треугольников и расчете силового воздействия на каждый из них с последующим вычислением результирующей силы и момента. Для определения параметров потока в окрестности треугольника используется автоподобная модель распространения ионов и гипотеза о полном диффузном отражении частиц от поверхности. Сравнение различных автоподобных моделей распространения плазмы приведено в [51]. В работе [52] с помощью автоподобной модели производится оценка силового воздействия факела электрореактивного двигателя космического аппарата на его корпус и солнечную батарею. Результаты сравниваются с данными, полученными в ходе космического эксперимента EPICURE [53]. В работе [54] показано, что данные, полученные в результате использования автоподобной модели распространения плазмы струи электрореактивного двигателя Холла, хорошо согласуются с результатами экспериментальных исследований. Помимо автоподобной, для моделирования распространения плазмы также используется более точная, но требующая больших вычислительных затрат асимптотическая модель [55]. Наиболее близкие к реально наблюдаемой картине результаты получаются при использовании конечно-элементных моделей [56], однако они требуют еще больших вычислительных затрат. Для грубых оценочных расчетов ионных сил и моментов может быть применена приближенная методика, основанная на использовании аэродинамических характеристик объекта [57]. При взаимодействии потока плазмы с поверхностью объекта могут происходить различные физические явления, такие как: обратное рассеивание ионов, обратный поток распыленных атомов, электростатические эффекты, связанные с изменением заряда объекта. Довольно подробное описание всех этих явлений приводится в [47].

В рамках проекта "Ion Beam Shepherd", который берется за основу в данной работе, для генерации ионного потока планируется использовать радиочастотный ионный двигатель. Исследование [58] показывает, что для минимизации массы активного космического аппарата транспортировочный двигатель должен работать на большем напряжении, чем компенсационный двигатель. При увеличении напряжения угол расхождения потока уменьшается, что благотворно сказывается на величине генерируемой ионной силы. В работе [59] проводятся результаты аналитического и экспериментального определения характеристик ионного двигателя. Результаты показывают возможность уменьшить угол расхождения ионного потока до величины порядка двух градусов. Детальный обзор исследований по современным ионным двигателям приведен в [60].

К настоящему времени подробно исследована транспортировка объекта космического мусора ионным потоком без учета его движения относительно центра масс. Устойчивость положения сферического космического мусора относительно активного космического аппарата исследована в [61], где также предложен закон управления двигателями активного космического аппарата. В работе [62] найден закон управления компенсационным двигателем активного космического аппарата, который обеспечивает неизменное расстояние между активным космическим аппаратом и объектом космического мусора. Случай эллиптической орбиты рассмотрен в [63]. Для определения коэффициентов закона управления с помощью методологии описанной в [64] осуществлен переход от дифференциальных уравнений к дискретным уравнениям. В исследовании [65] предложен закон управления углом тангажа активного космического аппарата с целью демпфирования колебаний космического мусора в направлении, перпендикулярном плоскости орбиты. В работе [66] разработана методология предварительного выбора параметров активного космического аппарата для уборки космического мусора ионным потоком. Определено два ключевых параметра миссии: расстояние между активным космическим аппаратом и космическим мусором, а также тяга ионного двигателя. Вопрос оптимизации параметров ионных двигателей для бесконтактной уборки космического мусора рассмотрен в [58]. В статье [67] предлагается использовать платформу Express-1000NV для осуществления последовательной уборки нескольких объектов космического мусора. Результаты этих работ подтверждают техническую реализуемость технологии бесконтактной уборки космического мусора ионным потоком и могут быть использованы в качестве основы для более детального проектирования реальных миссий.

Ориентация объекта космического мусора в ионном потоке оказывает существенное влияние на величину и направление генерируемых ионной силы и момента. Поэтому при моделировании уборки космического мусора необходимо учитывать движение объекта

относительно его центра масс. Во второй главе книги [49] приводится математическая модель, описывающая движение активного космического аппарата и объекта космического мусора в пространственном случае. Космический мусор и активный космический аппарат рассматриваются как твердые тела. Для описания их углового положения используются углы Эйлера и параметры Родрига-Гамильтона. В статье [68] разработана математическая модель, описывающая орбитальное движение двух твердых тел при наличии бесконтактного взаимодействия между ними. Силы и момент бесконтактного взаимодействия заданы в общем виде. Акцент в работе делается на разработку закона управления активным космическим аппаратом. В статье [56] разрабатывается закон управления активным космическим аппаратом с целью остановки вращения и стабилизации движения объекта космического мусора относительно его центра масс. При этом ионная сила и момент рассчитываются заранее с помощью конечноэлементной модели, а на этапе моделирования движения системы производится интерполяция этих данных. Еще один алгоритм остановки вращения, когда активный космический аппарат движется вокруг космического мусора, предложен в [69].

Анализ литературы показывает, что, не смотря на наличие интереса к теме бесконтактной уборки космического мусора ионным потоком, вопросы исследования динамики орбитального движения твердого тела относительно его центра масс в ионном потоке и разработки законов управления активным космическим аппаратом с учетом этого движения остаются неизученными.

### **1.3 Моделирование ионного потока, вычисление ионных сил и моментов**

Исследование динамики твердого тела в процессе ионной транспортировки невозможно без рассмотрения некоторых аспектов распространения плазмы и ее взаимодействия с поверхностью тела. Испускаемая двигателем плазма состоит из ионов, имеющих скорость порядка нескольких десятков км/с и электронов с энергией в несколько эВ. Физика высокоэнергетической плазмы факела электрореактивного двигателя изучалась многими учеными: в частности, работы [51,55,70,71] посвящены разработке различных математических моделей распространения плазмы и анализу результатов численного моделирования; опубликованы результаты лабораторных исследований [72–74], а также данные космических экспериментов [75,76]; вопросам взаимодействия плазмы с поверхностью тел посвящены работы [52,77,78].

Испускаемый электрореактивным двигателем поток плазмы можно разделить на ближнюю и дальнюю области (рисунок 1.4). Моделирование распространения плазмы в ближней области является очень сложной задачей, поскольку большое влияние на нее оказывают такие

факторы как: электромагнитное поле электрореактивного двигателя, столкновения с большим числом нейтральных атомов, трехмерная неоднородность потока, вызванная несовершенством формы сопла двигателя, бесстолкновительные ударные волны вблизи осевой линии двигателя [79]. В дальней области всем этим можно пренебречь и считать, что распространение плазмы определяется только ее параметрами. Для исследования ближней области наиболее часто используется эмпирический подход. Обычно считается, что ближняя область находится на расстоянии, не превышающем несколько диаметров сопла двигателя. Изучение ближней области необходимо для оценки характеристик тяги двигателей, а также для исследования влияния факела двигателя на чувствительное оборудование космического корабля. В рамках рассматриваемой задачи бесконтактной транспортировки, транспортируемое тело располагается в дальней области потока. Распространение плазмы в этой области описывается сравнительно простыми математическими моделями. Экспериментальные же исследования этой области затруднены ввиду ограниченности размеров вакуумных камер в лабораториях и сложностью проведения экспериментальных исследований в космосе.

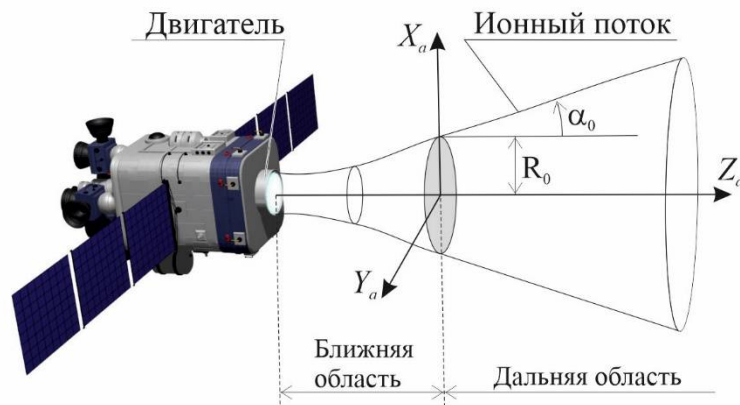


Рисунок 1.4 – Ближняя и дальняя область ионного потока

Распространение плазмы в ближней области влияет на значения угла расхождения потока  $\alpha_0$  и радиуса  $R_0$  на границе дальней области (рисунок 1.4). Предполагается, что сопло двигателя имеет круглое сечение. Плазма распространяется внутри некоторого конуса. Под углом расхождения потока понимается угол полураствора конуса, внутри которого заключено 95% частиц потока. Известно, что угол расхождения плазменного потока увеличивается с увеличением расстояния от сопла двигателя до плоскости измерения [80]. Для описания распространения плазмы двигателя в дальней области используются модели трех типов: простые модели распространения потока из точечного источника [81–83], автоподобные модели и подробные модели. Модели первого типа могут быть использованы только для грубых

оценочных расчетов и не очень хорошо согласуются с экспериментальными данными [84]. В более сложных автоподобных моделях параметры потока описываются с помощью специальной функции подобия  $h$ , зависящей от координат рассматриваемой точки внутри потока. Такие модели позволяют учитывать тепловые эффекты в потоке [85,86]. Для получения решения уравнения течения жидкости при использовании автоподобных моделей вводятся дополнительные гипотезы. Вносимые при этом ошибки в случае потока с большим числом Маха достаточно малы. Получение решений при использовании различных гипотез подробно описано в [87]. Автоподобные модели дают результаты, которые хорошо согласуются с результатами экспериментов [87,88]. К группе подробных моделей относится широкий набор моделей, начиная от упрощенных уравнений течения жидкости и заканчивая сложными гибридными моделями [89,90]. Эти модели дают более точный результат по сравнению с моделями первых двух групп, но требуют существенно больших вычислительных затрат, что делает их непригодными для использования в бортовых системах управления космических аппаратов, которые должны работать в реальном времени. В отчете [87] отмечается, что использование автоподобных моделей предпочтительно для расчета силового воздействия ионного потока на поверхность тела. С одной стороны, эти модели при большей точности имеют ту же вычислительную сложность, что и простые модели распространения из точечного источника. С другой стороны, использование подробных моделей вносит непропорционально малый вклад в точность по сравнению с требуемым увеличением вычислительных затрат.

Существуют две упрощенные модели взаимодействия частиц высокоскоростного потока с поверхностью тела. Первая предполагает спектральное отражение ионов от поверхности, когда генерируемая сила перпендикулярна поверхности. Вторая предполагает диффузионное отражение, когда сила, действующая на поверхность, направлена вдоль скорости частиц до удара. Приведенные в [90] результаты космического эксперимента показывают, что для случая ионного потока, генерируемого электрореактивным двигателем, результаты, полученные с использованием диффузионной модели отражения ионов от поверхности, лучше согласуются с экспериментальными данными.

Рассмотрим элементарный участок поверхности тела площадью  $dS$ , находящийся внутри ионного потока. Сталкиваясь с поверхностью тела, ионы полностью передают ей свой импульс, то есть, рассматривается модель диффузного взаимодействия ионов с поверхностью. В этом случае элементарная сила  $d\mathbf{F}$ , действующая на участок поверхности, может быть вычислена как

$$d\mathbf{F} = -nm_i\mathbf{u}_i(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{e}_N)dS, \quad (1.1)$$

где  $n$  - концентрация ионов в потоке около рассматриваемого элементарного участка поверхности  $dS$ ,  $\mathbf{u}_i$  - скорость ионов около участка  $dS$ ,  $m_i$  - масса иона,  $\mathbf{e}_N$  - единичный вектор



нормали к поверхности. Ионная сила и момент для всей поверхности тела могут быть найдены с помощью формул

$$\mathbf{F}_I = \int_S d\mathbf{F}, \quad \mathbf{M}_I = \int_S \mathbf{p} \times d\mathbf{F}, \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{p}$  - вектор, соединяющий центр масс тела с геометрическим центром элементарного участка  $dS$ ,  $\mathbf{M}_I$  - ионный момент относительно центра масс тела,  $S$  - участок поверхности, на который попадают частицы ионного потока. Выражения (1.2) могут быть вычислены аналитически только для тел простейшей формы. Например, в разделе 3.2 книги [49] детально описано получение формулы ионной силы для сферы. Спутники и ступени ракет, как правило, имеют довольно сложную форму, и выражения (1.2) для таких тел могут быть вычислены только численно. Разобьем поверхность рассматриваемого твердого тела на  $N$  треугольников и вычислим для каждого из них ионную силу  $\mathbf{F}_j$ . Проводя суммирование, найдем результирующую силу и момент для всего тела

$$\mathbf{F}_I = \sum_{j=1}^N \delta_j \mathbf{F}_j, \quad \mathbf{M}_I = \sum_{j=1}^N \delta_j \mathbf{p}_j \times \mathbf{F}_j, \quad (1.3)$$

где  $\delta_j = 0$  в случае, когда  $j$ -ый треугольник находится в тени, и  $\delta_j = 1$  - если ионы потока попадают на поверхность треугольника.

При вычислении ионной силы, действующей на  $j$ -ый треугольник, примем ряд допущений. Будем считать, что площадь треугольников  $S_j$ , на которые разбита поверхность тела, настолько мала, что скорости ионов, попадающих в различные точки треугольника, одинаковы по модулю и направлению. Генерируемая ионным потоком сила приложена в барицентре треугольника, который будем обозначать точкой  $P_j$  (рисунок 1.5). Сила, действующая на  $j$ -ый треугольник с учетом (1.1) может быть записана как

$$\mathbf{F}_j = -n_j m_j S_j u_j^2 \mathbf{e}_{V_j} (\mathbf{e}_{V_j} \cdot \mathbf{e}_{N_j}), \quad (1.4)$$

где  $n_j$  - концентрация ионов в точке  $P_j$ ,  $u_j$  - скорость ионов в точке  $P_j$ ,  $\mathbf{e}_{V_j}$  - единичный вектор, направленный по вектору скорости потока в точке  $P_j$ ,  $\mathbf{e}_{N_j}$  - единичный вектор нормали к  $j$ -му треугольнику (рисунок 1.5).

Для описания концентрации ионов  $n$  воспользуемся аналитическим выражением, приведенным в [91]. Детальный вывод этого выражения может быть найден также в [8,87]

$$n = \frac{n_0}{h^2} \exp\left(\frac{-\eta^2}{\sigma^2}\right), \quad (1.5)$$

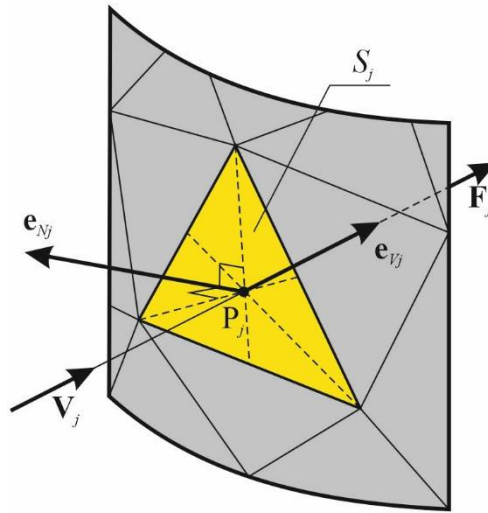


Рисунок 1.5 – Действующая на  $j$ -ый треугольник ионная сила

где  $n_0$  - концентрация ионов на границе дальней области,  $\sigma = \sqrt{-1/\ln(1-k)}$  - безразмерная дисперсия распределения плотности ( $k < 1$ ),  $h(\xi)$  - безразмерная функция автоподобия, описывающая распространение потока. Введем декартову систему координат  $OX_a Y_a Z_a$ , связанную с ионным потоком. Ось  $OZ_a$  направлена вдоль оси ионного потока, а оси  $OX_a$ ,  $OY_a$  лежат на границе дальней области распространения потока (рисунок 1.6). Положение любой точки в потоке может быть задано с помощью координат  $(z, r, \theta)$ . Функция автоподобия связывает координаты соотношением

$$r(\zeta, \eta) = \eta R_0 h(\zeta), \quad (1.6)$$

где  $\zeta = z/R_0$  - безразмерная координата,  $\eta = r(0)/R_0$  - безразмерная координата, задающая положение линии тока на границе дальней области (при  $z = 0$ ).

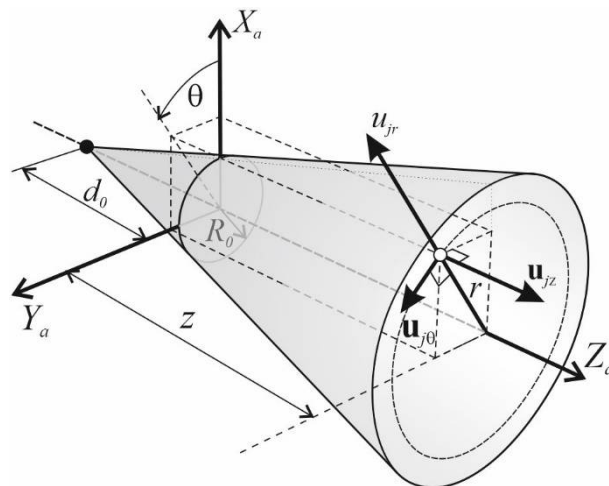


Рисунок 1.6 – Связанная с ионным потоком система координат

Следуя [87] будем считать при расчетах, что  $\sigma^2 \approx 1/3$ . Это значение соответствует случаю, когда при распространении потока 95% ионов ( $k = 0.95$ ) проходит через границу дальней зоны внутри окружности  $r \leq R_0$  при  $\eta = 1$ . С учетом (1.6) выражение (1.5) может быть переписано в виде

$$n_j = \frac{n_0}{h(\zeta)^2} \exp\left(-3 \frac{r^2}{R_0^2 h(\zeta)^2}\right). \quad (1.7)$$

Функция автоподобия  $h(\zeta)$  для случая  $M_0 \gg 1$ ,  $\alpha_0 > 10^\circ$  может быть приблизительно записана как [87]

$$h(\zeta) = 1 + \zeta \tan \alpha_0. \quad (1.8)$$

С учетом этого выражения концентрация (1.7) может быть представлена в виде

$$n_j = \frac{n_0}{\zeta^2 (\zeta^{-1} + \tan \alpha_0)^2} \exp\left(-3 \frac{r^2}{\zeta^2 R_0^2 (\zeta^{-1} + \tan \alpha_0)^2}\right), \quad (1.9)$$

Для рассматриваемого случая бесконтактной транспортировки ионным потоком величину  $\zeta^{-1} = R_0 / z$  можно считать малой по сравнению с  $\tan \alpha_0$ , и на основании (1.9) можно записать приближенную формулу для вычисления концентрации частиц в потоке

$$n_j = \frac{n_0}{\zeta^2 \tan^2 \alpha_0} \exp\left(-3 \frac{r^2}{\zeta^2 R_0^2 \tan^2 \alpha_0}\right). \quad (1.10)$$

Подставляя (1.10) в (1.4), а затем в (1.3), можно вычислить ионную силу и момент, действующие на тело в ионном потоке.

На практике для вычисления ионной силы и момента с помощью формул (1.3) требуется ввести систему координат и спроецировать эти векторные уравнения на соответствующие оси. Величина и направление ионной силы, генерируемой на элементарной поверхности, зависят не только от параметров потока, но и от относительного положения источника потока, а также от ориентации элементарной поверхности в потоке. Рассмотрим некоторую орбитальную систему координат  $BX_oY_oZ_o$ . Начало этой системы совпадает с центром масс тела, который находится в точке  $B$ . Ориентация осей не существенна на этапе определения ионной силы и момента. Введем также связанную с телом систему координат  $BX_bY_bZ_b$ , оси которой являются его главными центральными осями инерции. Переход от системы координат  $BX_oY_oZ_o$  к  $BX_bY_bZ_b$  может быть осуществлен посредством трех поворотов Эйлера на углы  $\gamma$ ,  $\theta$ , и  $\varphi$  в последовательности  $y$ - $x$ - $z$ . Положение центра масс активного космического аппарата (точка  $A$ ) относительно транспортируемого тела определяется вектором  $\overline{BA}$  с координатами  $[x_A, y_A, z_A]$  в орбитальной системе координат  $BX_oY_oZ_o$ . Для определения направления оси ионного потока введем систему

координат  $AX_sY_sZ_s$ . Ось  $AZ_s$  направлена вдоль вектора  $\overline{BA}$ , ось  $AX_s$  лежит в плоскости, образованной осями  $AX_o$  и  $AZ_s$ . Переход от системы координат  $AX_oY_oZ_o$  к  $AX_sY_sZ_s$  может быть осуществлен посредством двух последовательных поворотов на угол  $\alpha_1 = \arctan(y_A/z_A)$  по часовой стрелке и  $\alpha_2 = \arctan(x_A/\sqrt{y_A^2+z_A^2})$  против часовой стрелки вокруг осей  $x$  и  $y$  (рисунок 1.7). Соответствующая матрица поворота имеет вид

$$\mathbf{M}_{so} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 & -\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ 0 & \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ \sin \alpha_2 & \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 & \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

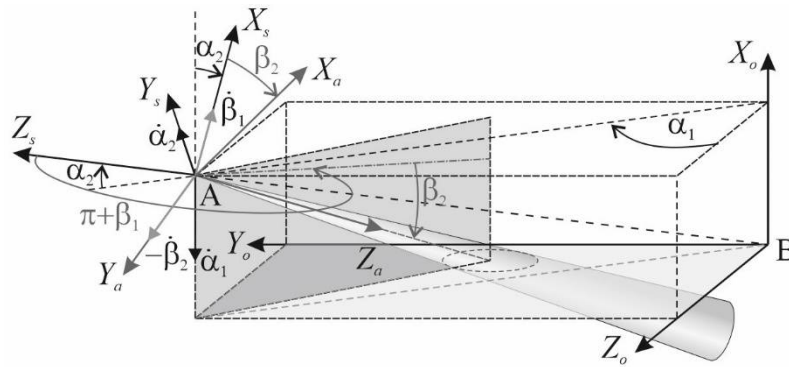


Рисунок 1.7 – Вспомогательные системы координат

Направление оси ионного потока целесообразно задавать в системе координат, связанной с активным космическим аппаратом  $AX_sY_sZ_s$ . Введем систему координат  $AX_aY_aZ_a$ , связанную с ионным потоком. Ось  $AZ_a$  направлена вдоль оси ионного потока. Ось  $AX_a$  лежит в плоскости, образованной  $AX_s$  и  $AZ_a$  (рисунок 1.7). Переход от системы координат  $AX_sY_sZ_s$  к  $AX_aY_aZ_a$  может быть осуществлен с помощью двух последовательных поворотов на угол  $\pi + \beta_1$  против часовой стрелки вокруг оси  $x$  и на угол  $\beta_2$  по часовой стрелке вокруг оси  $y$ . Соответствующая матрица перехода имеет вид

$$\mathbf{M}_{as} = \begin{bmatrix} \cos \beta_2 & \sin \beta_1 \sin \beta_2 & -\cos \beta_1 \sin \beta_2 \\ 0 & -\cos \beta_1 & -\sin \beta_1 \\ -\sin \beta_2 & \sin \beta_1 \cos \beta_2 & -\cos \beta_1 \cos \beta_2 \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

Если рассматривается случай плоского движения системы, можно принять  $\gamma = \pi/2$ ,  $\varphi = -\pi/2$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_1 = 0$  (рисунок 1.8)



Для определения скорости ионов в точке  $P_j$  представим скорость  $u_j$  в виде суммы трех векторов (рисунок 1.3):

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_{jr} + \mathbf{u}_{jz} + \mathbf{u}_{j\theta}, \quad (1.15)$$

где  $u_{jr} = \dot{r}$ ,  $u_{jz} = \dot{z}$ ,  $u_{j\theta} = r\dot{\theta}$ . Для невращающегося потока плазмы  $u_{j\theta} = 0$ . Дифференцируя по времени выражение (1.6), получим

$$u_{jr} = \eta R_0 \frac{dh(z/R_0)}{dz} \dot{z} = \eta h' u_{jz}. \quad (1.16)$$

Используя затем (1.8), запишем

$$u_{jr} = \eta \tan \alpha_0 u_{jz} = \frac{r(0) R_0}{R_0 d} u_{jz} = \tan \chi u_{jz}, \quad (1.17)$$

где  $\chi$  - угол отклонения линии тока оси ионного потока, расстояние  $d$  показано на рисунке 1.6. В рамках рассматриваемой автоподобной модели [91] принято допущение, что компонент скорости вдоль оси потока сохраняет свое значение

$$u_{jz} = u_0 = \text{const} \quad (1.18)$$

Из уравнений (1.18) и (1.17) следует, что вектор скорости  $\mathbf{u}_j$  в точке  $P_j$  направлен вдоль линии, соединяющей источник потока с этой точкой. Считая, что расстояние  $d_0$  мало по сравнению с расстоянием  $z$  (рисунок 1.6), будем приближенно считать, что  $\mathbf{e}_{vj} = \frac{\overrightarrow{AP_j}}{AP_j}$ , тогда в орбитальной системе координат

$$\mathbf{e}_{vj}^o = \begin{bmatrix} \frac{P_{jx} - x_A}{\sqrt{(P_{jx} - x_A)^2 + (P_{jy} - y_A)^2 + (P_{jz} - z_A)^2}} \\ \frac{P_{jy} - y_A}{\sqrt{(P_{jx} - x_A)^2 + (P_{jy} - y_A)^2 + (P_{jz} - z_A)^2}} \\ \frac{P_{jz} - z_A}{\sqrt{(P_{jx} - x_A)^2 + (P_{jy} - y_A)^2 + (P_{jz} - z_A)^2}} \end{bmatrix}, \quad (1.19)$$

где  $P_{jx}$ ,  $P_{jy}$ ,  $P_{jz}$  - координаты барицентра треугольника в орбитальной системе координат, заданные выражением (1.13). С учетом (1.17) и (1.18) скорость потока в барицентре  $P_j$  равна по модулю

$$u_j = \sqrt{u_{jr}^2 + u_{jz}^2} = u_0 \sqrt{1 + \tan^2 \chi} = \frac{u_0}{\cos \chi}, \quad (1.20)$$

где  $\cos \chi = (e_{Vjx} u_{axisx} + e_{Vjy} u_{axisy} + e_{Vjz} u_{axisz})$ ,  $e_{Vjx}$ ,  $e_{Vjy}$ ,  $e_{Vjz}$  - компоненты единичного вектора скорости (1.19),  $e_{axisx}$ ,  $e_{axisy}$ ,  $e_{axisz}$  - компоненты единичного вектора, направленного вдоль оси потока в орбитальной системе координат

$$\begin{bmatrix} e_{axisx} \\ e_{axisy} \\ e_{axisz} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{oa} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

где  $\mathbf{M}_{oa} = (\mathbf{M}_{as} \mathbf{M}_{so})^T$  - матрица перехода от системы координат  $AX_a Y_a Z_a$  к  $AX_o Y_o Z_o$ .

Для того, чтобы определить, не находится ли  $j$ -ый треугольник в тени  $k$ -го треугольника, нужно вычислить координаты точки пересечения плоскости  $k$ -го треугольника с линией, проходящей через точки  $A$  и  $P_j$ . Обозначим эту точку  $K$ . Координаты этой точки могут быть найдены из системы линейных уравнений

$$\frac{x_K - x_A}{P_{jx} - x_A} = \frac{y_K - y_A}{P_{jy} - y_A}, \quad \frac{x_K - x_A}{P_{jx} - x_A} = \frac{z_K - z_A}{P_{jz} - z_A},$$

$$\begin{aligned} & ((z_K - z_{k1})(y_{k3} - y_{k1}) - (z_{k3} - z_{k1})(y_K - y_{k1}))(x_{k2} - x_{k1}) \\ & + ((z_{k1} - z_K)(y_{k2} - y_{k1}) + (z_{k2} - z_{k1})(y_K - y_{k1}))(x_{k3} - x_{k1}) \\ & - ((y_{k1} - y_{k2})(z_{k3} - z_{k1}) + (y_{k3} - y_{k1})(z_{k2} - z_{k1}))(x_K - x_{k1}) = 0. \end{aligned}$$

Первые два уравнения задают прямую  $AP_j$ , а последнее – плоскость, которой принадлежит  $k$ -ый треугольник. Если решение этой системы уравнений существует, и расстояние от точки  $K$  до  $A$  меньше, чем  $AP_j$ , то  $k$ -ый треугольник может создавать тень для  $j$ -го треугольника. В этом случае нужно проверить, лежит ли точка  $K$  внутри  $k$ -го треугольника. В силу малости рассматриваемых треугольников для простоты будем считать, что если это условие выполняется, то весь  $j$ -ый треугольник находится в тени. Условия принадлежности точки треугольнику может быть записано в виде

$$\begin{aligned} & (\mathbf{p}_{21} \times \mathbf{p}_{K1}) \cdot (\mathbf{p}_{K1} \times \mathbf{p}_{31}) > 0, \\ & (\mathbf{p}_{12} \times \mathbf{p}_{K2}) \cdot (\mathbf{p}_{K2} \times \mathbf{p}_{32}) > 0, \\ & (\mathbf{p}_{13} \times \mathbf{p}_{K3}) \cdot (\mathbf{p}_{K3} \times \mathbf{p}_{23}) > 0, \end{aligned} \quad (1.21)$$

где  $\mathbf{p}_{ij} = [x_{ki} - x_{kj}, z_{ki} - z_{kj}, z_{ki} - z_{kj}]^T$ ,  $\mathbf{p}_{Kj} = [x_K - x_{kj}, z_K - z_{kj}, z_K - z_{kj}]^T$ . Если хотя бы одно из неравенств (1.21) не выполняется, то точка  $K$  находится за пределами  $k$ -го треугольника, и этот треугольник не создает тень для  $j$ -го треугольника.

Подставляя (1.10), (1.14), (1.19) и (1.20) в (1.4), можно найти проекции ионной силы  $\mathbf{F}_j^o$ , генерируемой потоком на  $j$ -ом треугольнике, на оси орбитальной системы координат  $BX_o Y_o Z_o$ .

После того, как вычислены все силы для не находящихся в тени треугольников, с помощью формул (1.3) можно найти ионную силу и момент для всего рассматриваемого твердого тела.

#### 1.4 Оценка параметров ионного потока и затрат топлива

Одним из важнейших показателей эффективности миссии по уборке космического мусора является необходимая для осуществления транспортной операции масса топлива. Известно, что сила тяги реактивного двигателя может быть записана как [92]

$$F_T = \dot{m}V_{eff}, \quad (1.22)$$

где  $m$  – масса топлива,  $\dot{m}$  – массовый расход топлива,  $V_{eff}$  – эффективная скорость истечения рабочего тела, которая может быть определена выражением

$$V_{eff} = V_e + \frac{(p_e - p_a)S_e}{\dot{m}}, \quad (1.23)$$

где  $V_e$  – скорость истечения рабочего тела из сопла,  $p_e$  – давление на выходе из сопла,  $p_a$  – давление невозмущенной среды,  $S_e$  – площадь сопла. На практике для описания параметров ракетных двигателей часто используется величина  $I_{sp}$ , называемая удельным импульсом.

Удельный импульс рассчитывается как

$$I_{sp} = \frac{F_T}{\dot{m}g_0}, \quad (1.24)$$

где  $g_0$  – ускорение свободного падения Земли на уровне моря. Подставляя (1.22) в (1.24) и выражая эффективную скорость истечения рабочего тела, получаем

$$V_{eff} = g_0 I_{sp}. \quad (1.25)$$

Уборка космического мусора ионным потоком предполагает использование электрореактивных двигателей малой тяги. Обзор современных электродвигателей можно найти в статьях [60,93]. КПД двигателя  $\eta$  – это отношение мощности реактивного двигателя  $P_{out}$  к подводимой электрической мощности  $P_{in}$ .

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{\dot{m}V_{eff}^2}{2P_{in}}. \quad (1.26)$$

Выражая  $V_{eff}$  из (1.22) и подставляя результат в (1.26), получаем

$$\eta = \frac{F_T V_{eff}}{2P_{in}}. \quad (1.27)$$

Из (1.27) с учетом (1.25) следует, что



$$F_T = \frac{2\eta P_{in}}{g_0 I_{sp}}. \quad (1.28)$$

Из (1.28) следует, что сила тяги, создаваемая электрореактивными двигателями малой тяги, тем больше, чем больше подводимая мощность. Увеличение удельного импульса приводит к уменьшению силы.

Величина требуемой электрической мощности  $P_{in}$  определяет массу энергосистемы космического аппарата  $m_{ps}$ . Для грубой оценки можно использовать следующее приближенное выражение [7]

$$m_{ps} = 2\alpha_{sm} P_{in} = \frac{\alpha_{sm} F_T V_{eff}}{\eta}, \quad (1.29)$$

где  $\alpha_{sm}$  обратная величина удельной мощности или удельной массы системы производства электроэнергии.

В работе [66] предлагается использовать более сложные формулы для вычисления силы тяги и массового расхода двигателя

$$F_T = a + bP_{in}, \quad (1.30)$$

$$\dot{m}(P_{in}) = a' + b'P_{in} + c'P_{in}^2, \quad (1.31)$$

где параметры  $a$ ,  $b$ ,  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  определяются эмпирически для каждого конкретного электрореактивного двигателя.

Уравнения (1.30), (1.31) и (1.24) позволяют записать зависимость удельного импульса от напряжения в виде

$$I_{sp}(P_{in}) = \frac{a + bP_{in}}{g_0(a' + b'P_{in} + c'P_{in}^2)}. \quad (1.32)$$

Выражая мощность из уравнения (1.30) и подставляя его в (1.32), получаем зависимость удельного импульса от силы тяги

$$I_{sp}(F_T) = \frac{b^2 F_T}{g_0(b^2 a' + bb'(F_T - a) + c'(F_T - a)^2)}. \quad (1.33)$$

КПД двигателя с учетом (1.30) и (1.32) можно записать в виде

$$\eta = \frac{(a + bP_{in})^2}{2P_{in}(a' + b'P_{in} + c'P_{in}^2)}. \quad (1.34)$$

КПД двигателя  $\eta$  можно переписать как функцию силы тяги  $F_T$  с помощью замены  $P_{in} = (F_T - a)b^{-1}$ . Используя уравнения (1.30), (1.31), получим зависимость расхода топлива от тяги как

$$\dot{m} = a' + \frac{b'(F_T - a)}{b} + \frac{c'(F_T - a)^2}{b^2}. \quad (1.35)$$

Активный космический аппарат оснащен несколькими двигателями: транспортировочным двигателем, создающим тягу  $F_{Ti}$ ; компенсационным двигателем с тягой  $F_{Tc}$  и двигателями системы ориентации, создающими тягу  $F_{Tu}$ . Для расчета требуемой полной массы топлива необходима зависимость расхода двигателей от силы тяги.

$$\dot{m}_{prop} = \dot{m}_{Ti}(F_{Ti}) + \dot{m}_{Tc}(F_{Tc}) + \dot{m}_{Tu}(F_{Tu}), \quad (1.36)$$

где  $m_{Ti}$  – масса топлива транспортировочного двигателя,  $m_{Tc}$  – масса топлива компенсационного двигателя,  $m_{Tu}$  – масса топлива двигателей системы ориентации, направленных перпендикулярно оси ионного потока. Если зависимости сил тяги от времени известны, то полную массу топлива, необходимого для осуществления транспортной операции, можно получить как

$$m_{prop} = \int_0^{t_k} \dot{m}_{Ti}(F_{Ti}(t))dt + \int_0^{t_k} \dot{m}_{Tc}(F_{Tc}(t))dt + \int_0^{t_k} \dot{m}_{Tu}(F_{Tu}(t))dt, \quad (1.37)$$

где  $t_k$  - время выполнения миссии. В правой части этого выражения функция расхода топлива  $\dot{m}$  определяется с помощью выражения (1.35), в котором параметры  $a$ ,  $b$ ,  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  определены на основе экспериментальных данных.

Для расчета ионной силы и момента, действующих на тело по методике, описанной в разделе 1.3, необходимо иметь некоторые параметры ионного потока, в частности: концентрацию плазмы в начале дальней области  $n_0$ , осевую составляющую скорости ионов  $u_0$ , угол расхождения ионного потока  $\alpha_0$ , массу частицы потока  $m_i$  и радиус потока в начале дальней области  $R_0$ . Для оценочных расчетов будем полагать, что осевая скорость ионного потока равна эффективной скорости истечения двигателя

$$u_0 = V_{eff}, \quad (1.38)$$

а сопло двигателя имеет форму круга радиусом  $R_0$ .

Для расчета концентрации плазмы  $n_0$  рассмотрим бесконечно малый объем потока вблизи сопла  $dV = \pi R_0^2 dx$ , где  $dx = u_0 dt$  - расстояние, которое частица потока проходит за время  $dt$  (рисунок 1.9). За это время из сопла вылетают  $N = n_0 dV$  частицы. Масса этих частиц определяется как

$$dm = m_i N = m_i n_0 dV = m_i n_0 \pi R_0^2 dx = m_i n_0 \pi R_0^2 u_0 dt . \quad (1.39)$$

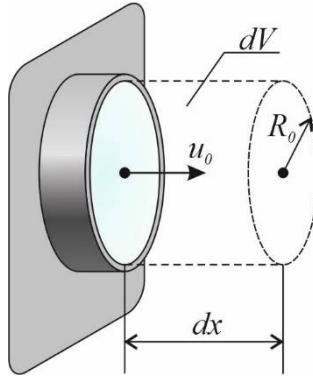


Рисунок 1.9 – Элементарный объем плазмы в ионном потоке

Разделив левую и правую часть выражения (1.39) на  $dt$ , получим

$$\dot{m} = m_i n_0 \pi R_0^2 u_0 . \quad (1.40)$$

Откуда концентрация частиц может быть найдена как

$$n_0 = \frac{\dot{m}}{m_i \pi R_0^2 u_0} . \quad (1.41)$$

С учетом (1.22), (1.38) и (1.35) выражение (1.41) можно переписать в виде

$$n_0 = \frac{\dot{m}^2}{m_i \pi R_0^2 F_T} = \frac{(a'b + b'(F_T - a))^2}{m_i \pi R_0^2 b^2} , \quad (1.42)$$

где  $F_T = F_{Ti}$  - сила, создаваемая транспортировочным двигателем. Полученная формула является приближенной, но она вполне пригодна для грубых оценок. При планировании реальной миссии плотность частиц и другие параметры двигателя можно определить экспериментально.

## **2 Вычисление ионных сил и моментов для твердых тел цилиндрической и близкой к цилиндрической формы**

В этой главе содержатся результаты вычисления ионных сил и моментов с помощью описанного в разделе 1.3 подхода. Описанный подход был реализован в математическом пакете Matlab. Для построения расчетных сеток использовалась открытая программа для 3D-моделирования Blender. Построенные модели экспортировались в STL формат, после чего информация о координатах вершин считывалась в Matlab для осуществления расчета. В главе описываются тонкости расчетной процедуры, и изучается влияние геометрических параметров цилиндрического тела и параметров ионного потока на генерируемые ионную силу и момент, проводится сравнение результатов расчета ионной силы и момента для верхней ступени Космос-3М и цилиндра соответствующих размеров, а также исследуется влияние панелей солнечных батарей цилиндрического спутника на величину генерируемых ионных сил и моментов.

Результаты данной главы опубликованы в [8].

### **2.1 Обсуждение вычислительной процедуры**

В общем случае величина и направление ионной силы и ионного момента зависят от многих факторов, включая форму тела, параметры ионного потока, относительное положение активного космического аппарата, направление оси ионного потока, ориентацию тела в ионном потоке. Некоторые из этих параметров остаются неизменными в течении всего процесса транспортировки. К изменяемым параметрам можно отнести параметры, задающие относительное положение активного космического аппарата:  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $d = AB$  (рисунок 1.7), направление оси ионного потока  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ , скорость ионов на границе дальней области  $u_0$  и три угла, задающие ориентацию тела. Вычисление значений ионной силы и момента на каждом шаге интегрирования дифференциальных уравнений, описывающих движение твердого тела в ионном потоке, является достаточно трудоемким процессом, требующим больших вычислительных и временных затрат. С целью оптимизации можно провести серию предварительных расчетов ионной силы и момента для различных наборов параметров и затем использовать эту базу данных для быстрого вычисления сил и моментов посредством интерполяции. Такой подход был успешно реализован в исследованиях [11,56]. Анализ зависимости ионной силы и момента от полного набора параметров является очень громоздкой задачей, поэтому ограничимся рассмотрением только плоского случая движения цилиндрического тела в ионном потоке, когда его ориентация может быть задана с помощью одного угла  $\theta$  (рисунок 1.8).

При расчетах предполагалось, что система управления активного космического аппарата поддерживает его неизменное положение относительно транспортируемого тела. В орбитальной системе координат, связанной с центром масс тела  $BX_oY_oZ_o$ , активный космический аппарат имеет координаты  $[0, d, 0]$ , где  $d$  - расстояние между источником ионного потока и центром масс тела. Если активный космический аппарат имеет другие координаты  $[x_A, y_A, z_A]$  в  $BX_oY_oZ_o$ , при этом расстояние между точками  $x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 = d^2$ , то ионные силы и момент могут быть получены на основании значений, рассчитанных для положения  $[0, d, 0]$ . Для дальнейшего использования в уравнениях движения ионную силу удобнее всего представить в виде проекций на оси орбитальной системы координат  $BX_oY_oZ_o$ , а ионный момент в виде проекций на оси связанной с телом системы  $BX_bY_bZ_b$ . Рассмотрим плоский случай, чтобы наглядно проиллюстрировать пересчет ионной силы и момента для положения космического аппарата  $[x_A, y_A, z_A]$  (рисунок 2.1). Предполагается, что сила и момент являются функциями четырех параметров:  $x_A$ ,  $y_A$ ,  $\beta = \alpha - \gamma = -\beta_2$  и  $\theta$ . Процесс расчета ионной силы и момента достаточно трудоемок с точки зрения вычислительных затрат, но их можно снизить, сделав предварительный расчет для случая  $x_A = 0$  и  $y_A = d$  и затем повернув систему вокруг оси  $BZ_o$  (рисунок 2.1). В этом случае  $M_x^b = M_y^b = 0$ ,  $F_z^o = 0$ , и

$$\begin{aligned} M_z^b(\theta, \alpha, x_A, y_A) &= M_z^b(\theta + \gamma, \alpha, 0, d), \\ F_x^o(\theta, \alpha, x_A, y_A) &= F_x^o(\theta + \gamma, \alpha, 0, d) \cos \gamma + F_y^o(\theta + \gamma, \alpha, 0, d) \sin \gamma, \\ F_y^o(\theta, \alpha, x_A, y_A) &= -F_x^o(\theta + \gamma, \alpha, 0, d) \sin \gamma + F_y^o(\theta + \gamma, \alpha, 0, d) \cos \gamma, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $d = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$ ,  $\gamma = \arctan\left(\frac{x_A}{y_A}\right)$ . Штрихом на рисунке обозначены силы и оси, соответствующие положению космического аппарата с координатами  $[0, d, 0]$ .

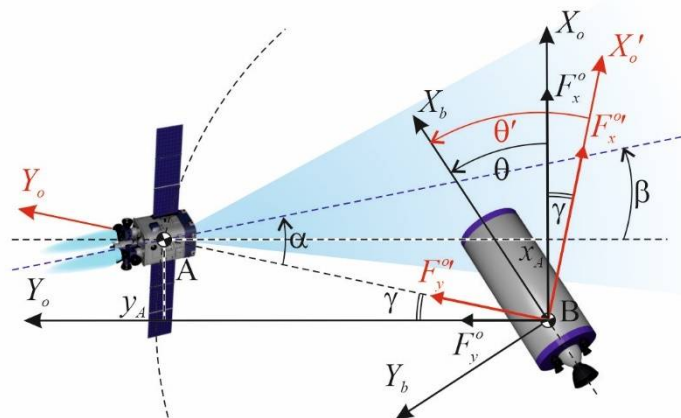


Рисунок 2.1 – Пересчет ионной силы и момента

Направление оси ионного потока, определяемое в плоском случае углом  $\beta_1$ , оказывает большое влияние на ионную силу и момент. Выберем некоторую точку внутри тела, которую назовем «геометрическим центром». Для асимметричных тел это может быть некоторая точка, легко определяемая оптическими датчиками. Рассмотрим далее три частных случая:

- случай 1: центр масс тела совпадает с геометрическим центром (точка  $B_1$ ); ось ионного потока проходит через геометрический центр;
- случай 2: центр масс находится на поверхности тела (идеальный граничный случай, (точка  $B_2$ ), а ось ионного потока направлена в центр масс;
- случай 3: центр масс находится на поверхности тела (точка  $B_3$ ), а ось ионного потока направлена в геометрический центр. Также предполагается, что в этом случае система управления космического аппарата ориентирована не на центр масс, а на геометрический центр и поддерживает постоянное расстояние от космического аппарата до геометрического центра тела.

Поскольку картины обтекания тела потоком в случаях 1 и 3 совпадают, то в этих случаях на поверхности тела генерируются одинаковые ионные силы, однако ионные моменты относительно центра масс различны. Если известен ионный момент относительно геометрического центра  $\mathbf{M}_I$  (случай 1), то момент относительно центра масс в случае 3 можно найти с помощью уравнения

$$\mathbf{M}_C = \sum_{j=1}^N \delta_j (\overline{CO} + \mathbf{d}_j) \times \mathbf{F}_j = \overline{CO} \times \sum_{j=1}^N \delta_j \mathbf{F}_j + \mathbf{M}_I = \overline{CO} \times \mathbf{F}_I + \mathbf{M}_I, \quad (2.2)$$

где  $C$  – центр масс тела,  $O$  - геометрический центр.

В плоском случае ионная сила и момент являются  $2\pi$ -периодическими функциями угла  $\theta$ , определяющего ориентацию тела относительно орбитальной системы координат, и для аппроксимации этих зависимостей имеет смысл воспользоваться рядами Фурье

$$M_I^b = M_I^{\max} \left( a_0^{(Mi)} + \sum_{j=1}^k (a_j^{(Mi)} \cos j\theta + b_j^{(Mi)} \sin j\theta) \right), \quad (2.3)$$

$$F_I^o = F_I^{\max} \left( a_0^{(Fi)} + \sum_{j=1}^k (a_j^{(Fi)} \cos j\theta + b_j^{(Fi)} \sin j\theta) \right), \quad (2.4)$$

где  $i = x, y, z$ ,  $M_I^{\max} = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \left( \sqrt{(M_x^b(\theta))^2 + (M_y^b(\theta))^2 + (M_z^b(\theta))^2} \right)$  - амплитудное значение ионного момента,  $F_I^{\max} = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \left( \sqrt{(F_x^o(\theta))^2 + (F_y^o(\theta))^2 + (F_z^o(\theta))^2} \right)$  - амплитудное значение ионной силы,  $a_j^{(i)}$ ,  $b_j^{(i)}$  - безразмерные коэффициенты рядов Фурье

$$a_0^{(Mi)} = \frac{1}{2\pi M_I^{\max}} \int_0^{2\pi} M_I^b(\theta) d\theta, \quad a_0^{(Fi)} = \frac{1}{2\pi F_I^{\max}} \int_0^{2\pi} F_I^o(\theta) d\theta,$$

$$a_0^{(Mi)} = \frac{1}{\pi M_I^{\max}} \int_0^{2\pi} M_I^b(\theta) \cos j\theta d\theta, \quad a_0^{(Fi)} = \frac{1}{\pi F_I^{\max}} \int_0^{2\pi} F_I^o(\theta) \cos j\theta d\theta,$$

$$b_0^{(Mi)} = \frac{1}{\pi M_I^{\max}} \int_0^{2\pi} M_I^b(\theta) \sin j\theta d\theta, \quad b_0^{(Fi)} = \frac{1}{\pi F_I^{\max}} \int_0^{2\pi} F_I^o(\theta) \sin j\theta d\theta.$$

## 2.2 Ионные силы и моменты, действующие на цилиндр в ионном потоке

Рассчитаем ионную силу и момент для тела цилиндрической формы в плоском случае, когда ориентация тела определяется одним углом  $\theta$ . Если не указано иное, считается, что ионный поток имеет параметры, указанные в таблице 2.1. Форма цилиндра определяется двумя геометрическими параметрами радиусом  $R_c$  и высотой  $H_c$ . Цилиндр имеет ось симметрии и плоскость симметрии, перпендикулярную оси. Геометрическим центром цилиндра будем называть точку, лежащую на пересечении оси и плоскости симметрии (рисунок 2.2).

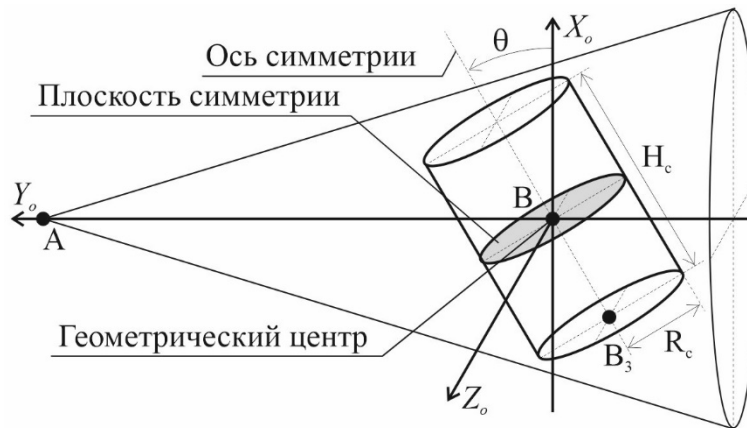


Рисунок 2.2 – Цилиндр в ионном потоке

Рассмотрим плоский случай, когда ось симметрии лежит в плоскости орбиты центра масс тела  $BX_oY_o$ . Исследуем три случая расположения центра масс цилиндра и направления оси

ионного потока, описанные в разделе 2.1. Величина ионного момента относительно центра масс в случае 3 определяется по формуле (2.2), которая для рассматриваемого тела принимает вид

$$M_{z3}^b = \frac{H_c}{2} F_y^o \cos \theta - \frac{H_c}{2} F_x^o \sin \theta + M_I. \quad (2.5)$$

где  $M_I$  - ионный момент относительно геометрического центра цилиндра.

Таблица 2.1 – Параметры ионного потока

Параметр	Значение
Концентрация ионов $n_0$	$2.6 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$
Масса частицы (ксенон) $m_0$	$2.18 \cdot 10^{-25}$
Радиус потока на границе дальней области $R_0$	0.1 м
Осевой компонент скорости ионов $u_0$	38000 м/с
Угол расхождения потока $\alpha_0$	$15^\circ$
Кинетическая энергия частицы $E_0$	982.5 эВ

Для выполнения расчетов рассмотрим цилиндр радиуса  $R_c = 1$  м и высотой  $H_c = 3$  м, который находится в ионном потоке с параметрами данными в таблице 2.1. На рисунке 2.3 показана зависимость проекции ионной силы  $F_x^o$  от угла  $\theta$ . В случае 2 эта проекция достигает больших значений по сравнению со случаями 1 и 3, что обусловлено несимметричным расположением цилиндра в ионном потоке в первом и третьем случаях. На рисунке 2.4 показаны зависимости проекции ионной силы  $F_y^o$  от угла  $\theta$ . В случае 2 график несимметричен относительно  $\theta = \pi$ . Модуль проекции  $F_y^o$  больше на полуинтервале  $\theta \in [0, \pi)$ , чем на полуинтервале  $\theta \in [\pi, 2\pi)$ , поскольку в первом случае поверхность тела находится ближе к источнику ионного потока, и концентрация попадающих на поверхность ионов больше. На рисунке 2.5 показана зависимость ионного момента от угла  $\theta$ . Смещение центра масс с геометрического центра приводит к увеличению момента. Если колебания цилиндра происходят только под действием ионного момента, то нули зависимости момента от угла  $\theta$  и знак производных в этих точках определяют положение и тип точек равновесия. Зависимости, полученные для случаев 2 и 3, близки по амплитуде, однако в случае 2 положение  $\theta = 3\pi/2$  устойчиво, а в случае 3 – неустойчиво, но в его окрестности имеются два устойчивых положения равновесия. Таким образом, направление ионного потока существенным образом влияет не



только на величину генерируемых ионной силы и момента, но и на расположение и тип особых точек системы.

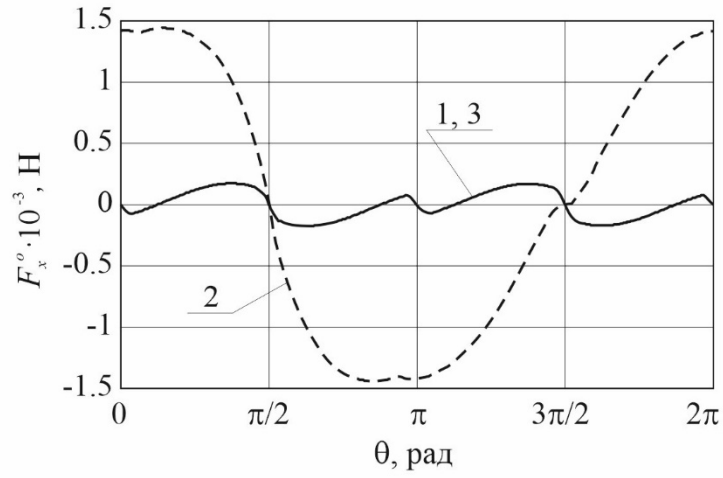


Рисунок 2.3 – Зависимость проекции ионной силы  $F_x^o$  от угла  $\theta$

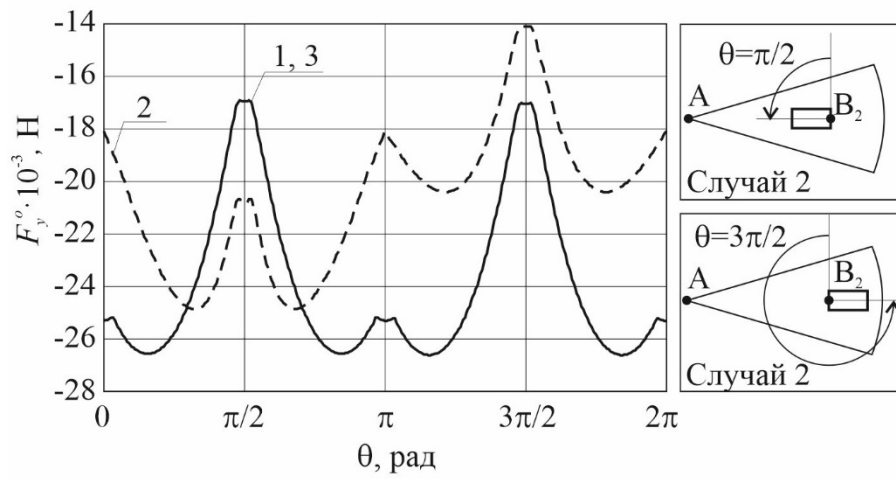


Рисунок 2.4 - Зависимость проекции ионной силы  $F_y^o$  от угла  $\theta$

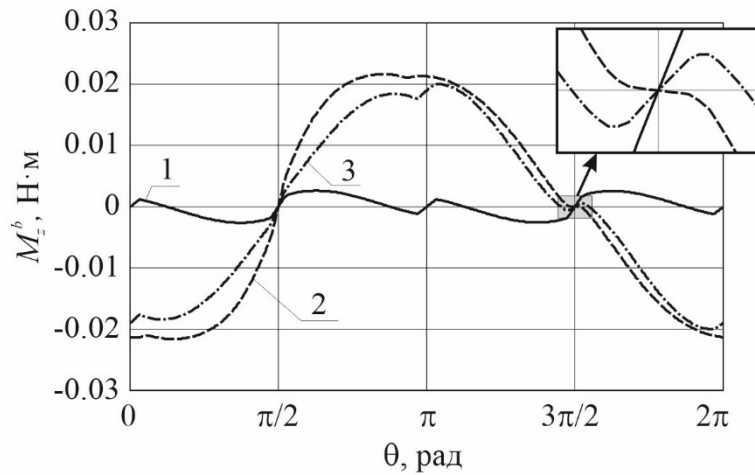


Рисунок 2.5 - Зависимость проекции ионного момента  $M_z^b$  от угла  $\theta$

Следует отметить, что показанные на рисунках 2.3-2.5 кривые имеют изломы. Наличие этих точек обусловлено одновременным попаданием больших поверхностей цилиндра в область тени и выходом из нее. На рисунке 2.6 схематично показан переход поверхностей в тень для случая 1. Серым цветом показаны области, обдуваемые ионным потоком. При  $\theta = 5^\circ$  частицы ионного потока попадают только на часть боковой поверхности цилиндра, обращенную к источнику, и не попадают на верхнюю и нижнюю торцевые плоскости, которые находятся в тени (рисунок 2.6). При увеличении угла  $\theta$  до  $6^\circ$  верхняя плоскость выходит из тени и начинает влиять на ионный момент, при этом на графике  $M_z^b(\theta)$  на рисунке 2.5 наблюдается излом (случай 1). Переход боковой поверхности в тень при  $\theta = 87^\circ$  происходит более плавно и на графике  $M_z^b(\theta)$  не наблюдается резкого излома.

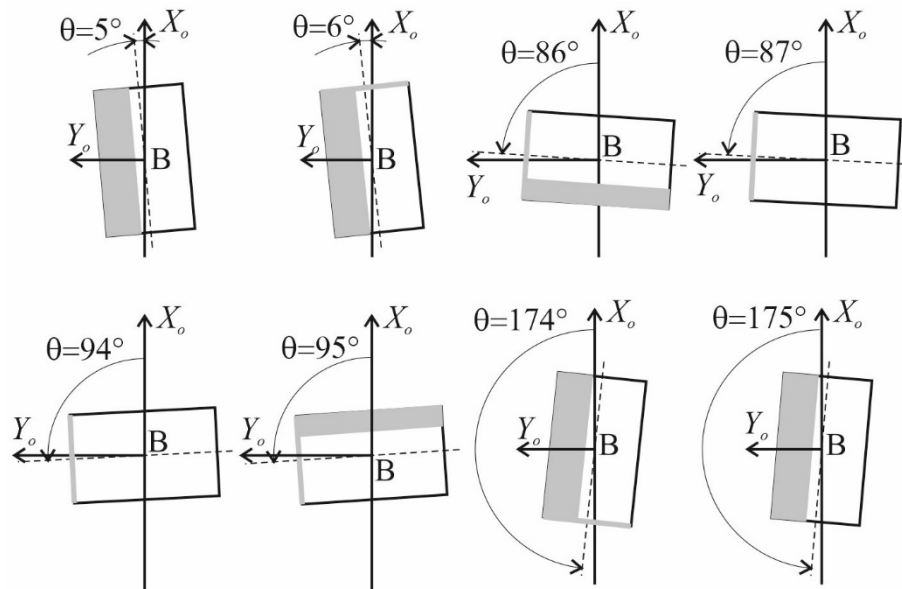


Рисунок 2.6 – Незатененные области тела при его различной ориентации в потоке

Исследуем влияние радиуса цилиндра на величину ионной силы и момента в случае, когда весь цилиндр находится внутри ионного потока, а его центр масс находится в геометрическом центре (случай 1). На рисунках 2.7-2.9 показаны зависимости проекций ионной силы и момента от угла  $\theta$  для различных радиусов  $R_c$ . С увеличением радиуса цилиндра при неизменной высоте  $H_c$  наблюдается увеличение модуля проекции  $F_y^o$ , что в первую очередь обусловлено увеличением площади поверхности тела (рисунок 2.8). При относительно небольшом радиусе площадь торцевых поверхностей цилиндра мала по сравнению с площадью боковой поверхности. Если движение цилиндра происходит только под действием ионного момента, то положения  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ , когда ось цилиндра перпендикулярна оси ионного потока, устойчивы,

а положение  $\theta = \pi/2$  - неустойчиво. По мере увеличения площади торцевых поверхностей положения равновесия  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$  становятся неустойчивыми, и вокруг них появляются два устойчивых положения. Если центр масс расположен на нижней торцевой поверхности в точке  $B_3$ , а ось ионного потока направлена в геометрический центр, то графики зависимостей ионного момента существенно изменяются (рисунок 2.10). Положение  $\theta = \pi/2$  становится неустойчивым (когда ось цилиндра лежит на оси потока, а центр масс находится сзади в тени). В случае, когда площадь торцевой поверхности велика по сравнению с площадью боковой поверхности, положение  $\theta = 3\pi/2$  устойчиво. По мере уменьшения радиуса это положение становится неустойчивым и вокруг него появляются две устойчивые точки.

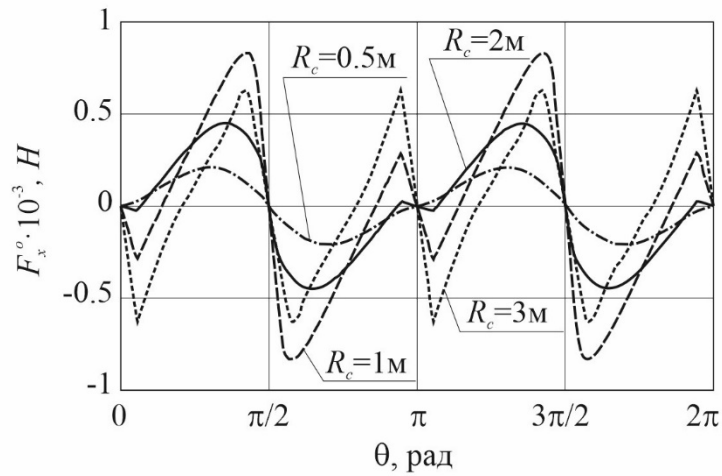


Рисунок 2.7 – Зависимость проекции ионной силы  $F_x^o$  от угла  $\theta$  для  $H_c = 5$  м

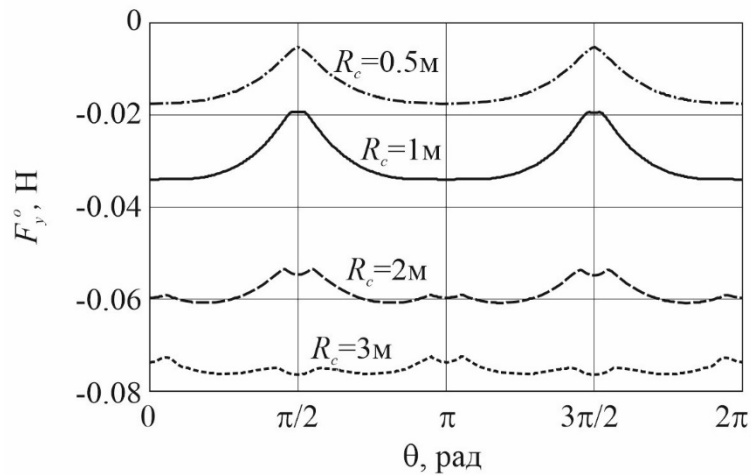


Рисунок 2.8 – Зависимость проекции ионной силы  $F_y^o$  от угла  $\theta$  для  $H_c = 5$  м

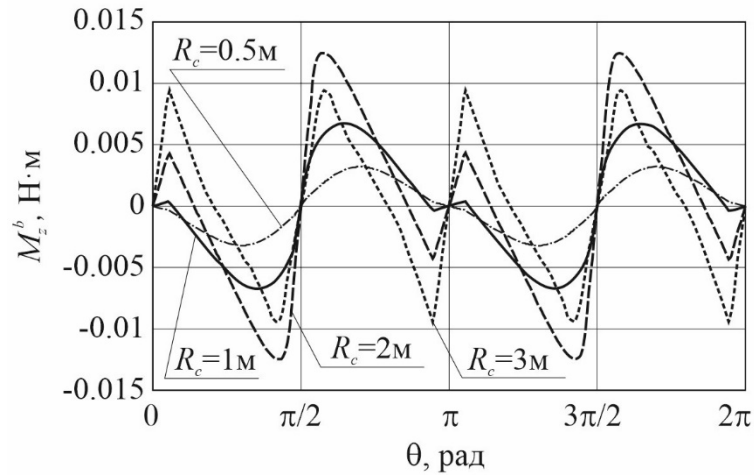


Рисунок 2.9 – Зависимость проекции ионного момента  $M_z^b$  силы от угла  $\theta$  для  $H_c = 5$  м

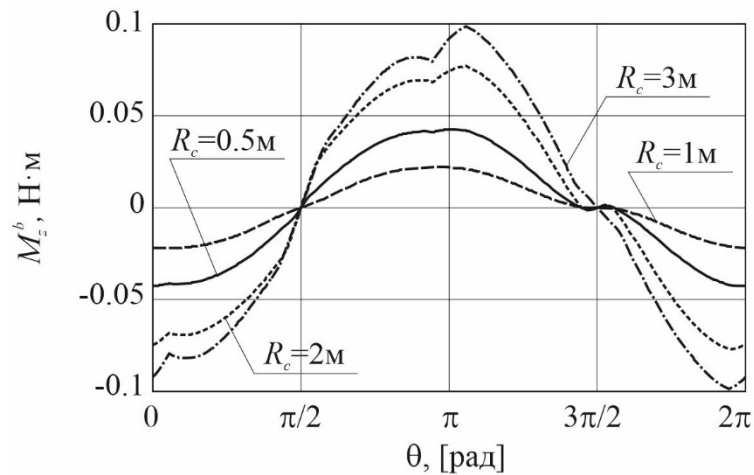


Рисунок 2.10 – Зависимость проекции ионного момента  $M_z^b$  силы от угла  $\theta$  для  $H_c = 5$  м и когда центр масс находится в точке  $B_3$  (случай 3)

Расстояние от центра масс тела до источника ионного потока  $d$  и угол расхождения потока  $\alpha_0$  влияют на ионную силу и момент. С увеличением  $d$  и  $\alpha_0$  наблюдается уменьшение модуля проекции силы  $F_y^o$  (рисунок 2.11, 2.12), что обусловлено двумя факторами: увеличением доли частиц потока, пролетевших мимо поверхности тела, и изменением направления движения частиц потока по мере увеличения расстояния от барицентра треугольника до оси потока. В случаях 1 и 3 кривые на полуинтервалах  $[0, \pi)$  и  $[\pi, 2\pi)$  совпадают в силу симметрии. В случае 2, когда ось ионного потока направлена в центр масс, который не является геометрическим центром тела, симметрия нарушается, и модуль проекции на полуинтервале  $[\pi, 2\pi)$  меньше, чем на  $[0, \pi)$ . Это вызвано тем, что расстояние от источника ионного потока до поверхности тела на

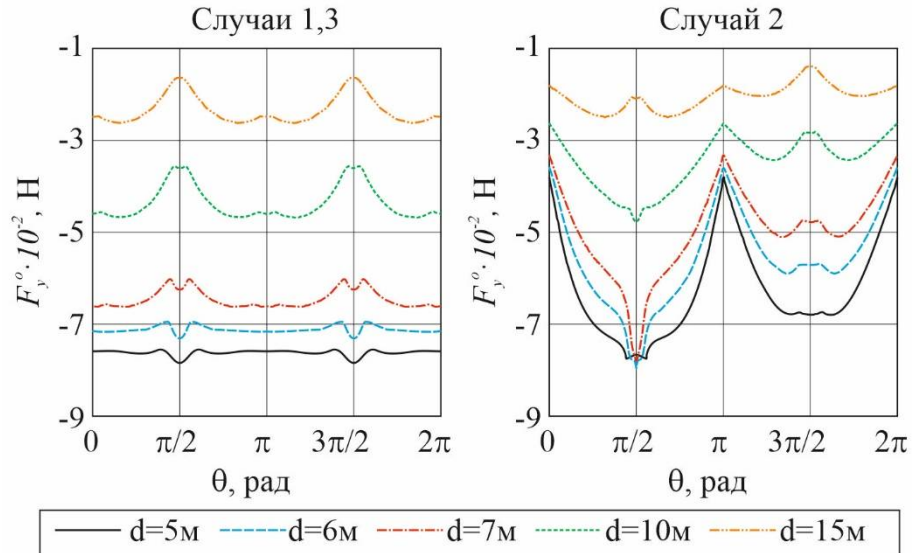


Рисунок 2.11 - Зависимость проекции ионной силы  $F_y^o$  от угла  $\theta$  для различных значений расстояния  $d$  при  $\alpha_0 = 15^\circ$

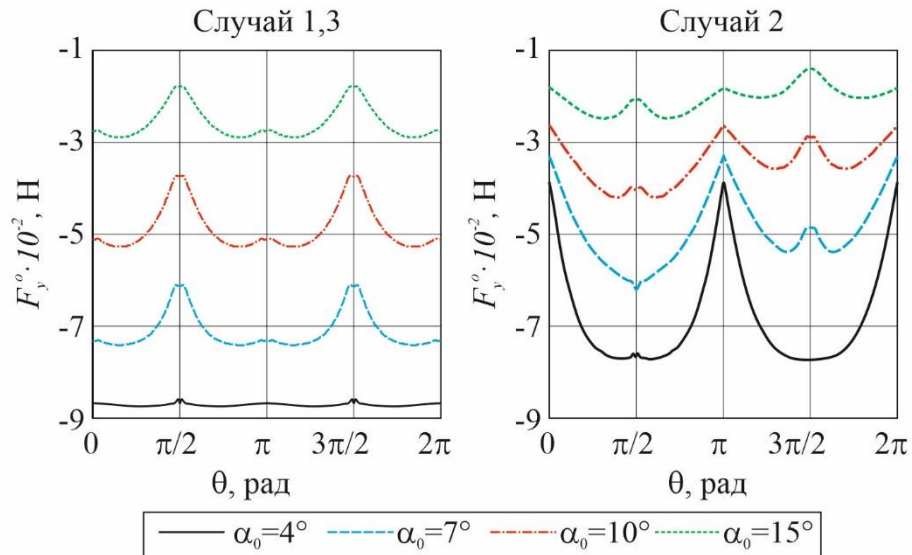


Рисунок 2.12 - Зависимость проекции ионной силы  $F_y^o$  от угла  $\theta$  для различных значений угла  $\alpha_0$  при  $d = 15$  м

полуинтервале  $[\pi, 2\pi)$  больше, чем на  $[0, \pi)$ . Такая же асимметрия в случае 2 наблюдается и для проекции  $F_x^o$  (рисунок 2.13, 2.14) и для ионного момента  $M_z^b$  (рисунок 2.15, 2.16). Для проекции силы ионного потока  $F_x^o$  в случаях 1 и 3 при увеличении расстояния  $d$  и угла  $\alpha_0$  сначала наблюдается увеличение максимального модуля, что связано с изменением направления линий тока по мере удаления от оси потока, а затем - его уменьшение, вызванное увеличением доли частиц потока, проходящих мимо поверхности. Несовпадение направлений проекций  $F_x^o$  для

$\alpha_0 = 4^\circ$  и  $\alpha_0 = 7^\circ$  вблизи угловых положений  $\theta = \pi/2$  и  $\theta = 3\pi/2$  связано с тем, что при малых углах  $\alpha_0$  весь луч попадает на боковую поверхность цилиндра и не затрагивает его торцевых поверхностей (рисунок 2.14, случаи 1, 3). При увеличении угла  $\alpha_0$  часть потока попадает на торцевую поверхность, и она начинает оказывать заметное влияние на величину проекции ионной силы.

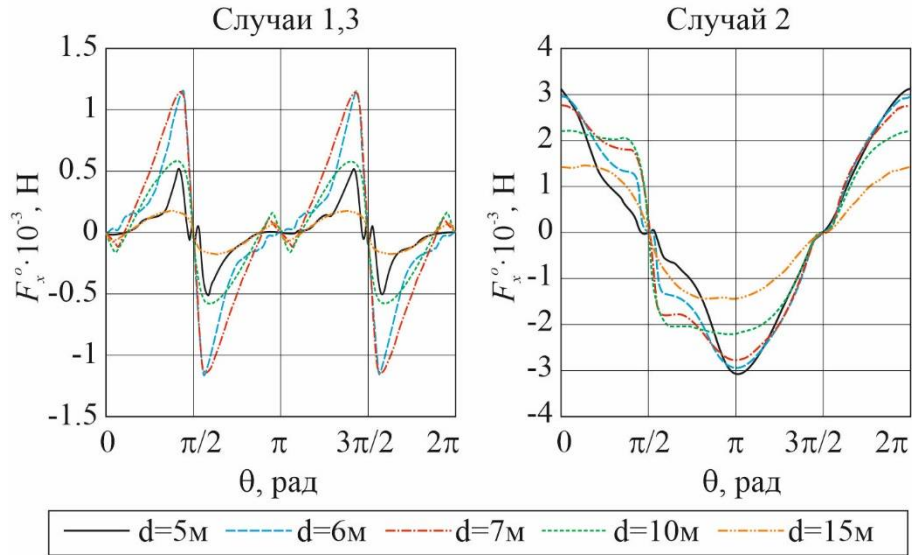


Рисунок 2.13 - Зависимость проекции ионной силы  $F_x^o$  от угла  $\theta$  для различных значений расстояния  $d$  при  $\alpha_0 = 15^\circ$

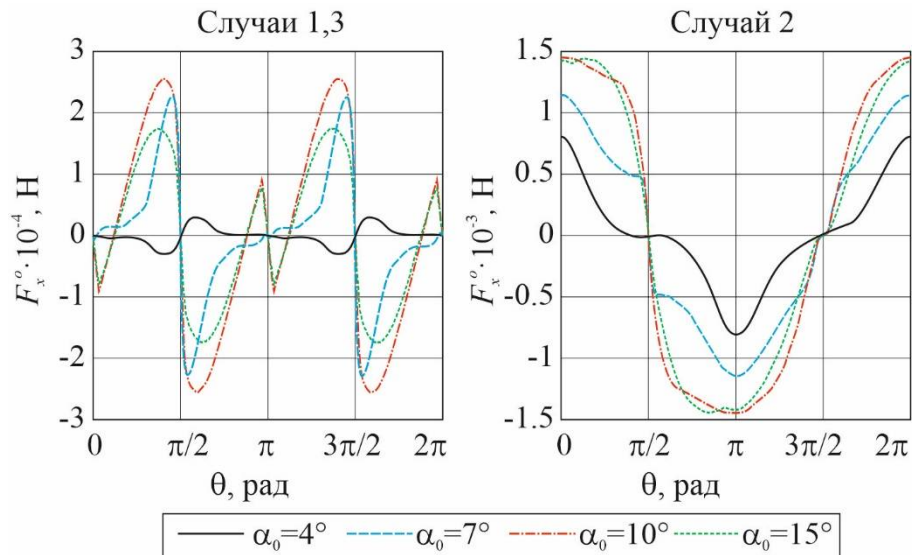


Рисунок 2.14 - Зависимость проекции ионной силы  $F_x^o$  от угла  $\theta$  для различных значений угла  $\alpha_0$  при  $d = 15\text{m}$

Зависимости ионного момента от угла  $\theta$  для различных  $d$  и  $\alpha_0$  показаны на рисунках 2.15 и 2.16. При расчете ионного момента большую роль играет расстояние от центра масс тела до точки столкновения частицы потока с поверхностью. В случае 1 с увеличением  $d$  и  $\alpha_0$  сначала наблюдается увеличение максимального значения ионного момента за счет увеличения плеч генерируемых на поверхности тела ионных сил относительно центра масс, а затем его уменьшение за счет увеличения доли частиц, проходящих мимо поверхности. В случае 3 (рисунки 2.15 и 2.16) уменьшение момента при увеличении  $d$  и  $\alpha_0$  обусловлено в основном уменьшением проекции  $F_y^o$ , показанной на рисунках 2.11, 2.12. В случае 2 увеличение модуля момента происходит за счет увеличения плеч генерируемых ионных сил относительно центра масс при увеличении  $d$  и  $\alpha_0$ .

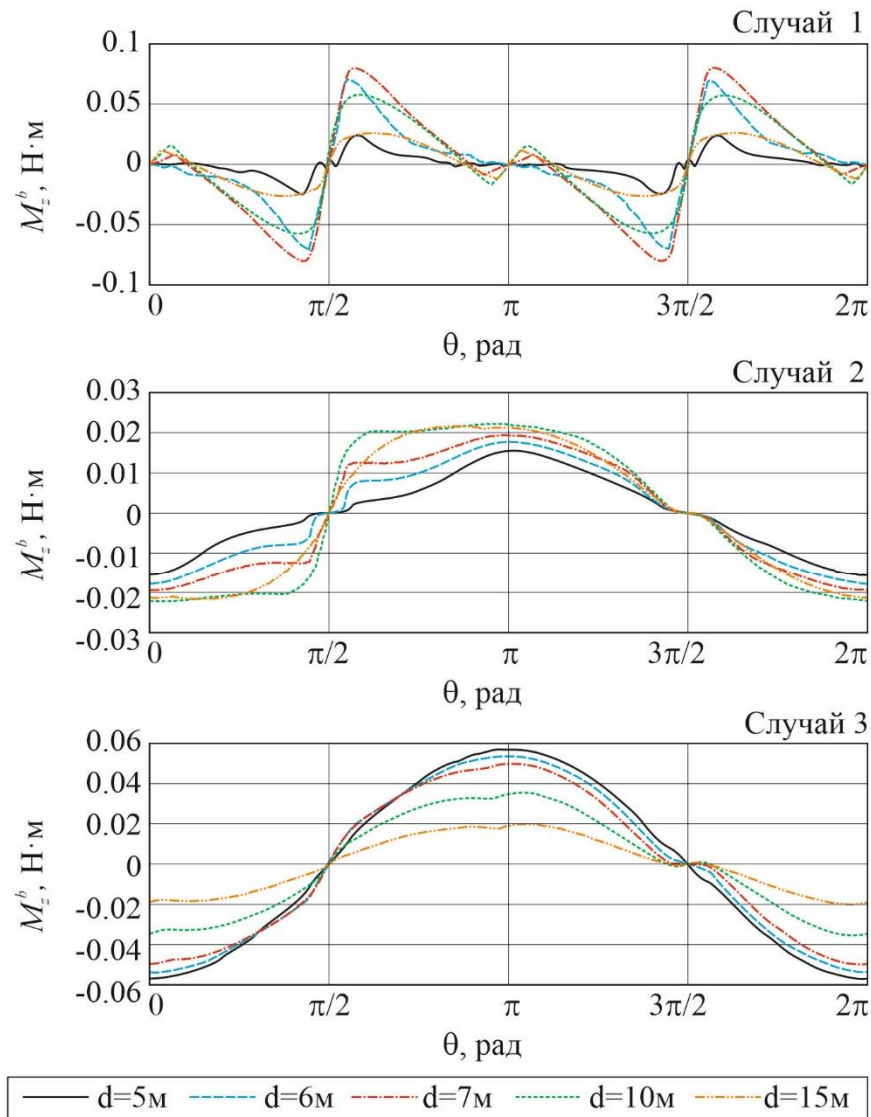


Рисунок 2.15 - Зависимость проекции ионного момента  $M_z^b$  от угла  $\theta$  для различных значений расстояния  $d$  при  $\alpha_0 = 15^\circ$

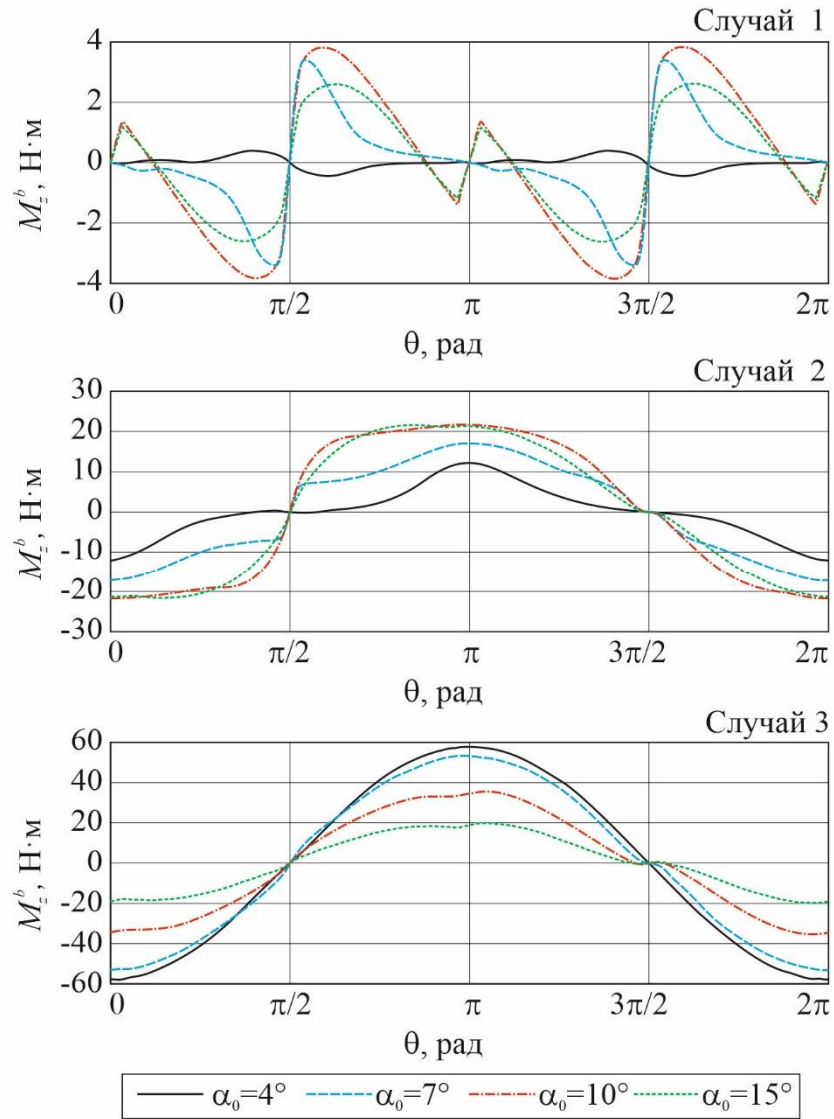


Рисунок 2.16 - Зависимость проекции ионного момента  $M_z^b$  от угла  $\theta$  для различных значений угла  $\alpha_0$  при  $d = 15$  м

Рассмотрим влияние направления оси ионного потока на величину ионного момента. Направление оси ионного потока можно задать с помощью угла  $\beta$  (рисунок 2.1). На рисунке 2.17 показана поверхность  $M_z^b(\theta, \beta)$ , полученная для случая 1. Угол  $\beta$  оказывает существенное влияние на величину и направление ионного момента. На рисунке 2.18 представлены графики зависимостей, построенные для разных случаев расположения центра масс и соответствующие углам  $\beta$ , при которых наблюдаются максимальные и минимальные значения ионного момента. Эти кривые определяют диапазон, в котором может изменяться ионный момент.



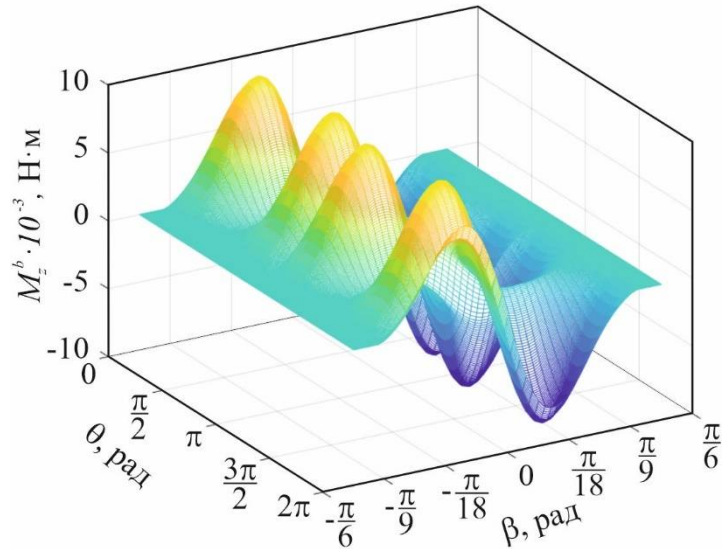


Рисунок 2.17 - Зависимость проекции ионного момента  $M_z^b$  от углов  $\theta$  и  $\beta$

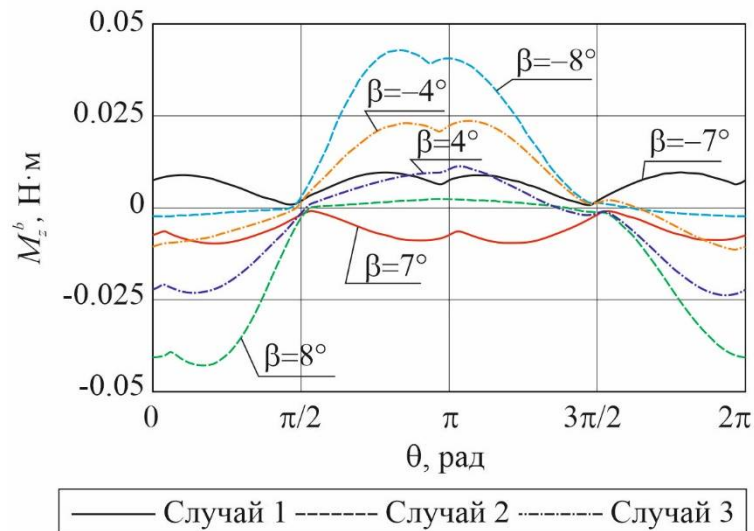


Рисунок 2.18 - Зависимость проекции ионного момента  $M_z^b$  от углов  $\theta$  и  $\beta$

В общем пространственном случае ориентация цилиндра относительно орбитальной системы координат может быть задана тремя углами Эйлера. Если центр масс цилиндра лежит на оси симметрии, то его положение можно задать с помощью только двух углов, так как вращение вокруг оси симметрии не играет роли для расчета ионной силы и момента.

### 2.3 Сравнение ионных сил и моментов для ступени ракеты и эквивалентного цилиндра

В предыдущем разделе был рассмотрено тело цилиндрической формы. Реальные спутники и ступени ракет имеют более сложную форму. На их поверхности могут располагаться различные датчики, сопла двигателей, антенны, солнечные батареи и другое оборудование. Эти

неровности влияют на силу и момент, создаваемые ионным потоком. Чтобы оценить, насколько значителен этот эффект, рассчитаем и сравним ионную силу и ионный момент, полученные для ступени ракеты и соответствующего ей по размерам цилиндра. Расчетная сетка для ступени ракеты показана на рисунке 2.19. Сетка создана на основе анализа фотографий разгонного блока «Космос-3М», находящихся в свободном доступе в сети Интернет. Как и в предыдущих разделах, рассматриваются три случая, отличающихся расположением центра масс и направлением оси ионного потока. Геометрическим центром ступени будем считать точку, расположенную на пересечении оси и плоскости симметрии ее цилиндрической емкости. При расчетах примем радиус цилиндра  $R_c = 1.2$  м и высоту цилиндра  $H_c = 4.95$  м. Общая высота ступени составляет 6.245 м, общая ширина 3.236 м.

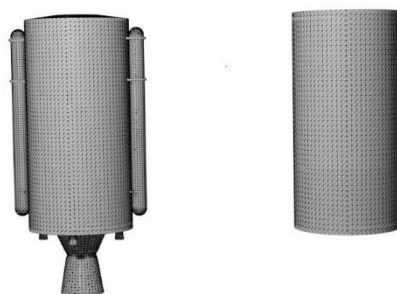


Рисунок 2.19 – Расчетная сетка для ступени Космос-3М и соответствующего цилиндра

На рисунках 2.20-2.22 показаны зависимости проекций ионной силы и момента от угла  $\theta$ . Черным цветом показаны графики, соответствующие ступени ракеты, а серым — цилиндру. Из рисунка 2.21 видно, что сопла двигателей, дополнительные внешние элементы и неровности вносят существенный вклад в проекцию  $F_y^o$  ионной силы ступени, график которой проходит довольно далеко от графика, построенного для цилиндра. Тем не менее, кривая зависимости для цилиндра по форме близка к кривой для ступени. Различия в абсолютных значениях связаны с тем, что площадь поверхности всей ступени ракеты существенно превышает площадь ее топливного бака. Различия в проекциях  $F_x^o$  менее значительны (рисунок 2.20). Для графиков зависимости ионного момента  $M_z^b$  от угла  $\theta$  большое значение имеют точки пересечения кривых с осью абсцисс, так как эти точки соответствуют положениям равновесия углового движения тела при отсутствии внешних моментов. В случае 1, когда центр масс тела находится в геометрическом центре, точки пересечения с абсциссами для черных и серых кривых находятся довольно далеко друг от друга. Кроме того, серая кривая, построенная для цилиндра, имеет больше точек пересечения с осью, чем черная кривая. Это означает, что фазовый портрет

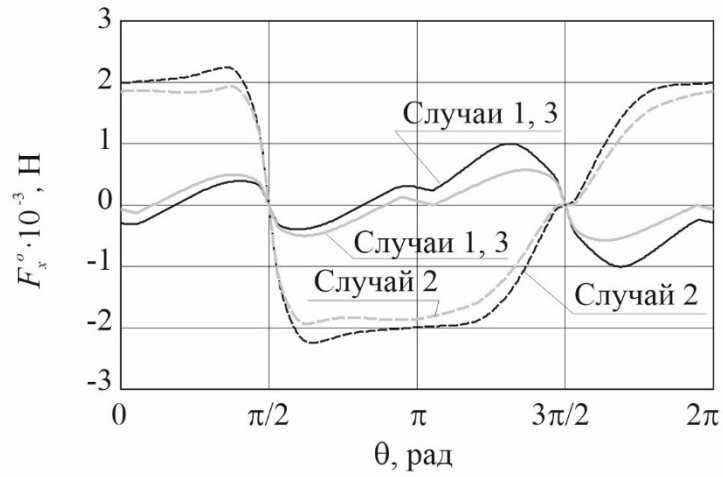


Рисунок 2.20 – Зависимость проекции ионной силы  $F_x^o$  от угла  $\theta$

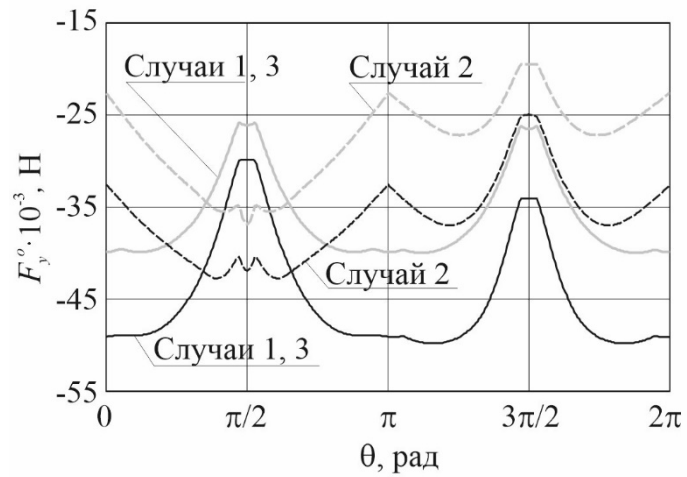


Рисунок 2.21 – Зависимость проекции ионной силы  $F_y^o$  от угла  $\theta$

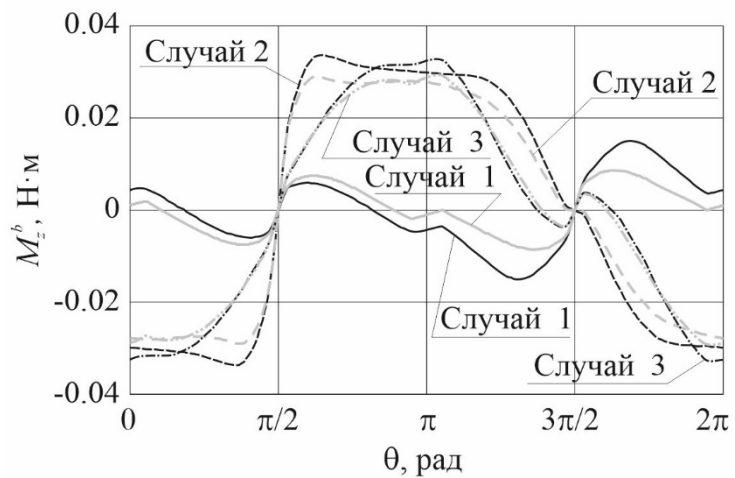


Рисунок 2.22 – Зависимость проекции ионного момента  $M_z^b$  от угла  $\theta$

цилиндра имеет более сложную структуру. Цилиндрическое приближение формы верхней ступени плохо подходит для изучения динамики ступени под действием ионного потока, в случае, когда центр масс ступени располагается в геометрическом центре ее цилиндрической части. В случаях 2 и 3, когда центр масс находится на нижней базовой поверхности топливного бака цилиндра или ступени, эти точки пересечения оси абсцисс совпадают, а кривые близки друг к другу. В этом случае приближение формы ступени ракеты к цилиндру вполне допустимо.

#### 2.4 Ионные силы и моменты для спутника цилиндрической формы с панелями солнечных батарей

В современной космонавтике для обеспечения спутников электроэнергией широко используются солнечные батареи. Их панели могут располагаться как непосредственно на поверхности спутников, так и на внешних разворачиваемых рамах. В последнем случае площадь внешних панелей может в несколько раз превышать площадь поверхности самого спутника. Ионная сила, создаваемая на поверхности солнечных панелей, может иметь решающее влияние на результирующую ионную силу и момент. Кроме того, панели отбрасывают тени, что также оказывает большое влияние на силу и момент. Для оценки влияния солнечных панелей на величину и направление ионной силы и момента рассмотрим цилиндрический спутник в случае наличия прямоугольных солнечных панелей и их отсутствия. Спутник показан на рисунке 2.23. Радиус цилиндра  $R_c = 1.35\text{ м}$ , высота цилиндра  $H_c = 3\text{ м}$ . Длины сторон солнечных панелей равны  $H_{p1} = 5\text{ м}$  и  $H_{p2} = 3\text{ м}$ . Предполагается, что геометрическим центром спутника является точка, лежащая на пересечении оси и плоскости симметрии цилиндра. Результаты расчетов представлены на рисунках 2.24-2.26.

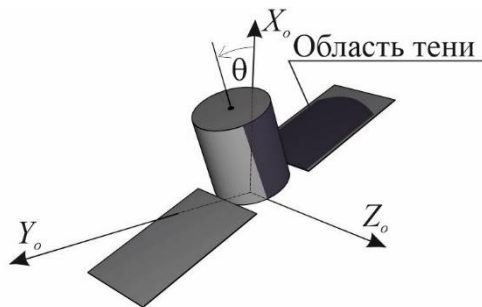


Рисунок 2.23 – Цилиндрический спутник с солнечными панелями

Расчеты показывают, что наличие солнечных панелей приводит к значительному увеличению модуля ионной силы, что обусловлено увеличением общей площади поверхности

(рисунки 2.24, 2.25). Черная линия показывает кривые, полученные для спутника с развернутыми солнечными батареями, а серая линия представляет собой цилиндрический спутник без панелей. Наличие панелей существенно меняет вид зависимости ионного момента от угла  $\theta$  (рисунок 2.26). Увеличение ионной силы приводит к уменьшению времени, необходимого для выполнения миссии по бесконтактной транспортировке спутника. Однако следует помнить, что солнечные панели, как и корпус спутника, подвержены эрозии, и длительное воздействие ионного потока может привести к образованию вторичного космического мусора.

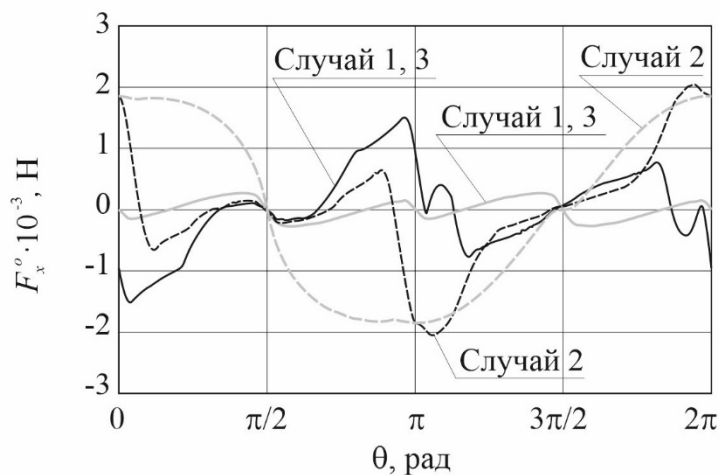


Рисунок 2.24 – Зависимость проекции ионной силы  $F_x^o$  от угла  $\theta$

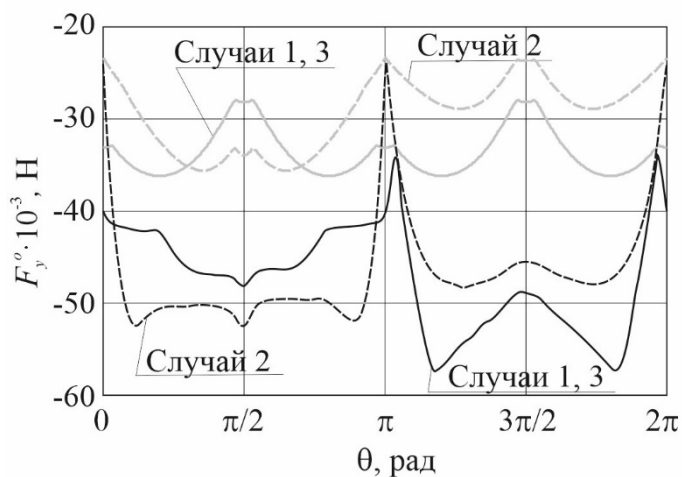


Рисунок 2.25 – Зависимость проекции ионной силы  $F_y^o$  от угла  $\theta$

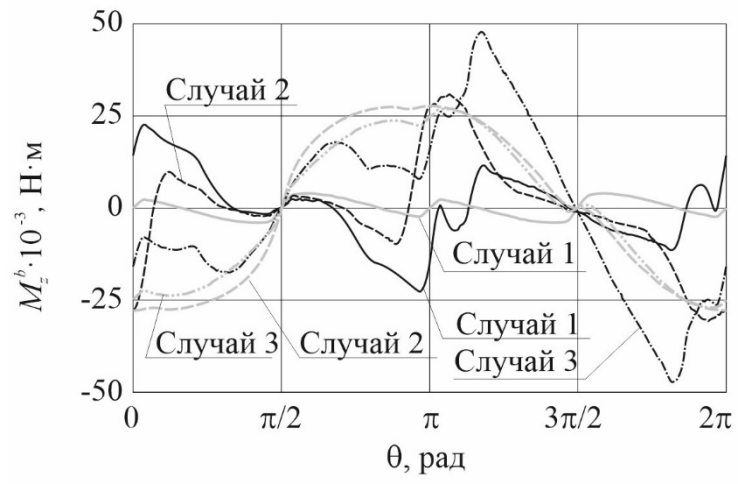


Рисунок 2.26 – Зависимость проекции ионного момента  $M_z^b$  от угла  $\theta$

### 3 Математические модели

В этой главе разработаны математические модели, описывающие пространственное и плоское движение твердого тела цилиндрической формы под действием ионного потока, генерируемого активным космическим аппаратом. Плоский случай движения практически не реализуем из-за наличия внешних возмущений, однако выявленные с его помощью закономерности движения и найденные законы управления могут быть полезны при анализе общего случая пространственного движения. Найден обобщенный интеграл энергии и аналитические выражения, описывающие стационарные движения цилиндрического тела на круговой орбите под действием ионного момента.

Результаты данной главы опубликованы в работах автора [9, 10, 12, 17, 22-24].

#### 3.1 Системы координат

Прежде чем приступать к получению уравнений движения, введем системы координат. Рассмотрим произвольную декартову систему координат  $Ox_j Y_j Z_j$ . Положение точки  $P$  в этой системе координат может быть задано радиус-вектором

$$\mathbf{r}^j = x_j \mathbf{e}_{j1} + y_j \mathbf{e}_{j2} + z_j \mathbf{e}_{j3},$$

где верхним индексом обозначена система координат, в которой задан вектор,  $\mathbf{e}_{j1}$ ,  $\mathbf{e}_{j2}$ ,  $\mathbf{e}_{j3}$  - базисные вектора системы координат  $Ox_j Y_j Z_j$ ,  $x_j$ ,  $y_j$ ,  $z_j$  - координаты вектора в  $Ox_j Y_j Z_j$ . Для перевода координат вектора в другую систему координат  $Ox_i Y_i Z_i$  будем использовать матрицу перехода  $\mathbf{M}_{ij}$

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{M}_{ij} \mathbf{r}^j.$$

Введем инерциальную систему координат, связанную с центром масс Земли  $Ox_p Y_p Z_p$ . Оси  $Ox_p$  и  $OY_p$  лежат в экваториальной плоскости, ось  $OZ_p$  направлена по оси вращения Земли в сторону северного полюса Земли. Ось  $Ox_p$  направлена в точку весеннего равноденствия. Сама Земля вращается относительно этой системы отсчета. Единичные векторы инерциальной системы отсчета обозначим как  $\mathbf{e}_{p1}$ ,  $\mathbf{e}_{p2}$ ,  $\mathbf{e}_{p3}$ . На рисунке 3.1 показана инерциальная система координат  $Ox_p Y_p Z_p$ .

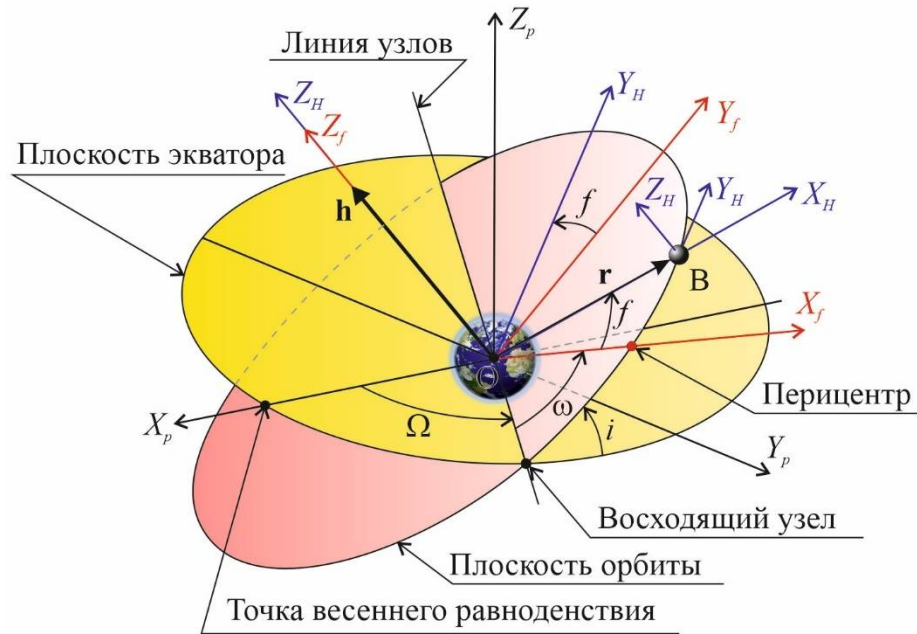


Рисунок 3.1 – Системы координат

Перифокальная система координат  $OX_f Y_f Z_f$  связана с плоскостью орбиты движущегося вокруг Земли тела (рисунок 3.1). Положение тела определяется радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , который соединяет центр Земли  $O$  с центром масс тела  $B$ . Ось  $OX_f$  направлена в перицентр орбиты, ось  $OZ_f$  перпендикулярна плоскости орбиты. Она направлена вдоль вектора

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}, \quad (3.1)$$

который представляет собой поделенный на массу момент количества движения точки  $B$  относительно центра Земли  $O$ . Ось  $OY_f$  дополняет систему до правой. В случае невозмущенного движения орбита тела не меняется со временем, а система отсчета  $OX_f Y_f Z_f$  является инерциальной. Переход от инерциальной к перифокальной системе координат можно осуществить с помощью трех последовательных эйлеровых поворотов на углы  $\Omega$ ,  $i$ , и  $\omega$  вокруг осей  $z$ - $x$ - $z$ , где  $\Omega$  - аргумент восходящего узла,  $i$  - угол наклона орбиты,  $\omega$  - аргумент перигея. Матрица перехода  $\mathbf{M}_{fp}$  от  $OX_p Y_p Z_p$  к  $OX_f Y_f Z_f$  может быть представлена в виде произведения трех матриц

$$\mathbf{M}_{fp} = \mathbf{M}_{f2} \cdot \mathbf{M}_{21} \cdot \mathbf{M}_{1p},$$

где матрицы поворота определены как

$$\mathbf{M}_{1p} = \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{f2} = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$



Матричное произведение дает

$$\mathbf{M}_{fp} = \begin{bmatrix} \cos \omega \cos \Omega - \cos i \sin \omega \sin \Omega & \cos i \sin \omega \cos \Omega + \cos \omega \sin \Omega & \sin i \sin \omega \\ -\sin \omega \cos \Omega - \cos i \cos \omega \sin \Omega & \cos i \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega & \sin i \cos \omega \\ \sin i \sin \Omega & -\sin i \cos \Omega & \cos i \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Единичные векторы перифокальной системы отсчета  $\mathbf{e}_{f1}$ ,  $\mathbf{e}_{f2}$ ,  $\mathbf{e}_{f3}$  могут быть найдены из выражений

$$\mathbf{e}_{f1} = \frac{\mathbf{e}}{e}, \quad \mathbf{e}_{f3} = \frac{\mathbf{h}}{h}, \quad \mathbf{e}_{f2} = \mathbf{e}_{f3} \times \mathbf{e}_{f1}, \quad (3.4)$$

где  $\mathbf{e}$  - вектор эксцентриситета орбиты [94]

$$\mathbf{e} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (3.5)$$

который параллелен линии апсид и направлен к перицентру,  $\mu$  - гравитационный параметр Земли;  $e = |\mathbf{e}|$ ,  $h = |\mathbf{h}|$ ,  $r = |\mathbf{r}|$  - длины соответствующих векторов,  $e$  - эксцентриситет орбиты.

Помимо систем координат, начало которых находится в центре Земли, введем несколько орбитальных систем координат с началом в центре масс движущегося вокруг Земли тела  $B$ . Система отсчета Хилла  $BX_H Y_H Z_H$  может быть получена переносом начала координат в центр масс тела  $B$  и последующим поворотом осей системы  $OX_f Y_f Z_f$  вокруг оси  $OZ_f$  на угол истинной аномалии  $f$  (рисунок 3.1). Соответствующая матрица поворота имеет вид

$$\mathbf{M}_{Hf} = \begin{bmatrix} \cos f & \sin f & 0 \\ -\sin f & \cos f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Единичные вектора системы отсчета Хилла  $\mathbf{e}_{H1}$ ,  $\mathbf{e}_{H2}$ ,  $\mathbf{e}_{H3}$  находятся из выражений

$$\mathbf{e}_{H1} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mathbf{e}_{H3} = \frac{\mathbf{h}}{h}, \quad \mathbf{e}_{H2} = \mathbf{e}_{H3} \times \mathbf{e}_{H1}. \quad (3.7)$$

Матрица поворота  $\mathbf{M}_{Hp}$ , обеспечивающая переход от системы координат  $OX_p Y_p Z_p$  в систему  $OX_H Y_H Z_H$ , может быть найдена как  $\mathbf{M}_{Hp} = \mathbf{M}_{Hf} \mathbf{M}_{fp}$

$$\mathbf{M}_{Hp} = \begin{bmatrix} \cos u \cos \Omega - \cos i \sin u \sin \Omega & \cos i \sin u \cos \Omega + \cos u \sin \Omega & \sin i \sin u \\ -\sin u \cos \Omega - \cos i \cos u \sin \Omega & \cos i \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega & \sin i \cos u \\ \sin i \sin \Omega & -\sin i \cos \Omega & \cos i \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

где  $u = \omega + f$ . Описанная система отсчета Хилла очень удобна для решения прикладных задач механики космического полета. Эта система вращается относительно инерциальной системы  $OX_p Y_p Z_p$  с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega}_{Hp} = \dot{\Omega} \mathbf{e}_{p3} + \dot{i} \mathbf{e}_{11} + (\dot{\omega} + \dot{f}) \mathbf{e}_{H3}.$$

Этот вектор имеет следующие компоненты в инерциальной системе координат

$$\boldsymbol{\omega}_{Hp}^p = \dot{\Omega} \mathbf{e}_{p3}^p + \dot{i} \mathbf{e}_{11}^p + (\dot{\omega} + \dot{f}) \mathbf{e}_{H3}^p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} + \mathbf{M}_{p1} \begin{bmatrix} \dot{i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{M}_{pH} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\omega} + \dot{f} \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

где  $\mathbf{M}_{p1} = \mathbf{M}_{1p}^T$ . С помощью матрицы поворота  $\mathbf{M}_{Hp}$  получим координаты вектора угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}_{Hp}$  в системе координат  $OX_H Y_H Z_H$

$$\boldsymbol{\omega}_{Hp}^H = \mathbf{M}_{Hp} \boldsymbol{\omega}_{Hp}^p = \begin{bmatrix} \dot{\Omega} \sin i \sin u + \dot{i} \cos u \\ \dot{\Omega} \sin i \cos u - \dot{i} \sin u \\ \dot{\Omega} \cos i + \dot{\omega} + \dot{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{Hp_x} \\ \omega_{Hp_y} \\ \omega_{Hp_z} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Сферическая орбитальная система отсчета  $BX_o Y_o Z_o$  получается из инерциальной системы  $OX_p Y_p Z_p$  двумя поворотами и переносом начала координат в точку В (рисунок 3.2). Первый поворот выполняется на угол  $\mathcal{G}$  вокруг оси  $OZ_p$  против часовой стрелки. Второй поворот выполняется на угол  $\nu$  вокруг новой оси  $OY_o$  по часовой стрелке. Ось  $OX_o$  полученной системы координат направлена вдоль вектора  $\mathbf{r}$ . Ось  $OZ_o$  лежит в плоскости, образованной вектором  $\mathbf{r}$  и осью  $OZ_p$ . Ось  $OY_o$  дополняет систему до правой. Матрица перехода от  $OX_p Y_p Z_p$  к  $OX_o Y_o Z_o$  имеет вид

$$\mathbf{M}_{op} = \mathbf{M}_{o3} \cdot \mathbf{M}_{3p} = \begin{bmatrix} \cos \nu \cos \mathcal{G} & \cos \nu \sin \mathcal{G} & \sin \nu \\ -\sin \mathcal{G} & \cos \mathcal{G} & 0 \\ -\sin \nu \cos \mathcal{G} & -\sin \nu \sin \mathcal{G} & \cos \nu \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

где

$$\mathbf{M}_{o3} = \begin{bmatrix} \cos \nu & 0 & \sin \nu \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \nu & 0 & \cos \nu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{3p} = \begin{bmatrix} \cos \mathcal{G} & \sin \mathcal{G} & 0 \\ -\sin \mathcal{G} & \cos \mathcal{G} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Единичные векторы сферической орбитальной системы отсчета  $BX_o Y_o Z_o$  задаются выражениями

$$\mathbf{e}_{o1} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mathbf{e}_{o2} = \mathbf{e}_{p3} \times \mathbf{e}_{o1}, \quad \mathbf{e}_{o3} = \mathbf{e}_{o1} \times \mathbf{e}_{o2}.$$

Для перехода от системы координат  $BX_o Y_o Z_o$  к  $OX_H Y_H Z_H$  необходимо совершить поворот вокруг оси  $BX_o$  на угол



$$\mathbf{M}_{4O} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{54} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{b5} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Матрица перехода от орбитальной  $BX_OY_OZ_O$  к связанной системе координат  $BX_bY_bZ_b$  имеет вид

$$\mathbf{M}_{bO} = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \varphi - \cos \theta \sin \gamma \sin \varphi & \sin \theta \sin \varphi & -\sin \gamma \cos \varphi - \cos \theta \cos \gamma \sin \varphi \\ \sin \gamma \sin \theta & \cos \theta & \cos \gamma \sin \theta \\ \cos \theta \cos \varphi \sin \gamma + \cos \gamma \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi & \cos \gamma \cos \theta \cos \varphi - \sin \gamma \sin \varphi \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

### 3.2 Модель плоского случая движения

Рассмотрим случай, когда транспортируемое твердое тело имеет плоскость симметрии, совпадающую с плоскостью его орбиты. Предполагается также, что в этой плоскости находится центр масс тела. Активный космический аппарат рассматривается как материальная точка. Плоское движение механической системы, состоящей из пассивного тела и активного космического аппарата, можно описать пятью обобщенными координатами (рисунок 3.4): расстоянием от центра масс тела до центра Земли  $r$ , углом истинной аномалии  $f$ , углом отклонения оси тела от местной вертикали  $\theta$  и координатами активного космического аппарата в системе координат Хилла  $x$  и  $y$ . Активный космический аппарат оснащен транспортировочным двигателем, создающим ионный поток, противоположно направленным компенсационным двигателем и двигателями системы ориентации. Результирующая тяга двигателей космического аппарата  $\mathbf{P}^H = [P_x, P_y, 0]^T$  показана на рисунке 3.4. Воздействие ионного потока на тело можно представить в виде двух взаимно перпендикулярных сил  $F_{ix}$  и  $F_{iy}$ , которые направлены по осям системы координат Хилла, и момента  $M_{iz}$  относительно центра масс  $B$ , вектор которого перпендикулярен плоскости. Также предполагается, что на транспортируемое тело действует атмосфера, влияние которой определяется аэродинамической силой  $\mathbf{F}_a^b = [-F_{aA}, F_{aN}, 0]^T$  и моментом  $\mathbf{M}_a^b = [0, 0, M_{az}]^T$ , заданными в связанной системе координат  $BX_bY_bZ_b$ .

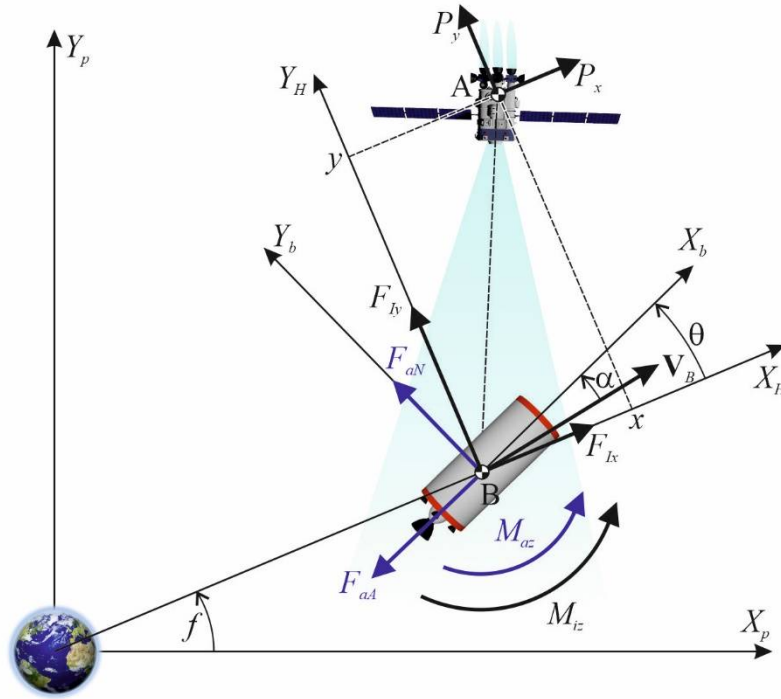


Рисунок 3.4 – Механическая система

Для получения уравнений движения воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода. Кинетическая энергия системы определяется как

$$T = \frac{m_A V_A^2}{2} + \frac{m_B V_B^2}{2} + \frac{I_z (\dot{f} + \dot{\theta})^2}{2}, \quad (3.14)$$

где  $m_A$  - масса активного космического аппарата,  $m_B$  - масса транспортируемого тела,  $V_i$  - скорость  $i$ -й точки ( $i=A,B$ ),  $I_z$  момент инерции тела относительно оси  $BZ_b$ , направленной перпендикулярно плоскости рисунка 3.4. Первое слагаемое в уравнении (3.14) определяет кинетическую энергию активного космического аппарата как материальной точки, второе слагаемое - кинетическую энергию центра масс тела, а последнее слагаемое - кинетическую энергию вращения тела относительно его центра масс. Скорость точки  $B$  можно определить через обобщенные координаты следующим образом

$$V_B^2 = r^2 \dot{f}^2 + \dot{r}^2. \quad (3.15)$$

Для вычисления скорости активного космического аппарата воспользуемся координатным способом и найдем проекции точки  $A$  на ось инерциальной системы координат  $OX_p Y_p Z_p$

$$\mathbf{r}_A^p = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r+x) \cos f - y \sin f \\ (r+x) \sin f + y \cos f \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

Дифференцируя (3.16) и вычисляя модуль вектора скорости после упрощений, получим

$$V_A = \sqrt{(r+x)^2 \dot{f}^2 + y^2 \dot{f}^2 + 2((r+x)\dot{y} - y(\dot{r} + \dot{x}))\dot{f} + (\dot{r} + \dot{x})^2 + \dot{y}^2}. \quad (3.17)$$

Подставив выражения (3.15) и (3.17) в уравнение (3.14), получим кинетическую энергию

$$T = \frac{m_A((r+x)^2 \dot{f}^2 + y^2 \dot{f}^2 + 2((r+x)\dot{y} - y(\dot{r} + \dot{x}))\dot{f} + (\dot{r} + \dot{x})^2 + \dot{y}^2)}{2} + \frac{m_B(r^2 \dot{f}^2 + \dot{r}^2)}{2} + \frac{I_z(\dot{f} + \dot{\theta})^2}{2}. \quad (3.18)$$

Потенциальная энергия рассматриваемой механической системы  $\Pi$  представляет собой сумму потенциальной энергии активного космического аппарата  $\Pi_A$  и потенциальной энергии твердого тела  $\Pi_B$ . Потенциальная энергия космического аппарата как материальной точки в центральном гравитационном поле Земли определяется выражением

$$\Pi_A = -\frac{\mu m_A}{r_A}, \quad (3.19)$$

где  $r_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$  – расстояние от космического аппарата до центра Земли. Потенциальную энергию твердого тела можно записать в виде [95]

$$\Pi_B = -\frac{\mu m_B}{r} - \frac{\mu(I_x + I_y + I_z)}{2r^3} + \frac{3\mu(I_x \bar{r}_x^2 + I_y \bar{r}_y^2 + I_z \bar{r}_z^2)}{2r^3}, \quad (3.20)$$

где  $I_x, I_y, I_z$  – главные моменты инерции тела,  $\bar{r}_x, \bar{r}_y, \bar{r}_z$  – координаты единичного вектора, направленного вдоль радиус-вектора тела  $\mathbf{r}$  в связанной с телом системе координат  $BX_b Y_b Z_b$

$$\bar{\mathbf{r}}^b = \begin{bmatrix} \bar{r}_x \\ \bar{r}_y \\ \bar{r}_z \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{bH} \bar{\mathbf{r}}^H = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

где  $\mathbf{M}_{bH}$  – матрица перехода (3.13). Суммирование энергии (3.19) и (3.20) с учетом (3.21) дает

$$\Pi = -\frac{\mu m_A}{r_A} - \frac{\mu m_B}{r} - \frac{\mu(I_x + I_y + I_z)}{2r^3} + \frac{3\mu(I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta)}{2r^3}. \quad (3.22)$$

Уравнения Лагранжа второго рода могут быть записаны в форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i, \quad (3.23)$$

где  $q_i$  – компонента вектора обобщенных координат  $\mathbf{q} = [r, f, \theta, x, y]$ ,  $Q_i$  – непотенциальные обобщенные силы, определяемые выражениями

$$\begin{aligned} Q_r &= F_{I_x} - F_{aA} \cos \theta - F_{aN} \sin \theta + P_x, \\ Q_f &= F_{I_y} r - F_{aA} r \sin \theta + F_{aN} r \cos \theta - P_x y + P_y (r+x) + M_{az} + M_{I_z}, \\ Q_\theta &= M_{I_z} + M_{az}, \quad Q_x = P_x, \quad Q_y = P_y. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Аэродинамическая сила и момент определяются выражениями

$$F_{aA} = \frac{\rho_a V_{rel}^2}{2} S C_\tau(\alpha), \quad F_{aN} = \frac{\rho_a V_{rel}^2}{2} S C_N(\alpha), \quad M_{az} = \frac{\rho_a V_{rel}^2}{2} S l C_{mz}(\alpha). \quad (3.25)$$

где  $\rho_a$  - плотность атмосферы,  $V_{rel}$  - скорость тела относительно атмосферы,

$$\mathbf{V}_{rel} = \mathbf{V}_B + \boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{r}, \quad (3.26)$$

$\boldsymbol{\omega}_E$  - угловая скорость вращения Земли. Пренебрегая вращением Земли, можно приближенно принять, что  $\mathbf{V}_{rel} = \mathbf{V}_B$ .  $S$  - площадь поперечного сечения тела,  $l$  - характерная длина тела,  $C_\tau(\alpha)$ ,  $C_N(\alpha)$ ,  $C_{mz}(\alpha)$  - безразмерные аэродинамические коэффициенты тангенциальной силы, нормальной силы и момента тангажа,  $\alpha$  - угол атаки, который можно рассчитать как

$$\alpha = \text{sign}(V_{Bx}^p \sin(f + \theta) - V_{By}^p \cos(f + \theta)) \arccos\left(\frac{V_{Bx}^p \cos(f + \theta) + V_{By}^p \sin(f + \theta)}{V_B}\right). \quad (3.27)$$

Здесь  $V_{Bx}^p$  и  $V_{By}^p$  - проекции вектора скорости тела на ось инерциальной системы координат  $Ox_p Y_p Z_p$ .

Подставляя выражения (3.18), (3.22) и (3.24) в уравнения (3.23) и выражая вторые производные, получим

$$\ddot{r} = \dot{f}^2 r - \frac{\mu}{r^2} + \frac{F_x}{m_B} + \frac{3\mu(3I_x \cos^2 \theta + 3I_y \sin^2 \theta - I_x - I_y + I_z)}{2m_B r^4}, \quad (3.28)$$

$$\ddot{f} = -\frac{2\dot{f}\dot{r}}{r} + \frac{F_y}{m_B r} - \frac{3\mu(I_x - I_y) \sin \theta \cos \theta}{m_B r^5}, \quad (3.29)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{M_z}{I_z} + \frac{2\dot{f}\dot{r}}{r} - \frac{F_y}{m_B r} + \frac{3\mu(I_x - I_y) \sin \theta \cos \theta}{r^3} \left( \frac{1}{m_B r^2} + \frac{1}{I_z} \right), \quad (3.30)$$

$$\ddot{x} = \ddot{f}y - \ddot{r} + \dot{f}^2(r + x) + 2\dot{f}\dot{y} + \frac{P_x}{m_A} - \frac{\mu(r + x)}{r_A^3}, \quad (3.31)$$

$$\ddot{y} = \dot{f}^2 y - \dot{f}(r + x) - 2\dot{f}(\dot{r} + \dot{x}) + \frac{P_y}{m_A} - \frac{\mu y}{r_A^3}; \quad (3.32)$$

где  $F_x = F_{lx} - F_{aA} \cos \theta - F_{aN} \sin \theta$ ,  $F_y = F_{ly} - F_{aA} \sin \theta + F_{aN} \cos \theta$  - проекции результирующей силы, действующей на тело, на оси системы координат Хилла;  $M_z = M_{lz} + M_{az}$ . Полученная система уравнений (3.28)-(3.32) описывает плоское движение рассматриваемой механической системы.

Если принять, что система управления космического аппарата обеспечивает его неизменное положение относительно транспортируемого тела ( $x = const, y = const$ ) и что  $1/r \ll 1$ , то уравнения (3.28)-(3.30) после отбрасывания малых членов принимают вид

$$\ddot{r} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{F_x}{m_B}, \quad (3.33)$$

$$\dot{h} = \frac{rF_y}{m_B}, \quad (3.34)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{M_z}{I_z} + \frac{2h\dot{r}}{r^3} + \frac{3\mu(I_x - I_y)\sin\theta\cos\theta}{I_z r^3}, \quad (3.35)$$

где  $h = \dot{f}r^2$  - деленный на массу момент количества движения центра масс тела относительно центра Земли.

Поскольку величина ионной силы мала (она имеет порядок 10 мН), можно приближенно считать, что центр масс тела движется по кеплеровой орбите. В этом случае

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f}, \quad (3.36)$$

где  $p = h^2 \mu^{-1}$  - параметр орбиты,  $e$  - эксцентриситет. Эти величины являются медленно меняющимися функциями. Зафиксируем их значения и выберем новую независимую переменную

$$\tau = \Omega f, \quad (3.37)$$

где

$$\Omega = \sqrt{\frac{3|I_x - I_y|}{2I_z}}. \quad (3.38)$$

Производные по времени некоторой произвольной функции  $s(t)$  и производные по новой переменной связаны следующими соотношениями

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} \frac{d\tau}{t} = s' \Omega f = s' \Omega \frac{c}{p^2} (1 + e \cos v)^2 = s' \Omega \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (1 + e \cos(\tau \Omega^{-1}))^2, \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \ddot{s} &= \frac{d}{dt} \left( s' (1 + e \cos f)^2 \right) = \Omega \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \left( \frac{ds'}{dt} (1 + e \cos f)^2 - 2(1 + e \cos f) e \dot{f} s' \sin f \right) = \\ &= \Omega \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \left( s'' \Omega \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (1 + e \cos f)^4 - 2e \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} s' (1 + e \cos f)^3 \sin f \right) = \\ &= \Omega^2 \frac{\mu}{p^3} \left( s'' (1 + e \cos(\tau \Omega^{-1})) - \frac{2es' \sin(\tau \Omega^{-1})}{\Omega} \right) (1 + e \cos(\tau \Omega^{-1}))^3, \end{aligned} \quad (3.40)$$



где штрих обозначает производную по новой независимой переменной  $\tau$ . Уравнение движения тела (3.35) можно переписать в виде

$$\theta'' = \frac{p^3 M_z}{\mu \Omega^2 I_z (1 + e \cos(\tau \Omega^{-1}))^4} + \frac{2e(\Omega\theta' + 1) \sin(\tau \Omega^{-1})}{\Omega^2 (1 + e \cos(\tau \Omega^{-1}))} + \frac{\delta \sin 2\theta}{(1 + e \cos(\tau \Omega^{-1}))}, \quad (3.41)$$

где  $\delta = \text{sign}(I_x - I_y)$ . Появление этого коэффициента в уравнении (3.41) связано с наличием модуля под корнем в выражении (3.38). Для случая малого эксцентриситета  $e \ll 1$  правую часть уравнения (3.41) можно разложить в ряд по степеням  $e$  и отбросить нелинейные члены.

$$\theta'' = \frac{M_z p^3}{\Omega^2 I_z \mu} + \delta \sin 2\theta + \frac{e}{\Omega^2} \left( 2(\Omega\theta' + 1) \sin(\tau \Omega^{-1}) - \frac{4L_z p^3 \cos(\tau \Omega^{-1})}{\mu I_z} - \delta \Omega^2 \sin 2\theta \cos(\tau \Omega^{-1}) \right). \quad (3.42)$$

Для круговой орбиты ( $e = 0$ ) уравнение (3.42) принимает вид

$$\theta'' - \frac{M_z p^3}{\Omega^2 I_z \mu} - \delta \sin 2\theta = 0. \quad (3.43)$$

Уравнение (3.43) можно рассматривать как уравнение невозмущенного движения при изучении движения твердого тела относительно центра масс на круговой орбите под действием внешнего момента  $M_z$ .

### 3.3 Модель пространственного движения

В данном разделе разрабатывается пространственная математическая модель механической системы, состоящей из твердого тела и активного космического аппарата. Предполагается, что активный космический аппарат представляет собой материальную точку  $A$ . Центр масс твердого тела находится в точке  $B$  (рисунок 3.5). Движение системы происходит под действием гравитационного поля Земли, тяг двигателей космического аппарата, ионной силы и момента, создаваемых ионным потоком при взаимодействии с поверхностью тела.

Состояние системы можно описать девятью обобщенными координатами  $\mathbf{q} = [\vartheta, \nu, r, x, y, z, \gamma, \theta, \varphi]^T$ . Углы  $\vartheta$ ,  $\nu$  и расстояние  $r$  определяют положение центра масс тела. Координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  определяют положение активного космического аппарата относительно тела в орбитальной сферической системе координат  $BX_o Y_o Z_o$ . Три угла Эйлера  $\gamma$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  определяют ориентацию связанной системы координат  $BX_b Y_b Z_b$  относительно орбитальной  $BX_o Y_o Z_o$ .

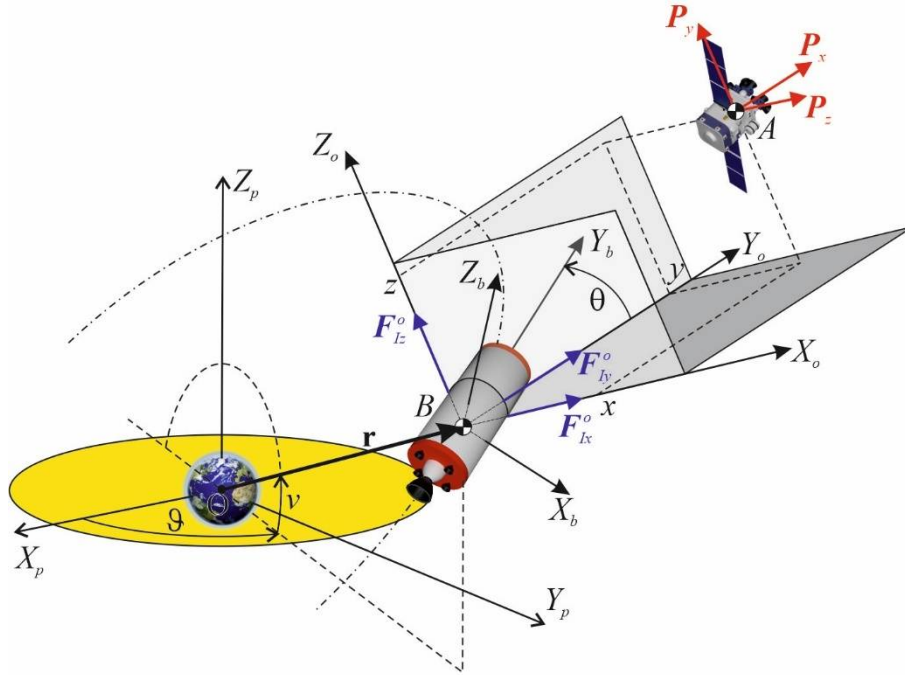


Рисунок 3.5 – Рассматриваемая механическая система

Для получения уравнений движения центров масс тела и активного космического аппарата воспользуемся вторым законом Ньютона

$$m_A \ddot{\mathbf{r}}_A^p = \mathbf{G}_A^p + \mathbf{P}^p, \quad (3.44)$$

$$m_B \ddot{\mathbf{r}}_B^p = \mathbf{G}_B^p + \mathbf{F}_I^p, \quad (3.45)$$

где  $\mathbf{r}_j$  - радиус вектор  $j$ -ой точки,  $\mathbf{G}_j^p = -\frac{\mu m_j}{r_j^3} \mathbf{r}_j^p$  - гравитационная сила, действующая на  $j$ -ю точку,  $\mathbf{P}$  - суммарная сила тяги двигателей активного космического аппарата,  $\mathbf{F}_I$  - ионная сила.

$$\mathbf{P}^o = [P_x, P_y, P_z]^T, \quad \mathbf{F}_I^o = [F_{Ix}^o, F_{Iy}^o, F_{Iz}^o]^T. \quad (3.46)$$

Для перевода этих сил в инерциальную систему координат  $OX_p Y_p Z_p$  воспользуемся матрицей поворота  $\mathbf{M}_{po}$ , тогда  $\mathbf{P}^p = \mathbf{M}_{po} \mathbf{P}^o$ ,  $\mathbf{F}_I^p = \mathbf{M}_{po} \mathbf{F}_I^o$ .

Радиус-вектор активного космического аппарата может быть записан как

$$\mathbf{r}_A^p = \mathbf{r}^p + \boldsymbol{\rho}^p = \mathbf{r}^p + \mathbf{M}_{po} \boldsymbol{\rho}^o, \quad (3.47)$$

где  $\boldsymbol{\rho}^o = [x_A, y_A, z_A]^T$  - радиус вектор точки  $A$  в орбитальной системе координат  $BX_o Y_o Z_o$ . Радиус вектор точки  $B$  в инерциальной системе координат  $OX_p Y_p Z_p$  определяется выражением

$$\mathbf{r}^p = [r \cos \vartheta \cos \nu, r \sin \vartheta \cos \nu, r \sin \nu]^T. \quad (3.48)$$

После вычисления вторых производных радиус-векторов и подстановки результата в (3.44), (3.45) получим систему уравнений, описывающую движение центров масс твердого тела и космического аппарата

$$\ddot{r} = -\frac{\mu}{r^2} + (\dot{v}^2 + \dot{\vartheta}^2 \cos^2 v)r + a_{Bx}, \quad (3.49)$$

$$\ddot{v} = -\frac{2\dot{v}\dot{r}}{r} - \dot{\vartheta}^2 \cos v \sin v + \frac{a_{Bz}}{r}, \quad (3.50)$$

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{2\dot{\vartheta}\dot{r}}{r} + \frac{2\dot{\vartheta}\dot{v} \sin v}{\cos v} + \frac{a_{By}}{r \cos v}, \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & \dot{v}^2 x + 2\dot{v}z - \frac{2\dot{r}(\dot{v}z + y\dot{\vartheta})}{r} - z\dot{\vartheta}^2 \sin 2v + x\dot{\vartheta}^2 \cos^2 v + 2\dot{\vartheta}\dot{v}y \sin v \\ & + 2\dot{\vartheta}\dot{y} \cos v + \frac{\mu}{r^2} - \frac{\mu(r+x)}{r_A^3} + a_{Ax} - a_{Bx} + \frac{ya_{By} + za_{Bz}}{r}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} = & \frac{2\dot{\vartheta}\dot{v}z}{\cos v} + \frac{2\dot{\vartheta}\dot{r}(x \cos v - z \sin v)}{r} + 2\dot{\vartheta}(\dot{z} \sin v - \dot{x} \cos v) + \dot{\vartheta}^2 y \\ & - \frac{\mu y}{r_A^3} + a_{Ay} + a_{By} \left( \frac{z \sin v}{r \cos v} - \frac{x}{r} - 1 \right), \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \ddot{z} = & z(\dot{\vartheta}^2 + \dot{v}^2) - 2\dot{v}\dot{x} - 2\dot{\vartheta}\dot{y} \sin v + 2\dot{\vartheta}\dot{v}y \cos v - z\dot{\vartheta}^2 \cos^2 v \\ & + \frac{2\dot{r}(y\dot{\vartheta} \sin v + \dot{v}x)}{r} - \frac{2\dot{\vartheta}\dot{v}y}{\cos v} - \frac{\mu z}{r_A^3} + a_{Az} - \frac{a_{By}y \sin v}{r \cos v} - \frac{(r+x)a_{Bz}}{r}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Здесь  $\mathbf{a}_A^o = [a_{Ax}, a_{Ay}, a_{Az}]^T$ ,  $\mathbf{a}_B^o = [a_{Bx}, a_{By}, a_{Bz}]^T$  - возмущающие ускорения, заданные в  $BX_oY_oZ_o$ :

$$\mathbf{a}_A^o = \mathbf{F}^o / m_A, \quad \mathbf{a}_B^o = \mathbf{F}_I^o / m_B.$$

Уравнение движения твердого тела относительно центра масс можно получить с помощью теоремы об изменении момента количества движения [96].

$$\frac{d\mathbf{K}_B^b}{dt} + \boldsymbol{\omega}_{bp}^b \times \mathbf{K}_B^b = \mathbf{M}_G^b + \mathbf{M}_I^b, \quad (3.55)$$

где  $\mathbf{K}_B^b = [\mathbf{I}]\boldsymbol{\omega}_{bp}^b$  - вектор момента количества движения тела относительно его центра масс  $B$ ,  $[\mathbf{I}]$  - матрица тензора инерции тела,  $\mathbf{M}_G^b$  - гравитационный момент,  $M_I^b = [M_{Ix}, M_{Iy}, M_{Iz}]^T$  - ионный момент,  $\boldsymbol{\omega}_{bp}^b = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$  - угловая скорость тела. Все вектора задаются своими компонентами в связанной с телом системе координат. Вектор угловой скорости можно представить в виде суммы

$$\boldsymbol{\omega}_{bp}^b = \dot{\vartheta}\mathbf{e}_{p3}^b - \dot{v}\mathbf{e}_{32}^b + \dot{\gamma}\mathbf{e}_{42}^b + \dot{\theta}\mathbf{e}_{51}^b + \dot{\varphi}\mathbf{e}_{62}^b = \mathbf{M}_{bp} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} + \mathbf{M}_{bo} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\gamma} - \dot{v} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{M}_{b5} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.56)$$

где  $\mathbf{e}_{ij}$  - единичные вектора. Используя матрицы поворота, приведенные в разделе 3.1, координаты вектора угловой скорости можно записать как

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\theta} \cos \varphi + (\dot{\gamma} - \dot{\nu}) \sin \theta \sin \varphi + \dot{\vartheta}(-\cos \nu (\sin \varphi \cos \theta \cos \gamma + \cos \varphi \sin \gamma) \\ &\quad + \sin \gamma (\cos \varphi \cos \gamma - \sin \varphi \cos \theta \sin \gamma)), \\ \omega_y &= \dot{\varphi} + (\dot{\gamma} - \dot{\nu}) \cos \theta + \dot{\vartheta}(\cos \nu \sin \theta \cos \gamma + \sin \nu \sin \theta \sin \gamma), \\ \omega_z &= \dot{\theta} \sin \varphi - (\dot{\gamma} - \dot{\nu}) \cos \varphi \sin \theta + \dot{\vartheta}(\cos \nu (\cos \varphi \cos \theta \cos \gamma - \sin \varphi \sin \gamma) \\ &\quad + \sin \nu (\sin \varphi \cos \gamma + \cos \varphi \cos \theta \sin \gamma)).\end{aligned}\tag{3.57}$$

Вектор гравитационного момента определяется выражением

$$\mathbf{M}_G = \frac{3\mu}{r^5} \mathbf{r} \times [\mathbf{I}]\mathbf{r} = \frac{3\mu}{r^3} \begin{bmatrix} (I_z - I_y) \bar{r}_y \bar{r}_z \\ (I_x - I_z) \bar{r}_x \bar{r}_z \\ (I_y - I_x) \bar{r}_x \bar{r}_y \end{bmatrix},\tag{3.58}$$

где  $\bar{r}_i = r_i / r$  - безразмерные координаты вектора  $\mathbf{r}^b = [r_x, r_y, r_z]^T$ . С учетом последнего выражения уравнения (3.55) принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x &= \frac{I_y - I_z}{I_x} \left( \omega_y \omega_z - \frac{3\mu}{r^3} \bar{r}_y \bar{r}_z \right) + \frac{M_{I_x}}{I_x}, \\ \dot{\omega}_y &= \frac{I_z - I_x}{I_y} \left( \omega_x \omega_z - \frac{3\mu}{r^3} \bar{r}_x \bar{r}_z \right) + \frac{M_{I_y}}{I_y}, \\ \dot{\omega}_z &= \frac{I_x - I_y}{I_z} \left( \omega_x \omega_y - \frac{3\mu}{r^3} \bar{r}_x \bar{r}_y \right) + \frac{M_{I_z}}{I_z},\end{aligned}\tag{3.59}$$

Система уравнений (3.57), (3.59) описывают движение тела относительно центра масс под действием гравитационного и ионного моментов.

Рассмотрим случай движения тела с малой асимметрией. Будем полагать, что безразмерная разность моментов инерции  $\Delta$  является малой величиной

$$\Delta = \frac{I_x - I_z}{I},\tag{3.60}$$

где  $I = (I_x + I_z) / 2$ . В этом случае  $I_z = I(1 + \Delta / 2)$ ,  $I_x = I(1 - \Delta / 2)$ . Следуя подходу, описанному в книге [97], вводятся новые переменные, основанные на классическом случае Лагранжа движения тела вокруг неподвижной точкой. В случае Лагранжа обобщенный импульс, соответствующий углам собственного вращения и прецессии, является интегралами движения. В случае возмущенного движения эти величины будут медленно меняющимися функциями

$$R = \bar{I}_y \omega_y, \quad G = R \cos \theta + (\omega_x \sin \varphi - \omega_z \cos \varphi) \sin \theta.\tag{3.61}$$

где  $\bar{I}_y = I_y / I$ . Выражая угловые скорости из (3.57) и (3.61), получим

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\theta} \cos \varphi + \frac{(G - R \cos \theta) \sin \varphi}{\sin \theta} - \dot{\varphi} \cos \varphi (\cos \nu \sin \gamma - \sin \nu \cos \gamma), \\ \omega_y &= \frac{R}{I_y},\end{aligned}\tag{3.62}$$

$$\begin{aligned}\omega_z &= \dot{\theta} \sin \varphi - \frac{(G - R \cos \theta) \cos \varphi}{\sin \theta} - \dot{\varphi} \sin \varphi (\cos \nu \sin \gamma - \sin \nu \cos \gamma), \\ \dot{\gamma} &= \frac{G - R \cos \theta}{\sin^2 \theta} + \dot{\nu} + \frac{\dot{\varphi} \cos \theta (\cos \nu \cos \gamma + \sin \nu \sin \gamma)}{\sin \theta},\end{aligned}\tag{3.63}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{R}{I_y} - \frac{(G - R \cos \theta) \cos \theta}{\sin^2 \theta} - \frac{\dot{\varphi} (\cos \nu \cos \gamma + \sin \nu \sin \gamma)}{\sin \theta}.\tag{3.64}$$

Подставляя (3.62) в (3.59) и выражая производные, запишем

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} + \frac{(G - R \cos \theta)(R - G \cos \theta)}{\sin^3 \theta} &= \frac{\sin \varphi}{I_z} M_z + \frac{\cos \varphi}{I_x} M_x + \dot{\theta} \Phi_{1\theta} + \dot{\varphi} \Phi_{2\theta} + \dot{\nu}^2 \Phi_{3\theta} + \dot{\varphi} \Phi_{4\theta} \\ &+ \frac{\Delta R I^2 (I_x - 2I)(2 \cos 2\varphi - \Delta)(G - R \cos \theta)}{4I_x I_y I_z \sin \theta},\end{aligned}\tag{3.65}$$

$$\dot{R} = \frac{M_y}{I} - \frac{\Delta(G - R \cos \theta)^2 \sin 2\varphi}{2 \sin^2 \theta} + \dot{\theta} \Phi_{1R} + \dot{\theta}^2 \Phi_{2R} + \dot{\varphi} \Phi_{3R} + \dot{\nu}^2 \Phi_{4R} + \dot{\theta} \dot{\varphi} \Phi_{5R},\tag{3.66}$$

$$\begin{aligned}\dot{G} &= \frac{\cos \theta}{I} M_y + \left( \frac{\sin \varphi}{I_x} L_x - \frac{\cos \varphi}{I_z} L_z \right) \sin \theta + \frac{\Delta(G - R \cos \theta) \sin 2\varphi}{2} \left( \frac{I^2 R (I_x - 2I)}{I_x I_y I_z} \right. \\ &+ \left. \frac{(G - R \cos \theta) \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) + \dot{\theta} \Phi_{1G} + \dot{\theta}^2 \Phi_{2G} + \dot{\varphi} \Phi_{3G} + \dot{\nu}^2 \Phi_{4G} + \dot{\theta} \dot{\varphi} \Phi_{5G};\end{aligned}\tag{3.67}$$

где

$$M_x = M_{I_x} - \frac{3\mu(I_y - I_z) \bar{r}_y \bar{r}_z}{r^3}, \quad M_y = M_{I_y} - \frac{3\mu(I_z - I_x) \bar{r}_x \bar{r}_z}{r^3}, \quad M_z = M_{I_z} - \frac{3\mu(I_x - I_y) \bar{r}_x \bar{r}_y}{r^3}.\tag{3.68}$$

$$\Phi_{1\theta} = \frac{\Delta I^2 R (2I - I_y) \sin 2\varphi}{2I_x I_y I_z}, \quad \Phi_{2\theta} = \frac{\Delta I^2 R (2I - I_y) \sin 2\varphi \sin(\nu - \gamma)}{2I_x I_y I_z} + \frac{2(G - R \cos \theta) \cos(\nu - \gamma)}{\sin^2 \theta},$$

$$\Phi_{3\theta} = \frac{\cos \theta \cos^2(\nu - \gamma)}{\sin \theta}, \quad \Phi_{4\theta} = \sin(\gamma - \nu), \quad \Phi_{1R} = \frac{\Delta(G - R \cos \theta) \cos 2\varphi}{\sin \theta}, \quad \Phi_{2R} = -\frac{\Delta}{2} \sin 2\varphi,$$

$$\Phi_{3R} = \frac{\Delta(G - R \cos \theta) \sin(\nu - \gamma) \cos 2\varphi}{\sin \theta}, \quad \Phi_{4R} = -\frac{\Delta}{2} \sin^2(\nu - \gamma) \sin 2\varphi,$$

$$\Phi_{5R} = -\Delta \sin 2\varphi \sin(\nu - \gamma),$$

$$\Phi_{1G} = \frac{RI \sin \theta}{I_y} + \frac{\Delta(G - R \cos \theta) \cos \theta \cos 2\varphi}{\sin \theta} + \frac{\Delta R I^2 (\Delta + 2 \cos 2\varphi) \sin \theta}{4I_x I_z} - \frac{R I^3 (\Delta^2 + 4\Delta \cos 2\varphi + 4) \sin \theta}{4I_x I_y I_z},$$

$$\Phi_{2G} = -\frac{\Delta}{2} \cos \theta \sin 2\varphi,$$

$$\Phi_{3G} = \frac{(\Delta \cos 2\varphi - 1)(G - R \cos \theta) \sin(v - \gamma) \cos \theta}{\sin \theta} - \frac{I^2 R (\Delta (2I - I_x) \cos 2\varphi + (\Delta^2 I - 2I_y)) \sin(v - \gamma) \sin \theta}{2I_x I_y I_z},$$

$$\Phi_{4G} = \frac{\Delta \sin 2\varphi \cos \theta}{2} \left( \cos 2v \cos^2 \gamma - \cos^2 v + \frac{1}{2} \sin 2v \sin 2\gamma \right) - \frac{\sin(2(v - \gamma))}{2},$$

$$\Phi_{5G} = -\Delta \sin 2\varphi \cos \theta \sin(v - \gamma) - \cos(v - \gamma).$$

Уравнения (3.63)-(3.67) могут быть использованы для описания пространственного движения тела с малой асимметрией под действием ионного момента.

### 3.4 Модель пространственного движения осесимметричного тела

Рассмотрим движение осесимметричного тела для которого  $I_x = I_z = I$ ,  $\Delta = 0$ . В этом случае уравнения пространственного движения тела (3.65)-(3.67) с учетом (3.68) могут быть записаны в виде

$$\ddot{\theta} + \frac{(G - R \cos \theta)(R - G \cos \theta)}{\sin^3 \theta} = \frac{\dot{\vartheta}^2 \cos^2(v - \gamma) \cos \theta}{\sin \theta} - \ddot{\vartheta} \sin(v - \gamma) + \frac{2\dot{\vartheta} \cos(v - \gamma)(G - R \cos \theta)}{\sin^2 \theta} + \frac{M_{I_x}^\varphi(\theta)}{I} - \frac{3\mu \sin^2 \gamma \cos \theta \sin \theta (I_y - I)}{r^3 I}, \quad (3.69)$$

$$\dot{R} = \frac{M_{I_y}^\varphi(\theta)}{I}, \quad (3.70)$$

$$\dot{G} = \frac{M_{I_y}^\varphi(\theta) \cos \theta - M_{I_z}^\varphi(\theta) \sin \theta}{I} - \frac{\dot{\vartheta} \sin(v - \gamma)(G \cos \theta - R)}{\sin \theta} - \frac{\dot{\vartheta}^2 \sin(2v - 2\gamma)}{2} - \dot{\theta} \dot{\vartheta} \cos(v - \gamma) - \frac{3\mu \cos \gamma \sin \gamma \sin^2 \theta (I_y - I)}{r^3 I}, \quad (3.71)$$

где  $M_{I_x}^\varphi = M_{I_z} \sin \varphi + M_{I_x} \cos \varphi$ ,  $M_{I_y}^\varphi = M_{I_y}$ ,  $M_{I_z}^\varphi = M_{I_z} \cos \varphi - M_{I_x} \sin \varphi$  - проекции ионного момента на оси системы координат  $BX_4Y_bZ_5$ , которая получается поворотом орбитальной системы  $BX_oY_oZ_o$  на углы  $\gamma$  и  $\theta$ . Расчеты показывают, что для тела цилиндрической формы, у которого ось симметрии совпадает с  $BY_b$ , а центр масс лежит на этой оси, проекции  $M_{I_y}^\varphi$ ,  $M_{I_z}^\varphi$  равны нулю, а проекция  $M_{I_x}^\varphi$  является нечетной функцией угла  $\theta$ . Функцию  $M_{I_x}^\varphi(\theta)$  можно представить в виде ряда Фурье

$$M_{I_y}^{\varphi} = M_{I_z}^{\varphi} = 0, \quad M_{I_x}^{\varphi} = M_I = M_I^{\max} \sum_j^k b_j \sin j\theta, \quad (3.72)$$

Рассмотрим случай, когда центр масс твердого тела движется в плоскости  $BX_oY_o$  ( $v = 0$ ,  $\dot{v} = 0$ ). В действительности, когда тело обдувается ионным потоком, генерируемая ионная сила может иметь направленную перпендикулярно плоскости орбиты составляющую. Предполагается, что усреднение этой составляющей по периоду колебаний тела дает ноль, и движение центра масс можно считать плоским. В рассматриваемом случае угол  $\vartheta$  играет роль угла истинной аномалии, поэтому будем использовать обозначение  $\vartheta = f$ . Уравнения движения центра масс тела принимают вид

$$\ddot{f} = -\frac{2\dot{f}\ddot{r}}{r} + \frac{F_{I_y}^o}{rm_B}, \quad \ddot{r} = \dot{f}^2 r - \frac{\mu}{r^2} + \frac{F_{I_x}^o}{m_B}, \quad (3.73)$$

где  $F_{I_x}^o$ ,  $F_{I_y}^o$  – проекции ионной силы на оси орбитальной сферической системы координат  $BX_oY_oZ_o$ . Поскольку эти силы малы по абсолютной величине, будем считать орбиту кеплеровой. В этом случае вместо (3.73) можно использовать следующие уравнения

$$r = \frac{P}{1 + e \cos f}, \quad \dot{f} = n(1 + e \cos f)^2, \quad (3.74)$$

где  $n = \sqrt{\mu p^{-3}}$ . Перейдем в уравнениях (3.69)-(3.71) к новой независимой переменной  $f$ . Введем также обозначения

$$R = nk^2 \bar{R}, \quad G = nk^2 \bar{G}, \quad (3.75)$$

где  $k = 1 + e \cos f$ . Найдем производную функции  $G$  по времени, учитывая (3.74) и (3.75).

$$\frac{dG}{dt} = -2en^2 k^3 \bar{G} \sin f + nk^2 \frac{d\bar{G}}{dt} = -2en^2 k^3 \bar{G} \sin f + nk^2 \frac{d\bar{G}}{df} \frac{df}{dt} = -2en^2 k^3 \bar{G} \sin f + n^2 k^4 \bar{G}', \quad (3.76)$$

где штрих означает производную по новой независимой переменной  $f$ . Выражая  $\bar{G}'$  из (3.76), получим

$$\bar{G}' = \frac{\dot{G}}{n^2 k^4} + \frac{2e\bar{G} \sin f}{k}. \quad (3.77)$$

Вторая производная угла  $\theta$  по времени связана с производной по углу  $f$  следующим выражением

$$\ddot{\theta} = \theta'' \dot{f}^2 + \theta' \ddot{f} = \theta'' n^2 k^4 - 2en^2 k^3 \theta' \sin f. \quad (3.78)$$

После перехода к новой независимой переменной и использования (3.72) и (3.77) уравнения пространственного движения тела (3.63), (3.64), (3.69)-(3.71) принимают вид

$$\theta'' = -\frac{(\bar{G} - \bar{R} \cos \theta)(\bar{R} - \bar{G} \cos \theta)}{\sin^3 \theta} + \frac{M_I}{In^2 k^4} + \frac{\cos^2 \gamma \cos \theta}{\sin \theta} + \frac{2 \cos \gamma (\bar{G} - \bar{R} \cos \theta)}{\sin^2 \theta} - \frac{3 \sin^2 \gamma \sin 2\theta (I_y - I)}{2Ik} + \frac{2\theta' e \sin f}{k}, \quad (3.79)$$

$$\bar{G}' = \frac{\sin \gamma (\bar{G} \cos \theta - \bar{R})}{\sin \theta} - \frac{3 \sin 2\gamma \sin^2 \theta (I_y - I)}{2kI} + \cos \gamma \sin \gamma - \theta' \cos \gamma + \frac{2e\bar{G}' \sin f}{k}, \quad (3.80)$$

$$\bar{R}' = \frac{2e\bar{R} \sin f}{k}, \quad (3.81)$$

$$\gamma' = \frac{\bar{G} - \bar{R} \cos \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\cos \theta \cos \gamma}{\sin \theta}, \quad (3.82)$$

$$\varphi' = \frac{\bar{R}}{\bar{I}_y} - \frac{(\bar{G} - \bar{R} \cos \theta) \cos \theta}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos \gamma}{\sin \theta}. \quad (3.83)$$

В случае круговой орбиты  $e = 0$ ,  $k = 1$  и уравнения (3.79)-(3.81) принимают вид

$$\theta'' = -\frac{(\bar{G} - \bar{R} \cos \theta)(\bar{R} - \bar{G} \cos \theta)}{\sin^3 \theta} + \frac{M_I}{In^2} + \frac{\cos^2 \gamma \cos \theta}{\sin \theta} + \frac{2 \cos \gamma (\bar{G} - \bar{R} \cos \theta)}{\sin^2 \theta} - \frac{3 \sin^2 \gamma \sin 2\theta (I_y - I)}{2I}, \quad (3.84)$$

$$\bar{G}' = \frac{\sin \gamma (\bar{G} \cos \theta - \bar{R})}{\sin \theta} + \cos \gamma \sin \gamma - \theta' \cos \gamma - \frac{3 \sin 2\gamma \sin^2 \theta (I_y - I)}{2I}, \quad (3.85)$$

где  $\bar{R} = const$ .

Рассмотрим движение твердого тела на геостационарной орбите. Сделаем ряд допущений

$$\dot{v} = 0, \quad \dot{g} = \sqrt{\mu r^{-3}}, \quad r = const, \quad (3.86)$$

Рассмотрим случай, когда

$$\dot{g} \ll \frac{M_I(\theta)}{I}. \quad (3.87)$$

Для осесимметричного тела уравнения (3.63)-(3.67) после отбрасывания малых членов принимают вид

$$\dot{\gamma} = \frac{G - R \cos \theta}{\sin^2 \theta}, \quad (3.88)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{R}{\bar{I}_y} - \frac{(G - R \cos \theta) \cos \theta}{\sin^2 \theta}, \quad (3.89)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{(G - R \cos \theta)(R - G \cos \theta)}{\sin^3 \theta} = \frac{M_I}{I}. \quad (3.90)$$

где  $R$  и  $G$  – константы, определяемые начальными угловыми скоростями и ориентацией твердого тела. Уравнение (3.90) можно интегрировать независимо от (3.88) и (3.89).



### 3.5 Стационарные движения осесимметричного тела на круговой орбите

Рассмотрим движение осесимметричного тела по круговой орбите, описываемое уравнениями (3.82)-(3.85). Приравняем производные нулю

$$\bar{G}' = 0, \theta'' = 0, \theta' = 0, \gamma' = 0.$$

Из уравнения (3.82) следует, что

$$\cos \gamma_* = \frac{\bar{R} \cos \theta_* - \bar{G}_*}{\cos \theta_* \sin \theta_*}, \quad (3.91)$$

уравнения (3.84), (3.85) принимают вид

$$0 = -\frac{(\bar{G}_* - \bar{R} \cos \theta_*)(\bar{R} - \bar{G}_* \cos \theta_*)}{\sin^3 \theta_*} + \frac{M_I(\theta_*)}{In^2} + \frac{\cos^2 \gamma_* \cos \theta_*}{\sin \theta_*} + \frac{2 \cos \gamma_* (\bar{G}_* - \bar{R} \cos \theta_*)}{\sin^2 \theta_*} - \frac{3 \sin^2 \gamma_* \sin 2\theta_* (I_y - I)}{2I}, \quad (3.92)$$

$$0 = \frac{\sin \gamma_* (\bar{G}_* \cos \theta_* - \bar{R})}{\sin \theta_*} + \cos \gamma_* \sin \gamma_* - \frac{3 \sin 2\gamma_* \sin^2 \theta_* (I_y - I)}{2I}, \quad (3.93)$$

где звездочка означает стационарное движение. Уравнение (3.93) имеет несколько решений. Первое является корнем уравнения

$$\frac{\bar{G}_* \cos \theta_* - \bar{R}}{\sin \theta_*} + \cos \gamma_* - \frac{3 \sin^2 \theta_* \cos \gamma_* (I_y - I)}{I} = 0. \quad (3.94)$$

Второе и третье решения являются корнями уравнения  $\sin \gamma_* = 0$ , то есть  $\gamma_* = 0$  или  $\gamma_* = \pi$ . Рассмотрим сначала уравнение (3.94). Подстановка (3.91) в (3.94) дает

$$\frac{3 \sin \theta_* (\bar{G}_* - \bar{R} \cos \theta_*) (I_y - I)}{I \cos \theta_*} - \frac{\bar{G}_* \sin \theta_*}{\cos \theta_*} = 0. \quad (3.95)$$

Отсюда определяем

$$\bar{G}_* = \frac{3 \cos \theta_* \bar{R} (I_y - I)}{3I_y - 4I}. \quad (3.96)$$

Из (3.91) и (3.96) следует, что

$$\cos \gamma_* = -\frac{\bar{R}I}{(3I_y - 4I) \sin \theta_*}. \quad (3.97)$$

Подстановка (3.91) и (3.96) в (3.92) дает

$$M_I(\theta_*) - 3n^2 (I_y - I) \cos \theta_* \sin \theta_* = 0. \quad (3.98)$$

Последнее уравнение выражает равенство ионного и гравитационного моментов. Решения  $\theta_*$  уравнения (3.98) зависят от вида функции  $M_I(\theta_*)$ , которая в свою очередь зависит от формы тела и параметров ионного потока. Решение этого нелинейного уравнения следует искать численно для конкретного рассматриваемого тела. В зависимости от функции  $M_I(\theta)$  уравнение (3.98) может иметь разное число корней. Как только решения  $\theta_*$  найдены, значения  $\bar{G}_*$  и  $\gamma_*$  могут быть определены из уравнений (3.96) и (3.97) соответственно. Из выражения (3.97) следует, что положение равновесия  $\gamma_*$  существует, когда модуль правой части меньше или равен единице. В этом случае должно выполняться неравенство

$$|\bar{R}| \leq |(4 - 3\bar{I}_y) \sin \theta_*|. \quad (3.99)$$

Рассмотрим второе решение уравнения (3.93), возьмем  $\gamma_* = 0$ , тогда из (3.91) следует

$$\bar{G}_* = \cos \theta_* (\bar{R} - \sin \theta_*). \quad (3.100)$$

Подстановка (3.100) и  $\gamma_* = 0$  в (3.92) дает нелинейное уравнение для определения  $\theta_*$

$$M_I(\theta_*) + In^2(\bar{R} - \sin \theta_*) \cos \theta_* = 0. \quad (3.101)$$

Аналогично для решения  $\gamma_* = \pi$  из (3.91) получаем

$$\bar{G}_* = \cos \theta_* (\bar{R} + \sin \theta_*). \quad (3.102)$$

Уравнение для определения  $\theta_*$  имеет вид

$$M_I(\theta_*) - In^2(\bar{R} + \sin \theta_*) \cos \theta_* = 0. \quad (3.103)$$

В таблице 3.1 приведены найденные стационарные положения системы уравнений (3.82)-(3.85).

Таблица 3.1 – Стационарные положения системы (3.82)-(3.85)

№	$\gamma_*$	$\bar{G}_*$	Уравнение для определения $\theta_*$
1	$\gamma_* = \arccos\left(\frac{\bar{R}I}{(4I - 3I_y)\sin \theta_*}\right)$	$\bar{G}_* = \frac{3 \cos \theta_* \bar{R}(I_y - I)}{3I_y - 4I}$	$M_I(\theta_*) - 3n^2(I_y - I) \cos \theta_* \sin \theta_* = 0$
2	$\gamma_* = 0$	$\bar{G}_* = \cos \theta_* (\bar{R} - \sin \theta_*)$	$M_I(\theta_*) + In^2(\bar{R} - \sin \theta_*) \cos \theta_* = 0$
3	$\gamma_* = \pi$	$\bar{G}_* = \cos \theta_* (\bar{R} + \sin \theta_*)$	$M_I(\theta_*) - In^2(\bar{R} + \sin \theta_*) \cos \theta_* = 0$

После того как стационарные значения  $\gamma_*\theta_*$ ,  $\bar{G}_*$ ,  $\theta_*$  определены, с помощью уравнения (3.83) можно вычислить постоянную угловую скорость вращения цилиндрического тела вокруг его оси симметрии  $\omega_\varphi = \dot{\varphi}_* = \varphi_*' n = const$ . В случае, если тело находится в положении равновесия,

то его угловые скорости и ускорения равны нулю. В этом случае  $\bar{R}_* = 0$ ,  $G_* = 0$ ,  $\gamma_* = \pm\pi/2$ , угол  $\varphi_*$  произволен, а  $\theta_*$  является корнем уравнения (3.98).

Рассмотрим движение тела на геостационарной орбите, когда его движение описывается уравнениями (3.88)-(3.90). Этот случай изучен в [17]. Для исследования стационарных движений системы приравняем производные  $\dot{\gamma}$ ,  $\ddot{\theta}$  к нулю в уравнениях (3.88) и (3.90)

$$\frac{G_* - R_* \cos \theta_*}{\sin^2 \theta_*} = 0, \quad \frac{(G_* - R_* \cos \theta_*)(R_* - G_* \cos \theta_*)}{\sin^3 \theta_*} = \frac{M_I(\theta_*)}{I}. \quad (3.104)$$

Решение уравнений (3.104) дает значения  $\theta_*$ ,  $R_*$  и  $G_*$ , соответствующие положению равновесия

$$\theta_* = \arccos(G_* / R_*), \quad (3.105)$$

которое также должно удовлетворять уравнению

$$M_I(\theta_*) = 0. \quad (3.106)$$

Помимо положения равновесия (3.105) система уравнений (3.88) и (3.90) допускает стационарный режим движения, при котором  $\dot{\gamma} = \omega_{\gamma_*} = const$ , и угол  $\theta_*$  является корнем уравнения

$$M_I(\theta_*) \sin \theta_* - \omega_{\gamma_*} I (R - G \cos \theta_*) = 0. \quad (3.107)$$

Это движение соответствует режиму регулярной прецессии, когда ось симметрии цилиндрического тела описывает конус вокруг оси  $BY_o$  (рисунок 3.6).

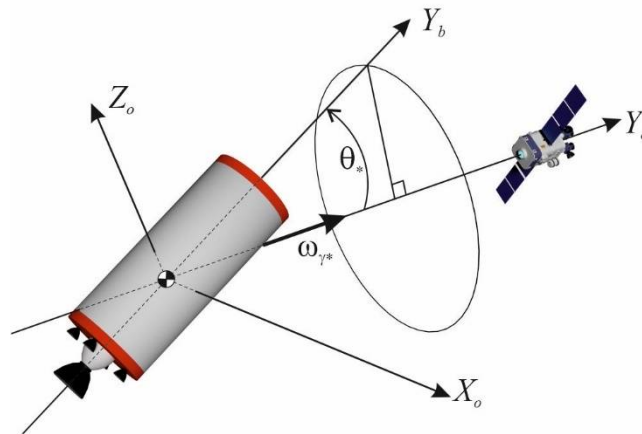


Рисунок 3.6 – Прецессионное движение тела на геостационарной орбите

### 3.6 Обобщенный интеграл энергии для осесимметричного тела на круговой орбите

Рассмотрим движение осесимметричного тела на круговой орбите под действием ионного момента, генерируемого расположенным поблизости активным космическим аппаратом. Запишем уравнения (3.82)-(3.85) для независимой переменной времени

$$\dot{\phi} = \frac{R}{\bar{I}_y} - \frac{(G - R \cos \theta) \cos \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{n \cos \gamma}{\sin \theta}, \quad (3.108)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{G - R \cos \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{n \cos \gamma \cos \theta}{\sin \theta}, \quad (3.109)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{M_l}{I} + \frac{n^2 \cos \theta \cos^2 \gamma}{\sin \theta} + \frac{2n \cos \gamma (G - R \cos \theta)}{\sin^2 \theta} - 3n^2 (\bar{I}_y - 1) \sin \theta \cos \theta \sin^2 \gamma - \frac{(G - R \cos \theta)(R - G \cos \theta)}{\sin^3 \theta}, \quad (3.110)$$

$$\dot{G} = -n\dot{\theta} \cos \gamma - \frac{n(R - G \cos \theta) \sin \gamma}{\sin \theta} + n^2 \sin \gamma \cos \gamma (1 - 3(\bar{I}_y - 1) \sin^2 \theta). \quad (3.111)$$

где  $\bar{I}_y = I_y / I$ ,  $R = const$ . Для системы уравнений (3.108)-(3.111) может быть получен первый интеграл в форме обобщенного интеграла энергии [98]. Для твердого тела на круговой орбите кинетическая энергия имеет вид

$$T = \frac{mn^2 r^2}{2} + \frac{I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2}{2}. \quad (3.112)$$

После упрощения выражение (3.112) принимает вид

$$T = \frac{mn^2 r^2}{2} + \frac{I}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\gamma}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_y}{2} (\dot{\phi} + \dot{\gamma} \cos \theta)^2 - nI\dot{\theta} \sin \gamma + + n \sin \theta \cos \gamma (\dot{\gamma}(I_y - I) \cos \theta + I_y \dot{\phi}) + \frac{n^2 ((I_y - I) \cos^2 \gamma \sin^2 \theta + I)}{2}. \quad (3.113)$$

Потенциальную энергию можно записать в виде

$$\Pi = -\frac{m\mu}{r} - \frac{\mu(2I + I_y)}{2r^3} + \frac{3\mu(I\bar{r}_x^2 + I_y \bar{r}_y^2 + I\bar{r}_z^2)}{2r^3} + W(\theta), \quad (3.114)$$

где  $W(\theta) = -\int_0^\theta M_l(\theta) d\theta$  - потенциальная энергия, соответствующая ионному моменту.

Запишем функцию Гамильтона

$$H = p_\theta \dot{\theta} + p_\gamma \dot{\gamma} + p_\phi \dot{\phi} + p_G \dot{G} - L, \quad (3.115)$$

где  $L = T - \Pi$  - функция Лагранжа,  $p_q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$  - обобщенный импульс. С учетом (3.113) и (3.114)

после отбрасывания констант гамильтониан принимает вид

$$H = \frac{I}{2} \left( \dot{\theta}^2 + (R - n \cos \gamma \sin \theta)^2 + \left( n \cos \gamma \cos \theta + \frac{G - R \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 \right) + + \frac{3n^2 (I_y - I) \sin^2 \theta \sin^2 \gamma}{2} + W(\theta) = const. \quad (3.116)$$

Выражение (3.116) является обобщенным интегралом энергии для системы уравнений (3.108)-(3.111) и сохраняет свое значение вдоль фазовых траекторий в фазовом пространстве  $(\gamma, \theta, \varphi, G, \dot{\theta})$ .

#### 4 Неуправляемое движение твердого тела вокруг центра масс под действием ионного момента

В этой главе исследуется движение цилиндрического тела относительно его центра масс при неизменном относительном положении активного космического аппарата. Введен параметр, определяющий отношение гравитационного и ионного моментов. Исследовано влияние этого параметра  $\gamma_{IG}$  на движение тела относительно центра масс на круговой орбите. Для случаев вытянутого и сплюснутого цилиндров построены бифуркационные диаграммы, иллюстрирующие влияние параметра  $\gamma_{IG}$  на расположение и тип положений равновесия системы. Построены возможные типы фазовых портретов. Проиллюстрировано влияние режима движения тела на величину осредненной на периоде колебаний ионной силы. С помощью построения сечений Пуанкаре и вычисления спектра показателей Ляпунова показано наличие хаотических областей движения в случае движения центра масс тела по эллиптической траектории. Попадание фазовой траектории в область хаотических движений приводит к существенному изменению осредненной ионной силы.

Результаты данной главы опубликованы в работах автора [19, 20, 23].

##### 4.1 Фазовый портрет и бифуркационная диаграмма

Рассмотрим плоское движение тела цилиндрической формы относительно центра масс при движении по кеплеровой орбите. Для описания его движения можно воспользоваться уравнением (3.41) или уравнением (3.42) в случае малого эксцентриситета. Момент ионного потока  $M_{Iz}$  можно представить в виде ряда Фурье (2.3). Для высоких орбит с малым эксцентриситетом, где влияние атмосферы пренебрежимо мало, уравнение (3.42) с учетом (2.3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \theta'' - \gamma_{IG} \left( a_0^{(M_I)} + \sum_{j=1}^k (a_j^{(M_I)} \cos j\theta + b_j^{(M_I)} \sin j\theta) \right) - \delta \sin 2\theta = \\ = e \left( \frac{2(\Omega\theta' + 1) \sin(\tau \Omega^{-1})}{\Omega^2} - 4\gamma_{IG} \cos(\tau \Omega^{-1}) \right) \left( a_0^{(M_I)} + \sum_{j=1}^k (a_j^{(M_I)} \cos j\theta + b_j^{(M_I)} \sin j\theta) \right) \\ - \delta \sin 2\theta \cos(\tau \Omega^{-1}). \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $\gamma_{IG}$  – параметр, определяющий отношение ионного и гравитационного моментов

$$\gamma_{IG} = \frac{M_I^{\max} p^3}{\Omega^2 I_z \mu} = \frac{2M_I^{\max} p^3}{3\mu |I_x - I_y|}. \quad (4.2)$$

Поскольку  $\gamma_{IG}$  пропорционален параметру орбиты  $p$ , то его величина будет меняться по мере изменения высоты орбиты в процессе транспортировки тела. По мере увеличения высоты влияние ионного момента возрастает по сравнению с влиянием гравитационного момента.

Исследуем влияние параметра  $\gamma_{IG}$  на движение тела относительно центра масс. Рассмотрим движение тела по круговой орбите. В этом случае  $e = 0$  и уравнение (4.1) принимает вид

$$\theta'' - \gamma_{IG} \left( a_0^{(M_I)} + \sum_{j=1}^k (a_j^{(M_I)} \cos j\theta + b_j^{(M_I)} \sin j\theta) \right) - \delta \sin 2\theta = 0. \quad (4.3)$$

Вид фазового портрета уравнения (4.3) зависит от параметра  $\gamma_{IG}$  и коэффициентов разложения ионного момента в ряд Фурье  $a_j^{(M_I)}$  и  $b_j^{(M_I)}$ . Как было указано выше, анализировать фазовый портрет невозмущенного уравнения (4.3) в общем случае затруднительно, поскольку коэффициенты этого уравнения зависят от многих параметров, в том числе от моментов инерции, формы и компоновки тела, параметров ионного потока, его направления и расстояния между активным космическим аппаратом и центром масс тела. Проведем дальнейший анализ для конкретного твердого тела цилиндрической формы, показанного на рисунке 4.1 и имеющего следующие параметры: масса тела  $m_b = 2000$  кг, радиус цилиндра  $R_c = 1.5$  м, его длина  $L_c = 6$  м. Положение центра масс на оси симметрии будем задавать координатой  $x_c$ .

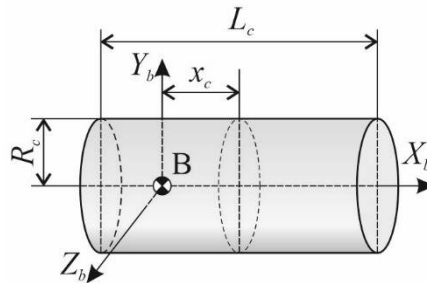


Рисунок 4.1 – Геометрия рассматриваемого твердого тела

Предполагается, что активный космический аппарат создает ионный поток с параметрами, приведенными в таблице 2.1. Расстояние между активным космическим аппаратом и центром масс тела равно  $AB = 15$  м. На рисунках 4.2-4.4 приведены зависимости ионного момента и проекций ионных сил от угла отклонения тела от местной вертикали при различных положениях центра масс  $\Delta = x_c / L_c$ . Смещение центра масс к нижнему концу цилиндра приводит к тому, что на графике остаются две точки пересечения кривой  $M_{Iz}(\theta)$  с осью абсцисс. С физической точки зрения это означает, что при воздействии на тело только ионного момента будет существовать

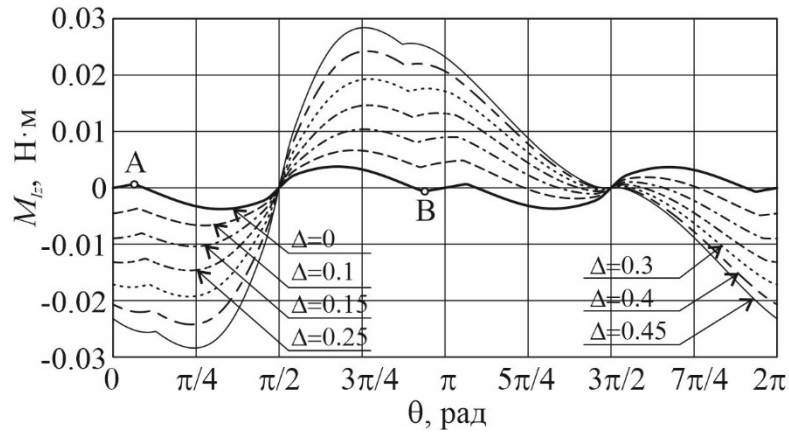


Рисунок 4.2 – Зависимость ионного момента  $M_{iz}$  от угла  $\theta$  для различных положений центра масс ( $\Delta = x_c / L_c$ )

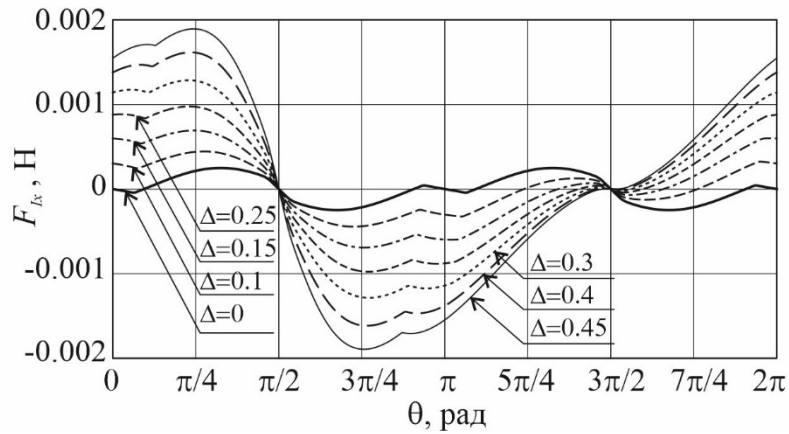


Рисунок 4.3 – Зависимость проекции ионной силы  $F_{ix}$  от угла  $\theta$  для различных положений центра масс ( $\Delta = x_c / L_c$ )

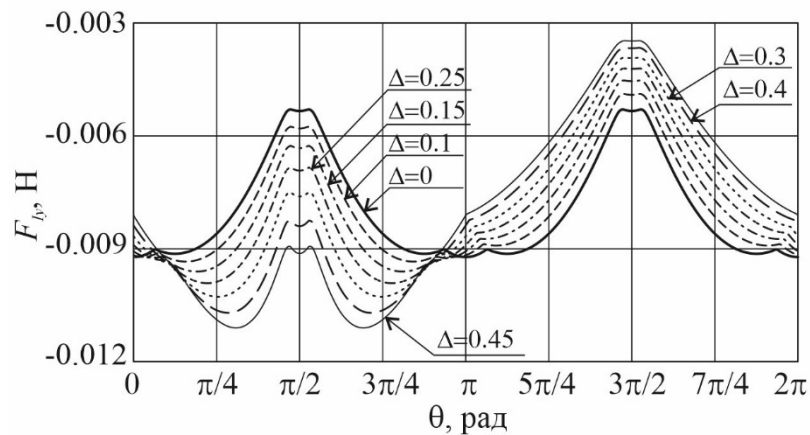


Рисунок 4.4 – Зависимость проекции ионной силы  $F_{iy}$  от угла  $\theta$  для различных положений центра масс ( $\Delta = x_c / L_c$ )



два состояния равновесия: устойчивое положение  $\theta = 3\pi/2$  и неустойчивое положение  $\theta = \pi/2$ . Следует отметить, что изменение положения центра масс приводит к изменению ионной силы (рисунки 5.6 и 5.7), поскольку в рамках рассматриваемых допущений ось ионного потока направлена в центр масс. Таким образом, при смещении центра масс меняется и направление ионного потока, что в свою очередь приводит к изменению равнодействующей ионной силы.

Согласно уравнению (4.3), угловое движение твердого тела на круговой орбите зависит от момента ионного потока (через коэффициенты  $a_j^{(M_I)}$  и  $b_j^{(M_I)}$ ) и параметра  $\gamma_{IG}$ , определяемого выражением (4.2) и зависящего от амплитуды ионного момента  $M_I^{\max}$ , моментов инерции  $I_x$ ,  $I_y$ , и параметра орбиты  $p$ . Исследуем влияние параметра  $\gamma_{IG}$  и положения центра масс тела  $\Delta$  на вид фазового портрета невозмущенной системы. Рассмотрим два принципиально разных случая: вытянутого ( $I_x < I_y$ ) и сплюснутого ( $I_x > I_y$ ) тела.

**Случай 1:** рассмотрим **вытянутое тело**, главные моменты инерции которого равны  $I_x = 2250 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $I_y = I_z = 6000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ . Представленные на рисунках 4.5 и 4.6 бифуркационные диаграммы показывают влияние параметра  $\gamma_{IG}$  на положение особых точек невозмущенного уравнения (4.3). Неустойчивые положения равновесия седлового типа показаны на диаграммах сплошными линиями. Пунктирными линиями показаны устойчивые положения равновесия типа центр. На рисунке 4.6 в более крупном масштабе показана область в окрестности точек бифуркации. Анализируя бифуркационные диаграммы, можно заключить, что при транспортировке вытянутого цилиндра может наблюдаться фазовый портрет одного из четырех типов. Наибольшее разнообразие наблюдается при расположении центра масс вблизи геометрического центра цилиндра (рисунок 4.5с). В случае  $\Delta = 0$  (рисунок 4.5а) имеются две точки бифуркации ( $\gamma_1^* = 2.18$ ,  $\gamma_2^* = 2.34$ ), позволяющие выделить три различных варианта фазовых портретов (рисунок 4.7). Различия в структуре фазовых пространств наблюдаются вблизи точек  $\theta = \pi n$ . При малых  $\gamma_{IG}$  основное влияние на тело оказывает гравитационный момент, и  $\theta = \pi$  является особой точкой типа центра. С увеличением  $\gamma_{IG}$  высота орбиты увеличивается и одновременно с этим уменьшается влияние гравитационного момента по сравнению с ионным моментом. При  $\gamma_{IG} = 2.18$  происходит бифуркация. На фазовом портрете появляются два новых центра и два седла. В окрестности точки  $\theta = \pi$  наблюдаются три центра, вокруг которых лежат области колебаний, разделенные сепаратрисами (рисунок 4.7). При дальнейшем увеличении параметра  $\gamma_{IG}$  следующая бифуркация происходит в точке  $\gamma_{IG} = 2.34$ .

Центр, расположенный в точке  $\theta = \pi$ , исчезает, а на его месте появляется неустойчивая седловая точка (рисунок 4.7).

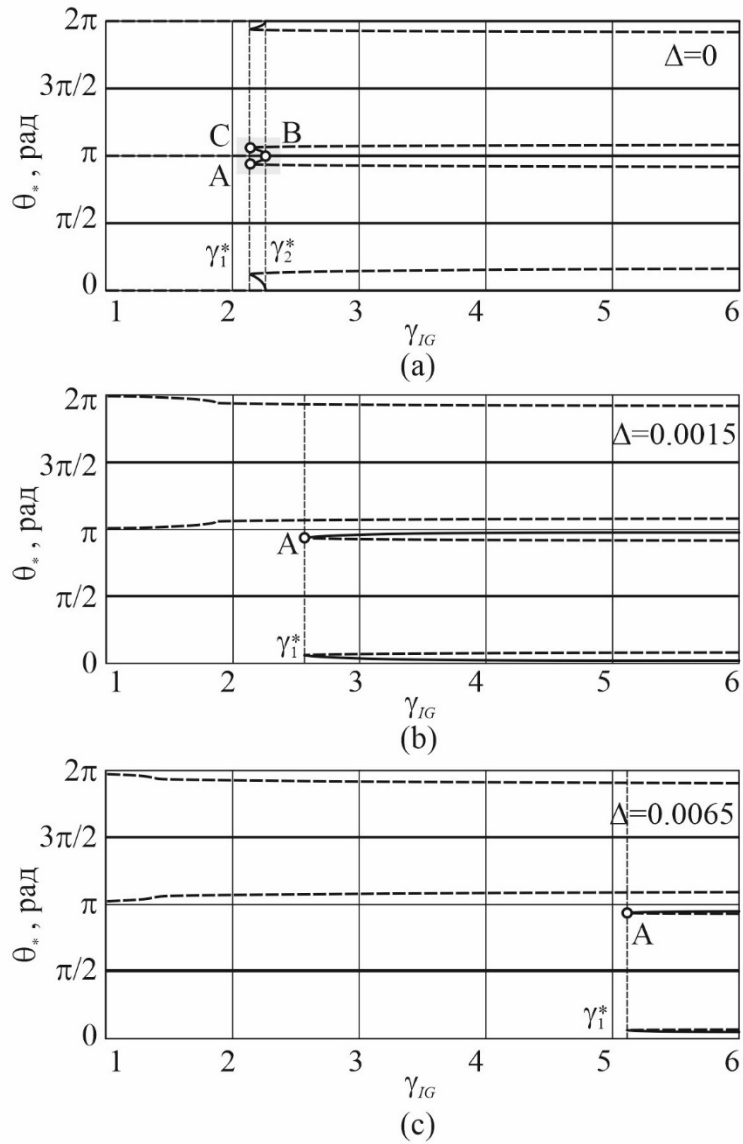


Рисунок 4.5 – Бифуркационная диаграмма для вытянутого тела  $I_x < I_y$  при различном положении центра масс

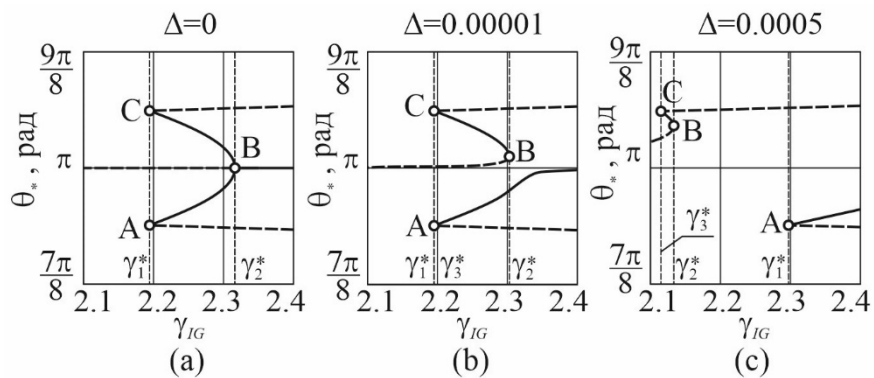
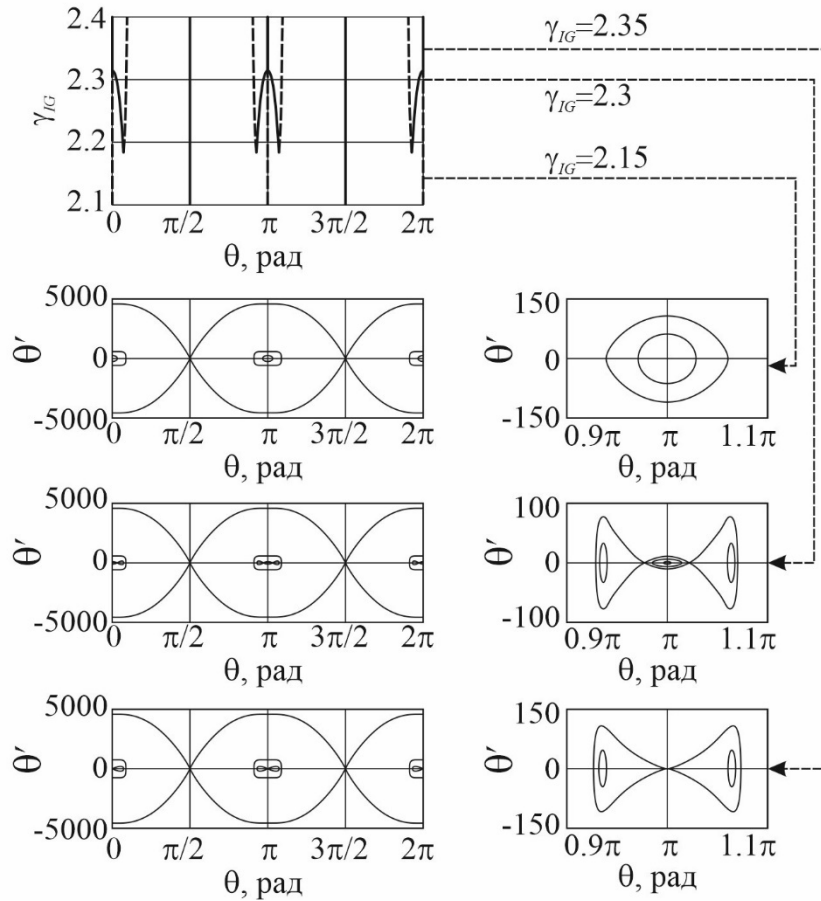


Рисунок 4.6 – Бифуркационная диаграмма для вытянутого тела  $I_x < I_y$

Рисунок 4.7 – Фазовый портрет для  $\Delta = 0$ 

У реального космического аппарата или ступени ракеты центр масс не лежит в плоскости симметрии. Моделирование показывает, что даже небольшое смещение центра масс из геометрического центра приводит к качественному изменению вида бифуркационной диаграммы. На рисунках 4.5, 4.6 показаны точки А, В и С, соответствующие разным бифуркационным значениям параметра  $\gamma_{IG}$ . В случае  $\Delta = 0$  точкам А и С соответствует одно и то же значение бифуркационного параметра  $\gamma_{IG} = \gamma_1^* = \gamma_3^*$ . При увеличении смещения центра масс точки В и С сдвигаются влево, а точка А — вправо (рисунок 4.6). Кроме того, точки В и С сближаются (рисунки 4.6b, 4.6c) и исчезают при увеличении смещения центра масс (рисунок 4.5b).

В случае, когда центр масс находится на расстоянии  $\Delta > 0.0006$ , точки В и С сливаются и исчезают и наблюдается только одна бифуркация. При малых значениях  $\gamma_{IG}$  в окрестности точек  $\theta = \pi n$  наблюдается один центр ( $\gamma_{IG} = 2$  на рисунке 4.8). При увеличении параметра происходит бифуркация. Появляется еще один центр и седловая точка ( $\gamma_{IG} = 6$  на рисунке 4.8). Сепаратрисы, проходящие через эту седловую точку, охватывают центры, образуя две области колебаний.

Как видно из рисунка 4.5, во всех рассмотренных случаях положения  $\pi/2$  и  $3\pi/2$  неустойчивы. С увеличением  $\gamma_{IG}$  и расстояния  $\Delta$  устойчивые положения равновесия в окрестности неустойчивого положения  $3\pi/2$  приближаются к нему. Во всех случаях на фазовом портрете можно выделить две большие области колебаний, разделенные сепаратрисой. Внутри этих областей колебаний можно наблюдать небольшие области внутренних колебаний, ограниченные сепаратрисами. Описанные бифуркации затрагивают эти небольшие области.

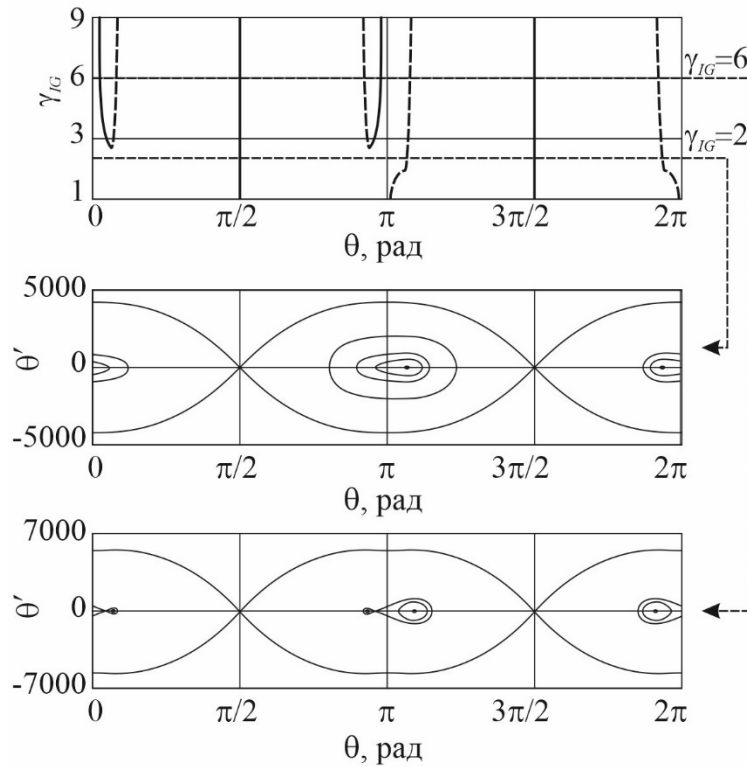


Рисунок 4.8 – Фазовые портреты для различных  $\gamma_{IG}$  при  $\Delta = 0.0015$

**Случай 2:** рассмотрим **сплюснутое тело**, главные моменты инерции которого равны  $I_x = 6000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $I_y = I_z = 2250 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ . В случае сплюснутого тела наблюдается гораздо более простое поведение. Когда центр масс лежит в геометрическом центре цилиндра ( $\Delta = 0$ ), бифуркационная диаграмма не содержит точек бифуркации (рисунок 4.9а). Соответствующий фазовый портрет показан на рисунке 4.10а. В случае небольшого смещения центра масс из геометрического центра возможны бифуркации (рисунок 4.9б). При увеличении параметра  $\gamma_{IG}$  центр, расположенный на интервале  $(\pi/2; \pi)$ , смещается вправо ближе к седловой точке, пока не исчезнет. Этот момент соответствует бифуркации  $\gamma_1^*$  на рисунке 4.9б. Центр на интервале  $(0; \pi/2)$  ведет себя аналогично, смещаясь влево (рисунки 4.10б, 4.10с). С увеличением смещения центра масс величина бифуркационного значения уменьшается, и точка А на рисунке 4.9

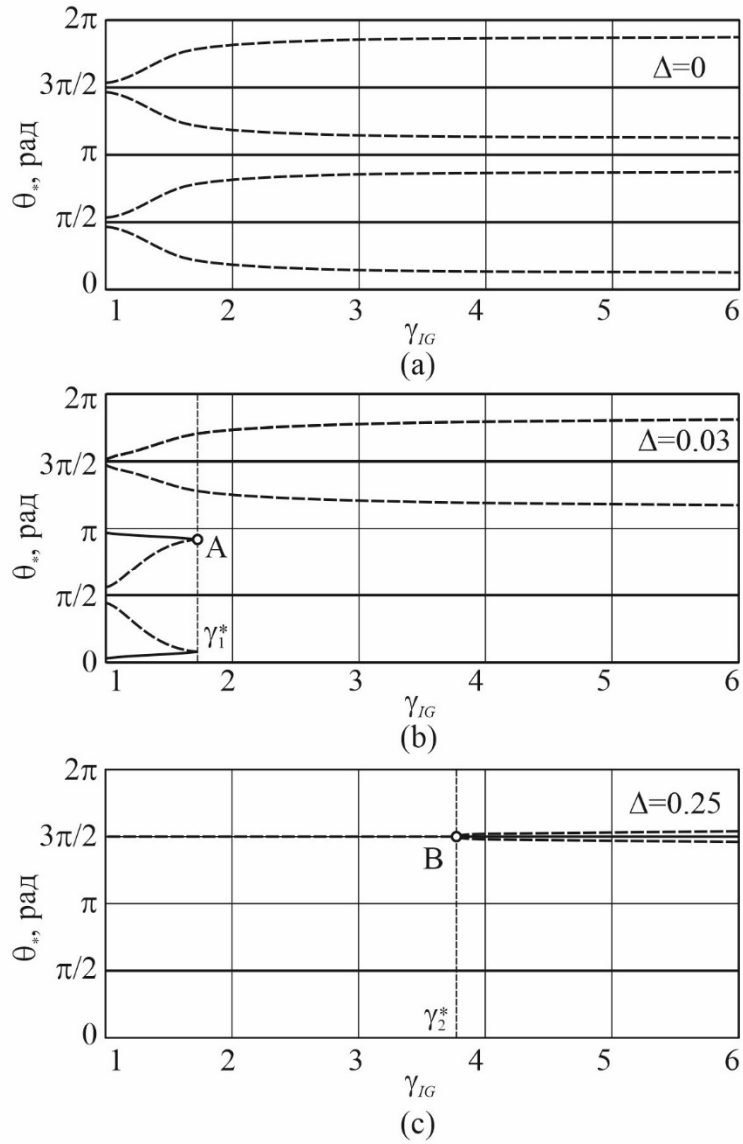


Рисунок 4.9 – Бифуркационная диаграмма для случая  $I_x > I_y$

смещается влево. При больших смещениях возникает новая бифуркация, которая с увеличением  $\Delta$  смещается вправо (точка В на рисунке 4.9с). При малых  $\gamma_{IG}$  наблюдается один центр (рисунок 4.10d). После бифуркации  $\gamma_2^*$  из него рождаются два новых центра, а на его месте появляется седловая точка (рисунок 4.10с). В отличие от случая вытянутого тела, в рассматриваемом случае могут существовать как две (рисунок 4.10а), так и одна (рисунок 4.10b-d) область внешних колебаний.

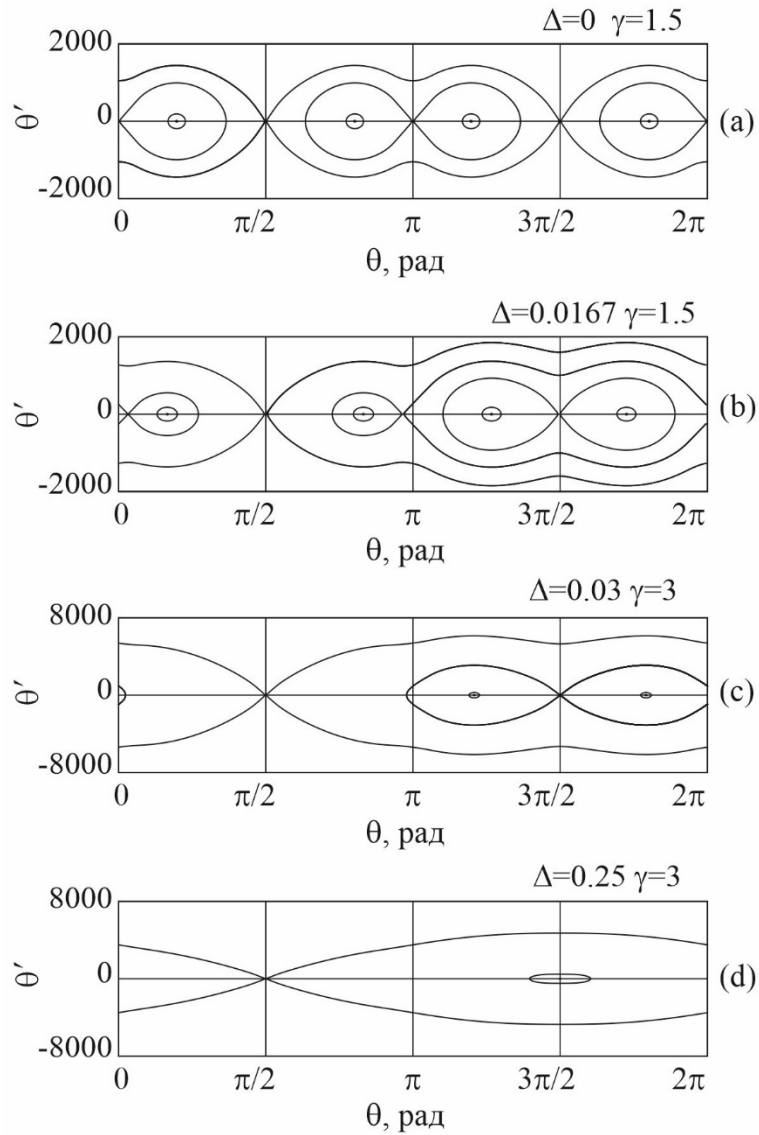


Рисунок 4.10 – Фазовые портреты для случая сплюснутого тела

Исследуем влияние области колебаний тела на величину генерируемой ионным потоком силы, осредненной на периоде колебаний тела. Как показано на рисунках 4.3 и 4.4, величина ионной силы зависит от ориентации тела в ионном потоке. Для определения наиболее благоприятных режимов движения были рассчитаны усредненные значения сил за период колебаний для различных фазовых траекторий. На рисунке 4.11 показаны различные фазовые траектории вытянутого тела (случай 1). Соответствующие усредненные силы приведены в таблице 4.1.

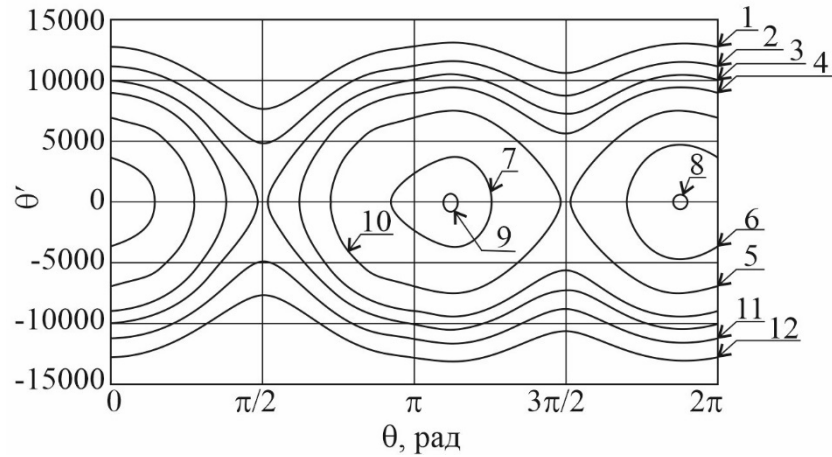


Рисунок 4.11 - Фазовый портрет для случая вытянутого тела при  $\Delta = 0.025$  и  $\gamma_{IG} = 6$

Таблица 4.1 -Осредненная ионная сила для случая вытянутого тела

Траектория	1	2	3	4	5	6
$F_{Ix}$ , Н	$1.03 \cdot 10^{-7}$	$8.91 \cdot 10^{-8}$	$-5.57 \cdot 10^{-7}$	$-1.12 \cdot 10^{-11}$	$3.32 \cdot 10^{-6}$	$1.10 \cdot 10^{-5}$
$F_{Iy}$ , $10^{-3}$ Н	-7.8	-7.7	-7.21	-8.01	-7.53	-8.87
Траектория	7	8	9	10	11	12
$F_{Ix}$ , Н	$-1.40 \cdot 10^{-5}$	$3.47 \cdot 10^{-5}$	$-3.47 \cdot 10^{-5}$	$-3.31 \cdot 10^{-6}$	$8.95 \cdot 10^{-8}$	$1.04 \cdot 10^{-7}$
$F_{Iy}$ , $10^{-3}$ Н	-8.96	<b>-9.05</b>	<b>-9.05</b>	-7.53	-7.7	-7.8

Данные, представленные в таблице 4.1, показывают, что наиболее эффективными с точки зрения транспортировки являются траектории № 8 и 9, которые соответствуют колебаниям вблизи устойчивых положений равновесия типа центра. Следует отметить, что величина проекции  $F_{Ix}$  ионной силы достигает относительно большого значения. Эта составляющая силы будет уводить тело от оси ионного потока, и для компенсации этого ухода активному космическому аппарату потребуются дополнительные затраты топлива. Наименьшая величина силы наблюдается на 4-й траектории, где происходят колебания с большой амплитудой. В случае сплюснутого тела наблюдается аналогичная картина: наиболее благоприятной с точки зрения генерации силы является транспортировка, при которой тело колеблется около устойчивых положений равновесия (рисунок 4.12, траектории 8 и 9). Осредненные по периоду колебаний значения сил для этого случая приведены в таблице 4.2. Данные, приведенные в таблицах 4.1 и 4.2, показывают, что движение твердого тела вокруг центра масс в процессе транспортировки оказывает существенное влияние на величину генерируемой ионным потоком силы. Разница в

ионной силе для самого благоприятного и неблагоприятного режима движения для рассмотренного примера составляет около 18%.

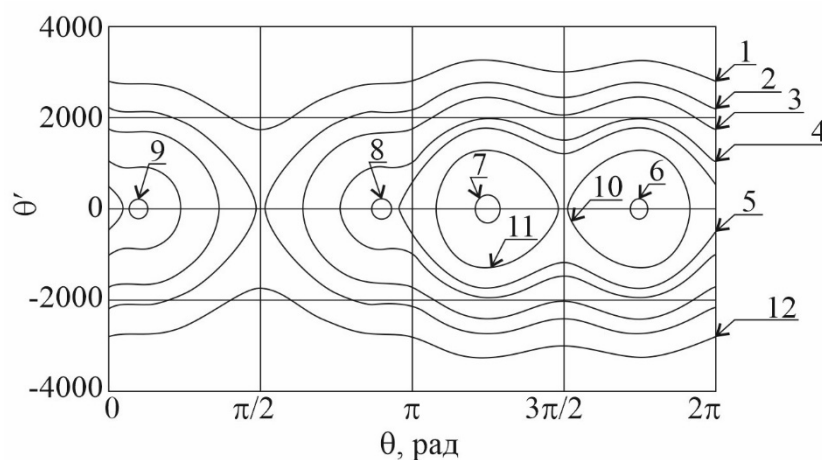


Рисунок 4.12 - Фазовый портрет для случая сплюснутого тела при  $\Delta = 0.025$  и  $\gamma_{IG} = 2$

Таблица 4.2 -Осредненная ионная сила для случая для сплюснутого тела

Траектория	1	2	3	4	5	6
$F_{Ix}$ , Н	$4.47 \cdot 10^{-8}$	$1.48 \cdot 10^{-9}$	$1.59 \cdot 10^{-10}$	$-1.29 \cdot 10^{-9}$	$-1.35 \cdot 10^{-8}$	$-1.5 \cdot 10^{-4}$
$F_{Iy}$ , $10^{-3}$ Н	-7.85	-7.35	-8.20	-8.5	-8.42	-8.42
Траектория	7	8	9	10	11	12
$F_{Ix}$ , Н	$-1.49 \cdot 10^{-4}$	$-7.86 \cdot 10^{-5}$	$8.43 \cdot 10^{-5}$	$-8.48 \cdot 10^{-5}$	$-8.48 \cdot 10^{-5}$	$4.54 \cdot 10^{-8}$
$F_{Iy}$ , $10^{-3}$ Н	-8.4	<b>-9.11</b>	<b>-9.11</b>	-7.17	-7.17	-7.85

Следует отметить, что в процессе решения задачи уборки космического мусора посредством бесконтактной ионной транспортировки параметр орбиты  $p$ , а, значит, и параметр  $\gamma_{IG}$  будет меняться с течением времени. При достижении  $\gamma_{IG}$  бифуркационного значения происходит качественная перестройка фазового портрета, что может привести к изменению режима колебаний твердого тела и, как следствие, к изменению величины осредненной ионной силы.

#### 4.2 Хаотическое поведение твердого тела относительно центра масс в плоском случае

Возможность существования хаотических режимов движения является одной из ключевых особенностей нелинейных систем. В фазовом пространстве динамической системы



существуют области, заполненные непериодическими непересекающимися траекториями. Внутри этих областей фазовые траектории характеризуются сильной чувствительностью к начальным условиям. Потеря информации о начальных условиях является одной из основных особенностей хаотических траекторий. С практической точки зрения, если фазовая траектория попадает в область хаотических движений, это означает невозможность прогнозирования поведения системы на больших интервалах времени. Здесь речь не идет о наличии внешних случайных возмущений. Все силы, действующие на механическую систему, заранее определены. Численное интегрирование системы дифференциальных уравнений из заданной начальной точки при заданных параметрах системы и алгоритме интегрирования всегда будет давать один и тот же результат. Однако система будет очень чувствительна к начальным условиям и параметрам. Кроме того, существенную роль будут играть ошибки численного интегрирования. На практике параметры движения механической системы и ее массово-геометрические характеристики известны приближенно, а это означает, что результаты численного интегрирования не могут быть использованы на большом интервале времени при наличии хаоса в системе. В связи с этим выявление областей хаотического движения и поиск способов подавления хаоса для конкретной механической системы являются актуальными с практической точки зрения задачами.

При движении твердого тела по эллиптической орбите расстояние от его центра масс до центра масс Земли периодически изменяется. Это изменение приводит к периодическому изменению величины гравитационного момента, что можно рассматривать как периодическое возмущение. Наличие неустойчивых седловых точек на фазовом портрете невозмущенной системы и периодическое возмущение создают предпосылки для возникновения хаоса. Появление хаоса может привести к неконтролируемому переходу тела из режима колебаний в режим вращения и наоборот. Для рассматриваемой миссии по бесконтактной уборке космического мусора это может привести к снижению осредненной по периоду колебания тела ионной силы и, как следствие, к снижению эффективности системы бесконтактной транспортировки, что в конечном итоге выливается в увеличение время, необходимое для завершения миссии. Поэтому выявление возможности появления хаоса является важным этапом проектирования миссии по бесконтактной уборке космического мусора.

Построение сечения Пуанкаре является достаточно эффективным способом выявления хаотических траекторий при изучении динамических систем малых размерностей. Для построения сечения в фазовом  $N$ -мерном пространстве выбирается секущая поверхность  $S$  размерности  $N-1$ . Выбор этой поверхности во многом произволен. Главным требованием является многократное пересечение этой поверхности исследуемыми траекториями. Затем на этой поверхности выбирается некоторая точка  $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$ . Эта точка используется в

качестве начальной при интегрировании рассматриваемой системы дифференциальных уравнений. Фазовая траектория рассчитывается от этой точки до пересечения с секущей поверхностью  $S$ . Обозначим точку пересечения через  $X'$ . Таким образом, получаем отображение точки  $X$  в точку  $X'$ . Теперь, взяв за начальную точку  $X'$ , следующую точку  $X''$  можно получить аналогичным образом и так далее. Если одна из фазовых координат рассматриваемой динамической системы периодически изменяется, то можно рассматривать пересечение фазовых траекторий не с одной секущей поверхностью, а с семейством периодически расположенных поверхностей с последующим отображением всех точек пересечения на одну поверхность. Построение сечения Пуанкаре позволяет сосредоточиться на изучении более простого отображения вместо анализа исходной динамической системы. При таком подходе теряется информация о поведении системы между последовательными пересечениями секущей поверхности  $S$  фазовой траекторией, но сохраняется возможность анализа характера траекторий. Регулярные траектории на сечениях Пуанкаре выстраиваются в линии. Хаотические траектории отображаются в виде облака точек.

Возвращаясь к рассматриваемой динамической системе, описываемой уравнением (4.1), выберем несколько начальных точек фазового портрета. Для каждой такой точки производится численное интегрирование уравнения (4.1). Точки полученной фазовой траектории, соответствующие моментам  $\tau = 2\pi \Omega_j$ , наносятся на сечение Пуанкаре. Поскольку построение сечений Пуанкаре основано на численном интегрировании уравнения движения, необходимо задать значения входящих в уравнение (4.1) коэффициентов. В этом разделе используются параметры системы, указанные в разделе 4.1. Рассмотрим случай, когда эксцентриситет орбиты равен  $e = 0.01$ . Сечения Пуанкаре показаны на рисунках 4.13 и 4.14. Сравнение сечений Пуанкаре с фазовыми траекториями невозмущенной системы (рисунки 4.11, 4.12) позволяет сделать вывод, что в окрестности сепаратрис невозмущенной системы наблюдается хаотический слой в виде облака точек, а на отдалении от сепаратрис движение остается регулярным. Расчеты показывают, что площадь области фазового портрета, которую занимает хаотический слой, увеличивается с увеличением эксцентриситета (рисунок 4.15).

Особый интерес представляет случай, показанный на рисунке 4.14. Фазовые траектории, эффективные с точки зрения осредненной ионной силы (траектории 8 и 9 на рисунке 4.12), оказываются внутри хаотического слоя. При этом изображающая точка может перемещаться внутри всего хаотического слоя, что соответствует колебаниям тела с большой амплитудой. В результате осредненная ионная сила существенно изменится по сравнению со случаем невозмущенного движения по круговой орбите. В таблице 4.3 приведены усредненные значения

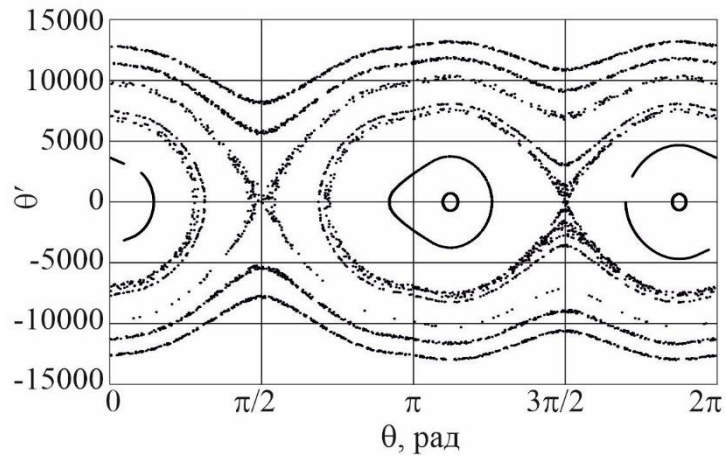


Рисунок 4.13 – Сечение Пуанкаре для вытянутого тела:  $\Delta = 0.025$ ,  $\gamma_{IG} = 6$ ,  
 $e = 0.01$

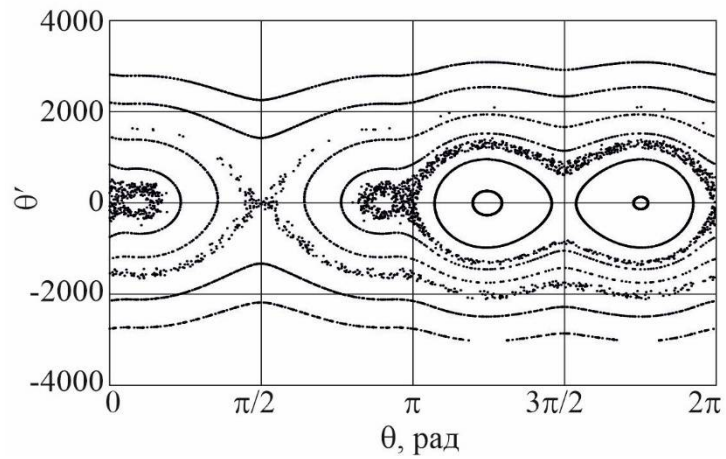


Рисунок 4.14 – Сечение Пуанкаре для сплюснутого тела:  $\Delta = 0.025$ ,  $\gamma_{IG} = 2$ ,  
 $e = 0.01$

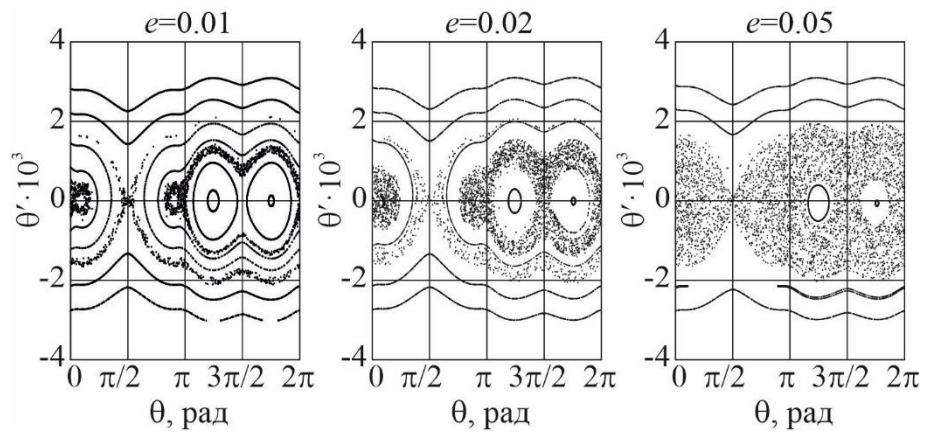


Рисунок 4.15 - Изменение толщины хаотического слоя при изменении эксцентриситета орбиты  
для случая сплюснутого тела  $\Delta = 0.025$ ,  $\gamma_{IG} = 2$

ионной силы  $F_{ly}$ , рассчитанной для начальных условий, соответствующих фазовым траекториям, показанным на рисунке 4.12. Усреднение проводилось на интервале, равном десяти периодам колебаний. Как видно из таблицы 4.3, осредненная сила значительно уменьшилась по сравнению с невозмущенным случаем, что обусловлено изменением фазовой траектории. Для траекторий 8 и 9 осредненная ионная сила уменьшилась на 9.8% и 5.6% соответственно. Несмотря на ухудшение, фазовая траектория 9 по-прежнему остается наиболее благоприятной по сравнению с другими траекториями.

Таблица 4.2 -Осредненная ионная сила для сплюснутого тела

Траектория	1	2	3	4	5	6
$F_{lx}$ , Н	$1.21 \cdot 10^{-7}$	$3.95 \cdot 10^{-9}$	$6.45 \cdot 10^{-7}$	$-2.40 \cdot 10^{-7}$	$-3.50 \cdot 10^{-6}$	$-1.5 \cdot 10^{-4}$
$F_{ly}$ , $10^{-3}$ Н	-7.86	-7.66	-8.16	-8.5	-8.56	-8.43
Траектория	7	8	9	10	11	12
$F_{lx}$ , Н	$-1.48 \cdot 10^{-4}$	$-4.72 \cdot 10^{-6}$	$3.68 \cdot 10^{-6}$	$-8.97 \cdot 10^{-5}$	$9.00 \cdot 10^{-5}$	$1.24 \cdot 10^{-7}$
$F_{ly}$ , $10^{-3}$ Н	-8.39	-8.22	<b>-8.6</b>	-7.28	-7.28	-7.85

Помимо построения сечений Пуанкаре, наличие хаоса в системе можно подтвердить с помощью спектра показателей Ляпунова, который вычисляется для отдельных траекторий. Показатели Ляпунова, составляющие этот спектр, характеризуют эволюцию траекторий в некотором объеме вблизи рассматриваемой траектории в разных направлениях фазового пространства. Для большинства динамических систем определение показателей Ляпунова возможно только численно. Для их вычисления широко используется алгоритм [99], основанный на ортогонализации Грама-Шмидта.

Рассмотрим  $N$ -мерную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}). \quad (4.4)$$

Фазовая траектория  $\mathbf{x}(t)$  является решением уравнения. Рассмотрим некоторую близкую к  $\mathbf{x}(t)$  траекторию  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{x}}(t)$ , где  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  – взаимное отклонение двух траекторий. Уравнение для  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  с учетом (4.4) после линеаризации можно записать в виде

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}, \quad (4.5)$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица, составленная из частных производных компонент вектор-функции  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ .

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial x_1} & \frac{\partial F_N}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_N}{\partial x_N} \end{bmatrix}.$$

Показатель Ляпунова для любого решения уравнения (4.5) определяется как верхний предел

$$\lambda_i = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log(\|\tilde{x}_i(T)\|). \quad (4.6)$$

Множество  $N$  показателей Ляпунова  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N$  образует спектр показателей Ляпунова. Их геометрический смысл состоит в том, что совокупность решений, начальные значения которых находятся в некоторой окрестности радиуса  $\varepsilon$ , за время  $T$  разойдется в  $N$ -мерный эллипсоид вдоль  $N$  главных полуосей, причем за время  $t$  расстояния будут определяться значениями  $\varepsilon_i = \varepsilon e^{\lambda_i t}$ . Другими словами, каждый из показателей Ляпунова характеризует изменение масштаба вдоль одной из главных осей эллипсоида.

Спектр показателей Ляпунова позволяет определить тип фазовой траектории по знакам показателей. Наличие хотя бы одного положительного показателя Ляпунова в спектре означает, что рассматриваемая фазовая траектория неустойчива. Если все показатели отрицательны, то фазовая траектория асимптотически устойчива. Любая периодическая траектория обязательно имеет хотя бы один нулевой показатель. Если рассматриваемая фазовая траектория принадлежит аттрактору, состоящему из множества фазовых траекторий (тору или странному аттрактору), то спектр показателей Ляпунова для этой траектории характеризует и все остальные аттракторные траектории. Сумма всех Ляпуновских показателей аттрактора отрицательна. Аттрактор, отличный от устойчивого положения равновесия, имеет по крайней мере один нулевой показатель. В трехмерном пространстве можно наблюдать следующие сочетания знаков показателей Ляпунова:  $(-, -, -)$  - притягивающее положение равновесия,  $(0, -, -)$  - притягивающий предельный цикл,  $(0, 0, -)$  - двумерный тор,  $(+, 0, -)$  - странный аттрактор (хаос). Таким образом, в спектре хаотической траектории должны присутствовать положительные, нулевые и отрицательные показатели Ляпунова.

Возьмем точку  $\mathbf{r}_0 = [r_{01}, r_{02}, \dots, r_{0N}]^T$  на рассматриваемой фазовой траектории. Выберем также  $N$  возмущенных точек  $\mathbf{x}_{j0} = [x_{j01}, x_{j02}, \dots, x_{j0N}]^T$  так, чтобы вектора возмущений  $\Delta \mathbf{x}_{j0} = \mathbf{x}_{j0} - \mathbf{r}_0$  имели длину  $\varepsilon$  и были взаимно ортогональны. Используя численное

интегрирование уравнений (4.4), получим новые положения  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{x}_{j1}$  через небольшой промежуток времени  $T$ . Новые векторы возмущения принимают вид  $\Delta\mathbf{x}_{j1} = \mathbf{x}_{j1} - \mathbf{r}_1$ . Проведем ортогонализацию этих векторов методом Грама-Шмидта

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{x}_{j1}'' &= \frac{\Delta\mathbf{x}_{j1}'}{\|\Delta\mathbf{x}_{j1}'\|}, \\ \Delta\mathbf{x}_{11}' &= \Delta\mathbf{x}_{11}, \\ \Delta\mathbf{x}_{21}' &= \Delta\mathbf{x}_{21} - \langle \Delta\mathbf{x}_{21}, \Delta\mathbf{x}_{11}'' \rangle \Delta\mathbf{x}_{11}'', \\ \Delta\mathbf{x}_{31}' &= \Delta\mathbf{x}_{31} - \langle \Delta\mathbf{x}_{31}, \Delta\mathbf{x}_{21}'' \rangle \Delta\mathbf{x}_{21}'' - \langle \Delta\mathbf{x}_{31}, \Delta\mathbf{x}_{11}'' \rangle \Delta\mathbf{x}_{11}'', \\ &\dots \\ \Delta\mathbf{x}_{N1}' &= \Delta\mathbf{x}_{N1} - \sum_{k=1}^{N-1} (\langle \Delta\mathbf{x}_{N1}, \Delta\mathbf{x}_{k1}'' \rangle \Delta\mathbf{x}_{k1}'').\end{aligned}$$

После такой ортогонализации полученные векторы возмущений  $\Delta\mathbf{x}_{j1}''$  будут взаимно ортогональны и будут иметь единичную длину. Умножение этих векторов на  $\varepsilon$  дает  $\Delta\mathbf{x}_{j1}''' = \varepsilon \Delta\mathbf{x}_{j1}''$ . Рассмотрим новый набор возмущенных точек  $\Delta\mathbf{x}_{j1}' = \mathbf{x}_{j1} + \Delta\mathbf{x}_{j1}'''$ . После этого процесс повторяется, но вместо точек  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{x}_{j0}$  берутся точки  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{x}_{j1}'$ . После повтора описанных операций  $M$  раз показатели Ляпунова можно вычислить как

$$\lambda_j = \frac{1}{MT} \sum_{k=1}^M \log(\|\Delta\mathbf{x}_{jk}'\|), \quad j=1, 2, \dots, N. \quad (4.7)$$

Определенную трудность представляет выбор временного интервала  $T$ . Выбор слишком большого значения интервала приводит к смещению значений всех показателей Ляпунова к максимальному показателю.

Рассмотрим возмущенное движение системы в расширенном фазовом пространстве. Уравнение (4.1) можно записать в векторной форме:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (4.8)$$

где штрих означает производную по переменной  $\tau$ , заданной выражением (3.37),  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T = [\theta', \theta, \tau]^T$  – вектор переменных,  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1, f_2, f_3]^T$  – вектор-функция правых частей

$$\begin{aligned}f_1 &= \gamma_{IG} \left( a_0^{(Li)} + \sum_{j=1}^k (a_j^{(Li)} \cos jx_2 + b_j^{(Li)} \sin jx_2) \right) + \delta \sin 2x_2 + e \left( \frac{2(\Omega x_1 + 1)}{\Omega^2} \sin(x_3 \Omega^{-1}) - \right. \\ &\quad \left. - \delta \sin(2x_2) \cos(x_3 \Omega^{-1}) - 4\gamma_{IG} \cos(x_3 \Omega^{-1}) \left( a_0^{(Li)} + \sum_{j=1}^k (a_j^{(Li)} \cos jx_2 + b_j^{(Li)} \sin jx_2) \right) \right),\end{aligned}$$

$$f_2 = x_1, \quad f_3 = 1.$$

Эта система относится к классу автономных систем размерности  $N = 3$ . Для вычисления показателей Ляпунова для траектории, начинающейся в точке  $\mathbf{x}_0$ . В  $\varepsilon$ -окрестности этой точки ( $\varepsilon = 10^{-5}$ ) берутся три исходные точки  $\mathbf{x}_{01}$ ,  $\mathbf{x}_{02}$ ,  $\mathbf{x}_{03}$  такие, что вектора  $\mathbf{x}_{0j} - \mathbf{x}_0$  ( $j = 1, 2, 3$ ) взаимно ортогональны. Выбирается временной интервал  $T = 0.5$  и проводится численное интегрирование системы (4.8) до момента  $T$ . Полученные точки  $\mathbf{x}_{k1}$ ,  $\mathbf{x}_{k2}$ ,  $\mathbf{x}_{k3}$  используются для вычисления сумм внутри показателей Ляпунова:

$$\lambda_j = \frac{1}{MT} \sum_{k=1}^M \ln \frac{\|\tilde{\mathbf{x}}_{kj}\|}{\varepsilon}, \quad j = 1, 2, 3; \quad (4.9)$$

где  $M$  – число итераций.

На рисунке 4.16 показаны показатели Ляпунова, рассчитанные для хаотической траектории, начинающейся вблизи седловой точки  $\mathbf{x}_0 = [0, 3.2, 0]^T$ . На рисунке 4.17 показаны показатели Ляпунова для траектории, начинающейся в точке  $\mathbf{x}_0 = [0, 3.7, 0]^T$ . Эти графики были получены для  $e = 0.01$ ,  $\gamma_{IG} = 2$ . Сечения Пуанкаре для этого случая показаны на рисунке 4.14. Для траекторий, начинающихся внутри хаотического слоя, спектр содержит положительные, нулевые и отрицательные показатели Ляпунова  $\lambda \approx [0.510, 0, -0.561]$ . Такой набор свидетельствует о том, что траектория является странным аттрактором и в системе наблюдается динамический хаос. Для регулярной траектории характеристические показатели Ляпунова, приведены на рисунке 4.17. По ним нельзя сделать какой-либо вывод о типе и устойчивости траектории, поскольку все показатели стремятся к нулю.

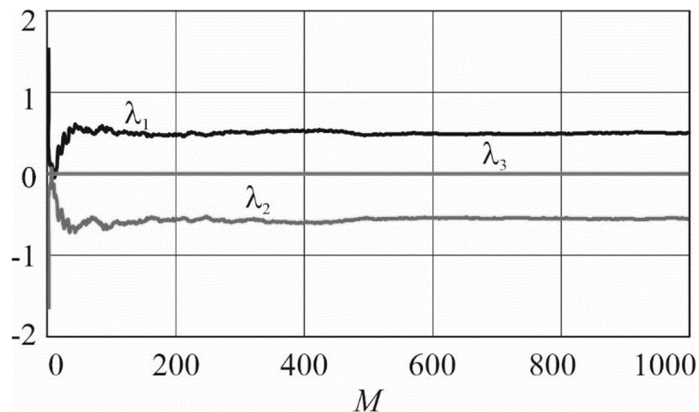


Рисунок 4.16 – Спектр показателей Ляпунова для случая  $e = 0.01$ ,  $\Delta = 0.025$ ,  $\gamma_{IG} = 2$ ,

$$\mathbf{x}_0 = [0, 3.2, 0]^T$$

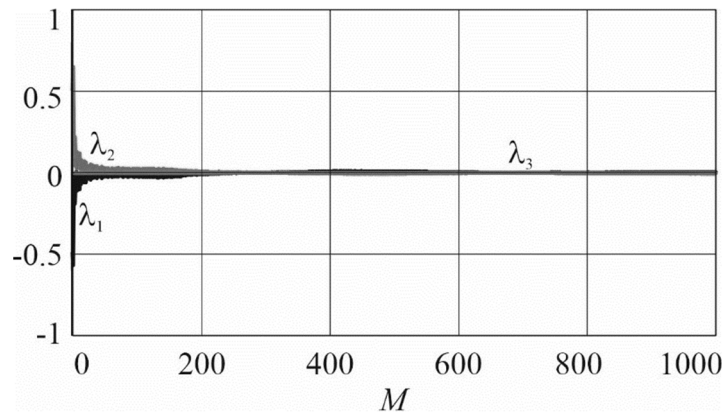


Рисунок 4.17 – Спектр показателей Ляпунова для случая  $e = 0.01$ ,  $\Delta = 0.025$ ,  $\gamma_{IG} = 2$ ,

$$\mathbf{x}_0 = [0, 3.7, 0]^T$$



## **5 Управление ионным потоком, обеспечивающим заданный режим движения твердого тела относительно центра масс**

Данный раздел посвящен разработке различных методов и законов управления ионным потоком, обеспечивающих перевод транспортируемого твердого тела в требуемый режим движения относительно центра масс. В рамках данной главы предполагается, что система управления активного космического аппарата удерживает его в неизменном положении относительно тела. Предложено два метода управления ионным потоком: за счет изменения тяги транспортировочного двигателя и за счет изменения направления оси ионного потока. Для случая плоского движения цилиндрического твердого тела разработаны законы управления, обеспечивающие его стабилизацию в устойчивом положении равновесия. Показано, что управление осью ионного потока требует меньше времени для осуществления стабилизации, чем управление тягой. Для случая плоского движения разработан основанный на вычислении энергии закон управления направлением оси ионного потока, обеспечивающий перевод тела в требуемый угловой режим движения. Для случая пространственного движения динамически симметричного цилиндрического тела разработаны законы управления тягой транспортировочного двигателя, обеспечивающие перевод тела в стационарное положение, для случаев эллиптической и геостационарной орбиты. Для случаев управления тягой, исследована устойчивость управляемого движения тела относительно центра масс.

Результаты данной главы опубликованы в работах автора [12, 16, 17, 21, 22, 24].

### **5.1 Методы управления ионным потоком**

В разделе 4.1 было показано, что угловое движение твердого тела при его бесконтактной транспортировке ионным потоком влияет на величину осредненной ионной силы. Следовательно, перевод тела в более эффективный с точки зрения максимизации осредненной силы режим углового движения приводит к повышению эффективности системы и уменьшению времени миссии по уборке космического мусора с орбиты. При разработке закона управления угловым движением тела с помощью ионного потока можно предложить два метода управления: первый заключается в изменении тяги транспортировочного двигателя, что приводит к изменению скорости частиц потока, а второй основан на изменении направления оси ионного потока (рисунок 5.1). Изменение тяги приводит к растяжению функции ионного момента вдоль оси ординат, не меняя ее характера и расположения точек пересечения с осью абсцисс. В случае управления тягой ионный момент (2.3) можно переписать как

$$M_z(\theta) = uM_I^{\max} \left( a_0^{(Mi)} + \sum_{j=1}^k (a_j^{(Mi)} \cos j\theta + b_j^{(Mi)} \sin j\theta) \right), \quad (5.1)$$

где  $u=[0,1]$  – безразмерный управляющий параметр. Значение  $u=0$  соответствует выключенному двигателю, а значение  $u=1$  соответствует случаю, когда двигатель работает на полную мощность и скорость частиц потока максимальна. С физической точки зрения параметр управления  $u$  пропорционален квадрату скорости испускания ионов и определяется напряжением в ионном двигателе  $u = (V_0 / V_0^{\max})^2$ . Поскольку ионный двигатель не может втягивать ионы, этот управляющий параметр положителен. Изменение направления оси потока приводит к изменению графика функции  $M_z(\theta)$  и требует пересчета коэффициентов разложения  $a_j^{(Mi)}$ ,  $b_j^{(Mi)}$ .

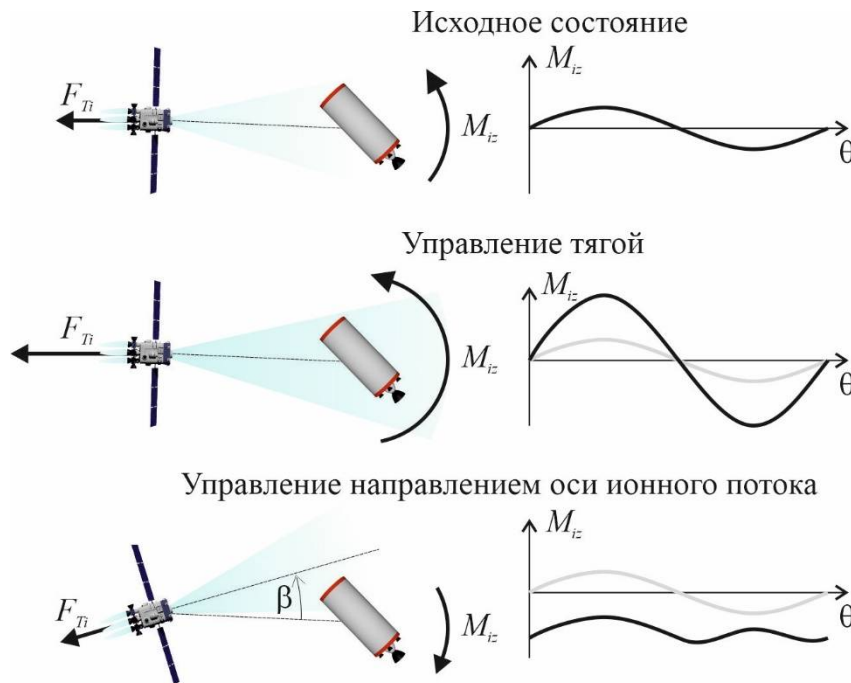


Рисунок 5.1 – Методы управления ориентацией тела

## 5.2 Управление угловым движением твердого тела в плоском случае

Раздел посвящен разработке законов управления, обеспечивающих стабилизацию твердого тела в устойчивом положении равновесия. Данные, представленные в таблицах 4.1 и 4.2, свидетельствуют о том, что для цилиндрических тел бесконтактная транспортировка в положении равновесия обеспечивает максимизацию генерируемой осредненной ионной силы. Рассмотрим случай, когда тело движется по круговой орбите, и его движение описывается уравнением (3.43) с моментом (5.1)

$$\theta'' - \delta \sin 2\theta - \frac{u(\theta, \theta') M_I^{\max} p^3}{\Omega^2 I_z \mu} \left( a_0^{(Mi)} + \sum_{j=1}^k (a_j^{(Mi)} \cos j\theta + b_j^{(Mi)} \sin j\theta) \right) = 0. \quad (5.2)$$

Приравнивая ускорение в этом уравнении к нулю, запишем уравнение для определения положения равновесия

$$\frac{M_{Iz}(\theta_*) p^3}{\Omega^2 I_z \mu} + \delta \sin 2\theta_* = 0. \quad (5.3)$$

Будем полагать, что  $\theta_* = 0$  является положением равновесия. Согласно уравнению (5.3),  $\theta_* = 0$  является положением равновесия, если  $\theta_*$  является корнем уравнения  $M_{Iz}(\theta_*) = 0$ .

Рассмотрим ситуацию неуправляемого движения, когда ионный двигатель включен на полную мощность ( $u = 1$ ). В частном случае, когда центр масс цилиндрического твердого тела находится в его геометрическом центре (рисунок 5.2, штриховая линия), ионный момент  $M_{Iz}^{u=1}(\theta)$  является нечетной функцией угла  $\theta$  при  $\beta = 0$ , где  $\beta$  - угол отклонения оси ионного потока от прямой, соединяющей центры масс активного космического аппарата и транспортируемого тела (рисунок 5.1). Все расчеты в данном разделе выполнены для цилиндрического тела, длина которого 6.5 м, радиус 1.2 м, а центр масс смещен на 0.2 м к основанию. Уравнение (5.2) имеет положение равновесия  $\theta = 0$ ,  $\theta' = 0$ . Для этого случая можно записать следующие выражения для коэффициентов ряда Фурье (5.1):  $a_j^{(Mi)} = 0$ . В общем случае, когда центр масс не лежит в плоскости симметрии, значение  $\theta = 0$  не является корнем функции  $M_{Iz}^{u=1}(\theta)$  для  $\beta = 0$  (рисунок 5.2, пунктирная линия), а  $\theta = 0$  не является положением равновесия. Изменение угла  $\beta$  приводит к изменению графика функции  $M_{Iz}^{u=1}(\theta)$ . Серия расчетов показала, что для цилиндрического тела можно найти такое значение  $\beta = \beta^*$ , что  $M_{Iz}^{u=1}(0) = 0$  (рисунок 5.2, сплошная линия). В этом случае  $\theta = 0$  будет являться положением равновесия.

Проведя вычисления, определим углы отклонения оси ионного потока  $\beta_{\max}$  или  $\beta_{\min}$ , обеспечивающие максимальный или минимальный ионный момент в точке  $\theta = 0$  (рисунок 5.3). Использование большего по модулю момента позволяет ожидать более быструю стабилизацию. В случаях  $\beta = \beta_{\min}$  и  $\beta = \beta_{\max}$  функция  $M_{Iz}^{u=1}(\theta)$  не равна нулю в точке  $\theta = 0$  и ее окрестности.

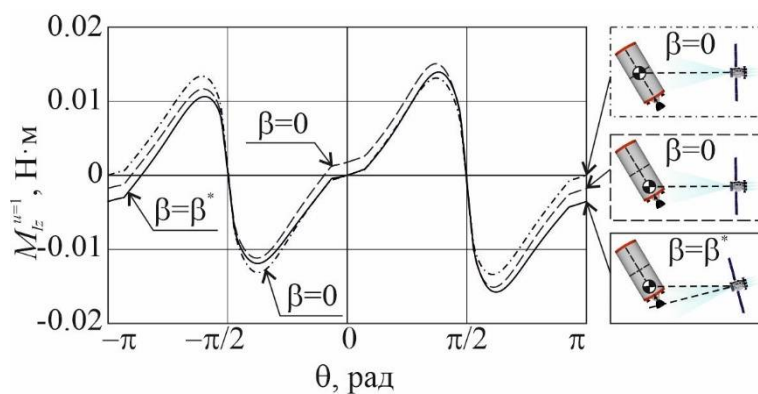


Рисунок 5.2 - Зависимости ионного момента от угла отклонения  $\theta$  для различных положений центра масс и углов отклонения оси ионного потока  $\beta$

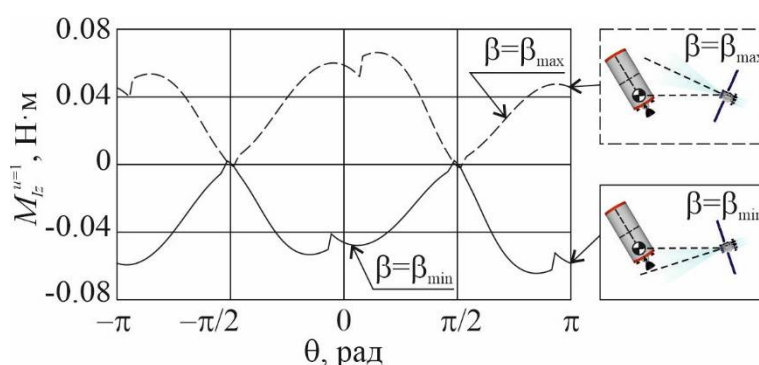


Рисунок 5.3 - Зависимости ионного момента от угла отклонения твердого тела  $\theta$  для углов отклонения оси ионного потока  $\beta = \beta_{\min}$  и  $\beta = \beta_{\max}$

Ниже будет рассмотрено управление тягой ионного двигателя для двух случаев. В первом случае ( $\beta = \beta^*$ ) функция  $M_{I_z}^{u=1}(\theta)$  обращается в нуль в точке  $\theta = 0$ , при переходе через эту точку функция меняет знак. Во втором случае ( $\beta = \beta_{\min}$  или  $\beta = \beta_{\max}$ ) точка  $\theta = 0$  не является корнем функции  $M_{I_z}^{u=1}(\theta)$ .

### 5.2.1 Управление тягой генерирующего поток двигателя

Рассмотрим случай  $M_{I_z}^{u=1}(0) = 0$ ,  $\beta = \beta^*$ . Предлагается использовать следующий закон управления тягой двигателя

$$u = \begin{cases} -\frac{k\Omega^2 I_z \mu}{p^3} \theta \theta', & \text{при } \theta \theta' < 0, \\ 0, & \text{при } \theta \theta' \geq 0; \end{cases} \quad (5.4)$$

где  $k$  - параметр закона управления, выбираемый из условия  $u < 1$ . Для максимизации управляющего воздействия этот параметр должен быть выбран как

$$k = \frac{P^3}{\Omega^2 I_z \mu \max(|\theta\theta'|)}. \quad (5.5)$$

Поскольку амплитуда колебаний угла и угловая скорость уменьшаются по мере приближения к положению равновесия, целесообразно периодически пересчитывать этот коэффициент. Например, в момент, когда  $\theta = 0$  и  $\theta' = 0$ , коэффициент  $k$  можно пересчитать на основе данных за предыдущий период колебаний угла  $\theta$ .

Рассмотрим основную идею закона управления  $u = -k\Omega^2 I_z \mu p^{-3} \theta\theta'$  при отсутствии ограничения  $u > 0$ . Пусть генерирующий ионный момент двигатель работает на полную мощность  $M_{I_z}^{u=1}$ . Период колебаний тела можно разделить на четыре зоны (рисунок 5.4). Штриховой линией показаны колебания без управления, когда  $u = 1$  и  $M_{I_z} = M_{I_z}^{u=1}$ . Сплошная линия демонстрирует управляемое движение. В зонах I и III направление ионного момента совпадает с направлением вращения твердого тела. Этот момент стремится увеличить угловую скорость вращения тела. Для того, чтобы замедлить вращение тела, направление ионного момента необходимо изменить на противоположное. Следовательно, управляющий параметр  $u$  должен быть отрицательным. В этом случае  $\text{sign}(M_{I_z}) = -\text{sign}(M_{I_z}^{u=1})$ . В зонах II и IV направление вращения твердого тела и ионный момент  $M_{I_z}^{u=1}$  не совпадают. В этом случае ионный момент замедляет вращение тела, а коэффициент управления должен быть положительным. В этом случае  $\text{sign}(M_{I_z}) = \text{sign}(M_{I_z}^{u=1})$ . Таким образом, идея состоит в том, что управляющий параметр  $u$  должен выбираться таким образом, чтобы произведение  $uM_{I_z}^{u=1} = M_{I_z}$  имело знак, противоположный угловой скорости  $\theta'$ . Умножение на угол  $\theta$  в законе управления (5.4) необходимо, чтобы учесть изменение знака ионного момента  $M_{I_z}^{u=1}$  при переходе через точку  $\theta = 0$ . На рисунке 5.5 схематично показано положение и направление вращения твердого тела. В реальной ситуации, когда  $u < 0$  управление физически невозможно, и ионный двигатель отключается (в зонах I и III), чтобы не ускорять вращение тела.

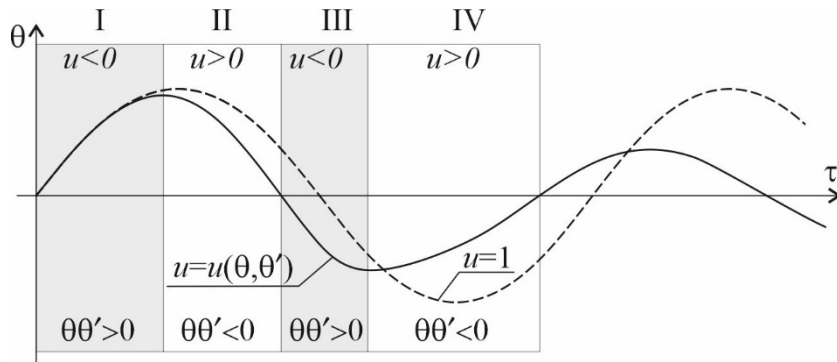


Рисунок 5.4 – Колебания твердого тела

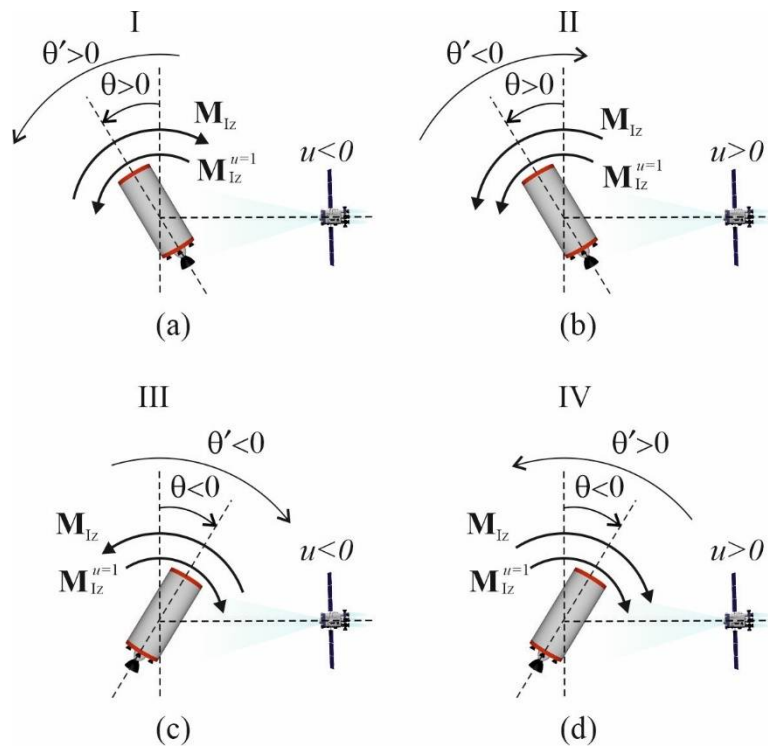


Рисунок 5.5 – Ионный момент в различных зонах

Рассмотрим отдельно два случая, когда осуществляется управление  $u = -k\Omega^2 I_z \mu p^{-3} \theta \theta'$  и когда  $u = 0$ . Сначала отбросим ограничение  $u > 0$  и покажем, что управление  $u = -k\Omega^2 I_z \mu p^{-3} \theta \theta'$  может обеспечить асимптотическую устойчивость положения равновесия  $\theta = 0$ . Для доказательства асимптотической устойчивости используем теорию первого приближения [100]. Предполагается, что  $\theta$  и  $\theta'$  - малые величины порядка  $\varepsilon$ . Разложение тригонометрических функций в уравнении (5.2) в ряд дает

$$\theta'' - 2\delta\theta + \frac{4\delta}{3}\theta^3 - \frac{4\delta}{15}\theta^5 + \dots = -k\theta\theta'(c_0 + c_1\theta + c_2\theta^2 + c_3\theta^3 + \dots). \quad (5.6)$$

Перенесем нелинейные члены в правую часть уравнения

$$\theta'' - 2\delta\theta = -k\theta\theta'(c_0 + c_1\theta + c_2\theta^2 + c_3\theta^3) - \frac{4\delta}{3}\theta^3 + \frac{4\delta}{15}\theta^5 + O(\varepsilon^6). \quad (5.7)$$

где  $c_0 = M_I^{\max} \sum_{j=0}^n a_j^{(Mi)}$ ,  $c_1 = M_I^{\max} \sum_{j=1}^n j b_j^{(Mi)}$ ,  $c_2 = -\frac{M_I^{\max}}{2} \sum_{j=1}^n (j)^2 a_j^{(Mi)}$ ,  $c_3 = -\frac{4M_I^{\max}}{3} \sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{2}\right)^3 b_j^{(Mi)}$  –

коэффициенты разложения ионного момента. В случае  $M_{Iz}^{u=1}(0) = 0$  коэффициент  $c_0 = 0$ .

Уравнение (5.7) можно записать в матричной форме

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (5.8)$$

где  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$  – вектор параметров движения,  $x_1 = \theta'$ ,  $x_2 = \theta$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2\delta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

$\mathbf{g} = [g_1, g_2]^T$  – вектор нелинейных членов,  $g_j = \sum_{k=1}^n g_j^{(k)}$ ,  $g_i^{(k)}$  – функция, содержащая переменные

$k$ -го порядка. Для рассматриваемой системы  $g_1^{(2)} = g_2^{(2)} = g_2^{(3)} = 0$ ,  $g_1^{(3)} = -kc_1 x_1 x_2^2 - \frac{4\delta}{3} x_2^3$ . Матрица

(5.9) имеет два собственных значения  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2\delta}$ . В случае  $\delta = 1$  (когда  $I_x > I_y$ )

рассматриваемое положение равновесия неустойчиво, так как среди корней характеристического уравнения системы первого приближения (5.8) есть корни с положительной вещественной

частью. В этом случае предлагаемое управление не может стабилизировать тело в положении равновесия  $\theta = 0$ . В случае  $\delta = -1$  (когда  $I_x < I_y$ ) матрица  $\mathbf{A}$  имеет два чисто мнимых

собственных значения  $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$ . Это простейший критический случай, описанный в параграфе

37 книги [100]. Вывод об устойчивости положения равновесия нельзя сделать на основании

анализа линейной системы  $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$ . Для анализа устойчивости необходимо учитывать вклад

нелинейных членов. Чтобы использовать методологию, описанную в [100], сделаем замену независимой переменной

$$\tau_1 = \sqrt{2}\tau. \quad (5.10)$$

В этом случае  $k_1 = 2k$ ,  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $g_1^{(3)} = -k_1 c_1 x_1 x_2^2 + \frac{2}{3} x_2^3$ . Штрих в уравнении (5.8) означает

производную по новой переменной  $\tau_1$ . Функция Ляпунова для уравнения, содержащего члены

порядка  $\varepsilon^3$ , имеет вид

$$V = x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{3} x_1^4 + \frac{2}{3} x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2) \gamma_4, \quad (5.11)$$

где  $\gamma_4 = -\frac{k_1 c_1}{4}$ . Полная производная  $V' = \frac{dV}{d\tau_1}$ , вычисленная в силу уравнения (5.8), равна

$$V' = \gamma_4(x_1^2 + x_2^2)^2 + O(\varepsilon^7). \quad (5.12)$$

Учитывая малость  $x_j$ , можно заключить, что функция Ляпунова, заданная уравнением (5.11), является определенно-положительной (рисунок 5.5а) при малых значениях  $x_1$  и  $x_2$ , а ее производная  $V'$ , заданная уравнением (5.12), определенно-положительна при  $\gamma_4 > 0$  и определенно-отрицательна при  $\gamma_4 < 0$  (рис. 5.28б). Положение равновесия асимптотически устойчиво в случае  $\gamma_4 < 0$  согласно второй теореме Ляпунова об устойчивости движения [100], и неустойчиво в случае  $\gamma_4 > 0$  согласно первой теореме Ляпунова о неустойчивости [100]. Таким образом, условие асимптотической устойчивости положения равновесия можно записать в виде

$$k_1 c_1 > 0. \quad (5.13)$$

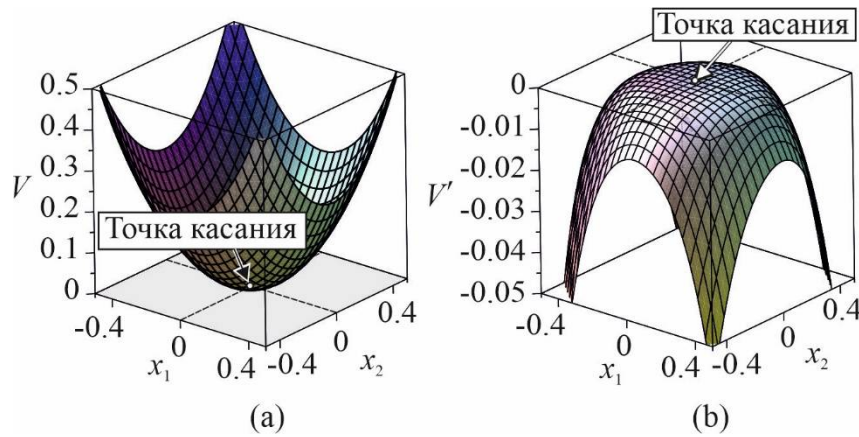


Рисунок 5.6 – Функция Ляпунова (5.11) и ее производная (5.12) для  $\gamma_4 = -0.2$

Рассмотрим теперь случай, когда  $u = 0$  и  $\delta = -1$ . Функция Ляпунова для уравнения (5.2) в этом случае может быть записана в виде

$$V = \theta'^2 + 2(1 - \cos^2 \theta). \quad (5.14)$$

Производная функции (5.14) в силу уравнения (5.2) при  $u = 0$  тождественно равна нулю

$$V' = 0. \quad (5.15)$$

По первой теореме Ляпунова об устойчивости движения положения равновесия устойчиво.

Использование управления (5.4) позволяет перевести фазовую траекторию в окрестность положения равновесия  $\theta = 0$ ,  $\theta' = 0$ . При  $\theta\theta' < 0$  траектория приближается к положению равновесия в силу своей асимптотической устойчивости, а при  $\theta\theta' > 0$  траектория не удаляется от положения равновесия в силу своей устойчивости. Таким образом, управление (5.4) последовательно приближает фазовую траекторию к положению равновесия.



Рассмотрим случай, когда ионный момент не обращается в ноль вблизи точки  $\theta = 0$ . Предлагается использовать следующий закон управления:

$$u(\theta') = -k\Omega^2 I_z \mu p^{-3} \theta'. \quad (5.16)$$

где  $\text{sign}(k) = \text{sign}(M_{I_z}^{u=1}(\theta))$ . В рассматриваемом случае момент  $M_{I_z}^{u=1}$  не меняет свой знак. При использовании управления (5.16) ионный момент всегда направлен против вращения тела и тормозит его. В этом случае уравнение движения (5.2) принимает вид

$$\theta'' - \delta \sin 2\theta + k\theta' M_I^{\max} \left( a_0^{(Mi)} + \sum_{j=1}^k (a_j^{(Mi)} \cos j\theta + b_j^{(Mi)} \sin j\theta) \right) = 0. \quad (5.17)$$

Для доказательства того, что положение равновесия  $\theta = 0$ ,  $\theta' = 0$  асимптотически устойчиво, воспользуемся методом исследования устойчивости по первому приближению. Разложив уравнение (5.17) в ряд в точке  $\theta = 0$  и перейдя к независимой переменной (5.10), получим матричное уравнение (5.8), в котором

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -k_1 c_0 & \delta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} -k_1 x_1 (c_1 x_2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_2^3 + \dots) + \frac{2}{3} x_2^3 - \frac{2}{15} x_2^5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$  имеют вид

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k_1 c_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1 c_0}{2}\right)^2 + \delta}. \quad (5.18)$$

Положение равновесия  $\theta = 0$ ,  $\theta' = 0$  асимптотически устойчиво согласно теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости по первому приближению независимо от нелинейных членов  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ , если действительные части всех собственных значений (5.18) меньше нуля. В случае  $\delta = 1$  (когда  $I_x > I_y$ ) один из корней  $\lambda$  положителен, поэтому положение равновесия неустойчиво. В случае  $\delta = -1$  (когда  $I_x < I_y$ ) оба корня меньше нуля, если выполняется следующее условие

$$k_1 c_0 > 0. \quad (5.19)$$

Это условие выполняется, когда  $\text{sign}(k_1) = \text{sign}(M_{I_z}^{u=1}(0)) = \text{sign}(c_0)$ .

### 5.2.2 Управление направлением оси ионного потока

Как упоминалось в главе 2 и показано на рисунке 5.3, ионный момент зависит от направления оси ионного потока, которое в плоском случае может быть задано с помощью угла  $\beta$ . В данном разделе рассматривается задача стабилизации пространственного движения тела на круговой орбите за счет изменения угла  $\beta$ . Для определения структуры управления поставим

задачу нахождения оптимального по быстродействию управления, переводящего систему в положение равновесия. Используем метод Беллмана для поиска оптимального управления [101]. Уравнение управляемого движения (5.2) после перехода к новой независимой переменной (5.10) можно записать в виде

$$\theta'' - \frac{\delta}{2} \sin 2\theta = w(\theta, \beta), \quad (5.20)$$

где  $w(\theta, \beta) = \frac{M_{Iz}(\theta, \beta) p^3}{\Omega^2 I_z \mu}$  - управление. Функционал качества управления имеет вид

$$J = \int_0^{\tau_k} d\tau. \quad (5.21)$$

Для уравнения (5.20) и функционала качества (5.21) уравнение Беллмана можно записать в виде [16]

$$\min_{w \in [w_{\min}; w_{\max}]} \left[ \frac{\partial \varphi^B(\tau_1, \theta, \theta')}{\partial \tau_1} + \frac{\partial \varphi^B(\tau_1, \theta, \theta')}{\partial \theta} \theta' + \frac{\partial \varphi^B(\tau_1, \theta, \theta')}{\partial \theta'} \left( -\frac{1}{2} \sin 2\theta + w \right) + 1 \right] = 0, \quad (5.22)$$

где  $\varphi^B(\tau_1, \theta, \theta')$  - неизвестная функция.

Поскольку все траектории должны достигать точки  $\theta = 0$ ,  $\theta' = 0$  в момент  $\tau_1 = \tau_k$ , граничное условие определено только в этой точке  $\varphi^B(\tau_k, \theta, \theta') = 0$ . В соответствии с методом Беллмана структуру оптимального управления можно найти из условия минимума выражения в скобках уравнения (5.22)

$$w = \begin{cases} w_{\max}, & \text{при } \frac{\partial \varphi^B(\tau_1, \theta, \theta')}{\partial \theta'} \leq 0; \\ w_{\min}, & \text{при } \frac{\partial \varphi^B(\tau_1, \theta, \theta')}{\partial \theta'} > 0. \end{cases} \quad (5.23)$$

Уравнение (5.23) показывает, что оптимальное управление является релейным. Попытка решить уравнение (5.22) приводит к необходимости вычисления интеграла

$$\varphi^B(\tau_1, \theta, \theta') = - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{dx}{\sqrt{2w(x-\theta) + 4(\cos(x/2) - \cos(\theta/2))}} + F(-2w\theta + \theta'^2 - 4\cos(\theta/2)).$$

что невозможно сделать аналитически. Поэтому разработаем упрощенное управление.

Рассмотрим релейное управление, когда угол  $\beta$  меняется мгновенно. Это допущение вполне оправдано, поскольку период колебаний тела без управления составляет около часа, а платформа двигателя может повернуться на необходимый угол за секунды. Если транспортируемое тело находится в режиме быстрого вращения, то это допущение не выполняется, и тело следует сначала перевести в режим колебаний. Для замедления угловой

скорости вращения необходимо повернуть ось ионного потока для получения максимального ионного момента, который замедлит вращение [9]. После уменьшения угловой скорости и перехода тела в режим колебаний для его стабилизации можно использовать релейное управление (5.23). На рисунке 5.7 показана зависимость момента  $M_{Iz}$  от угла отклонения твердого тела  $\theta$  для различных значений  $\beta$ . Анализ рисунка 5.7 показывает, что максимальное значение ионного момента соответствует углу  $\beta_{\max} = -10^\circ$ , а минимальное значение – углу  $\beta_{\min} = 9^\circ$ . При дальнейшем увеличении модуля угла  $\beta$  величина ионного момента уменьшается из-за выхода части поверхности тела за пределы ионного потока.

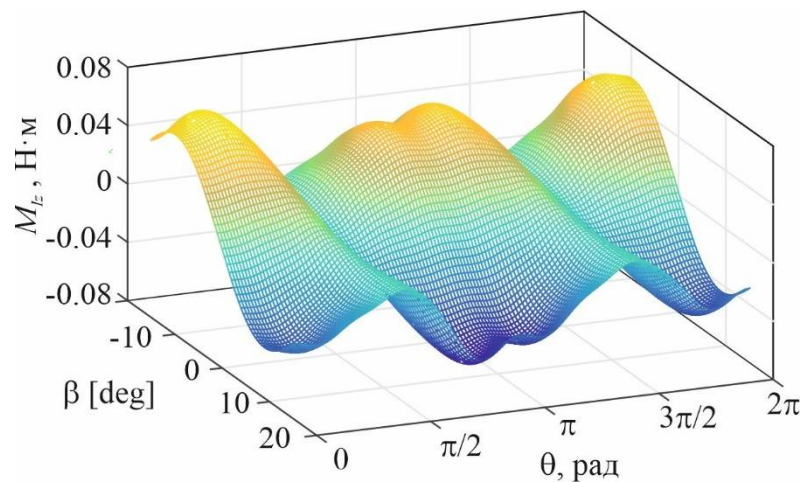


Рисунок 5.7 - Зависимость ионного момента  $M_{Iz}$  от угла  $\theta$  для различных  $\beta$ .

Построим фазовый портрет уравнения (5.2), используя зависимости момента  $M_{Iz}$  от угла  $\theta$  для  $\beta = \beta_{\min}$  и  $\beta = \beta_{\max}$ , приведенные на рисунке 5.3. Сплошными линиями на рисунке 5.8 показаны фазовые траектории, соответствующие  $\beta = \beta_{\min}$ , а штриховыми линиями - фазовые траектории для случая  $\beta = \beta_{\max}$ . Анализ фазового портрета показывает, что переход в положение равновесия  $\theta = 0$ ,  $\theta' = 0$  возможен либо по фазовой траектории I, либо по траектории II (рисунок 5.8). Переход в положение равновесия можно разделить на два этапа. Сначала требуется перевести изображающую точку на траекторию I или II, а затем довести эту точку по траектории I или II в положение равновесия. Фазовые траектории I и II делят фазовое пространство на две области. В белой зоне для перехода на траекторию II нужно использовать управление  $\beta = \beta_{\max}$ . В серой зоне нужно использовать управление  $\beta = \beta_{\min}$  для перехода на траекторию I. Например, если тело находится в положении, соответствующем точке A на рисунке 5.8, то необходимо повернуть ось ионного потока на угол  $\beta = \beta_{\min}$ . Когда изображающая точка достигнет точки B,

нужно повернуть ось потока на угол  $\beta = \beta_{\max}$ . Это позволит попасть в точку  $\theta = 0, \theta' = 0$  по траектории I. Следует отметить, что если в начальный момент времени тело совершает колебания с относительно небольшой амплитудой вокруг положения равновесия  $\pm\pi/2$ , то требуется выключить двигатель и дождаться, пока изображающая точка выйдет за пределы сепаратрисы, охватывающей это положение равновесия. После этого можно использовать предлагаемое управление.

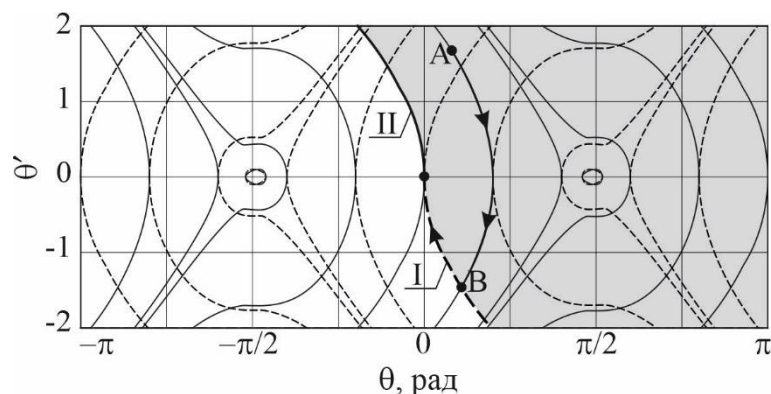


Рисунок 5.8 - Фазовый портрет. Сплошные линии соответствуют  $\beta = \beta_{\min}$ , а штриховые линии соответствуют  $\beta = \beta_{\max}$ .

Описанное выше управление требует получения аналитического уравнения для фазовых траекторий I и II (рисунок 5.8). Решение этой задачи вызывает трудности в связи со сложным характером зависимости ионного момента  $M_z(\theta)$ . Предлагается использовать приближенное уравнение траектории для определения момента переключения управления (при  $\delta = -1$ )

$$\theta' = \pm \frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{M_0 p^3 \theta}{\mu I_z}}, \quad (5.24)$$

где  $M_0 = M_z(0)$  – значение ионного момента, соответствующее положению равновесия  $\theta = 0$ . С учетом уравнения (5.24) можно предложить следующее управление

$$\beta = \begin{cases} \beta_{\min}, & \text{при } \theta > -\frac{\mu I_z \theta'^2 \Omega^2}{M_0 p^3} \text{sign}(\theta'), \\ \beta_{\max}, & \text{при } \theta < -\frac{\mu I_z \theta'^2 \Omega^2}{M_0 p^3} \text{sign}(\theta'). \end{cases} \quad (5.25)$$

При использовании управления (5.25) момент переключения не совпадает с оптимальным; поэтому переход в положение равновесия осуществляется более чем за одно переключение. На рисунке 5.9 схематично показана фазовая траектория, а также положения тела и активного космического аппарата в нескольких точках. В точках D и H управление переключается. Если бы

аналитическое уравнение границы было известно (показано штриховой линией I), то переход от точки A к началу координат можно было бы осуществить за одно переключение (около точки D).

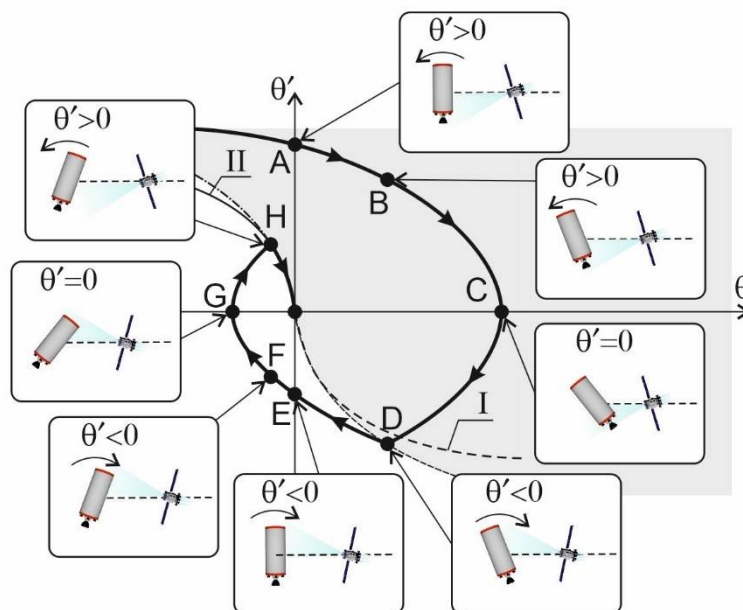


Рисунок 5.9 – Схематическая иллюстрация работы приближенного управления (5.25)

### 5.2.3 Сравнение эффективности методов управления

Для сравнения эффективности описанных выше законов управления проведем численное моделирование управляемого движения цилиндрического тела с помощью уравнения (5.2). В качестве критерия эффективности будем использовать время перевода изображающей точки из начального положения в  $\varepsilon$ -окрестность положения равновесия. Для примера рассмотрим движение цилиндрического тела по круговой орбите высотой 700 км. Тело имеет массу  $m_B = 1400$  кг, длину 6.5 м, радиус 1.2 м. Центр масс смещен на расстояние 0.2 м к нижнему торцу цилиндра. Моменты инерции равны  $I_x = 1300$  кг·м<sup>2</sup>,  $I_y = I_z = 6800$  кг·м<sup>2</sup>. В таблице 5.1 приведены значения коэффициентов Фурье для различных значений угла отклонения оси потока. Значение  $\beta^* = 0.2036^\circ$  соответствует случаю, когда  $M_{I_z}^{u=1}(0) = 0$ , значение  $\beta = -10^\circ$  соответствует максимальному ионному моменту, значение  $\beta = 9^\circ$  соответствует минимальному ионному моменту. Проведем численное моделирование процесса стабилизации тела для случая, когда оно находится в режиме колебаний, и для случая, когда оно вращается.

Таблица 5.1 – Коэффициенты разложения ионного момента в ряд Фурье для различных  $\beta$ 

$j$	$\beta = \beta^* = 0.2036^\circ$		$\beta = \beta_{\max} = -10^\circ$		$\beta = \beta_{\min} = 9^\circ$	
	$a_j^{(Mi)}$ , Н·м	$b_j^{(Mi)}$ , Н·м	$a_j^{(Mi)}$ , Н·м	$b_j^{(Mi)}$ , Н·м	$a_j^{(Mi)}$ , Н·м	$b_j^{(Mi)}$ , Н·м
0	$-1.10158 \cdot 10^{-3}$	0	0.0368453	0	-0.0370000	0
1	$2.22337 \cdot 10^{-3}$	$-1.37822 \cdot 10^{-4}$	$6.24380 \cdot 10^{-3}$	$5.95066 \cdot 10^{-4}$	$6.01756 \cdot 10^{-3}$	$-1.11596 \cdot 10^{-3}$
2	$-8.89402 \cdot 10^{-4}$	$9.95015 \cdot 10^{-3}$	0.0242794	$7.52650 \cdot 10^{-3}$	-0.0237260	$7.71685 \cdot 10^{-3}$
3	$-7.20263 \cdot 10^{-4}$	$1.85450 \cdot 10^{-4}$	$1.54778 \cdot 10^{-4}$	$5.23968 \cdot 10^{-4}$	$-4.99732 \cdot 10^{-4}$	$-1.57499 \cdot 10^{-4}$
4	$2.83589 \cdot 10^{-4}$	$-5.53070 \cdot 10^{-3}$	$-8.98374 \cdot 10^{-3}$	$-1.07517 \cdot 10^{-3}$	$8.94706 \cdot 10^{-3}$	$-1.79172 \cdot 10^{-3}$
5	$4.03508 \cdot 10^{-4}$	$-1.52168 \cdot 10^{-4}$	$-3.60726 \cdot 10^{-4}$	$-5.47992 \cdot 10^{-4}$	$2.14785 \cdot 10^{-4}$	$5.89558 \cdot 10^{-4}$
6	$-8.73372 \cdot 10^{-5}$	$1.97856 \cdot 10^{-3}$	$2.95004 \cdot 10^{-4}$	$-1.71206 \cdot 10^{-3}$	$-8.13403 \cdot 10^{-4}$	$-1.32353 \cdot 10^{-3}$

Рассмотрим сначала случай, когда твердое тело находится в режиме колебаний. Пусть в начальный момент времени заданы следующие начальные условия:  $\theta_0 = 0.5 \text{ рад}$ ,  $\theta'_0 = 0$ . Численное интегрирование дифференциального уравнения (5.2) проводилось с использованием различных законов управления тягой ионного двигателя. В первом случае (тонкая сплошная линия на рисунке 5.10) ось ионного потока отклонялась на угол  $\beta = \beta^* = 0.2036^\circ$  и использовался закон управления (5.4). После каждого полупериода колебаний коэффициент управления пересчитывался с помощью выражения (5.5). Зависимость управления  $u(\theta, \theta')$  от переменной  $\tau$  показана на рисунке 5.11. Управление не достигает максимального значения 1, так как оно пропорционально амплитуде угловых колебаний, уменьшающейся в процессе управляемого движения. Во втором случае (штриховая линия на рисунке 5.10) ось потока отклоняется на угол  $\beta_{\max} = -10^\circ$ , обеспечивающий максимальный модуль ионного момента, затем использовался закон управления (5.4). Из рисунка 5.12 видно, что для реализации этого закона (штриховая линия) требуется значительно меньшая тяга двигателя, чем в первом случае. В третьем случае (жирная сплошная линия на рисунке 5.10) ось потока отклоняется на угол  $\beta_{\max} = -10^\circ$  и закон управления задается уравнением (5.16). Управление показано на рисунке 5.12 сплошной линией (кривая 3). Результаты показывают, что третий закон управления наиболее эффективен с точки зрения минимизации времени, необходимого для стабилизации тела в положении равновесия, а первый закон наименее эффективен. В первом случае угол переходит в  $\varepsilon$  - окрестность положения равновесия за 163658 секунд (45 часов, 27 минут и 38 секунд). Во втором случае этот

процесс занимает 101572 секунды (28 часов, 12 минут и 52 секунды). В третьем на это уходит всего 51508 секунд (14 часов, 18 минут и 28 секунд). При расчетах было выбрано  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

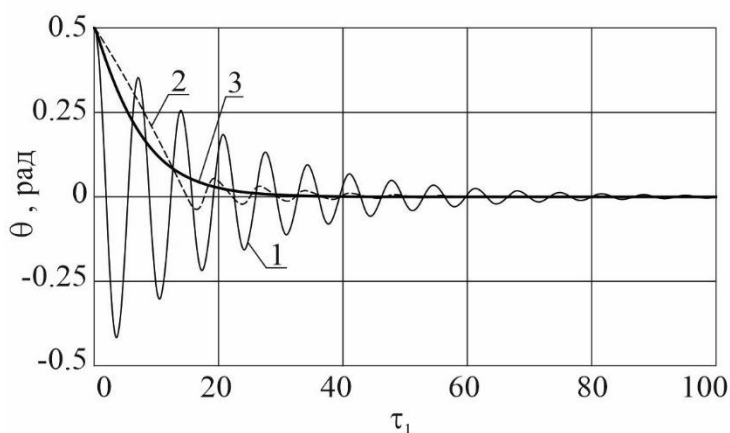


Рисунок 5.10 – Изменение угла  $\theta$  при использовании законов управления тягой транспортировочного двигателя

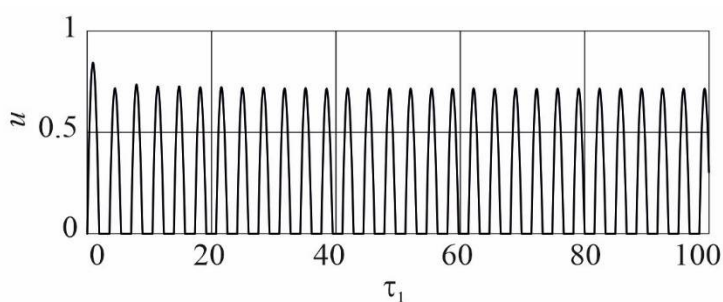


Рисунок 5.11 – Закон управления для первого случая, когда  $\beta = \beta^*$  и управление  $u(\theta, \theta')$  задается уравнением (5.4)

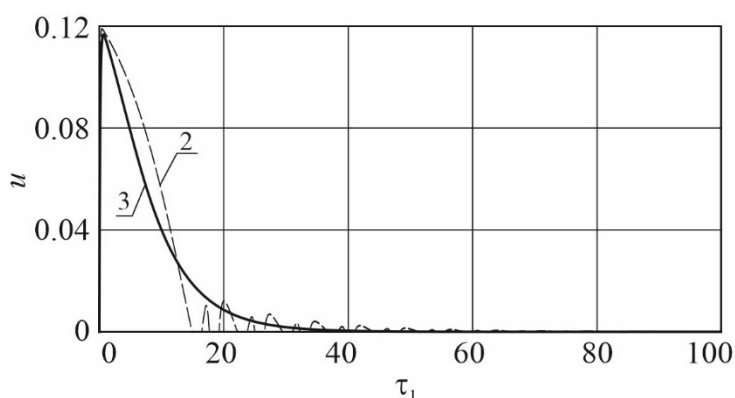


Рисунок 5.12 – Закон управления для первого случая, когда  $\beta = \beta_{\max}$  и управление  $u(\theta, \theta')$  задается уравнением (5.4) (кривая 2) или уравнением (5.16) (кривая 3)

Рассмотрим стабилизацию твердого тела с помощью изменения направления оси ионного потока. Результат интегрирования уравнения (5.20) с управлением (5.25) показан на рисунке 5.13.

Закон изменения угла отклонения оси ионного потока приведен на рисунке 5.14. Расчеты показывают, что этот закон позволяет стабилизировать твердое тело, переводя изображающую точку в  $\varepsilon$ -окрестность положения равновесия  $\theta = 0$ ,  $\theta' = 0$ , за 524 секунды, что составляет 8 минут 44 секунды. Таким образом, управление ориентацией оси потока позволяет осуществить стабилизацию колебаний тела почти в сто раз быстрее, чем в случае управления тягой двигателя.

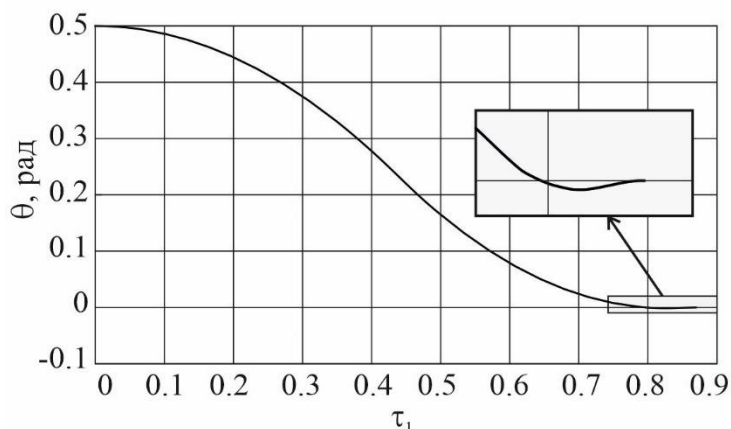


Рисунок 5.13 - Изменение угла отклонения твердого тела  $\theta$  при управлении направлением оси ионного потока

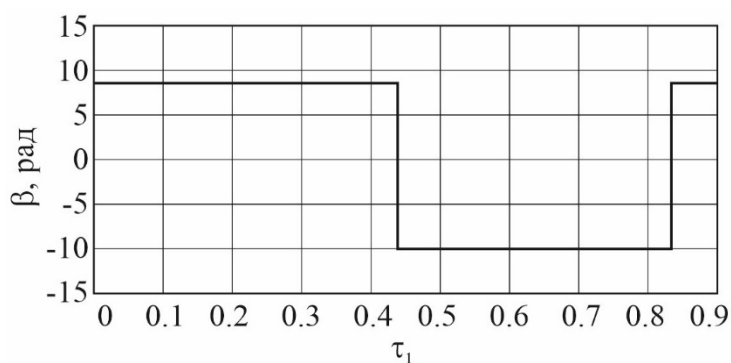


Рисунок 5.14 – Управление углом отклонения оси ионного потока (5.25).

Рассмотрим случай, когда тело вращается относительно своего центра масс. Пусть в начальный момент времени  $\theta_0 = 0$ ,  $\theta'_0 = 105.5$  (это значение соответствует угловой скорости  $\dot{\theta}_0 = 10$  град/с). Исследования [102] показывают, что космический мусор может двигаться с такими угловыми скоростями. Рассмотрим два метода управления ориентацией твердого тела: изменением тяги ионного двигателя и управлением направлением оси ионного потока. Моделирование показывает, что использование закона управления (5.4) не позволяет остановить вращение тела, в то время как управление (5.16) с этой задачей справляется хорошо. Результаты интегрирования уравнения (5.2) при использовании закона управления (5.16) показаны на рисунках 5.15 и 5.16 штриховой линией. Постоянный параметр управления задавался как



$k = -100$ . Поскольку управление  $u(\theta')$  физически ограничено сверху, предполагалось, что если  $u > 1$ , то  $u = 1$ . Расчеты показывают, что фазовая траектория переходит в  $\varepsilon$ -окрестность положения равновесия  $\theta_k = 891\pi$  за 76766 секунд, что составляет 21 час 19 минут 26 секунд. Зависимость закона управления  $u(\theta')$  от независимой переменной  $\tau_1$  показана на рисунке 5.17.

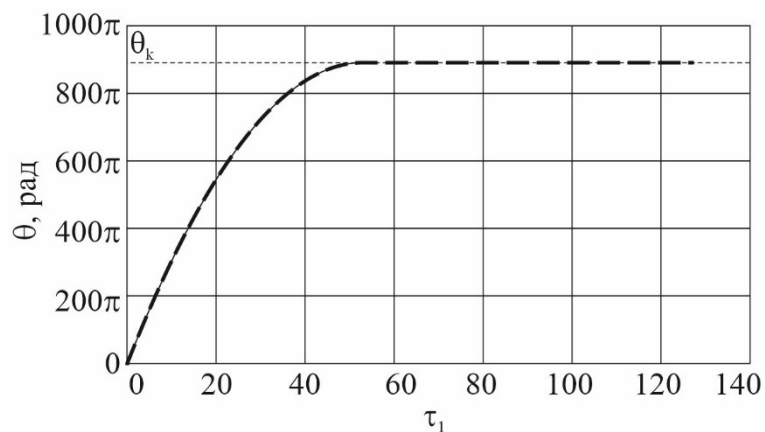


Рисунок 5.15 - Остановка вращения тела с помощью управления (5.16) и (5.25)

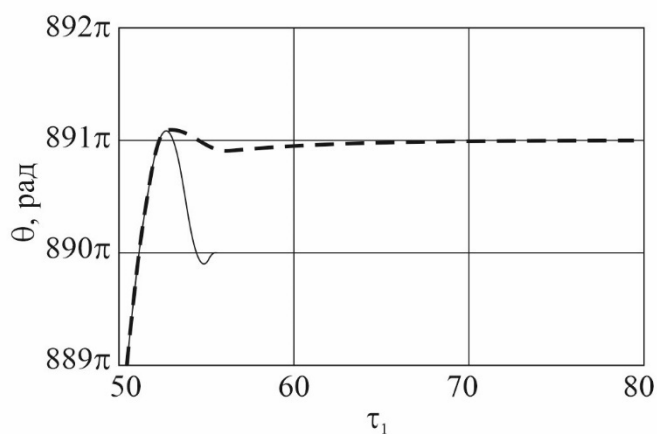


Рисунок 5.16 – Заключительный этап стабилизации тела при использовании управления (5.16) и (5.25)

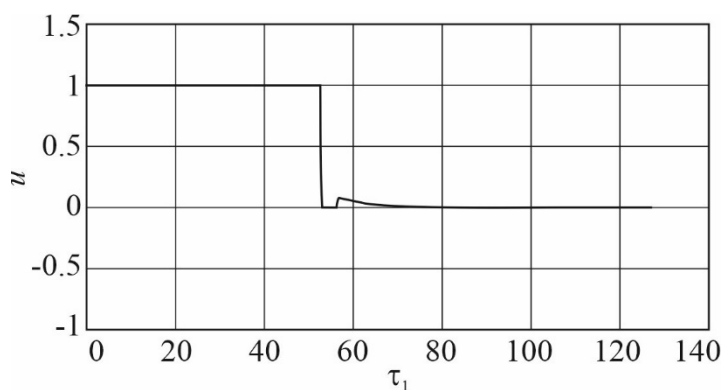


Рисунок 5.17 – Зависимость управления  $u(\theta')$  от независимой переменной  $\tau_1$

Управление направлением оси ионного потока также может быть использовано для остановки вращения твердого тела. Результаты численного интегрирования уравнения (5.20) с использованием закона управления (5.25) показаны на рисунках 5.15 и 5.16 сплошными линиями. В отличие от случая управления тягой двигателя, стабилизация происходит в положении равновесия  $\theta_k = 890\pi$  (рисунок 5.16) и занимает меньше времени: 33663 секунды, что составляет 9 часов 21 минуты и 3 секунды.

В обоих рассмотренных случаях процесс остановки вращения можно разделить на два этапа. Первый этап – снижение угловой скорости вращения тела. Второй этап – уменьшение амплитуды колебаний. Первый этап одинаков для обоих случаев. Ось ионного потока отклоняется на угол  $\beta = \beta_{\min}$ , и ионный двигатель включается на полную мощность. Этот этап заканчивается моментом  $\tau_1 = 52.75$  (рисунок 5.16), после чего управление может осуществляться разными способами. Расчеты показали, что второй метод управления более предпочтителен с точки зрения минимизации времени стабилизации тела.

Анализ законов управления, заданных уравнением (5.23) или уравнением (5.25), показывает, что реализация комбинированного управления при одновременном управлении углом отклонения оси ионного потока и тягой ионного двигателя нецелесообразно, так как эти виды управления принципиально противоречат друг другу. Управление направлением оси ионного потока требует включения тяги на полную мощность, а управление тягой подразумевает изменение тяги и даже выключение двигателя. Сравнение рисунков 5.10 и 5.13 показывает, что управление направлением ионного потока позволяет решить задачу стабилизации тела за существенно меньшее время по сравнению с управлением тягой ионного двигателя. Преимуществом управления направлением является возможность перевода твердого тела в положение равновесия за конечное время, в то время как управление тягой двигателя обеспечивает лишь асимптотическое приближение к этому положению.

#### **5.2.4 Управление направлением ионного потока для перевода тела в заданный угловой режим движения**

В разделах 5.2.1-5.2.3 были предложены законы управления, обеспечивающие перевод тела в положение равновесия. Однако возможно, что форма и компоновка тела таковы, что положение равновесия не является наилучшим угловым положением с точки зрения величины генерируемой ионной силы. В пространстве  $(\theta, \theta')$  может существовать фазовая траектория, для которой усредненная ионная сила оказывается больше, чем ионная сила, генерируемая в

положении равновесия. При этом целью разрабатываемого закона управления должен быть перевод изображающей точки на эту фазовую траекторию. Разработаем закон управления направлением оси ионного потока, который будет основан на оценке энергии невозмущенного движения тела относительно его центра масс. Угловое движение тела описывается уравнением (5.2), которое можно переписать в виде

$$\theta'' = \delta \sin 2\theta + \xi M_{I_z}(\theta, s), \quad (5.26)$$

где  $\xi = p^3(\Omega^2 I_z \mu)^{-1}$ ,  $s$  – параметр, определяющий состояние активного космического аппарата. Значение  $s = 0$  соответствует режиму транспортировки,  $s = 1$  соответствует случаю  $M_{I_z} > 0$ ,  $s = 2$  соответствует случаю  $M_{I_z} < 0$ . Для уравнения (5.26) может быть записан интеграл энергии в виде

$$E(\theta, \theta', s) = \frac{\theta'^2}{2} + \frac{\delta}{2} \cos 2\theta - \xi \int M_{I_z}(\theta, s) d\theta. \quad (5.27)$$

Рассматриваемая невозмущенная система является консервативной при выбранном значении  $s$ , и энергия  $E$  сохраняет свое значение вдоль каждой фазовой траектории. Если фазовый портрет невозмущенной системы содержит сепаратрису, разделяющую фазовую плоскость на несколько областей колебаний, то одному значению энергии может соответствовать несколько фазовых траекторий, расположенных в разных областях колебаний. В этом случае для того чтобы идентифицировать фазовую траекторию помимо значения энергии  $E_*$  нужно задать границы области  $\theta_1, \theta_2$  колебаний целевой траектории. Из консервативности невозмущенной системы следует, что  $E(\theta_1, 0, 0) = E(\theta_2, 0, 0)$ . При отсутствии положений равновесия энергия однозначно определяет траекторию. Условие отсутствия положения равновесия для уравнения (5.26) можно записать в виде

$$|M_{I_z}(\theta, s)| > \frac{3\mu |I_x - I_y|}{2p^3} = M_{I_{zmin}} > 0. \quad (5.28)$$

Для миссий уборки космического мусора, подразумевающих спуск на Землю, в качестве параметра орбиты  $p$  в условии (5.28) целесообразно принять радиус границы атмосферы. В этом случае условие будет выполняться и для более высоких орбит.

Рассмотрим вопрос о переводе системы в режим углового движения, характеризующийся энергией  $E_* = E(\theta_*, \theta'_*, 0)$ , вычисляемой по уравнению (5.27), где  $\theta'_*(\theta_*)$  – целевая фазовая траектория. Фазовая траектория пересекает ось  $\theta' = 0$  в точках  $\theta_{*1}$  и  $\theta_{*2}$ . Если целевой траекторией является положением равновесия, то  $\theta_{*1} = \theta_{*2} = \theta_*$ . Предполагается, что для состояний  $s = 1$  и  $s = 2$  условие (5.28) выполняется. Фазовые портреты и зависимости энергии

от угла  $\theta$  для этих состояний схематично показаны на рисунке 5.18. Для перевода изображающей точки системы из произвольного положения на целевую траекторию предлагается переключать состояние системы в соответствии с таблицей 5.2. Для этого на каждом шаге интегрирования следует отслеживать энергии, соответствующие состояниям, отличным от текущего, и сравнивать их с условиями в таблице 5.2.

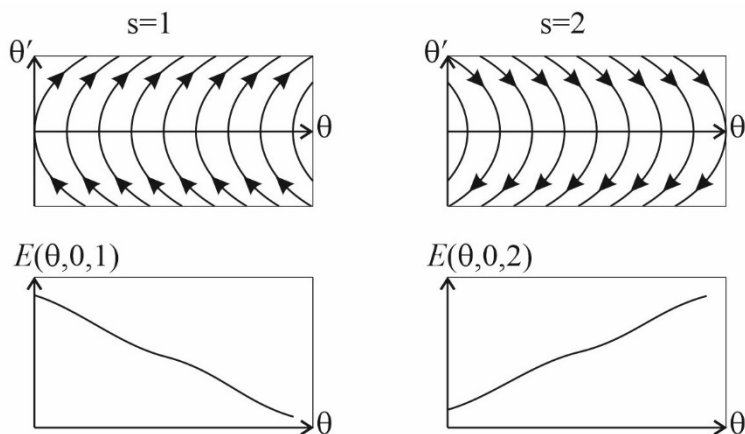


Рисунок 5.18 - Схематическое изображение фазового портрета и зависимости энергии от угла  $\theta$  для случаев  $s = 1$  и  $s = 2$

Таблица 5.2 – Схема управления состояниями

Безразмерная угловая скорость, $\theta'$	Текущая энергия, $E$	Состояние, $s$
$\theta' \leq 0$	$E(\theta, \dot{\theta}, 1) < E(\theta_{*2}, 0, 1)$	2
$\theta' \leq 0$	$E(\theta, \dot{\theta}, 1) \geq E(\theta_{*2}, 0, 1)$	1
$\theta' > 0$	$E(\theta, \dot{\theta}, 2) < E(\theta_{*1}, 0, 2)$	1
$\theta' > 0$	$E(\theta, \dot{\theta}, 2) \geq E(\theta_{*1}, 0, 2)$	2
$\theta' \in (-\infty, \infty)$	$E(\theta, \dot{\theta}, 0) = E(\theta_{*1}, 0, 0)$	0
Другие случаи		0

На рисунке 5.19 схематически показан перевод изображающей точки в фазовом пространстве  $(\theta, \theta')$  из некоторого начального положения  $A$  на целевую траекторию с использованием описанного выше закона управления. Светло-серым цветом показана область, где, согласно таблице 5.2, космический аппарат должен быть переведен в состояние 1. В темно-серой области космический аппарат должен быть переведен в состояние 2. Жирные черные линии на границе областей показывают фазовые траектории, имеющие энергию  $E(\theta_{*2}, 0, 1)$  и  $E(\theta_{*1}, 0, 2)$  в состояниях 1 и 2 соответственно. Точка  $A$  в начальный момент времени имеет

угловую скорость  $\dot{\theta} < 0$  и энергию  $E(\theta, \dot{\theta}, 1) \geq E(\theta_{*2}, 0, 1)$ . В этом случае выполняются условия второй строки таблицы 5.2. Это значит, что космический аппарат нужно перевести в состояние  $s=1$ , то есть, отклонить ось ионного потока на угол  $\beta = \beta_{\max}$ , чтобы обеспечить  $M_{Lz} > 0$ . После прохождения траекторией оси абсцисс (точка В) изображающая точка попадает в область  $\theta' > 0$ , где  $E(\theta, \dot{\theta}, 2) < E(\theta_{*1}, 0, 2)$  и выполняются условия третьей строки таблицы 5.2. В точке С энергия достигает значения  $E(\theta, \dot{\theta}, 2) = E(\theta_{*1}, 0, 2)$ , что означает выполнение условий четвертой строки таблицы. В этот момент система переходит в состояние  $s=2$ . Ось ионного потока должна быть отклонена на угол  $\beta = \beta_{\min}$ , чтобы обеспечить  $M_{Lz} < 0$ . Дальнейшее движение происходит до точки  $\theta_{*1}$  целевой траектории, где космический аппарата переводится в состояние  $s=0$ . Ось ионного потока отклоняется на угол  $\beta = 0$ , и дальнейшая транспортировка происходит в неуправляемом режиме. Следует отметить, что если изображающая точка в начальный момент времени находится внутри области, ограниченной целевой фазовой траекторией, то переход на эту траекторию может осуществляться перевода активного космического аппарата как в состояние 1, так и в состояние 2.

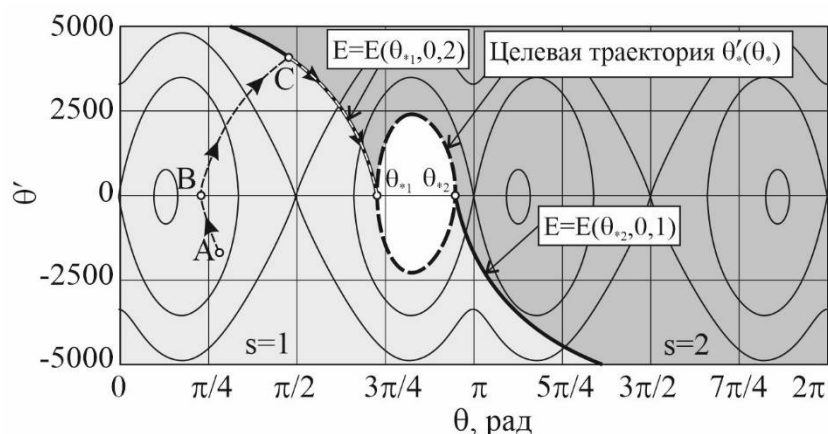


Рисунок 5.19 – Схема перевода изображающей точки на целевую фазовую траекторию

### 5.3 Управление движением твердого тела относительно центра масс на геостационарной орбите в пространственном случае

Рассмотрим трехмерное движение механической системы, состоящей из симметричного тела и активного космического аппарата на геостационарной орбите. Предполагается, что активный космический аппарат сохраняет постоянное положение относительно тела, а ось ионного потока направлена в центр масс тела. Разработаем закон управления тягой транспортировочного двигателя активного космического аппарата, который обеспечивает

перевод угла  $\theta$  в положение равновесия  $\theta_*$ , вычисляемое как корень нелинейного уравнения (3.104). Создаваемый ионным потоком момент можно записать как

$$M_I = u M_{I\max} \sum_j^k b_j^{(Mi)} \sin j\theta_*, \quad (5.29)$$

где

$$u = \begin{cases} 1 + k(\theta - \theta_*)\dot{\theta} \text{H}[(\theta_* - \theta)\dot{\theta}], & \text{при } k(\theta - \theta_*)\dot{\theta} > -1; \\ 1, & \text{при } k(\theta - \theta_*)\dot{\theta} \leq -1; \end{cases} \quad (5.30)$$

где  $\text{H}$  - функция Хевисайда,  $k$  - постоянный параметр управления, выбираемый из условия  $u < 1$ . Предлагается сначала принять  $k = 1$ , а затем выбирать этот параметр на основе данных за предыдущий период колебаний  $T$

$$k = \frac{1}{\max_{[t-T, t]}(|(\theta - \theta_*)\dot{\theta}|)}. \quad (5.31)$$

Для исследования устойчивости управляемого движения сделаем в уравнении (3.90) замену переменной  $x = \theta - \theta_*$  с учетом (5.29)

$$\ddot{x} = -\frac{(G - R \cos(x + \theta_*))(R - G \cos(x + \theta_*))}{\sin^3(x + \theta_*)} + \frac{u M_I^{\max}}{I} \sum_j^k b_j^{(Mi)} \sin j(x + \theta_*). \quad (5.32)$$

Рассмотрим отдельно два случая: когда используется управление  $u = 1 + k(\theta - \theta_*)\dot{\theta} = (1 + kx\dot{x})$  и когда  $u = 1$ .

Исследуем устойчивость движения в первом случае  $u = (1 + kx\dot{x})$  с помощью теорем Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Правую часть уравнения можно разложить в ряд Маклорена.

$$\ddot{x} = -a_{01}x + a_{11}x\dot{x} + a_{02}x^2 + a_{12}x^2\dot{x} + a_{03}x^3, \quad (5.33)$$

$$\text{где } a_{01} = c_1 - \frac{3b_2 \cos \theta_*}{\sin \theta_*} - \frac{M_I^{\max}}{I} \sum_j^k b_j^{(Mi)} j \cos j\theta_*, \quad a_{11} = kc_2, \quad a_{12} = \frac{kM_I^{\max}}{I} \sum_j^k b_j^{(Mi)} j \cos j\theta_*,$$

$$a_{02} = -\frac{3c_2(1 + 3\cos^2 \theta_*)}{2\sin^2 \theta_*} + \frac{5c_1 \cos \theta_*}{2\sin \theta_*} - \frac{RG}{\sin \theta_*} - \frac{M_I^{\max}}{2I} \sum_j^k b_j^{(Mi)} j^2 \sin j\theta_*,$$

$$a_{03} = -\frac{c_1(8 + 19\cos^2 \theta_*)}{6\sin^2 \theta_*} - \frac{c_2 \cos \theta_*(9\sin^2 \theta_* - 20)}{2\sin^3 \theta_*} + \frac{2RG \cos \theta_*}{\sin^2 \theta_*} - \frac{M_I^{\max}}{6I} \sum_j^k b_j^{(Mi)} j^3 \cos j\theta_*,$$

$$c_1 = \frac{G^2 + R^2 - 2GR \cos \theta_*}{\sin^2 \theta_*} = \frac{M_I^{\max}}{I} \sum_j^k b_j^{(Mi)} \sin j\theta_*, \quad c_2 = \frac{(G - R \cos \theta_*)(R - G \cos \theta_*)}{\sin^3 \theta_*}.$$

Уравнение (5.33) можно записать в матричной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (5.34)$$

где  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ ,  $x_1 = \dot{x}$ ,  $x_2 = x$ ,  $\mathbf{g} = [g_1^{(2)} + g_1^{(3)}, g_2^{(2)} + g_2^{(3)}]^T$ ,  $g_1^{(2)} = a_{11}x\dot{x} + a_{02}x^2$ ,  $g_1^{(3)} = a_{12}x^2\dot{x} + a_{03}x^3$ ,

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{01} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Собственные значения  $\lambda = \pm\sqrt{-a_{01}}$  матрицы  $\mathbf{A}$  определяют устойчивость

положения равновесия  $\theta_*$ . Если  $a_{01} < 0$ , то одно из собственных значений является положительным действительным числом и движение неустойчиво. В этом случае предлагаемое управление (5.30) не позволяет перевести систему в требуемое положение равновесия. При  $a_{01} > 0$  действительная часть собственных значений  $\lambda$  равна нулю. Это критический случай. Для того чтобы сделать вывод об устойчивости движения, необходимо исследовать нелинейные члены уравнения (5.34). Методика получения функции Ляпунова для этого критического случая подробно описана в параграфе 37 книги [100]. Для рассматриваемого нелинейного уравнения (5.34) функцию Ляпунова можно записать в виде

$$V = \frac{x_1^2}{a_{01}} + x_2^2 - \frac{2a_{02}x_2^3}{3a_{01}} + \frac{2a_{11}x_1^3}{3\sqrt{a_{01}}} + \frac{(a_{11}^2 + a_{03})x_1^4}{2a_{01}} + \frac{(a_{01}a_{12} + a_{02}a_{11})(x_1^3x_2 - x_1x_2^3)}{\sqrt{a_{01}^3}} + \frac{a_{03}x_1^2x_2^2}{a_{01}}. \quad (5.35)$$

При малых значениях  $x_j$  знак функции  $V$  определяется первыми двумя членами (5.35).

Предполагается, что  $x_j$  имеет порядок малости  $\varepsilon$ . В малой окрестности нуля функция Ляпунова является определенно-положительной. Полная производная  $\dot{V}$ , вычисленная в силу уравнений (5.34)

$$\dot{V} = \frac{(a_{01}a_{12} + a_{02}a_{11})}{4a_{01}^3}(x_1^2 + a_{01}x_2^2)^2 + O(\varepsilon^5), \quad (5.36)$$

для малых значений  $x_j$  является определенно-положительной при  $(a_{01}a_{12} + a_{02}a_{11}) > 0$ , и определенно-отрицательной при  $a_{01}a_{12} + a_{02}a_{11} < 0$ . Таким образом, условие асимптотической устойчивости положения равновесия можно записать в виде

$$a_{01}a_{12} + a_{02}a_{11} < 0. \quad (5.37)$$

Во втором случае  $u = 1$  для уравнения (5.32) можно записать интеграл энергии

$$E = \frac{x_1^2}{2} + W(x_2 + \theta_*) + E_0, \quad (5.38)$$

где  $x_1 = \dot{x}$ ,  $x_2 = x$ ,  $E_0$  - постоянная интегрирования,  $W$  - приведенная потенциальная энергия

$$W(\theta) = \frac{G^2 + R^2 - 2GR \cos \theta}{2 \sin^2 \theta} + \frac{M_I^{\max}}{I} \sum_j^k \frac{b_j^{(Mi)}}{j} \cos j\theta. \quad (5.39)$$

Уравнение (5.32) описывает движение консервативной механической системы. Для исследования устойчивости таких систем хорошо зарекомендовал себя прямой метод Ляпунова. В качестве функции Ляпунова может быть взят интеграл энергии (5.38)

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{G^2 + R^2 - 2GR \cos(x_2 + \theta_*)}{2 \sin^2(x_2 + \theta_*)} + \frac{M_I^{\max}}{I} \sum_j^k \frac{b_j^{(Mi)}}{j} \cos j(x_2 + \theta_*) - \frac{G^2 + R^2 - 2GR \cos \theta_*}{2 \sin^2 \theta_*} - \frac{M_I^{\max}}{I} \sum_j^k \frac{b_j^{(Mi)}}{j} \cos(j\theta_*), \quad (5.40)$$

где постоянная интегрирования  $E_0$  выбрана так, что  $V(0, 0) = 0$ . Поскольку функция (5.40) является интегралом уравнения движения, ее производная равна нулю в силу этого уравнения

$$\dot{V}(x_1, x_2) \equiv 0.$$

Согласно теореме Ляпунова, равновесие устойчиво, если функция  $V(x_1, x_2)$  является определенно-положительной функцией. Это условие можно записать как

$$\frac{G^2 + R^2 - 2GR \cos(x_2 + \theta_*)}{2 \sin^2(x_2 + \theta_*)} + \frac{M_I^{\max}}{I} \sum_j^k \frac{b_j^{(Mi)}}{j} (\cos j(x_2 + \theta_*) - \cos j\theta_*) - \frac{G^2 + R^2 - 2GR \cos \theta_*}{2 \sin^2 \theta_*} > 0 \quad (5.41)$$

для всех  $x_2 \neq 0$ . Для движения в малой окрестности положения равновесия разложим левую часть неравенства (5.41) в ряд Маклорена

$$\left( \frac{3(G^2 + R^2 - 2GR \cos \theta_*)}{2 \sin^4 \theta_*} - \frac{2G^2 + 2R^2 - GR \cos \theta_*}{2 \sin^2 \theta_*} - \frac{M_I^{\max}}{2I} \sum_j^k b_j^{(Mi)} j \cos j\theta_* \right) x_2^2 + O(x_2^3) > 0. \quad (5.42)$$

При малых  $x_2$  знак ряда определяется знаком коэффициента при  $x_2^2$ . Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что точка  $x_2 = 0$  является точкой локального минимума левой части (5.42), вычислив в этой точке первую и вторую производные ряда. С учетом вышеизложенного уравнение (5.42) можно переписать в виде

$$\frac{3(G^2 + R^2 - 2GR \cos \theta_*)}{2 \sin^4 \theta_*} - \frac{2G^2 + 2R^2 - GR \cos \theta_*}{2 \sin^2 \theta_*} - \frac{M_I^{\max}}{2I} \sum_j^k b_j^{(Mi)} j \cos j\theta_* > 0. \quad (5.43)$$

Следует отметить, что неравенство (5.43) совпадает с достаточным условием минимума приведенной потенциальной энергии уравнения (5.32). Это условие с точностью до множителя совпадает с условием  $a_{01} > 0$ , обеспечивающим пару мнимых собственных значений  $\lambda$  матрицы линеаризованного уравнения (5.34).

Таким образом, в случае бесконтактной транспортировки ионным потоком при использовании управления (5.30) и выполнении условий (5.37) и (5.43) наблюдается следующее поведение. Если  $k(\theta - \theta_*)\dot{\theta} > -1$ , то положение равновесия  $\theta = \theta_*$  является асимптотически устойчивым и фазовые траектории приближаются к нему. Если  $k(\theta - \theta_*)\dot{\theta} \leq -1$ , то это положение равновесия устойчиво, и фазовые траектории не удаляются от него. Поскольку эти фазы чередуются, предлагаемое управление последовательно приближает фазовые траектории к положению равновесия  $\theta = \theta_*$ . Полученные функции Ляпунова доказывают устойчивость



системы в каждом из рассмотренных случаев. Однако поскольку при движении происходит переключение между этими случаями, полученные условия (5.37) и (5.43) являются необходимыми, но не достаточными условиями устойчивости управляемого движения.

В качестве примера рассмотрим управляемое движение твердого тела, близкого по своим массово-геометрическим параметрам к спутнику Meteosat-8 [103] на геостационарной орбите. Рассматривается управляемое движение тела с законом управления (5.30). Предполагается, что орбита тела задается параметрами:  $\nu = 0$ ,  $\vartheta = 0$ ,  $\dot{\nu} = 0$ ,  $\dot{\vartheta} = 0$ ,  $r = 42164000$  м,  $\dot{r} = 0$ . Моделирование движения требует предварительного расчета сил и моментов ионного потока в зависимости от ориентации тела в потоке. Геометрические параметры рассматриваемого тела и пример расчетной сетки показаны на рисунке 5.20. Масса тела  $m_B = 1100$  кг, главные моменты инерции  $I_x = I_z = 2100$  кг·м<sup>2</sup>,  $I_y = 1400$  кг·м<sup>2</sup>. Параметры ионного потока приведены в таблице 2.1. Они были выбраны на основе анализа существующих ионных двигателей. Рассчитанные коэффициенты разложения в ряд Фурье  $b_j^{(Mi)}$  приведены в таблице 5.3, а  $M_I^{\max} = 3.706 \cdot 10^{-3}$  Н·м.

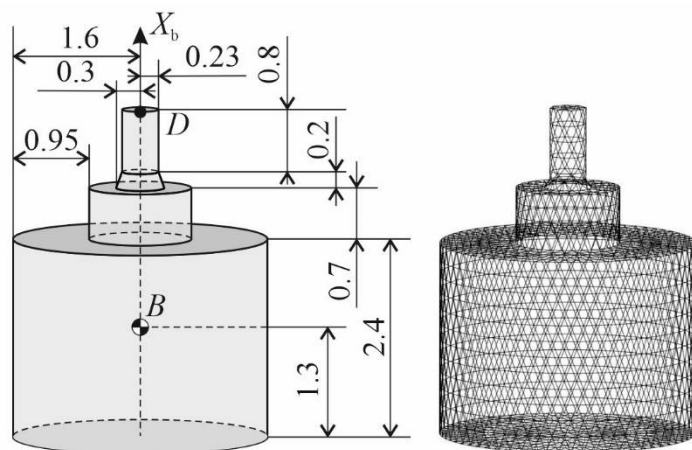


Рисунок 5.20 – Рассматриваемое твердое тело и расчетная сетка

Таблица 5.3 – Коэффициенты разложения ионного момента в ряд Фурье

$j$	$b_j^{(Mi)}$	$j$	$b_j^{(Mi)}$	$j$	$b_j^{(Mi)}$	$j$	$b_j^{(Mi)}$
1	1	5	-0.0378	9	-0.0109	13	-0.0040
2	0.4482	6	0.0394	10	0.0076	14	-0.0066
3	-0.0002	7	-0.0304	11	-0.0083	15	-0.0013
4	0.8870	8	0.2792	12	0.1466	16	0.0800

Прежде чем перейти к моделированию управляемого движения с помощью неравенств (5.37) и (5.43), построим численно диаграмму, иллюстрирующую возможность применения

управления (5.30). Для каждой пары значений  $R$  и  $G$  с помощью уравнения (3.104) вычисляется положение равновесия  $\theta_*$ . Затем для этих значений  $R$ ,  $G$  и  $\theta_*$  проверяется выполнение условий (5.37) и (5.43). Если выполняются оба условия, то точка на диаграмме закрашивается серым, в противном случае точка закрашивается белым. На рисунке 5.21 показана диаграмма, полученная описанным способом. Область I соответствует паре значений  $R$  и  $G$ , где управление (5.30) не обеспечивает асимптотической устойчивости положения равновесия. В области II выполняются оба неравенства (5.37) и (5.43), и положение равновесия асимптотически устойчиво. Численные расчеты показали, что для рассматриваемого тела неравенство (5.43) выполняется во всей области, где выполняется неравенство (5.37). На рисунке 5.21b более подробно показана центральная область диаграммы. Из рисунка видно, что при малых значениях  $R$  и  $G$  области имеют более сложную форму. При малых абсолютных значениях  $R$  и  $G$ , которые можно наблюдать при малых угловых скоростях тела (согласно (3.61)), область II не имеет внутренних полостей, что свидетельствует о возможности использования предложенного управления для стабилизации колебаний медленно вращающихся тел ( $\omega_0 < 0.002 \text{ rad/s}$ ). Для случая быстровращающихся тел перед применением управления (5.30) необходимо убедиться, что параметры движения тела находится в области II диаграммы.

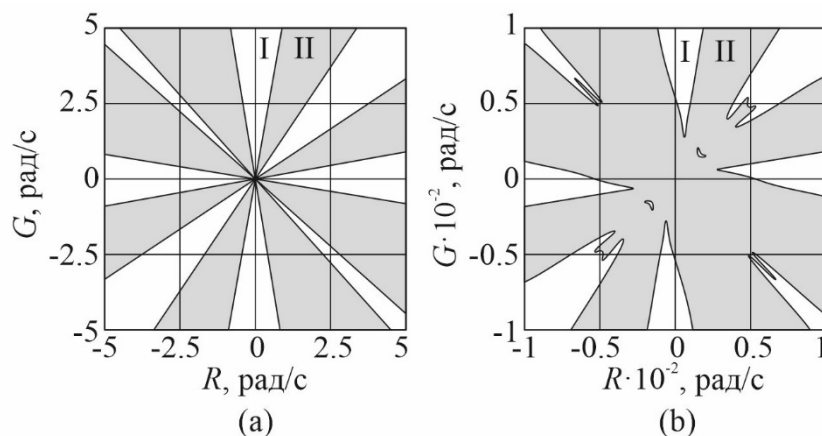


Рисунок 5.21 - Диаграмма, иллюстрирующая асимптотическую устойчивость положения равновесия

На рисунках 5.22 и 5.23 построены функции Ляпунова для случаев  $u = 1 + k(\theta - \theta_*)\dot{\theta}$  и  $u = 1$ , рассчитанных для значений  $R = 0.002 \text{ rad/s}$ ,  $G = -0.003 \text{ rad/s}$ , принадлежащих области II диаграммы устойчивости. В обоих случаях функции Ляпунова определено-положительны. В случае  $u = 1 + k(\theta - \theta_*)\dot{\theta}$  производная этой функции является определено-отрицательной (рисунок 5.24). Во втором случае производная тождественно равна нулю.

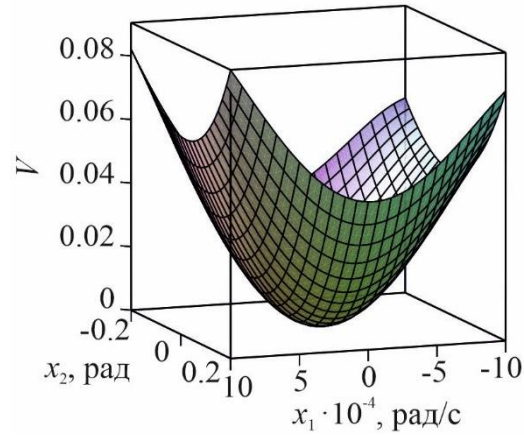


Рисунок 5.22 – Функция Ляпунова для  $u = 1 + k(\theta - \theta_*)\dot{\theta}$ ,  $R = 0.002$  рад/с,  $G = -0.003$  рад/с

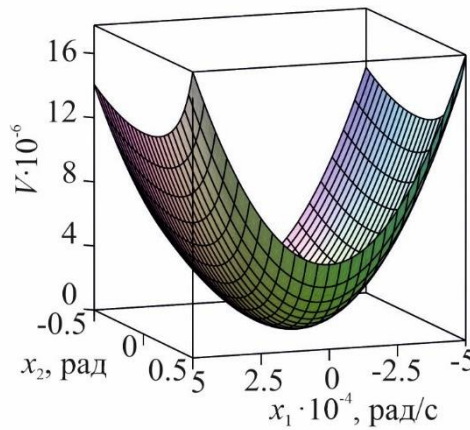


Рисунок 5.23 – Функция Ляпунова для  $u = 1$ ,  $R = 0.002$  рад/с,  $G = -0.003$  рад/с

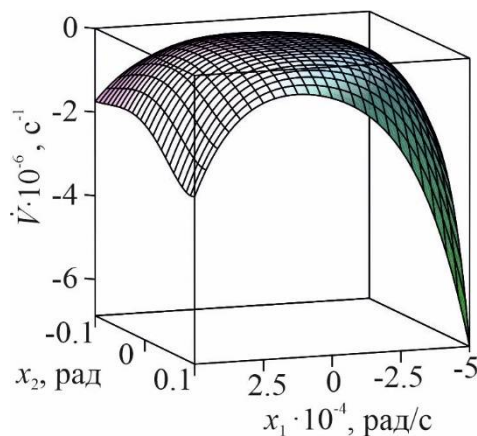


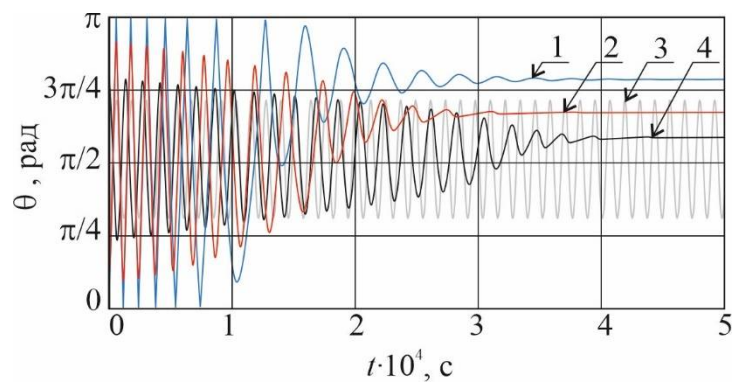
Рисунок 5.24 – Производная функции Ляпунова для  $u = 1 + k(\theta - \theta_*)\dot{\theta}$ ,  $R = 0.002$  рад/с,  
 $G = -0.003$  рад/с

Проведем численное моделирование управляемого движения системы, используя уравнения (3.63), (3.64), (3.69)-(3.71) и начальные условия, приведенные в таблице 5.4. Во всех

случаях использовалось  $\gamma_0 = \varphi_0 = 0$ ,  $\omega_{z_0} = 0$ . Из (3.57) следует, что  $\dot{\theta}_0 = \omega_{z_0} = 0$ . В первых четырех случаях в таблице 5.4 твердое тело не вращается вокруг оси симметрии. На рисунке 5.25 представлена зависимость угла  $\theta$  от времени при использовании управления для первых четырех случаев в таблице 5.4. Кривая 3 показывает очень медленное приближение к положению равновесия. Эта кривая показана в большем масштабе на рисунок 5.26.

Таблица 5.4 – Начальные условия

№	$\omega_{x_0}$ , рад/с	$\omega_{y_0}$ , рад/с	$\theta_0$ , рад	$G$ , рад/с	$R$ , рад/с	$\theta_*$ , рад	Область (рисунок 5.21)
1	0.005	0	0.01	$-4.9999 \cdot 10^{-5}$	0	2.4715	II
2	0.005	0	0.3	$-1.4776 \cdot 10^{-3}$	0	2.1185	II
3	0.005	0	1	$-4.2074 \cdot 10^{-3}$	0	1.7414	II
4	0.005	0	2.5	$-2.9924 \cdot 10^{-3}$	0	1.8498	II
5	0.005	-0.001	0.01	$-7.1663 \cdot 10^{-4}$	$-6.6667 \cdot 10^{-4}$	2.1234	II
6	0.005	-0.001	0.3	$-2.1145 \cdot 10^{-3}$	$-6.6667 \cdot 10^{-4}$	1.8158	II
7	0.005	-0.001	1	$-4.5676 \cdot 10^{-3}$	$-6.6667 \cdot 10^{-4}$	1.444	I
8	0.005	-0.001	2.5	$-2.4583 \cdot 10^{-3}$	$-6.6667 \cdot 10^{-4}$	1.7642	II
9	0.005	-0.001	0.302	$-2.1236 \cdot 10^{-3}$	$-6.6667 \cdot 10^{-4}$	1.8145	II
10	0.15	-0.1	0.3	-0.10802	0.06667	0.9058	II
11	0.15	-0.1	1.1	-0.16392	0.06667	1.152	II

Рисунок 5.25 – Зависимость угла  $\theta$  от времени для начальных условий 1-4 из таблицы 5.4

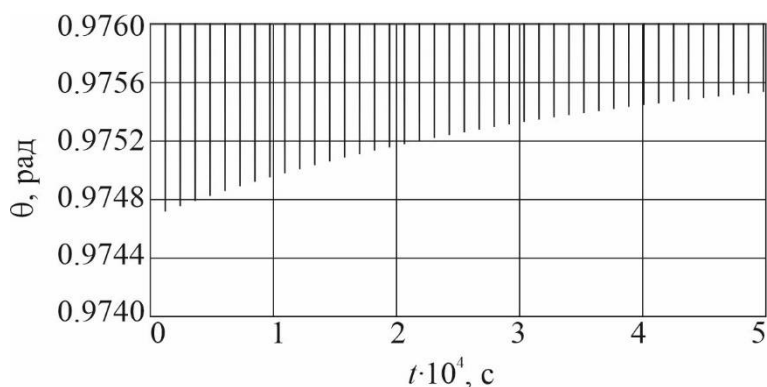


Рисунок 5.26 – Зависимость угла  $\theta$  от времени для начальных условий 3 из таблицы 5.4

В случаях 5-8 твердое тело немного закручено вокруг своей продольной оси, но угловая скорость его вращения невелика. На рисунке 5.27 показаны графики изменения угла  $\theta$  от времени для этих случаев. В отличие от графиков, приведенных на рисунке 5.25, одна из траекторий неустойчива, и наблюдается увеличение амплитуды (кривая 7 на рисунке 5.27). Второе существенное отличие состоит в том, что кривые 6 и 8 стабилизируются не в глобальном положении равновесия  $\theta_*$ , которое указано в таблице 5.6, а в локальном положении равновесия. На рисунке 5.28 приведены графики приведенной потенциальной энергии (5.39) для случаев 2 и 6. В случае 2 приведенная потенциальная энергия имеет один минимум, который соответствует устойчивому положению равновесия  $\theta_*$ . В случае 6 на графике есть две точки минимума. Глобальный минимум показан черной точкой и приведен в таблице 5.6. Второй минимум  $\theta_{*2} = 1.3387$  рад показан белой точкой. Кривая 6 на рисунке 5.27 стремится к  $\theta_{*2}$ . Нельзя заранее сказать, к какому положению равновесия притянется фазовая траектория. Например, в случае 9 начальный угол отличается от случая 6 на 0.002 рад, но фазовая траектория притягивается к глобальному минимуму  $\theta_*$  (рисунок 5.29). Попадание в ту или иную область притяжения очень чувствительно к начальным условиям, и, учитывая наличие внешних возмущений, можно сказать, что оно случайно.

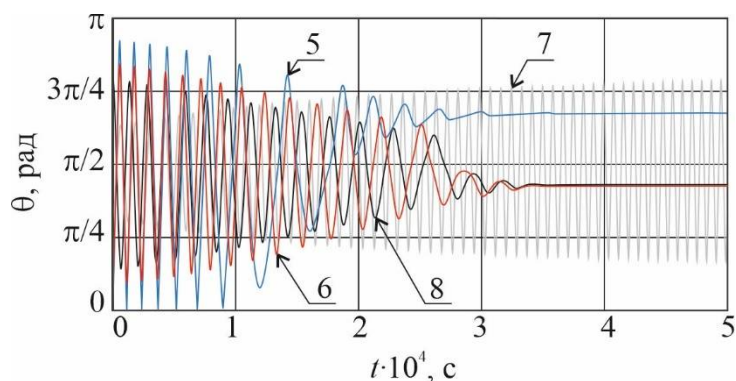


Рисунок 5.27 – Зависимость угла  $\theta$  от времени для начальных условий 5-8 из таблицы 5.4

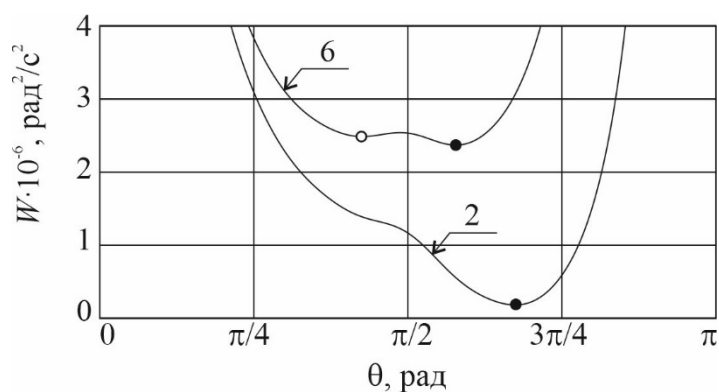


Рисунок 5.28 – Приведенная потенциальная энергия для случаев 2 и 6 из таблицы 5.4

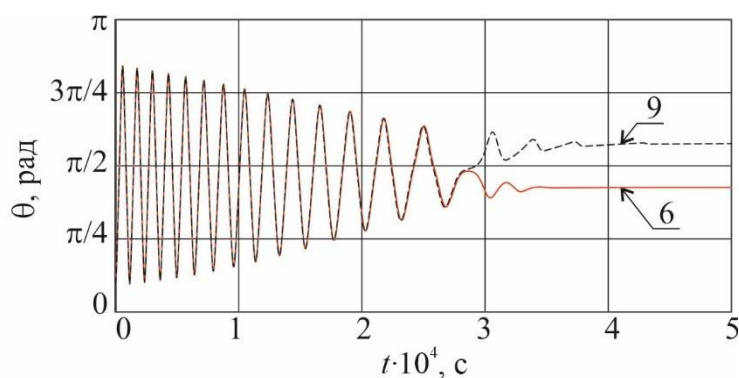


Рисунок 5.29 – Зависимость угла  $\theta$  от времени для начальных условий 6 и 9 из таблицы 5.4

В рассмотренных выше примерах твердое тело имело сравнительно маленькую угловую скорость. Расчеты показывают, что с увеличением угловой скорости требуемое для стабилизации время увеличивается. На рисунках 5.30, 5.31 показаны графики, построенные для случаев 10 и 11 из таблицы 5.4. Частота колебаний  $\theta$  значительно увеличилась по сравнению с рассмотренными выше случаями. Хотя случай 10 соответствует устойчивой области II на диаграмме (рисунок 5.21), видно, что движение неустойчиво и амплитуда колебаний увеличивается (рисунок 5.30a). Причина в том, что предложенный закон управления обеспечивает локальную асимптотическую устойчивость положений равновесия  $\theta_*$ . Численные расчеты показывают, что при увеличении угловой скорости вращения тела область притяжения положения равновесия уменьшается. В случае, показанном на рисунке 5.30, начальный угол  $\theta_0 = 0.3$  рад далек от положения равновесия  $\theta_* = 0.9058$  рад (случай 10). Если взять начальное положение ближе к равновесию  $\theta_0 = 1.1$  рад (случай 11), то фазовая траектория притянется к нему. На рисунке 5.31 показаны колебания угла в случае 11. Видно, что амплитуда угла уменьшается довольно медленно.

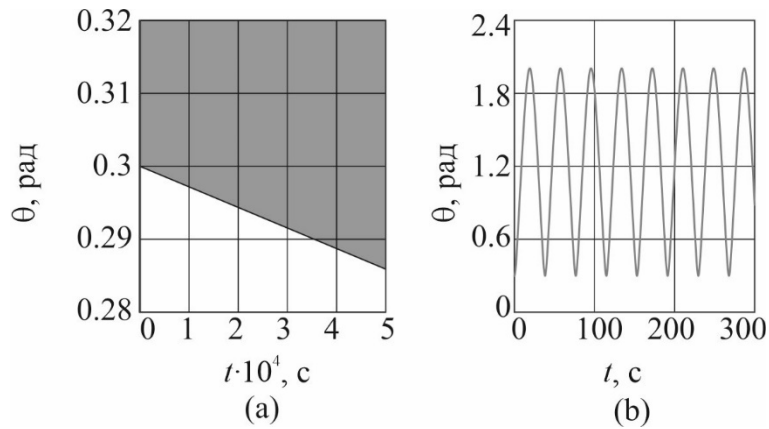


Рисунок. 5.30. Зависимость угла  $\theta$  от времени для начальных условий 10 из таблицы 5.4

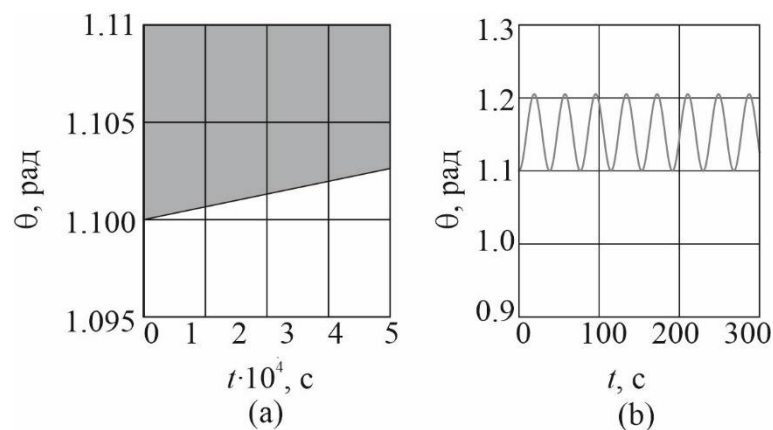


Рисунок. 5.31. Зависимость угла  $\theta$  от времени для начальных условий 11 из таблицы 5.4

Таким образом, предложенный закон управления позволяет стабилизировать колебания твердого тела. Этот закон можно использовать при транспортировке медленно вращающихся осесимметричных тел.

#### 5.4 Управление движением осесимметричного тела в пространственном случае

Данный раздел посвящен разработке закона управления тягой двигателя активного космического аппарата, обеспечивающего стабилизацию пространственных колебаний цилиндрического тела в стационарном угловом положении. Для описания движения используется упрощенная математическая модель (3.79)-(3.82). Предполагается, что во время движения система управления космического аппарата удерживает его в постоянном положении относительно твердого тела  $x = d = const$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ . Ось ионного потока всегда направлена в центр масс тела. Чтобы управлять ориентацией тела, будем изменять тягу транспортировочного двигателя активного космического аппарата. В этом случае ионный момент можно определить как

$$M_I = u(\theta, \theta', G, \gamma) M_I^{u=1}(\theta), \quad (5.44)$$

где  $u \in [0, 1]$  - безразмерный управляющий параметр. Значение  $u = 0$  соответствует выключенному двигателю, а значение  $u = 1$  соответствует включенному на полную мощность двигателю, когда генерируемый ионный момент равен  $M_I^{u=1}(\theta)$ . Для управления движением твердого тела относительно центра масс предлагается использовать следующий закон управления [12]:

$$u = \begin{cases} 0, & \text{при } \bar{u} \leq 0; \\ \bar{u}, & \text{при } 0 < \bar{u} < 1; \\ 1, & \text{при } \bar{u} \geq 1; \end{cases} \quad (5.45)$$

где

$$\bar{u} = 1 + \left( k_\theta (\theta_* - \theta) - k_\Omega \theta' + k_\gamma (\gamma_* - \gamma) + k_G (\bar{G}_* - \bar{G}) \right) \frac{I n^2 k^4}{M_I^{u=1}(\theta)}, \quad (5.46)$$

где  $k_j$  - параметры закона управления. Для определения параметров закона управления введем критерий качества в виде

$$F(k_\theta, k_\Omega, k_\gamma, k_G) = (\theta_* - \theta_{Tav})^2 + \theta'_{Tav}{}^2 + (\gamma_* - \gamma_{Tav})^2 + (\bar{G}_* - \bar{G}_{Tav})^2, \quad (5.47)$$

где  $\theta_{Tav}$ ,  $\theta'_{Tav}$ ,  $\gamma_{Tav}$ ,  $\bar{G}_{Tav}$  - средние значения переменных, рассчитанные за последний период колебаний,  $\theta_*$ ,  $\gamma_*$ ,  $\bar{G}_*$  - значения, соответствующие положению равновесия и описанные в разделе 3.5. Для вычисления функции (5.47) производится численное интегрирование системы уравнений (3.82)-(3.85) для конкретных значений параметров закона управления  $k_\theta$ ,  $k_\Omega$ ,  $k_\gamma$ ,  $k_G$ . Интегрирование выполняется на интервале независимой переменной из десяти периодов. Затем берется последний период и находятся амплитудные значения. Средние арифметические значения этих амплитуд подставляются в формулу (5.47) в виде  $\theta_{Tav}$ ,  $\theta'_{Tav}$ ,  $\gamma_{Tav}$ ,  $\bar{G}_{Tav}$ . Для нахождения набора управляющих параметров, обеспечивающих минимизацию критерия качества (5.47), используется метод Нелдера-Мида [104], реализованный в среде Matlab как функция FMINSEARCH.

В качестве примера рассмотрим увод с орбиты цилиндрического твердого тела в неуправляемом и управляемом режимах. Для моделирования примем следующие параметры: масса тела  $m_B = 1400 \text{ kg}$ , моменты инерции  $I_y = 1300 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $I_x = I_z = I = 6800 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , длина тела 6 м, диаметр 2.4 м. Центр масс лежит на оси симметрии и смещен к нижнему краю на 0.5 м. Расстояние между космическим аппаратом и центром масс твердого тела  $d = 15 \text{ м}$ . Параметры



ионного потока приведены в таблице 2.1. На рисунке 5.32 показана полученная в результате расчета зависимость ионного момента от угла  $\theta$ .

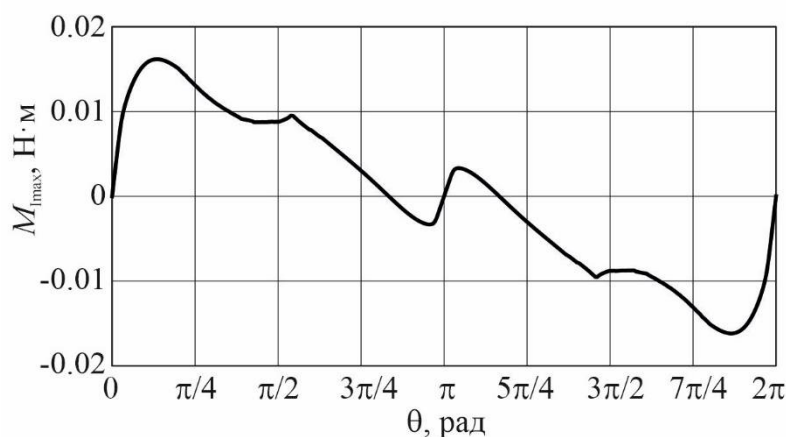
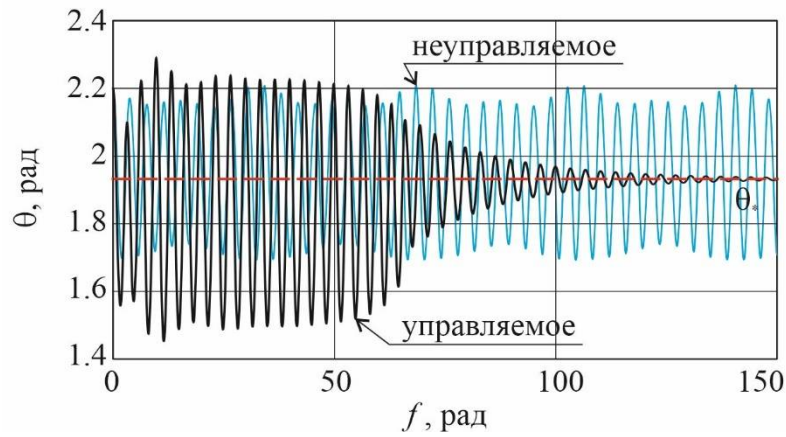
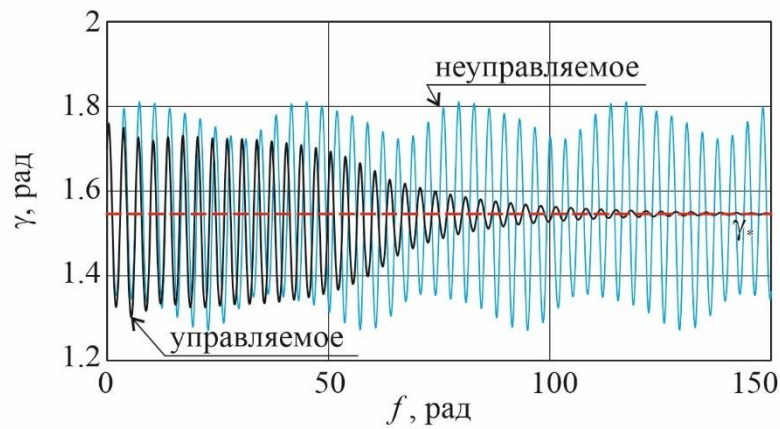
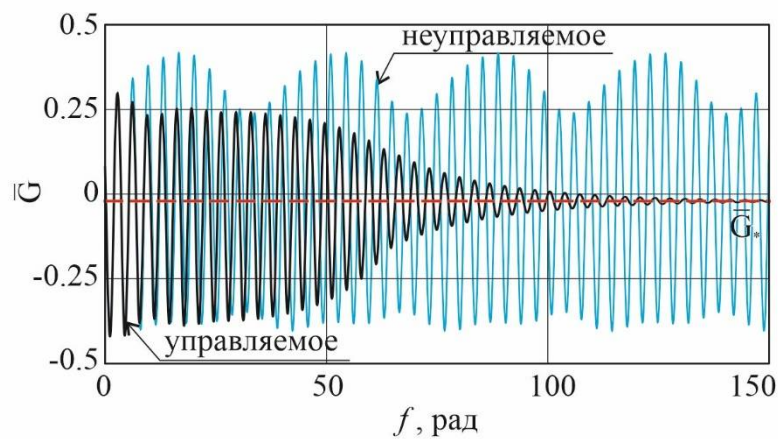


Рисунок 5.32 - Зависимость ионного момента от угла  $\theta$

В начальный момент времени центр масс твердого тела имеет следующие параметры движения:  $r_0 = 6671000$  м,  $\dot{r}_0 = 0$ ,  $\dot{f}_0 = 1.1587 \cdot 10^{-3}$  рад/с. Эти значения соответствуют  $n = 1.1587 \cdot 10^{-3}$  рад/с,  $e = 0$ . Примем  $\omega_x = 0.03$  рад/с,  $\omega_y = 0.0005$  рад/с,  $\omega_z = 0.02$  рад/с, для которых, согласно (3.61) и (3.75),  $\bar{G} = 0.0803$  и  $\bar{R} = 0.0825$ .

Найдем стационарные решения системы. Численное решение уравнения (3.98) дает следующие корни:  $\theta_{*1} = 0$ ,  $\theta_{*2} = 1.9324$  рад,  $\theta_{*3} = \pi$ ,  $\theta_{*4} = 4.3508$  рад,  $\theta_{*5} = 2\pi$ . Моделирование показывает, что корни с нечетными индексами соответствуют неустойчивым положениям равновесия, а корни с четными индексами - устойчивым. Выберем второй корень в качестве целевого положения:  $\theta_* = \theta_{*2}$ . Уравнения (3.96) и (3.97) дают для этого значения следующие результаты:  $\bar{G}_* = -2.0668 \cdot 10^{-2}$ ,  $\gamma_* = 1.5451$  рад. Выберем в качестве начальных условий  $\theta_0 = 2.2$  рад,  $\gamma_0 = 1.7$  рад,  $\bar{G} = 0.0803$ . При моделировании движения будем использовать закон управления (5.45). Минимизация критерия качества (5.47) с использованием функции FMINSEARCH в Matlab дает следующие значения параметров закона управления:  $k_\theta = 16.7469$ ,  $k_\Omega = 8.3178$ ,  $k_G = 12.3538$ ,  $k_\gamma = 43.9145$ . На рисунках 5.33-5.35 приведены графики, полученные для неуправляемого движения и при использовании предложенного закона управления.

Рисунок 5.33 - Зависимость угла  $\theta$  от угла  $f$ Рисунок 5.34 - Зависимость угла  $\gamma$  от угла  $f$ Рисунок 5.35 - Зависимость переменной  $\bar{G}$  от угла  $f$ 

Зависимость безразмерной функции управления  $u$  от угла  $f$  показана на рисунке 5.36. Из рисунка видно, что на начальном этапе движение управление носит близкий к релейному характер, но по мере приближения параметров системы к положению равновесия управление

принимает вид ограниченной сверху нелинейной функции (при  $f > 66.14$  рад). При  $u=1$  и  $u=0$  управление остается непрерывным, но не гладким.

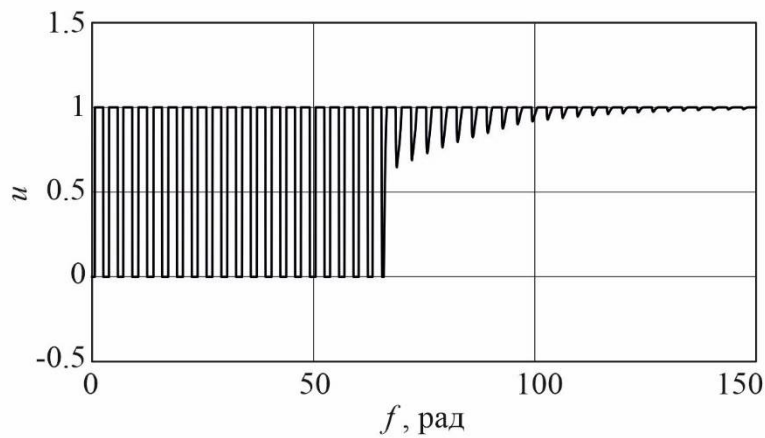


Рисунок 5.36 - Зависимость управления  $u$  (5.45) от угла  $f$

Анализ графиков управляемого движения позволяет предположить, что найденное стационарное положение  $\theta_*$ ,  $\bar{G}_*$ ,  $\gamma_*$  асимптотически устойчиво. Определим численно области притяжения этого положения равновесия. Для этого проведем серию численных расчетов с различными начальными условиями. Поскольку фазовое пространство системы является четырехмерным  $(\theta, \gamma, \theta', \bar{G})$ , его наглядное визуальное представление затруднительно. Приведем несколько сечений этого пространства. На рисунке 5.37 построено сечение для постоянных значений  $\theta'_0 = 0$ ,  $\bar{G}_0 = \bar{G}_*$ , а на рисунке 5.38 — для  $\theta_0 = \theta_*$ ,  $\gamma_0 = \gamma_*$ . Серые точки на рисунках соответствуют начальным условиям, при которых фазовая траектория переходит в окрестность стационарного положения на интервале независимой переменной  $f$  в 500 рад.

Согласно данным, приведенным в исследовании [105], угловые скорости ступеней ракеты могут достигать значений 409,6 град/с. Используя уравнения (3.62), можно показать, что модуль угловой скорости внутри области притяжения, показанной на рисунке 5.38, не превышает 0.0034 рад/с. Таким образом, предлагаемое управление может быть использовано для стабилизации медленно вращающихся объектов космического мусора.

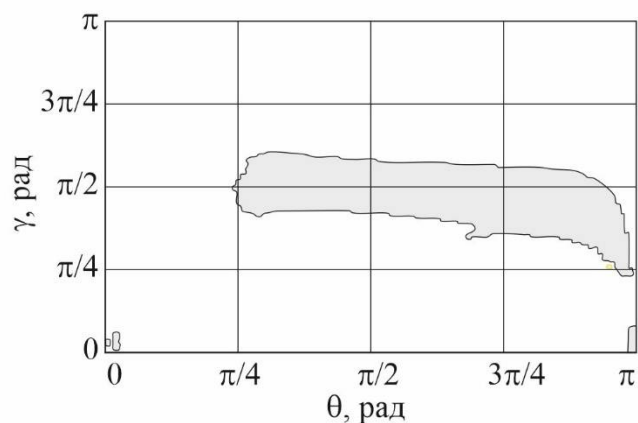


Рисунок 5.37 – Область притяжения положения равновесия в пространстве  $(\theta, \gamma)$

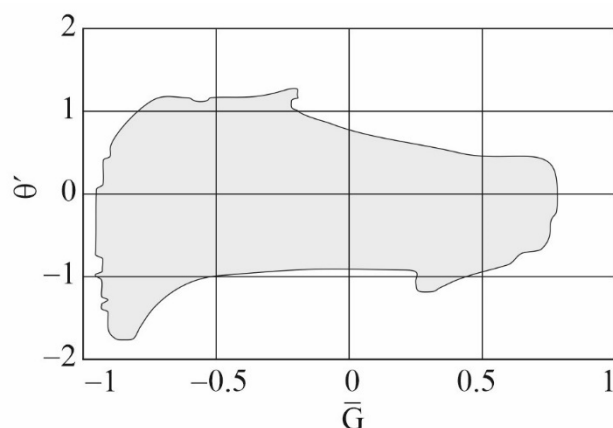


Рисунок 5.38 – Область притяжения положения равновесия в пространстве  $(\bar{G}, \theta')$

Расчеты показывают, что предложенный закон управления (5.45) может быть использован для орбит с малым эксцентриситетом. На рисунке 5.39 показана зависимость угла  $\theta$  от  $f$  для различных значений эксцентриситета. На рисунках 5.40 и 5.41 показано изменение угла  $\gamma$  и безразмерной переменной  $\bar{G}$  соответственно. Видно, что при значении эксцентриситета  $e = 0.04$  закон управления справляется с задачей и переменные приближаются к стационарным значениям. При значении эксцентриситета  $e = 0.05$  управление малоэффективно и скорее приводит к раскачке системы. Это связано с сужением области притяжения асимптотически устойчивого положения равновесия в результате увеличения возмущений, связанных с изменением гравитационного момента на эллиптической орбите. Более того, само положение равновесия невозможно на эллиптической орбите. Вместо положения равновесия фазовые траектории притягиваются к устойчивому предельному циклу, представляющему собой замкнутую траекторию в фазовом пространстве. Проекции предельного цикла на плоскости для различных эксцентриситетов показаны на рисунках 5.42 и 5.43. Для получения этих графиков

проводилось численное интегрирование уравнений движения на большом интервале независимой переменной ( $f \in [0, 2500]$  рад), а затем строился последний период.

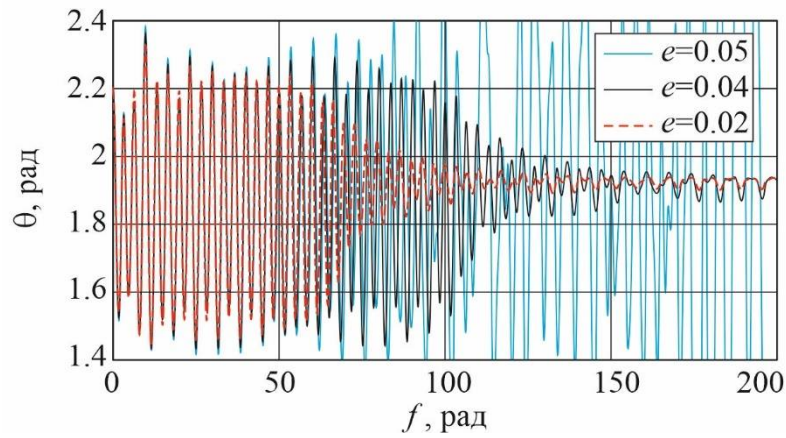


Рисунок 5.39 - Зависимость угла  $\theta$  от угла  $f$  при различных эксцентриситетах

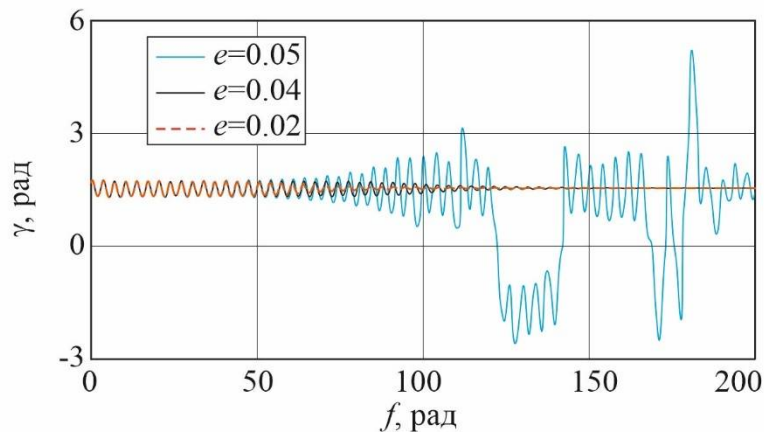


Рисунок 5.40 - Зависимость угла  $\gamma$  от угла  $f$  при различных эксцентриситетах

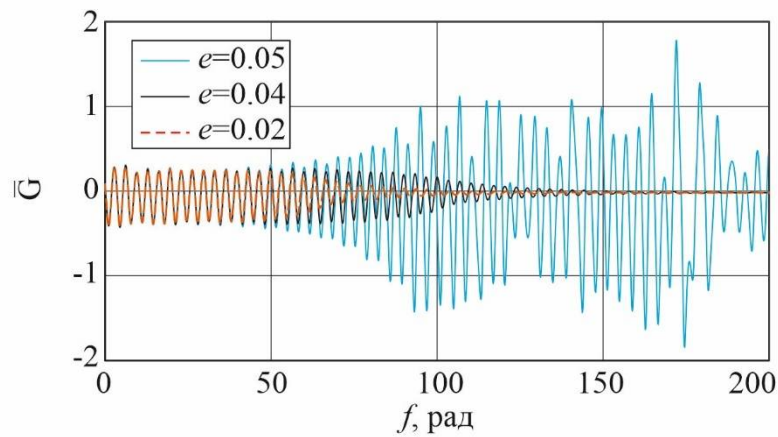


Рисунок 5.41 - Зависимость  $\bar{G}$  от угла  $f$  при различных эксцентриситетах

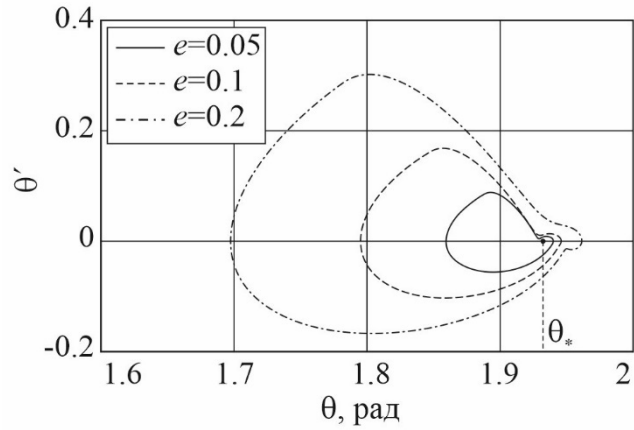


Рисунок 5.42 - Устойчивые предельные циклы для различных эксцентриситетов в пространстве  $(\theta, \theta')$

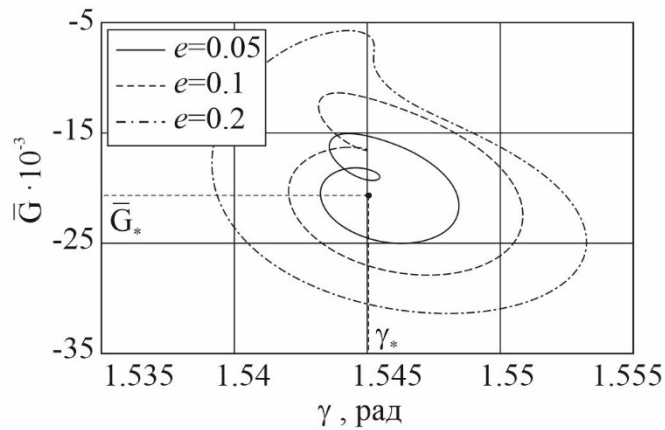


Рисунок 5.43 - Устойчивые предельные циклы для различных эксцентриситетов в пространстве  $(\gamma, \bar{G})$

Расчеты показали, что в случае ненулевого эксцентриситета управляющие параметры  $k_\theta$ ,  $k_\Omega$ ,  $k_\gamma$ ,  $k_G$ , обеспечивающие минимум функции критерия качества (5.47), изменяются, но незначительно. Такое уточнение не приводит к качественному изменению наблюдаемого поведения фазовых траекторий управляемого движения, но требует значительных вычислительных затрат.

## 6 Поиск углового режима движения тела, обеспечивающего максимальную осредненную ионную силу

В данной главе разрабатывается метод выбора углового режима движения цилиндрического твердого тела, при котором осредненная величина модуля генерируемой ионной силы максимальна. Рассматриваются случаи плоского и пространственного движения тела относительно центра масс на круговой орбите при неизменном относительном положении генерирующего ионный поток активного космического аппарата.

Результаты данной главы опубликованы в работах автора [15, 24].

### 6.1 Случай плоского движения

Согласно фазовым портретам, приведенным в разделе 4.1, в случае невозмущенного движения, соответствующего движению по круговой орбите под действием ионного потока, тело может совершать движение, относящееся к одному из трех типов: находиться в положении равновесия, совершать периодические колебания или вращаться. В последних двух случаях угол отклонения тела от местной вертикали  $\theta$  постоянно меняется, что приводит к изменению ионной силы. Осредненная ионная сила  $\bar{F}_{ly}$ , рассчитанная по периоду колебаний  $T$ , может быть использована в качестве меры эффективности режима углового движения для задачи бесконтактной ионной транспортировки

$$\bar{F}_{ly} = \frac{1}{T_\tau} \int_0^{T_\tau} F_{ly}^o(\theta(\tau)) d\tau . \quad (6.1)$$

где  $T_\tau$  - интервал независимой переменной, на котором вычисляется осредненная сила. На рисунке 6.1 приведен график зависимости осредненной силы от угла  $\theta_0$ . Для каждого значения  $\theta_0$  проводился численный расчет. Уравнение (3.43) интегрировалось для начальных условий  $\theta(0) = \theta_0$ ,  $\theta'(0) = 0$ , а затем с помощью формулы (6.1) вычислялась осредненная сила на периоде колебаний. В качестве рассматриваемого тела был выбран цилиндр длиной 3.8м и радиусом 1.3м. Его центр масс располагался в геометрическом центре. Соответствующий фазовый портрет показан на рисунке 6.2.

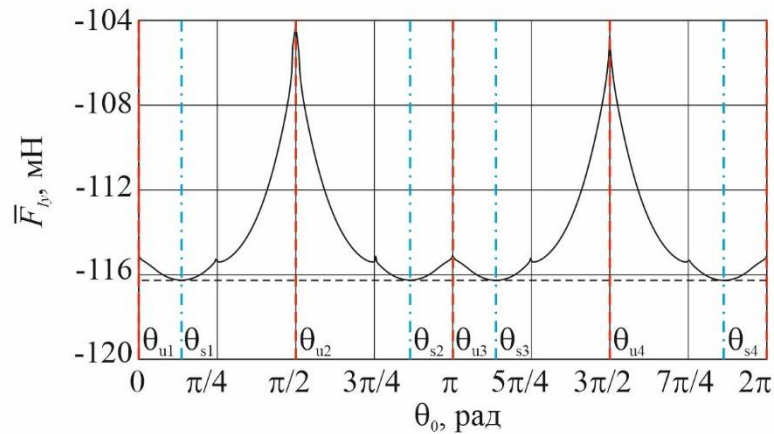


Рисунок 6.1 - Зависимость осредненной проекции ионной силы  $\bar{F}_{ly}$  от начального угла отклонения тела

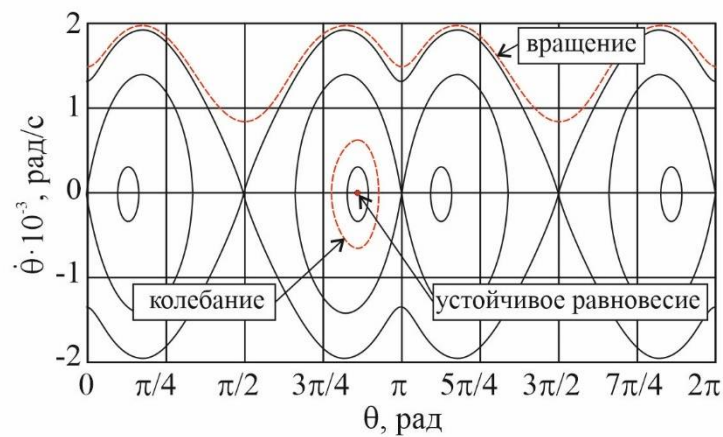


Рисунок 6.2 – Фазовый портрет невозмущенной системы

Расчеты показывают, что для рассматриваемого случая наиболее выгодным является транспортирование в устойчивом положении равновесия  $\theta_{sj}$ . Эти положения показаны на рисунке 6.1 штрихпунктирными линиями. Максимальная по модулю осредненная сила равна  $\bar{F}_{ly\max} = |\min_{\theta_0 \in [0, 2\pi]} \bar{F}_{ly}(\theta_0)| = 0.1163 \text{ Н}$ . Минимальный модуль осредненной ионной силы  $\bar{F}_{ly\min} = |\max_{\theta_0 \in [0, 2\pi]} \bar{F}_{ly}(\theta_0)| = 0.1043 \text{ Н}$  наблюдается в неустойчивых положениях равновесия  $\theta_{s2}$  и  $\theta_{s4}$ , когда цилиндр обращен торцевой поверхностью к потоку. Значения средней силы в точках локальных минимумов и максимумов совпадают из-за симметрии потока и рассматриваемого тела. На рисунке 6.3 показана зависимость осредненной ионной силы от начальной угловой скорости для случая вращения. Интегрирование проводилось при начальных условиях  $\theta(0) = \pi/2$ ,  $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$ . С увеличением угловой скорости усредненная ионная сила стремится к значению  $\bar{F}_{ly} = -0.111 \text{ Н}$ .



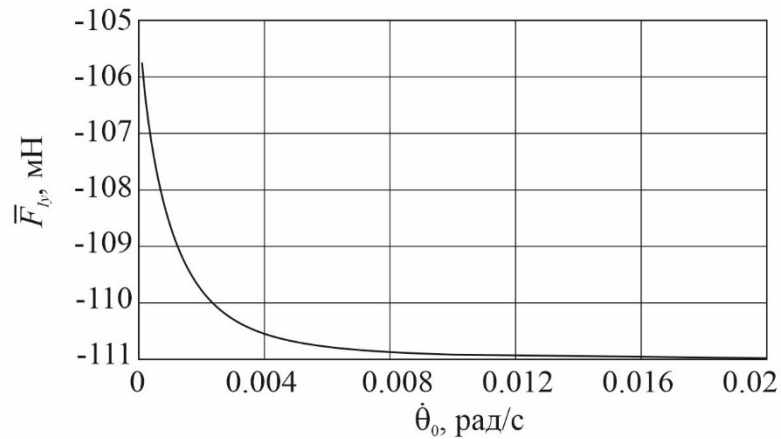


Рисунок 6.3 - Зависимость осредненной проекции ионной силы от начальной угловой скорости тела  $\dot{\theta}_0$

Сравнивая рисунки 6.1 и 6.3, можно сделать вывод, что для рассматриваемого твердого тела транспортировка в режиме колебаний и в положении устойчивого равновесия позволяет генерировать большую ионную силу, чем в режиме вращения.

Для случая плоского движения тела под действием ионного момента предлагается следующий алгоритм определения углового режима движения, наиболее эффективного для бесконтактной транспортировки:

1. Формируется массив  $N$  начальных точек  $\theta_{0j} = 2\pi j / N$ , где  $j = 0, 1, \dots, N$ .
2. К данному массиву добавляется  $K$  устойчивых положений равновесия уравнения (3.43).
3. Для каждой точки  $\theta_{0j}$  ( $j = 0, 1, \dots, N + K$ ) проводится численное интегрирование уравнения (3.43) с начальными условиями  $\theta(0) = \theta_{0j}$ ,  $\theta'(0) = 0$  до момента возвращения  $\theta$  в исходную точку.
4. С помощью формулы (6.1) на основе результатов численного интегрирования (шаг 3) вычисляется осредненная сила  $\bar{F}_{lyj}$ , которая ставится в соответствие начальному положению  $\theta_{0j}$ .
5. Из полученного массива  $N+K+1$  значений  $\bar{F}_{lyj}$  выбирается максимальное по модулю. Обозначим индекс этого значения как  $k$ .
6. С помощью симплекс метода, который реализован в MATLAB командой FMINSEARCH, от  $k$ -ой начальной точки производится поиск оптимальной точки  $\theta_{0opt}$ , которой соответствует наибольшее по модулю значение  $\bar{F}_{lyopt}$ .

7. Для оценки режима вращения производится одно численное интегрирование (3.43) с начальными условиями  $\theta(0) = 0$ ,  $\dot{\theta}(0) = 7$  рад/с (что соответствует наибольшей угловой скорости космического мусора по данным наблюдений, приведенным в [105]) до момента, когда угол  $\theta$  примет значение  $2\pi$ .
8. С помощью формулы (6.1) на основе результатов численного интегрирования (шаг 6) вычисляется осредненная сила  $\bar{F}_{lyrot}$ , которая характеризует режим вращения.
9. Из полученных на шагах 6 и 8 значений  $\bar{F}_{lyopt}$  и  $\bar{F}_{lyrot}$  выбирается максимальное по модулю. Соответствующая выбранной силе фазовая траектория будет определять наиболее эффективный для бесконтактной транспортировки режим движения.

## 6.2 Случай пространственного движения осесимметричного тела

Рассмотрим пространственное движение осесимметричного твердого тела на круговой орбите под действием ионного момента. Его движение описывается системой уравнений (3.108)-(3.111), для которой существует обобщенный интеграл энергии (3.116). Ионный поток не оказывает влияния на вращение цилиндра вокруг оси симметрии. Соответственно, угловая скорость вращения  $\omega_y$  и пропорциональная ей переменная  $R$  в силу симметричности обтекания не могут быть изменены, если ось потока проходит через ось симметрии цилиндра. Поэтому в рамках данного раздела будем считать  $R$  заданной величиной.

Для рассматриваемой задачи фазовое пространство является четырехмерным  $(\gamma, \theta, G, \dot{\theta})$ , колебания носят сложный характер, при этом частоты колебаний могут существенно отличаться на различных фазовых траекториях. Это создает трудности при выборе интервала времени  $\tau$ , на котором вычисляется осредненная ионная сила  $\bar{F}_{ly}^o$ . Выбор малого интервала может приводить к недостаточной точности вычисления, а большого – к чрезмерным вычислительным затратам, что создает проблемы при необходимости проведения большой серии численных расчетов.

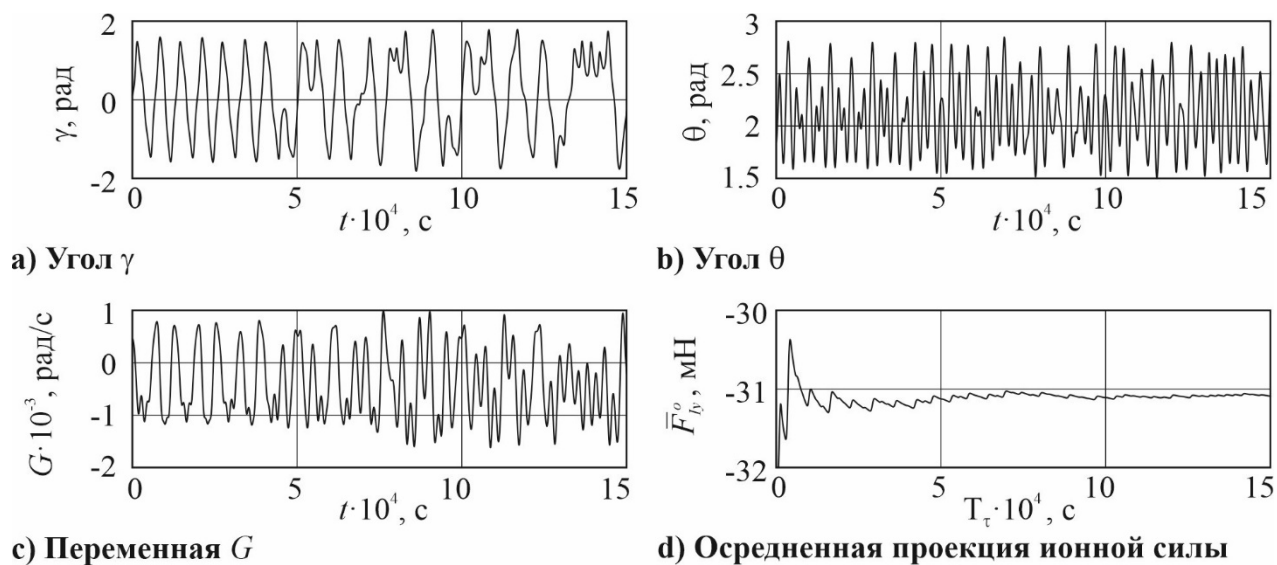
Анализ результатов численного моделирования и структуры правых частей уравнений (3.108)-(3.111) позволяет выделить несколько характерных областей движения транспортируемого тела: 1) модули  $R$  и  $G$  сопоставимы с  $n$ ; 2) модуль  $R$  сопоставим с  $n$ , а  $|G| \gg n$ ; 3) модуль  $G$  сопоставим с  $n$ , а  $|R| \gg n$ ; 4)  $|R| \gg n$  и  $|G| \gg n$ .

В первом случае колебания сильно отличаются от гармонических и могут иметь большой период. Для вычисления осредненной силы (6.1) целесообразно выбрать довольно большой интервал  $T_\tau$ . Поскольку угловая скорость сравнительно мала, а частоты колебаний невелики, то выбор большого интервала времени не приводит к большим вычислительным затратам. На

рисунке 6.4 показаны зависимости углов  $\gamma$ ,  $\theta$  и переменной  $G$  от времени для тела с параметрами, приведенными в таблице 6.1. В качестве начальных значений приняты  $G_0 = 10^{-4}$  рад/с,  $\gamma_0 = 0.1$  рад,  $\theta_0 = 2$  рад,  $\dot{\theta}_0 = 0$ , а интервал времени, на котором рассчитывается осредненная сила, равен  $\tau_k = 1.5 \cdot 10^5$  с.

Таблица 6.1 – Параметры механической системы

Параметр	Значение	Параметр	Значение
Моменты инерции $I_x, I_z$	3000 кг·м <sup>2</sup>	Расстояние до КА $d$	15 м
Момент инерции $I_y$	500 кг·м <sup>2</sup>	Концентрация плазмы	$2.6 \cdot 10^{16}$ м <sup>-3</sup>
Длина цилиндра	6 м	Осевая скорость ионов $u_0$	39 642 м/с
Радиус цилиндра	1.2 м	Радиус потока $R_0$	0.2 м
Смещение центра масс	0.5 м	Масса иона $m_i$	$2.18 \cdot 10^{-25}$ кг
Высота орбиты	500 км	Угол расхождения ионного потока $\alpha_0$	15°
Орбитальная угловая скорость $n$	$1.1085 \cdot 10^{-3}$ рад/с		

Рисунок 6.4 - Результаты интегрирования для случая 1 ( $R = 0.0015$  рад/с,  $G_0 = 10^{-4}$  рад/с)

Как видно из рисунков 6.5-6.7, в случаях 2-4 переменная  $G$  меняется медленно по сравнению с  $\gamma$  и  $\theta$ , и ее изменение носит периодический характер. Наличие высокочастотных колебаний приводит к необходимости в сильном дроблении шага при численном

интегрировании. Это значительно увеличивает вычислительные затраты. При этом осредненная сила  $\bar{F}_{ly}^o$  сходится к некоторому предельному значению,  $\bar{F}_{ly}^o = \bar{F}_{ly}^o(\tau_1)$ , где  $\tau_1$  - период колебаний переменной  $G$ , поэтому в случаях 2-4 целесообразно при расчёте средней силы ограничиться не фиксированным интервалом времени  $T_\tau = \tau_k$ , а одним периодом  $\tau_1$ . На рисунках 6.5d-6.7d приводится результат сравнения осредненной силы, вычисленной на отрезках  $[0, 30000]$ с и  $[0, \tau_1]$ . Видно, что в этих случаях осредненная сила стремится к значению  $\bar{F}_{ly}^o$ , показанному на рисунках пунктирной линией.

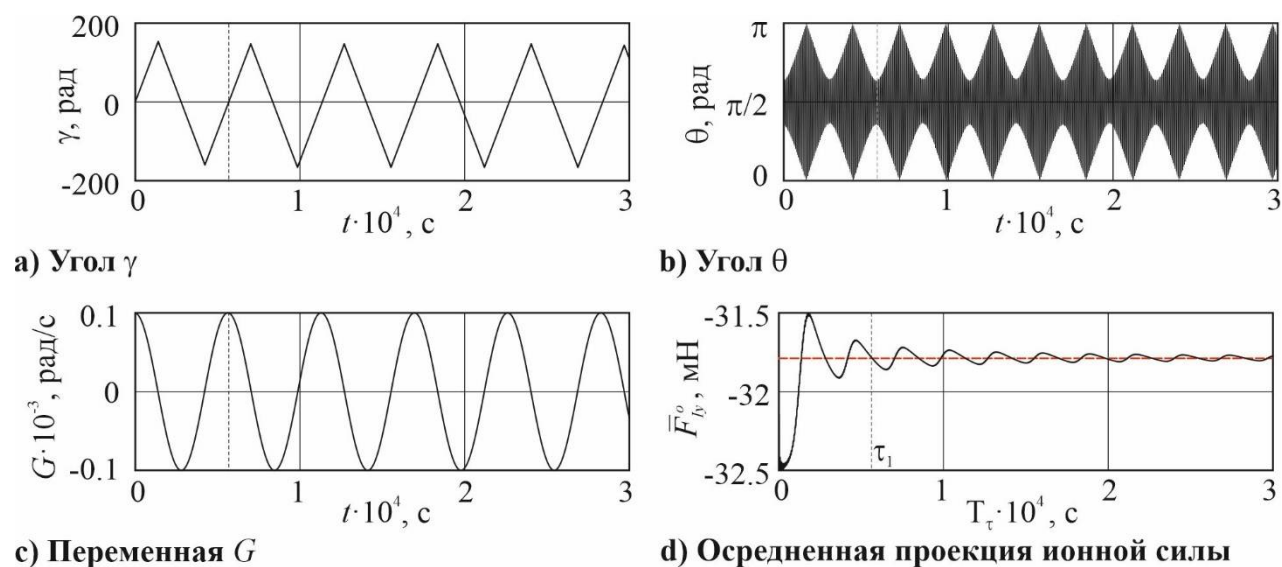


Рисунок 6.5 - Результаты интегрирования для случая 2 ( $R = 0.0015$  rad/s,  $G_0 = 0.1$  rad/s)

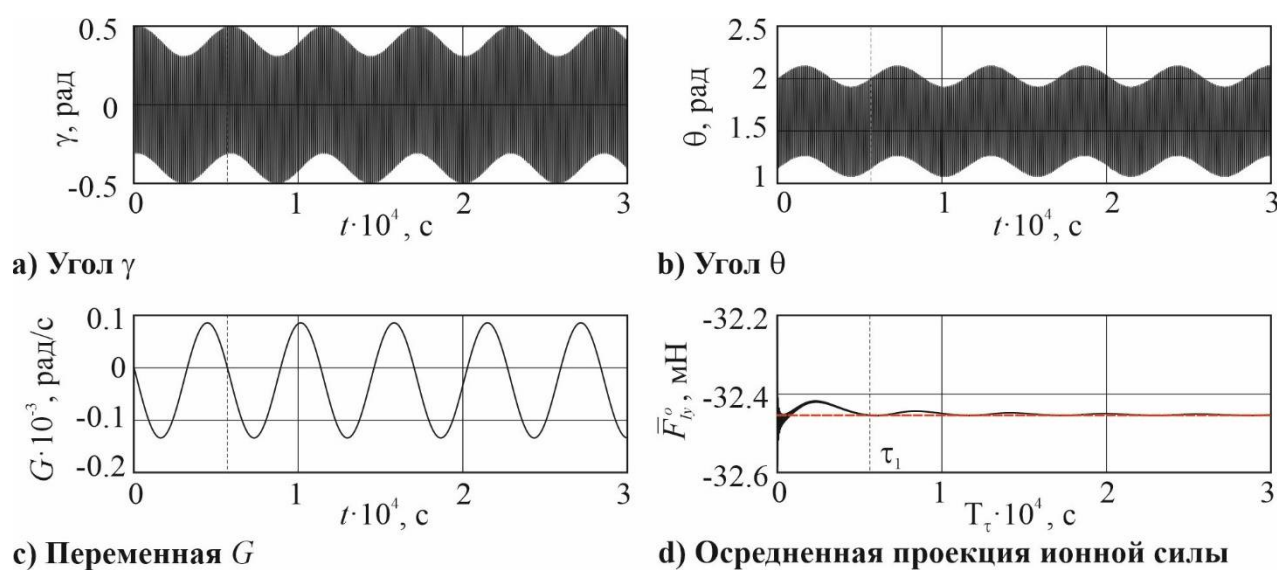


Рисунок 6.6 - Результаты интегрирования для случая 3 ( $R = 0.1$  rad/s,  $G_0 = 10^{-4}$  rad/s)

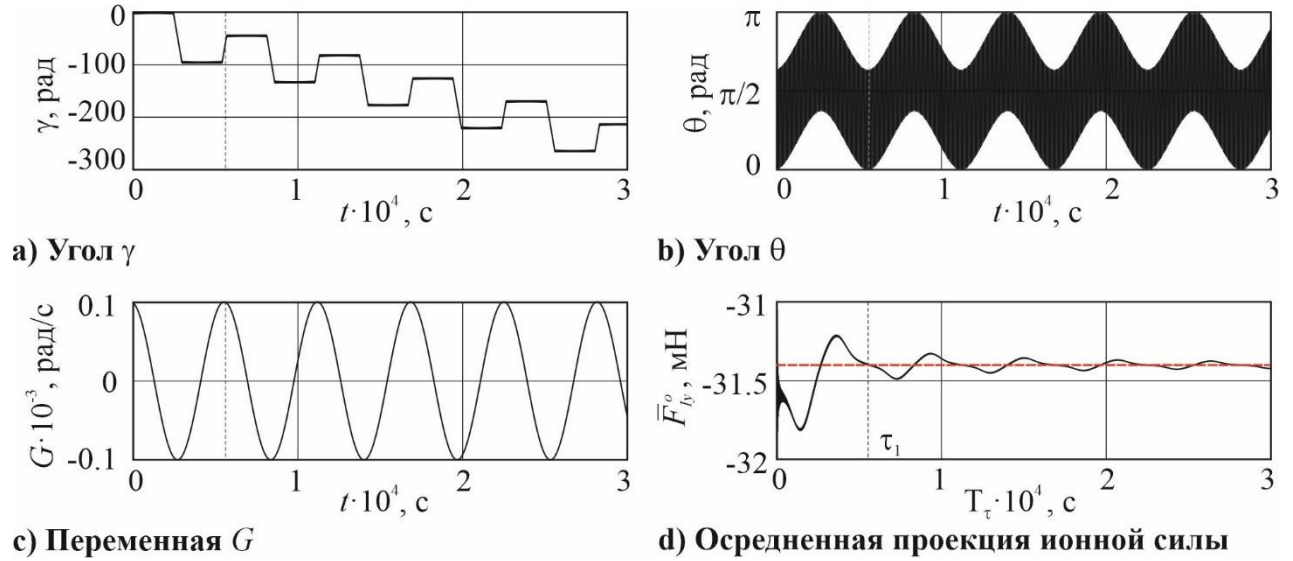


Рисунок 6.7 - Результаты интегрирования для случая 4 ( $R = 0.1 \text{ rad/s}$ ,  $G_0 = 0.1 \text{ rad/s}$ )

Поскольку переменная  $G$  изменяется в процессе движения, по ее начальному значению  $G_0$  до проведения численного расчета сложно судить, относится ли рассматриваемая фазовая траектория к случаю 3 или 4. Например, рисунок 6.6с показывает, что, хотя в начальный момент времени  $G_0 = 10^{-4} \text{ rad/s}$ , а  $\dot{\theta}_0 = 0$ , с течением времени  $G$  достигает довольно больших по сравнению с  $n$  значений. Для того чтобы пояснить это явление, перепишем обобщенный интеграл энергии (3.116), считая  $n$  и  $W/I$  малыми по сравнению с  $R$  и  $G$

$$\dot{\theta}^2 + R^2 + \frac{(G - R \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} = h_1. \quad (6.2)$$

Выражая отсюда  $G$ , получим

$$G = R \cos \theta \pm \sin \theta \sqrt{h_1 - \dot{\theta}^2 - R^2}. \quad (6.3)$$

Это приближенное соотношение устанавливает связь между величинами  $G$ ,  $R$  и  $\dot{\theta}$ . Считая угол  $\theta$  произвольным, находя первую и вторую производную (6.3), определим точку экстремума функции  $G(\theta)$

$$\theta_{\max} = \arctan \left( \frac{\sqrt{h_1 - \dot{\theta}^2 - R^2}}{R} \right). \quad (6.4)$$

Подставляя (6.4) в (6.3), получим

$$G(\theta_{\max}) = \sqrt{h_1 - \dot{\theta}^2},$$

откуда следует, что

$$G < G(\theta_{\max}) < \sqrt{h_1} = \varpi . \quad (6.5)$$

Значение  $\varpi$  может быть определено из начальных условий

$$\varpi^2 = \dot{\theta}_0^2 + R^2 + \frac{(G_0 - R \cos \theta_0)^2}{\sin^2 \theta_0} . \quad (6.6)$$

Отметим, что на реальной траектории амплитудное значение  $G(\theta)$  может быть меньше  $G(\theta_{\max})$ , поскольку угол  $\theta$  в процессе движения может не достигнуть значения  $\theta_{\max}$ . Аналогично выражая  $\dot{\theta}^2$  из (6.2), находя точку экстремума и вычисляя значение в этой точке, получим оценку

$$\dot{\theta} < \sqrt{h_1 - R^2} < \sqrt{h_1} < \varpi \quad (6.7)$$

Из рисунка 6.7 видно, что при больших угловых скоростях угол  $\theta$  совершает высокочастотные колебания. Это значит, что угловая скорость  $\dot{\theta}$  периодически обращается в ноль и фазовая траектория пересекает поверхность  $\dot{\theta} = 0$ . Поскольку осредненная сила  $\bar{F}_{ly}^o$  вычисляется на большом промежутке времени и рассматривается как характеристика всей фазовой траектории, при численном расчете осредненной силы на траектории будем рассматривать траектории, начинающиеся на поверхности  $\dot{\theta} = 0$ .

Предлагается следующий алгоритм поиска углового режима движения, для которого осредненная генерируемая ионная сила максимальна.

1. Генерируется набор из  $N$  начальных точек  $P_{0i} = (\gamma_{0i}, \theta_{0i}, G_{0i})$ , случайным образом расположенных в области фазового пространства, заданного неравенствами

$$0 \leq \gamma \leq 2\pi , \quad 0 < \theta < \pi , \quad -\varpi_{\max} \leq G \leq \varpi_{\max} . \quad (6.8)$$

Здесь  $i \in [1, N]$ . При выборе граничных угловых скоростей целесообразно ограничиться значением  $\varpi_{\max} = 7$  рад/с, что соответствует данным наблюдений, приведенным в [105].

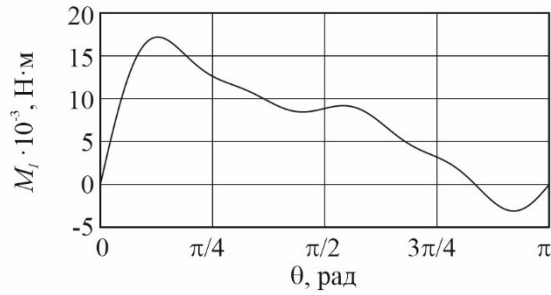
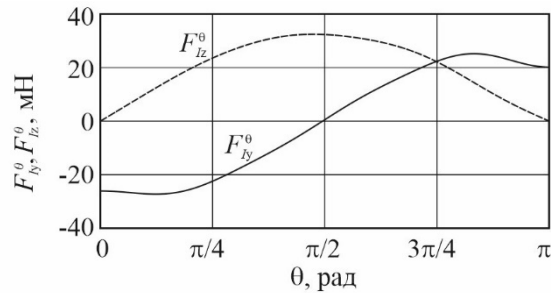
2. Для каждой точки  $P_{0i}$  вычисляется значение  $\varpi_i$  с помощью формулы (6.6).
3. Каждая точка  $P_{0i}$  используется в качестве начальных условий при интегрировании системы уравнений (3.108)-(3.111). Если  $\varpi_i \leq 10n$ , то интегрирование ведется до момента времени  $T_1$ . Если  $\varpi_i > 10n$ , то в процессе интегрирования отслеживается текущее значение  $G$  и интегрирование останавливается, когда переменная  $G$  второй раз принимает значение  $G_{0i}$ .
4. На основе результатов интегрирования с помощью формулы (6.1) вычисляется осредненная ионная сила  $\bar{F}_{lyi}^o$ , соответствующая начальной точке  $P_i$ .
5. Из полученного набора  $N$  значений  $\bar{F}_{lyi}^o$  выбирается  $K$  наибольших по модулю значений и формируется соответствующий набор точек  $P_j$ , где  $j \in [1, K]$ .

6. С помощью симплекс метода [104], который реализован в MATLAB командой FMINSEARCH, от каждой начальной точки  $P_j$  производится поиск оптимальной точки  $P_j^{opt}$ , которой соответствует наибольшее по модулю значение  $\bar{F}_{lyj}^o$  (вычисляется согласно шагам 3 и 4).
7. Из полученного на шестом шаге набора  $K$  значений  $\bar{F}_{lyj}^o$  выбирается наибольшее по модулю. Соответствующая ему точка  $P_j^{opt}$  принадлежит фазовой траектории, соответствующей наиболее эффективному для бесконтактной транспортировки режиму движения.

Следует отметить, что выбор конкретных значений  $N$  и  $K$  определяется доступными исследователю вычислительными ресурсами. Предлагаемый алгоритм хорошо распараллеливается. Для определения оптимального режима движения целесообразно последовательно проводить серии из  $N$  расчетов до тех пор, пока на протяжении нескольких серий наибольшее по модулю значение  $\bar{F}_{lyj}^o$  не перестанет улучшаться.

В качестве примера использования описанного выше алгоритма рассмотрим движение цилиндрического твердого тела на круговой орбите под действием ионного момента. Массово-геометрические характеристики рассматриваемого тела, параметры его орбиты и ионного потока приведены в таблице 6.1. Зависимости ионного момента и проекций ионных сил от угла  $\theta$ , полученные с помощью описанной в разделе 1.3 расчетной процедуры, показаны на рисунках 6.8 и 6.9. При вычислении ионной силы считалось, что ось потока направлена в центр масс цилиндра. В силу симметрии потока и обдуваемого им тела вектор генерируемого ионного момента перпендикулярен плоскости, образованной осью симметрии цилиндра и осью ионного потока  $B Y_b Z_5$  (рисунок 1.3). Вектора ионной силы и момента имеют в  $B X_4 Y_b Z_5$  координаты  $\mathbf{F}_I^5 = [0, F_{ly}^{\theta}, F_{lz}^{\theta}]^T$ . Для перевода их в орбитальную систему координат  $B X_o Y_o Z_o$  нужно воспользоваться матрицей поворота  $\mathbf{M}_{o5} = (\mathbf{M}_{5o})^T = (\mathbf{M}_{54} \mathbf{M}_{4o})^T$ , где  $\mathbf{M}_{54}$  и  $\mathbf{M}_{4o}$  определяются выражениями (3.12). Тогда проекции на оси орбитальной системы координат могут быть найдены как  $\mathbf{F}_I^o = \mathbf{M}_{o5} \mathbf{F}_I^5$

$$\begin{aligned}
 F_x^o &= F_{ly}^{\theta} \sin \theta \sin \gamma + F_{lz}^{\theta} \cos \theta \sin \gamma, \\
 F_{ly}^o &= F_{ly}^{\theta} \cos \theta - F_{lz}^{\theta} \sin \theta, \\
 F_{lz}^o &= F_{ly}^{\theta} \sin \theta \cos \gamma + F_{lz}^{\theta} \cos \theta \cos \gamma,
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Рисунок 6.8 – Зависимость ионного момента от угла  $\theta$ Рисунок 6.9 – Зависимость проекций ионной силы от угла  $\theta$ 

Примем  $\omega_{y,0} = 0.01$  рад/с. Этой угловой скорости соответствует  $R = 1.667 \cdot 10^{-3}$  рад/с. Проведем серию из 10 расчетов, используя описанный алгоритм. Выберем  $N = 1000$ ,  $K = 20$ ,  $T_1 = 10^5$  с. Расчеты показывают, что минимальное значение  $\bar{F}_{y^0}^o = -32.223 \cdot 10^{-3}$  Н наблюдается на фазовой траектории, начинающейся в точке  $P_{opt}$ , имеющей координаты

$$\gamma_0 = 5.156 \text{ рад}, \theta_0 = 2.366 \text{ рад}, \dot{\theta}_0 = 0, G_0 = 2.416 \cdot 10^{-3} \text{ рад/с}. \quad (6.10)$$

Этой траектории соответствует значение Гамильтониана (3.116)  $H = 6.802 \cdot 10^{-3}$  Дж, которое может быть использовано для идентификации траектории при разработке законов управления, обеспечивающих перевод тела в наиболее эффективный для ионной транспортировки угловой режим движения.

В разделе 6.1 показано, что случае плоского движения наиболее эффективным режимом является устойчивое положение равновесия. В случае пространственного движения, это не так. Согласно (3.96)-(3.98) для рассматриваемого тела

$$\gamma_* = 1.0124 \text{ рад}, \theta_* = 2.196 \text{ рад}, \dot{\theta}_* = 0, G_* = -6.968 \cdot 10^{-4} \text{ рад/с} \quad (6.11)$$

Этому положению равновесия соответствует осредненная сила  $\bar{F}_{y^0}^o = -31.966 \cdot 10^{-3}$  Н. Разница с силой на наиболее благоприятной траектории, которая проходит через точку (6.10), составляет  $2.57 \cdot 10^{-4}$  Н.



На рисунке 6.10 показаны графики зависимости осредненной силы от углов  $\gamma_0$  и  $\theta_0$ . Все траектории на рисунке 6.10 имеют начальные угловые скорости  $\dot{\theta}_0$  и  $G_0$ , соответствующие траектории (6.10). На рисунке 6.11 показаны соответствующие линии уровня и точка  $P_{opt}$ . Приведенные на рисунке 6.12 осредненные силы вычислялись на траекториях, начинавшихся в точках, имеющих значения  $\gamma_0$  и  $\theta_0$  приведенные в (6.10). Расчеты показывают, что минимальные и максимальные значения наблюдаются при небольших начальных угловых скоростях. Для рассматриваемого случая разница между максимальной и минимальной осредненной силой составляет величину около 7%. Из рисунка 6.12 видно, что вне зоны  $\varpi < 100n$  при увеличении модуля  $G_0$  средняя сила стремится к предельному значению  $\bar{F}_{ly}^o = -31.829 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}$ , которое лежит между максимальным и минимальным значением силы в зоне  $\varpi < 10n$ . В связи с этим, при поиске наиболее благоприятного углового режима движения целесообразно особое внимание уделить области небольших угловых скоростей  $\varpi < 10n$ .

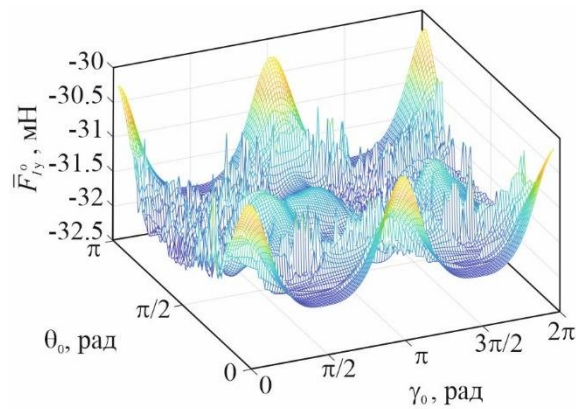


Рисунок 6.10 - Зависимость осредненной ионной силы от углов  $\gamma_0$  и  $\theta_0$  при

$$G_0 = 2.416 \cdot 10^{-3} \text{ рад/с}$$

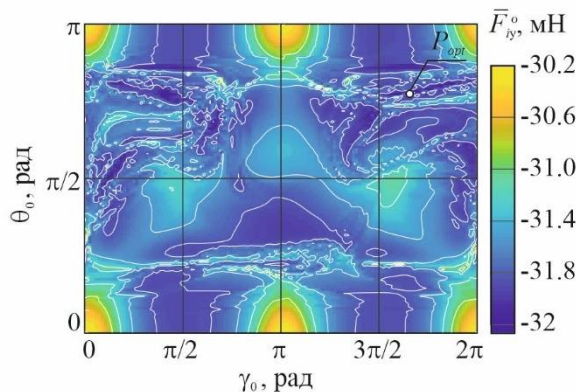


Рисунок 6.11 - Линии уровня для зависимости осредненной ионной силы от углов  $\gamma_0$  и  $\theta_0$

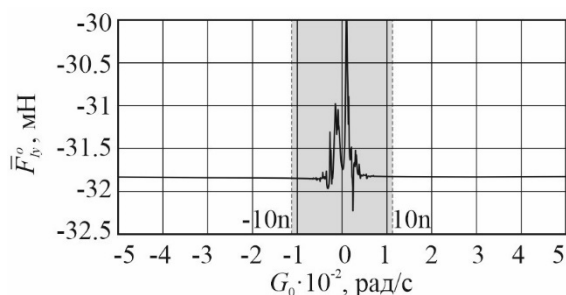


Рисунок 6.12 - Зависимость осредненной ионной силы от  $G_0$  при  $\gamma_0 = 5.156$  рад,  $\theta_0 = 2.366$  рад

На рисунке 6.13 показаны графики зависимостей, полученные для найденной оптимальной точки  $P_{opt}$ . Колебания по переменным  $\theta$  и  $G$  близки к периодическим. На рисунке 6.14 показана траектория точки пересечения оси симметрии цилиндра со сферой, центр которой совпадает с центром масс цилиндра. Траектория близка к замкнутой.

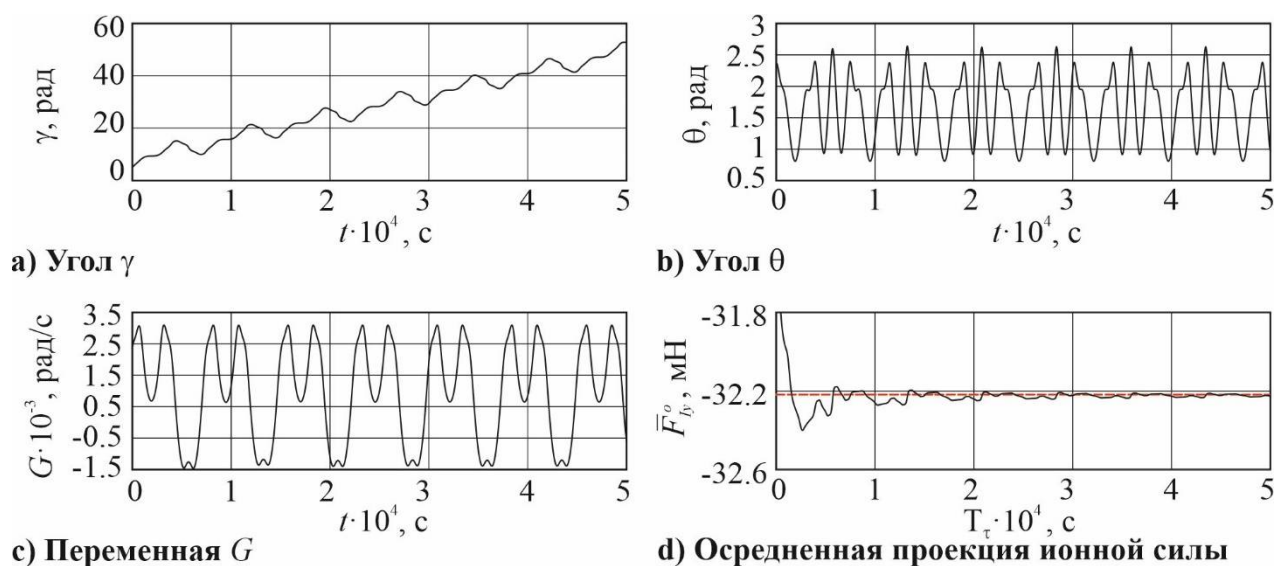


Рисунок 6.13 - Результаты интегрирования для начальных условий (6.10)

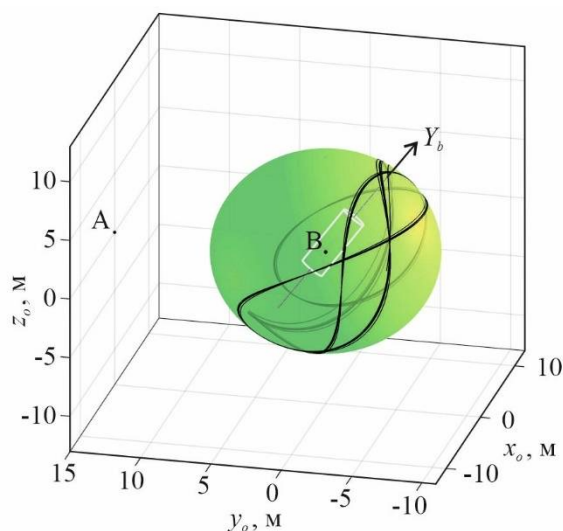


Рисунок 6.14 - Траектория точки пересечения оси симметрии цилиндра со сферой

## 7 Оценка эффективности предложенных методов и законов управления для проблемы увода космического мусора

В данной главе проводятся оценки эффективности использования разработанных методов и законов управления при бесконтактной транспортировке цилиндрического тела в плоском случае движения. В качестве критерия эффективности используется масса топлива, требуемая для осуществления транспортной операции. Сравняются четыре стратегии транспортировки: без управления угловым движением транспортируемого твердого тела, управление с целью перевода в положение равновесия, управление с целью перевода в режим движения с максимальной по модулю усредненной ионной силой, управление с целью перевода в положение с максимальной по модулю ионной силой. Для повышения эффективности системы предлагается использовать несколько ионных потоков, генерируемых несколькими электрореактивными двигателями. Для управления угловым движением транспортируемого тела предлагается два метода управления: релейное управление двигателями и управление направлением оси ионного потока одного из двигателей. Производится расчет временных затрат и масс топлива, необходимых для транспортировки тела при использовании различного числа двигателей и различных методов управления.

Результаты данной главы опубликованы в работах автора [11, 14, 18].

### 7.1 Затраты топлива при использовании различных стратегий управления

Рассмотрено плоское движение системы, состоящей из активного космического аппарата и объекта космического мусора. Объект космического мусора представляет собой твердое тело цилиндрической формы. Движение системы описывается уравнениями (3.28)-(3.32). Для дальнейшего анализа запишем уравнение невозмущенного движения твердого тела. Под невозмущенным движением понимается движение тела по круговой орбите, при котором космический аппарат сохраняет неизменными свое относительное положение и угловую ориентацию. В этом случае

$$r = const, \dot{f} = \omega = const, x = const, y = const, \beta = const,$$

и колебания объекта космического мусора описываются уравнением

$$\ddot{\theta} + \frac{3\mu(I_y - I_x) \sin \theta \cos \theta}{r^3 I_z} = \frac{M_{I_z}(\theta, \alpha, x, y)}{I_z}, \quad (7.1)$$

где  $\alpha = \beta + \gamma$  – угол между осью ионного потока и линией, соединяющей центры масс космического аппарата и объекта космического мусора (рисунок 7.1),  $\gamma = \arctan(x/y)$ .

Уравнение (5.124) можно проинтегрировать и привести к виду

$$E(\theta, \dot{\theta}, \alpha, x, y) = \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{\int M_{Iz}(\alpha, x, y) d\theta}{I_z} - \frac{3\mu(I_y - I_x)}{4r^3 I_z} \cos 2\theta, \quad (7.2)$$

где  $E$  – энергия колебаний космического мусора, сохраняющая свое значение на каждой фазовой траектории. Положения равновесия  $\theta_*$  уравнения (7.1) являются корнями нелинейного уравнения

$$3\mu(I_y - I_x) \sin \theta_* \cos \theta_* - r^3 M_{Iz}(\theta_*, \alpha, x, y) = 0. \quad (7.3)$$

Поскольку в уравнение входит радиус орбиты  $r$ , положения равновесия меняются при спуске объекта.

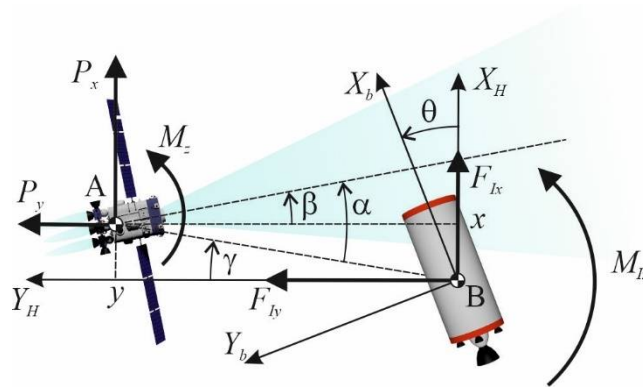


Рисунок 7.1 - Схема бесконтактной транспортировки космического мусора

Для перевода космического аппарата в требуемую точку относительно транспортируемого твердого тела и перевода его в требуемое угловое положение предлагается использовать следующие линейные законы управления двигателями:

$$P_x = k_x(x_0 - x) - k_{dx}\dot{x}, \quad P_y = k_{y0} + k_y(y_0 - y) - k_{dy}\dot{y}, \quad (7.4)$$

$$M_z = k_\beta(\beta_0 - \beta) - k_{d\beta}\dot{\beta}, \quad (7.5)$$

где  $k_j$  – коэффициент управления,  $x_0$ ,  $y_0$  – координаты, определяющие требуемое относительное положение активного космического аппарата в орбитальной системе координат, связанной с транспортируемым телом,  $\beta_0$  – угол, соответствующий требуемой ориентации космического аппарата. Численные расчеты показали, что переориентация КА для изменения направления оси ионного потока с помощью управления (7.5) является малоэффективным решением, так как переориентация сравнительно тяжелого космического аппарата требует значительного времени и существенно увеличивает затраты топлива. Для решения этой проблемы предлагается разместить генерирующий ионный поток транспортировочный двигатель и компенсационный двигатель на подвижной платформе и изменять направление

ионного потока с помощью электродвигателя. При моделировании предполагается, что электродвигатель поворачивает платформу по следующему закону

$$\beta = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{\beta_f - \beta_0}{2} \cos\left(\frac{(t-t_0)\pi}{t_f-t_0}\right) + \beta_0, & \text{при } \beta_f > \beta_0; \\ \frac{1}{2} - \frac{\beta_f - \beta_0}{2} \cos\left(\frac{(t-t_0)\pi}{t_f-t_0}\right) + \beta_f, & \text{при } \beta_f < \beta_0; \end{cases} \quad (7.6)$$

где  $t_0$  и  $t_f$  – начальное и конечное время, соответствующее моментам включения и выключения электродвигателя соответственно,  $\beta_0$  и  $\beta_f$  – начальный и конечный угол наклона оси ионного потока.

Поскольку сила, создаваемая ионными двигателями, ограничена, при моделировании предлагается сглаживать силу тяги по закону

$$P_{\text{limi}} = \begin{cases} P_i, & \text{if } P_i \leq p_1; \\ p_2 \sin\left(\frac{P_i - p_1}{p_2}\right) + p_1, & \text{if } p_1 < P_i < p_1 + \frac{\pi p_2}{2}; \\ p_1 + p_2; & \text{if } P_i \geq p_1 + \frac{\pi p_2}{2}; \end{cases} \quad (7.7)$$

где  $P_i$  – значение силы тяги, рассчитанное по уравнениям (7.4),  $P_{\text{limi}}$  – максимально допустимая сила тяги,  $p_1$  и  $p_2$  – коэффициенты, определяющие сглаживание (рисунок 7.2).

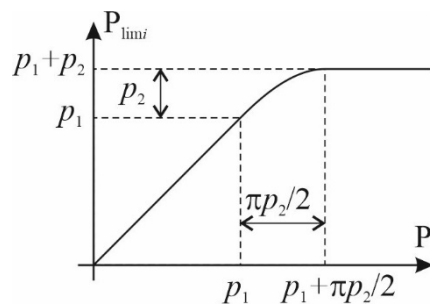


Рисунок 7.2 – Сглаживание силы тяги

Рассмотрим несколько стратегий управления движением объекта космического мусора относительно центра масс в процессе его бесконтактной транспортировки (рисунок 7.3). Первая стратегия не учитывает движение объекта космического мусора относительно его центра масс. Система управления космического аппарата удерживает его в точке с координатами  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = d$ , а ось ионного потока направлена в центр масс объекта. Эта стратегия использовалась во многих исследованиях [61–63,106].

Вторая стратегия предполагает стабилизацию объекта космического мусора в положении равновесия  $\theta_{c1}$  и последующую его транспортировку в этом положении. Стабилизация может осуществляться как за счет изменения тяги передающего импульса двигателя, так и за счет изменения направления оси ионного потока. Как показано в разделе 5.2.4, второй метод намного эффективнее с точки зрения минимизации требуемого для стабилизации времени. Для управления направлением оси ионного потока предлагается использовать подход, описанный в разделе 5.2.4. Активный космический аппарат смещен с оси  $BY_H$  на угол  $\gamma$  так, чтобы ионная сила лежала на оси  $BY_H$ . Для этого координаты активного космического аппарата должны быть  $x = d \sin \gamma$ ,  $y = d \cos \gamma$ .

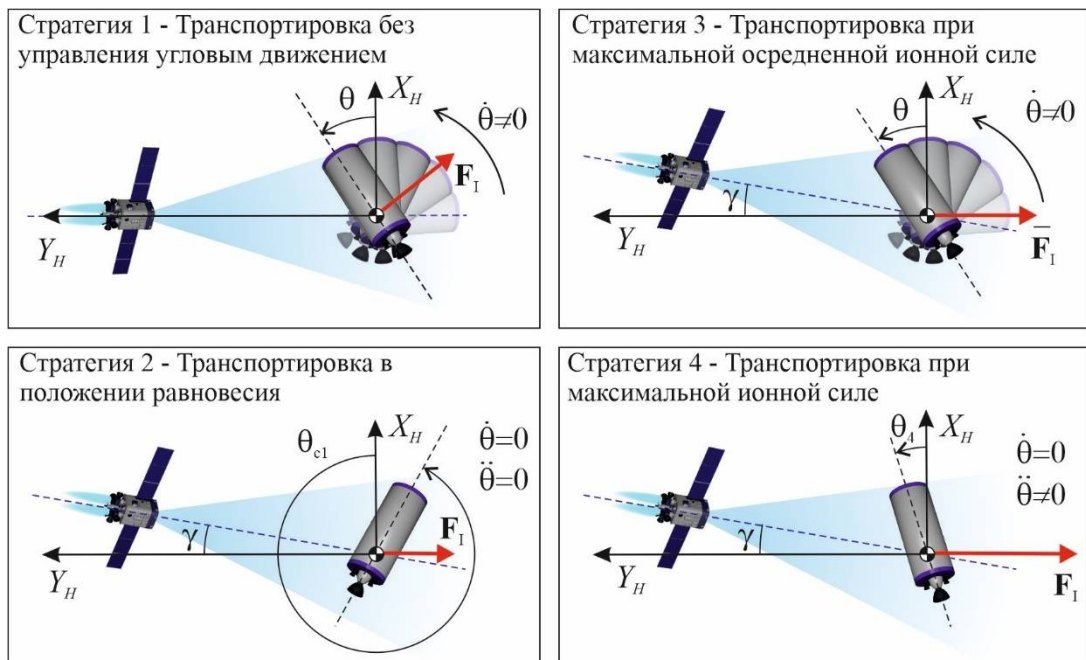


Рисунок 7.3 – Стратегии управления угловым движением космического мусора

Третья стратегия предполагает транспортировку объекта космического мусора в режиме угловых колебаний, при котором осредненная за период колебаний ионная сила максимальна. Как и в предыдущем случае, положение космического аппарата выбирается так, чтобы усредненная сила лежала на оси  $BY_H$  (рисунок 7.3).

Четвертая стратегия предполагает стабилизацию космического мусора в угловом положении  $\theta = \theta_4$ , соответствующем максимальной по модулю ионной силе. Поскольку это положение не является положением равновесия, объект космического мусора необходимо будет периодически возвращать в это положение, изменяя направление оси ионного потока.

Относительное положение космического аппарата выбирается так, чтобы ионная сила лежала на оси  $BY_H$  (рис. 5.68).

Для четвертой стратегии предлагается следующий подход к управлению. Сначала с помощью закона управления, описанного в разделе 5.2.4, изображающая точка переводится на фазовую траекторию, проходящую через точку  $\theta = \theta_4$ ,  $\dot{\theta} = 0$  (точка 4 на рисунке 7.4). Так как  $\theta = \theta_4$  не является положением равновесия, то через некоторое время изображающая точка покинет окрестность этой точки и угол  $\theta$  отклонится от значения  $\theta_4$  на  $\Delta\theta$ . В это время необходимо снова включить управление и перевести изображающую точку на фазовую траекторию, проходящую через точку  $\theta = \theta_4$ ,  $\dot{\theta} = 0$ . Эти действия необходимо повторять, чтобы удерживать космический мусор вблизи положения  $\theta_4$ .

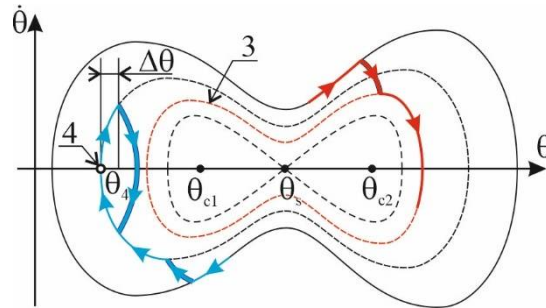


Рисунок 7.4 – Фазовый портрет уравнения (7.1) для четвертой стратегии управления

В качестве примера рассмотрим увод с орбиты цилиндрического твердого тела близкого по массово-геометрическим параметрам к разгонному блоку SL-8 «Космос» (таблица В.9 в [107]). Параметры тела указаны в таблице 7.1. Для расчета затрат топлива используем методологию, описанную в разделе 1.4. Активный космический аппарат имеет массу  $m_A = 450\text{kg}$  и моменты инерции  $I_{Ax} = 1000\text{кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $I_{Ay} = 2000\text{кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $I_{Az} = 2500\text{кг}\cdot\text{м}^2$ . Двигатели и ионный поток космического аппарата имеют следующие параметры [108]: сила тяги  $F_{\min} = 0.0496\text{Н}$ ,  $F_{\max} = 0.209\text{Н}$ , расход  $\dot{m}_{\min} = 2.29\cdot 10^{-6}\text{кг/с}$ ,  $\dot{m}_{\max} = 5.21\cdot 10^{-6}\text{кг/с}$ , электрическая мощность  $p_{\min} = 1080\text{Вт}$ ,  $p_{\max} = 6075\text{Вт}$ . Подстановка этих величин в (1.30), (1.31) позволяет вычислить коэффициенты:

$$a = 1.5135\cdot 10^{-3}\text{Н}, b = 3.1912\cdot 10^{-5}\text{Н/Вт}, a' = 1.6586\cdot 10^{-6}\text{кг/с}, b' = 5.8458\cdot 10^{-10}\text{кг}\cdot\text{с}^{-1}\text{Вт}^{-1}, c' = 0.$$

Угол расходимости ионного потока  $\alpha_0 = 15^\circ$ , расстояние между центрами масс космического аппарата и объекта космического мусора  $d = 15\text{м}$ . Предполагается, что транспортировочный двигатель создает постоянную тягу  $F_T = 0.2\text{Н}$ . Уравнения (1.38) и (1.22) дают для осевой

скорости в этом случае  $u_0 = 39642 \text{ м/с}$ . Концентрация ионного потока, согласно уравнению (1.41), для  $R_T = 0.2 \text{ м}$  и массы иона  $m_i = 2.18 \cdot 10^{-25} \text{ кг}$  равна  $n_0 = 4.6457 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-3}$ . Коэффициенты закона управления (7.4) примем  $k_x = k_y = 1000 \text{ кг/с}^2$ ,  $k_{dx} = k_{dy} = 100 \text{ кг/с}$ ,  $k_{y0} = -0.28 m_A / m_B$ . Коэффициенты закона сглаживания (7.7) примем равными  $p_1 = 0.03 \text{ Н}$  и  $p_2 = 0.01 \text{ Н}$ .

Таблица 7.1 – Параметры космического мусора

Параметр	Значение	Параметр	Значение
Номер объекта в каталоге USSTRATCOM	1575	Сухая масса $m_A$	1435 кг
Высота перигея	1368200 м	Длина	6 м
Высота апогея	1517000 м	Диаметр	2.4 м
Эксцентриситет	0.009522	Смещение центра масс	0.5 м
Параметр орбиты	7812892 м	Продольный момент инерции $I_x$	1300 кг м <sup>2</sup>
Наклонение орбиты	56.1°	Поперечные моменты инерции $I_y, I_z$	6800 кг м <sup>2</sup>

Расчет ионной силы и момента проводился по методике, описанной в разделе 1.3. На рисунке 7.5 приведены графики зависимостей проекций ионной силы  $F_{Ix}$ ,  $F_{Iy}$  на оси орбитальной системы координат, а также модуль ионной силы  $F_I = \sqrt{F_{Ix}^2 + F_{Iy}^2}$ . На рисунке 7.5 также показана кривая  $10F_{Ix}$ , чтобы более наглядно продемонстрировать зависимость  $F_{Ix}(\theta)$  в выбранном масштабе. Максимальная ионная сила составляет  $F_{I_{\max}} = 0.0329 \text{ Н}$ . Эта сила соответствует угловому положению  $\theta_4 = 0.4363 \text{ рад}$ . Чтобы сила была направлена вдоль оси  $BY_H$ , космический аппарат должен находиться в точке с координатами  $x = 14.9971 \text{ м}$ ,  $y = 0.2941 \text{ м}$ . В этом случае  $\gamma = \arctan(-F_{Ix} / F_{Iy}) = 0.0196 \text{ рад}$ . Графики ионного момента от угла для случаев  $\beta = 0$ ,  $\beta = \beta_{\min}$  и  $\beta = \beta_{\max}$  показаны на рисунке 7.6. Для рассматриваемого объекта космического мусора получены следующие углы отклонения оси ионного потока:  $\beta_{\min} = 11^\circ$ ,  $\beta_{\max} = -11^\circ$ . Рисунок 7.7 демонстрирует зависимости положений равновесия  $\theta_{c1}$ ,  $\theta_{c2}$  и углов  $\theta_{31}$ ,  $\theta_{32}$ , соответствующих максимальной осредненной силе, от высоты орбиты, где  $R_3$  – радиус Земли. При расчете этих положений угол  $\gamma$ , задающий относительное положение космического аппарата, выбирался так,



чтобы ионная сила лежала на оси  $B\Upsilon_0$ . Соответствующие графики для углов  $\gamma$  показаны на рисунке 7.8.

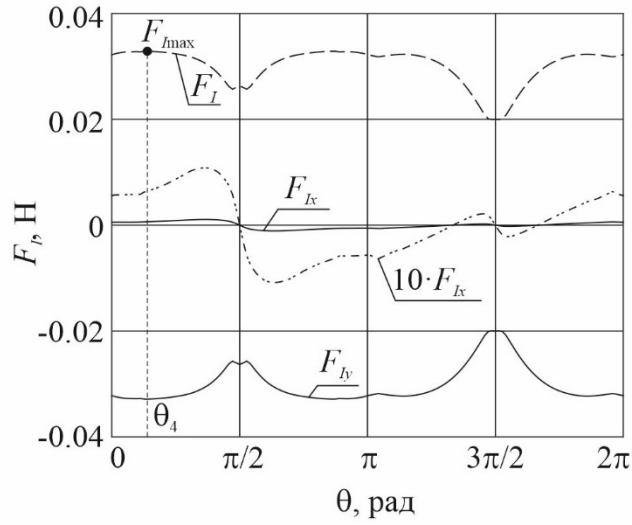


Рисунок 7.5 – Зависимость проекций ионной силы от угла  $\theta$

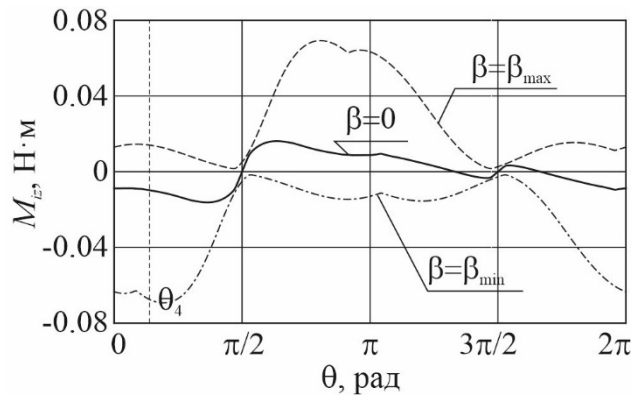


Рисунок 7.6 – Зависимость ионного момента от угла  $\theta$  для разных значений  $\beta$

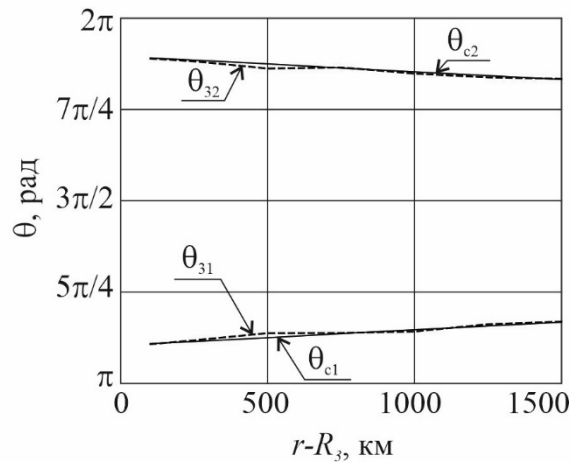


Рисунок 7.7 – Зависимость устойчивых положений равновесия  $\theta_{c1}$ ,  $\theta_{c2}$  и углов  $\theta_{31}$ ,  $\theta_{32}$  от высоты орбиты.

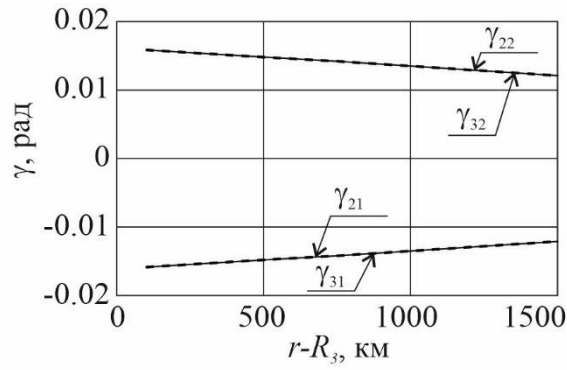


Рисунок 7.8 – Зависимость изменения углов  $\gamma$  от высоты орбиты для стратегий 2 и 3

Фазовый портрет невозмущенного уравнения (7.1) для случая  $r = 7812900$  м и  $\gamma = 0$  показан на рисунке 7.9. Соответствующая усредненная сила показана на рисунке 7.10. Алгоритм построения этого графика описан в разделе 6.1. Для рассматриваемого объекта точка, соответствующая максимальной осредненной ионной силе  $\bar{F}_I = 0.0323$  Н, совпадает с центром  $\theta_3 = 3.5966$  рад. Вторая и третья стратегии управления предполагают перемещение космического аппарата в точку, для которой ионная сила или усредненная ионная сила направлена вдоль оси  $BX_H$ . Сравнение положений равновесия и точек, соответствующих максимальной осредненной силе, показано на рисунке 7.7.

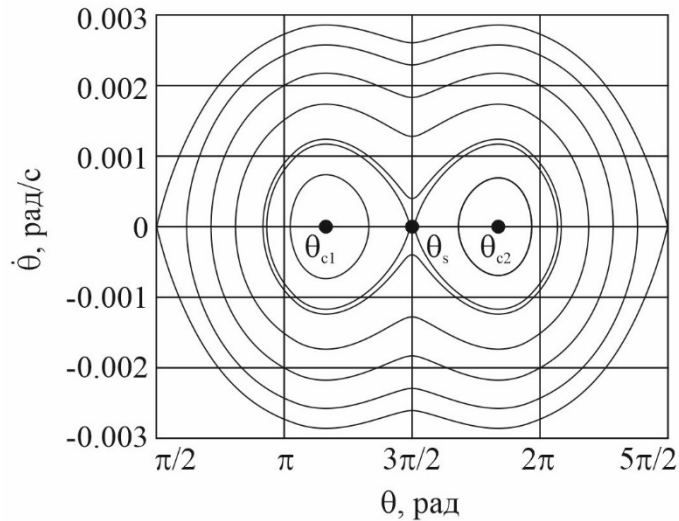


Рисунок 7.9 – Фазовый портрет для  $r = 7812900$  м

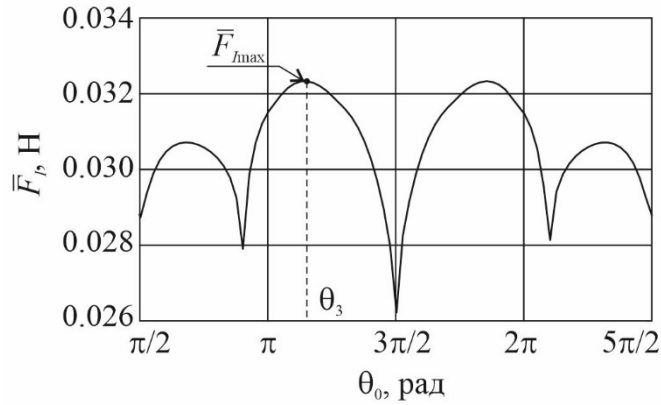


Рисунок 7.10 – Зависимость осредненной ионной силы  $\bar{F}_i$  от угла  $\theta_0$

Проведем численное моделирование бесконтактной транспортировки тела при использовании различных стратегий управления. Для моделирования будем использовать систему уравнений (3.28)-(3.32). Ограничимся рассмотрением уменьшения перигея орбиты на 50 км. Выбор такого небольшого уменьшения высоты для анализа обусловлен большими вычислительными затратами, необходимыми для расчетов. Используются следующие начальные условия

$$r(0) = 7739199 \text{ м}, \dot{r}(0) = 0, f(0) = 0, \dot{f}(0) = 9.229 \cdot 10^{-4} \text{ рад/с}, \theta(0) = 3.8442 \text{ рад}, \dot{\theta}(0) = 0,$$

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, y(0) = 15 \text{ м}, \dot{y}(0) = 0, \beta(0) = 0, \dot{\beta}(0) = 0.$$

Также рассмотрим неуправляемый спуск (стратегия 1), когда начальный угол отклонения соответствует траектории с минимальной осредненной ионной силой  $\theta(0) = 3\pi/2 \approx 4.7124$  рад. Ожидается, что это будет наихудший случай с точки зрения времени и расхода топлива. Была проведена серия расчетов с различными начальными условиями, результаты которой приведены в таблице 7.2. Результаты моделирования показывают, что первая стратегия наиболее эффективна, если объект космического мусора изначально находится в положении равновесия (строка 3 в таблице 7.2). По мере постепенного уменьшения радиуса орбиты фазовая траектория будет удаляться от положения равновесия (рисунок 7.8), что приведет к увеличению расхода топлива на больших интервалах времени. Вторая стратегия, предполагающая транспортировку объекта космического мусора в положении равновесия, эффективна, когда космический мусор изначально не стабилизирован в положении равновесия. Поскольку изменение направления оси ионного потока осуществляется электродвигателями, необходимая постоянная коррекция углового положения ступени не приводит к увеличению расхода топлива. Расход топлива при второй и третьей стратегиях управления совпадает, так как фазовая траектория, на которой действует максимальная усредненная сила, очень близка к положению равновесия (рисунок 7.7).

Стабилизация транспортируемого объекта в положении равновесия позволяет значительно снизить расход топлива по сравнению с использованием первой стратегии (до 11,6 % по данным, приведенным в строках 1 и 4 таблицы 7.2), не предполагающей управления угловым перемещением объекта. Если в начале транспортировки объект уже находится вблизи положения равновесия, выигрыш не столь очевиден. Сравнение строк 2 и 5 таблицы показывает, что экономия топлива составляет всего 0.2%. Поэтому целесообразно перед началом транспортной миссии стабилизировать объект космического мусора в устойчивом положении равновесия, а затем время от времени корректировать угловые колебания ступени, возвращая ее в положение равновесия. Расчеты показали, что четвертая стратегия неэффективна (строки 10-12 таблицы 7.2). Хотя угол  $\theta_4$  соответствует максимальной ионной силе, примерно половину времени транспортировки система находится в режиме, когда изображающая точка возвращается в окрестность точки  $\theta_4$ . При этом ось ионного потока отклоняется на угол  $\beta_{\min}$  или  $\beta_{\max}$ , что приводит к значительному уменьшению генерируемой ионной силы. Время и расход топлива при различных начальных угловых положениях космического мусора в рамках одной и той же стратегии управления (кроме стратегии 1) оказываются близкими, так как переход от начального к требуемому угловому положению происходит за сравнительно короткое время. Например, для второй стратегии с начальным положением, показанным в строке 4 таблицы 7.2, переход в окрестность положения равновесия занимает 42 минуты.

На рисунке 7.11 показана фазовая траектория на начальном этапе движения в случае использования различных стратегий управления. Видно, что траектории не являются периодическими. Это связано с тем, что орбита центра масс не круговая, а ее радиус меняется при транспортировке. На рисунок 7.12 показано изменение радиуса перицентра орбиты при спуске. Графики для первой и второй стратегий оказываются очень близкими, когда объект космического мусора изначально находится в положении равновесия. На рисунке 7.13 показано изменение силы тяги двигателей космического аппарата на начальном этапе транспортировки для стратегии 2. Периодические всплески силы вызываются поворотом оси ионного потока (рисунок 7.14) для стабилизации ступени в положении равновесия. Видно, что стратегия управления предполагает достаточно частую корректировку углового положения транспортируемого объекта.

Таблица 7.2 - Сравнение затрат на топливо для различных стратегий управления при уменьшении радиуса перигея орбиты космического мусора на 50 км

	Стратегия управления	Начальное значение угла $\theta(0)$ , рад	Время транспортировки, $t_k$ , часов	Общие затраты топлива, $m_{prop}$ , кг
1	1	4.7124	332.5624	13.9339
2	1	3.8442	293.6431	12.3247
3	1	3.6442	292.1181	12.2605
4	2	4.7124	293.3749	12.3131
5	2	3.8442	293.1618	12.3044
6	2	3.6442	293.1517	12.3040
7	3	4.7124	293.3877	12.3131
8	3	3.8442	293.1765	12.3044
9	3	3.6442	293.1601	12.3040
10	4	4.7124	467.0538	20.3431
11	4	3.8442	466.9007	20.0813
12	4	3.6442	466.8918	20.0805

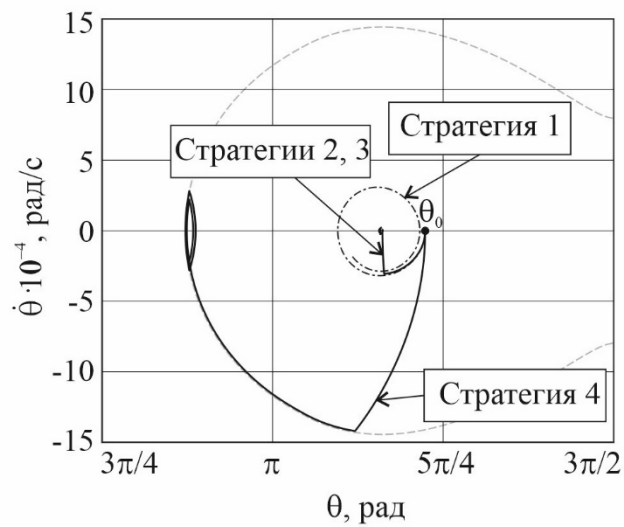


Рисунок 7.11 - Фазовые траектории на начальном этапе транспортировки для  $\theta_0 = 3.8442$  рад

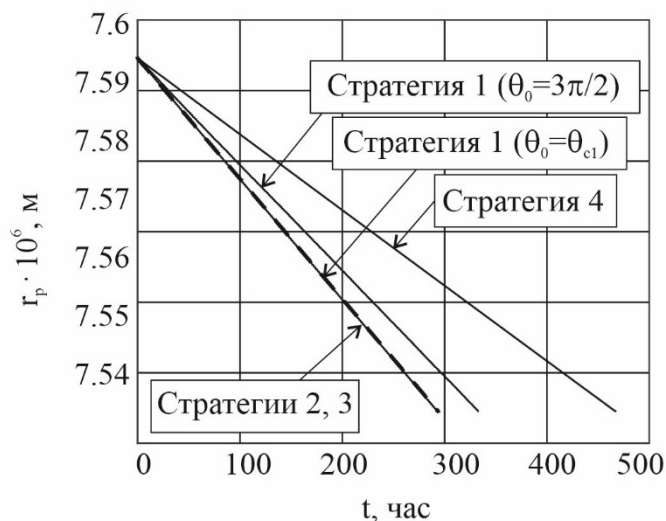


Рисунок 7.12 – Радиус перигея орбиты в случае использования различных стратегий управления

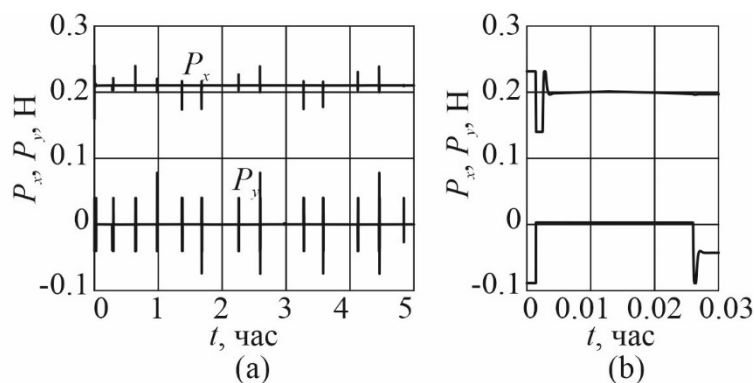


Рисунок 7.13 – Сила тяги двигателей активного космического аппарата для стратегии 2

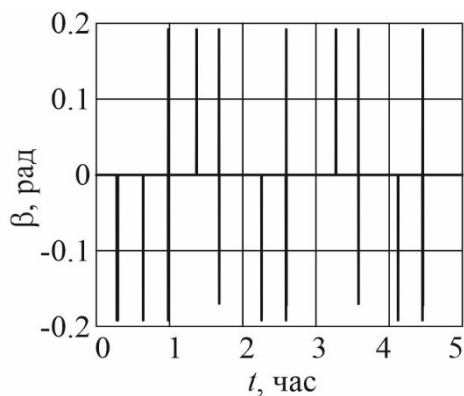


Рисунок 7.14 -Изменение направления оси ионного потока для стратегии 2

Расчеты показали, что при неблагоприятных начальных условиях управление угловым движением может оказывать заметное влияние на расход топлива. Для случая, когда объект космического мусора не находится в положении равновесия, наиболее предпочтительной с точки зрения минимизации расхода топлива является вторая стратегия. Четвертая стратегия оказалась

неэффективной из-за необходимости постоянно возвращать транспортируемый объект в угловое положение, соответствующее максимальной ионной силе. Следует отметить, что даже при использовании наиболее эффективных стратегий управления расход топлива достаточно высок. В первую очередь это связано с низким значением коэффициента эффективности передачи импульса  $\eta_B$ . При заданных параметрах двигателя и взаимном расположении активного космического аппарата и космического мусора значительная часть частиц ионного потока проходит мимо объекта космического мусора и не участвует в генерации ионной силы. Уменьшение расстояния между активным космическим аппаратом и целевым объектом космического мусора и уменьшение угла расходимости потока  $\alpha_0$  позволяют повысить эффективность передачи импульса.

## **7.2 Повышение эффективности системы транспортировки при использовании нескольких двигателей**

Одним из основных недостатков рассматриваемого способа бесконтактной транспортировки ионным потоком является относительно небольшая величина генерируемой на поверхности транспортируемого тела ионной силы. Низкое значение ионной силы приводит к тому, что транспортировка занимает довольно много времени. Медленная транспортировка повышает вероятность столкновения транспортируемого тела с другим космическим мусором при прохождении через сильно загрязненные высоты. Согласно существующим рекомендациям [33], спуск космического мусора на Землю не должен представлять опасности для людей или имущества. Спуск с орбиты крупного космического мусора подразумевает контролируемый вход в атмосферу, для реализации которого генерируемая ионная сила может оказаться недостаточно большой. Величина этой силы может быть увеличена за счет повышения скорости истечения ионов или увеличения их концентрации, что требует модернизации используемых ионных двигателей. Для решения этой проблемы предлагается использовать нескольких ионных потоков, генерируемых разными двигателями активного космического аппарата [14]. Помимо увеличения генерируемой силы, использование нескольких потоков создает дополнительные возможности для управления угловым движением транспортируемого тела. Следует отметить, что использование нескольких ионных двигателей для генерации ионного потока описано в [109], где было проведено моделирование увода крупногабаритного космического мусора с геостационарной орбиты на расположенную на 300 км выше орбиту захоронения с помощью активного космического аппарата, оснащенного четырьмя ионными двигателями.

Исследуем возможность использования нескольких ионных потоков для транспортировки твердого тела с учетом особенностей его движения относительно центра масс. Рассмотрим плоский случай движения и сравним уборку космического мусора с низкой околоземной орбиты при использовании одного, двух и трех транспортировочных двигателей. Для управления угловым положением тела используем закон управления, описанный в разделе 5.2.4. Предполагается, что взаимное влияние пересекающихся ионных потоков незначительно из-за малой концентрации частиц в потоке и высокой скорости их распространения. Согласно результатам моделирования, приведенным в [47], влияние плазмы, окружающей космический аппарат и транспортируемое тело, на величину генерируемой ионной силы пренебрежимо мало, поскольку ионный поток действует как потенциальный барьер для ионов окружающей плазмы. Движение рассматриваемой механической системы описывается системой дифференциальных уравнений (3.28)-(3.32).

Основное отличие от случая одного транспортировочного ионного двигателя заключается в вычислении ионной силы и момента. Общее влияние  $N$  ионных потоков можно найти, используя геометрическую сумму

$$\mathbf{F}_I = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{Ij}(x, y, \theta, x_{Tj}, y_{Tj}, \beta_j), \quad \mathbf{M}_I = \sum_{j=1}^N \mathbf{M}_{Ij}(x, y, \theta, x_{Tj}, y_{Tj}, \beta_j), \quad (7.8)$$

где  $\mathbf{F}_{Ij}$  – вектор силы, создаваемой ионным потоком  $j$ -го двигателя,  $\mathbf{M}_{Ij}$  – вектор ионного момента, создаваемого  $j$ -м двигателем,  $x_{Tj}$  и  $y_{Tj}$  – координаты источника  $j$ -го ионного потока (точка  $P_j$  на рисунке 7.15),  $\beta_j$  – угол отклонения оси ионного потока от линии, соединяющей центр масс космического мусора и  $j$ -й двигатель (рис. 7.15). Проекции ионной силы на оси орбитальной системы отсчета находятся как

$$F_{Ix} = \sum_{j=1}^N (F_{Ijx} \cos \gamma_j + F_{Ijy} \sin \gamma_j), \quad F_{Iy} = \sum_{j=1}^N (F_{Ijy} \cos \gamma_j - F_{Ijx} \sin \gamma_j), \quad (7.9)$$

где  $\cos \gamma_j = \frac{y_{Ti}}{\sqrt{x_{Ti}^2 + y_{Ti}^2}}$ ,  $\sin \gamma_j = \frac{x_{Ti}}{\sqrt{x_{Ti}^2 + y_{Ti}^2}}$ , проекции силы  $F_{Ijx}$  и  $F_{Ijy}$  рассчитаны для случая одиночного  $j$ -го двигателя, когда активный космический аппарат имеет координаты  $x = 0$ ,  $y = \sqrt{x_{Tj}^2 + y_{Tj}^2}$  (рисунок 7.15b).

В разделе 5.4.2 было показано, что для управления угловым движением космического мусора наиболее эффективным методом является изменение направления оси ионного потока. Контролируемое отклонение оси потока позволяет создавать ионный момент, стремящийся повернуть тело в нужном направлении. Применительно к активному космическому аппарату,



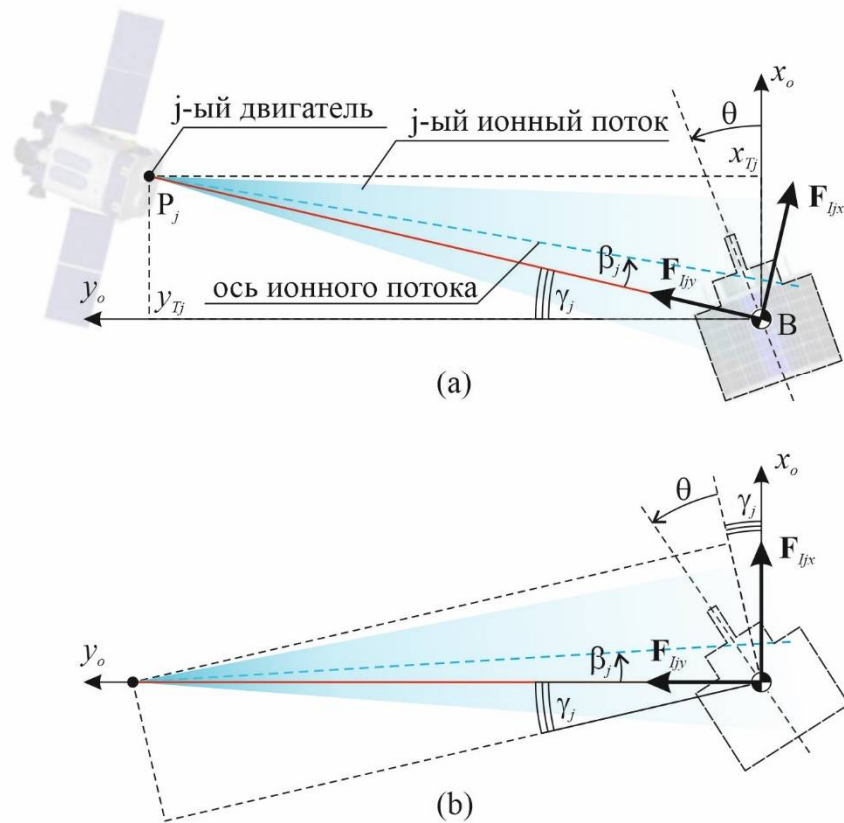


Рисунок 7.15 – Компоненты ионной силы для  $j$ -го двигателя

оснащенному несколькими транспортировочными двигателями, можно предложить несколько методов управления:

- 1) релейное управление, основанное на включении и выключении одного из двигателей;
- 2) изменение направления оси одного из двигателей при сохранении направления осей других двигателей.

Вне зависимости от того, какой метод используется, в конечном итоге система переводится в одно из двух состояний, которые характеризуются знаком создаваемого результирующего ионного момента во всем диапазоне углов (рисунок 7.16). После перевода транспортируемого тела в требуемый режим углового движения активный космический аппарат переходит в транспортный режим, предполагающий использование всех транспортировочных двигателей. Для моделирования управляемого движения будем использовать закон управления, описанный в разделе 5.2.4.

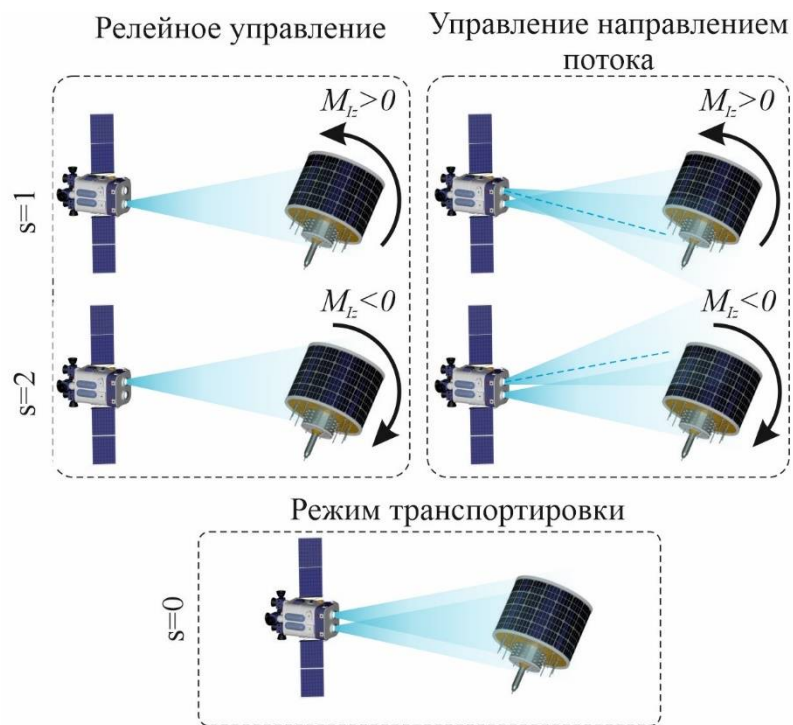


Рисунок 7.16 – Методы управления

Для оценки эффективности использования нескольких ионных потоков для решения задачи уборки космического мусора проведем моделирование бесконтактной транспортировки цилиндрического тела без управления его ориентацией. Предполагается, что на протяжении всей транспортировки ось всех транспортировочных двигателей проходит через центр масс тела. Система управления космического аппарата удерживает его в неизменном относительном положении  $x=0$ ,  $y=15$  м. Плоскость, на которой расположены сопла транспортировочных двигателей, перпендикулярна линии АВ, соединяющей центры масс активного космического аппарата и твердого тела (рисунок 7.17).

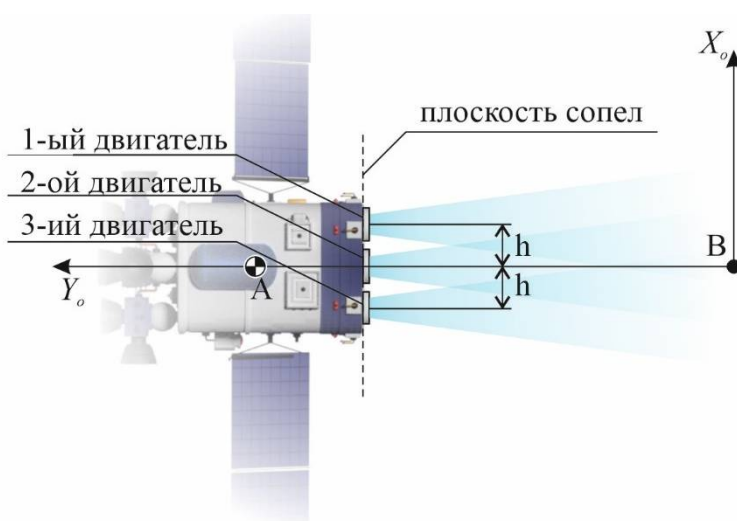


Рисунок 7.17 – Расположение двигателей

Рассмотрим различные случаи, когда действующий космический аппарат оснащен одним, двумя или тремя двигателями (таблица 7.3). Расположение сопел двигателей показано на рисунке 7.17. Смещение первого и третьего двигателей от центральной оси составляет  $h = 0.5$  м. В третьем столбце таблицы 7.3 указано, какое положение двигателей соответствует каждому из рассмотренных случаев. В расчетах будем ориентироваться на ионный двигатель NASA Evolutionary Xenon Thruster Commercial (NEXT-C) [110], параметры которого приведены в таблице 7.4. Необходимые для расчета ионной силы параметры ионного потока также приведены в этой таблице. Для их расчета были использованы формулы (1.38)-(1.42). Угол расходимости ионного потока принят равным  $10^\circ$ . В статье [111] описаны лабораторные испытания одновременной работы трех двигателей NEXT. Результаты показывают, что использование массива двигателей не приводит к снижению производительности каждого из них. Поскольку развитие техники позволяет надеяться на создание более экономичных двигателей, помимо случаев, связанных с использованием одного и нескольких NEXT-подобных двигателей (случаи 1-4), мы также рассмотрим случаи использования гипотетического двигателя, который создает тягу, равную двум и трем двигателям NEXT (случаи 5, 6). Предполагается, что другие параметры гипотетического двигателя совпадают с приведенными в таблице 7.4.

Таблица 7.3 – Рассматриваемые случаи

Случай	Число двигателей	Расположение двигателей (рисунок 7.17)	Общая тяга, мН	Требуемая мощность, кВт	Масса топлива, кг	Время миссии, час
1	1	2	235	7.33	85.68	1949.5
2	2	1,2	470	14.66	86.08	978.9
3	2	1, 3	470	14.66	86.01	978.8
4	3	1,2,3	705	21.99	86.14	653.6
5	1	2	470	14.66	85.90	977.6
6	1	3	705	21.99	86.02	652.7
7	2	1,3	470	14.66	85.68	974.0
8	2	1,3	470	14.66	92.35	1055.1
9	2	1,3	470	14.66	86.96	990.3
10	2	1,3	470	14.66	85.61	974.1

Таблица 7.4 – Параметры двигателя NEXT-C [110] и соответствующие параметры ионного потока

Параметр	Значение	Параметр	Значение
Входная мощность $P_{in}$	7.33 кВт	Осевая составляющая скорости $u_0$	40747 м/с
КПД двигателя $\eta$	0.7	Концентрация плазмы $n_0$	$6.3787 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-3}$
Сила тяги $F_T$	235 мН	Массовый расход топлива $\dot{m}$	$5.7673 \cdot 10^{-6} \text{ кг/с}$
Удельный импульс $I_{sp}$	4155 с	Масса иона $m_i$	$2.18 \cdot 10^{-25} \text{ кг}$
Радиус сопла $R_0$	0.18 м	Угол расхождения потока $\alpha_0$	$10^\circ$
Масса двигателя $m_{IT}$	14 кг	Масса модуля электропитания $m_{PPU}$	36 кг

В качестве примера рассмотрим бесконтактную транспортировку тела, близкого по параметрам к второй ступени «Восток» (SL-3), масса которой 1440 кг, длина 3.8 м, радиус 1.3 м [112]. Предполагается, что центр масс тела расположен в его геометрическом центре. Моменты инерции рассчитаны для идеального корпуса цилиндра. Продольный момент инерции равен  $2434 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , а поперечный момент инерции составляет  $1733 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ . Тело движется по эллиптической орбите с высотой апоцентра 737 км и высотой перицентра 666,4 км. Рисунки 7.18-7.20 показывают зависимости проекций результирующей ионной силы и момента на оси орбитальной системы координат, рассчитанные для различных способов размещения двигателей, приведенных в таблице 7.3. Сдвиг кривой 2 на рисунке 7.18 в отрицательную область от других кривых обусловлен асимметрией расположения двигателей в случае 2. Как видно из рисунков 7.19 и 7.20, увеличение общей тяги массива двигателей приводит к увеличению величины генерируемой ионной силы и момента. При этом точки пересечения кривых с осью абсцисс, которые в отсутствие гравитационного момента являются положениями равновесия для угла  $\theta$ , остаются неизменными в случаях 1, 3-6 и очень незначительно смещаются в случае 2.

С помощью уравнений (3.28)-(3.32) проведем моделирование спуска ступени до момента снижения высоты перицентра до высоты 100 км. Во всех случаях предполагается, что начальная масса космического аппарата равна  $m_{A0} = 700 \text{ кг}$ , из которой запас топлива составляет  $m_{f0} = 200 \text{ кг}$ . При моделировании используются следующие начальные условия

$$r_0 = 7037400 \text{ м}, \dot{r}_0 = 0, v_0 = 0, \dot{v} = 1.0668 \cdot 10^{-3} \text{ рад/с}, \theta_0 = 3.84 \text{ рад}, \dot{\theta}_0 = 0, x_0 = 0, \\ \dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0, y_0 = 15 \text{ м}.$$

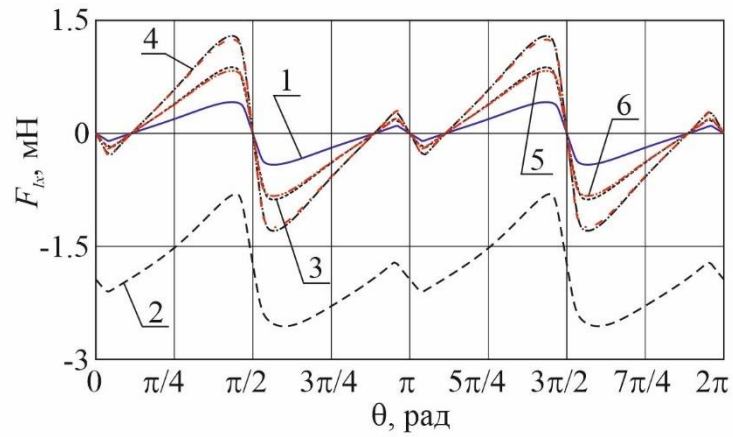


Рисунок 7.18 – Зависимости проекций ионной силы  $F_{ix}$  от угла  $\theta$  для различных случаев (таблица 7.3)

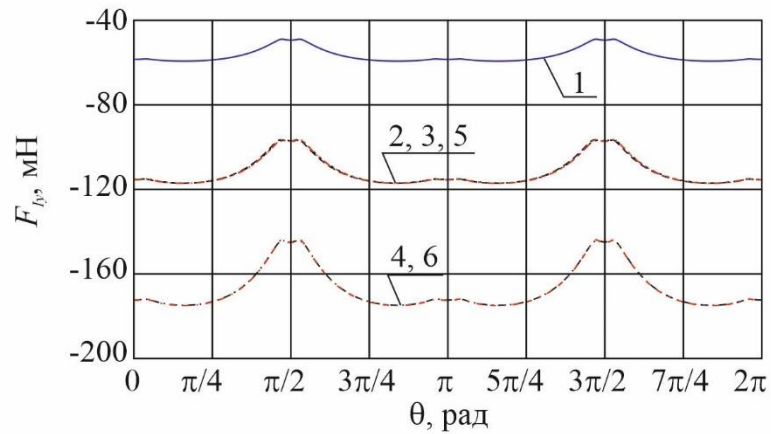


Рисунок 7.19 – Зависимости проекций ионной силы  $F_{iy}$  от угла  $\theta$  для различных случаев (таблица 7.3)

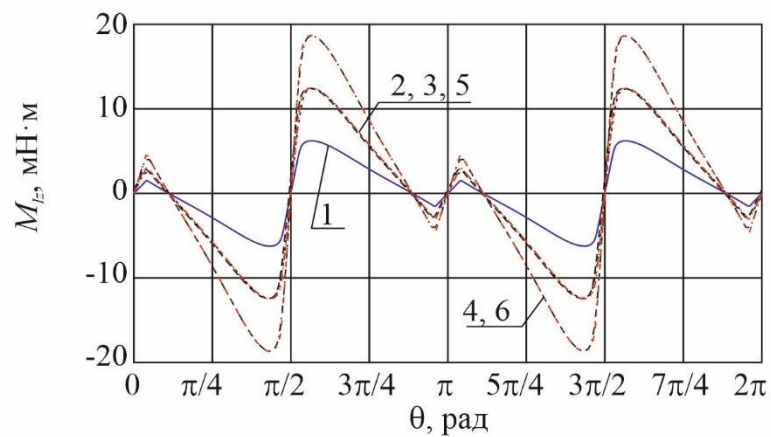


Рисунок 7.20 – Зависимости ионного момента  $M_{iz}$  от угла  $\theta$  для различных случаев (таблица 7.3)

Диаметр ионного потока в центре масс ступени в случае одного двигателя составляет 5.29 м. Отношение диаметра потока к длине ступени равно 1.39. В качестве параметров законов управления (7.4) приняты следующие значения

$$k_x = k_y = 1000 \text{ кг/с}^2, k_{dx} = k_{dy} = 1000 \text{ кг/с}, k_{y0} = -0.247 F_T \frac{m_A}{m_B},$$

где  $F_T$  - суммарная тяга массива двигателей, указанная в четвертом столбце таблице 7.3. Использование законов управления (7.4) требует отслеживания относительного положения и относительной скорости активного космического аппарата. Для моделирования изменения массы активного космического аппарата  $m_A = m_{A0} - m_f$  используется следующее дифференциальное уравнение

$$\dot{m}_f = \frac{2NF_T}{I_{sp}g_0} + \frac{|P_x| + |P_y|}{I_{sp}g_0}, \quad (7.10)$$

где  $m_f$  - масса израсходованного топлива. Множитель 2 в первом члене уравнения (7.10) обусловлен необходимостью компенсации тяги транспортировочных двигателей космического аппарата дополнительными компенсационными двигателями. Для простоты предполагается, что удельные импульсы всех двигателей космического аппарата одинаковы.

Расчеты показывают, что во всех моделируемых случаях твердое тело совершает колебания относительно положения равновесия на протяжении всего спуска. Два правых столбца таблицы 7.3 показывают массу топлива и время спуска. Увеличение тяги приводит к значительному уменьшению времени спуска. Несмотря на то, что время работы двигателей сокращается, установка дополнительных двигателей увеличивает расход топлива в единицу времени. Как показывают случаи 2-4 (таблица 7.3), добавление двигателя приводит к увеличению массы потребляемого топлива по сравнению со случаем 1, предполагающим использование одного двигателя. Сравнивая случаи 2 и 3, можно сделать вывод, что несимметричное размещение двигателей не приводит к существенному изменению массы топлива. Следует отметить, что во всех случаях изменения массы незначительны и не превышают 0.46 кг.

Используя описанный в разделе 6.1 алгоритм, определим режимы движения, соответствующие максимальной и минимальной по модулю осредненной ионной силе. Траектория, на которой наблюдается максимальная по модулю осредненная сила, проходит через точку  $\theta_0 = 3.5655 \text{ рад}$ ,  $\dot{\theta}_0 = 0$ . Наименьшая осредненная сила наблюдается на траектории проходящей через точку  $\theta_0 = \pi/2$ ,  $\dot{\theta}_0 = 0$ . Соответствующие осредненные ионные силы равны  $\bar{F}_{ly\max} = 0.1163 \text{ Н}$  и  $\bar{F}_{ly\min} = 0.1043 \text{ Н}$ . Результаты моделирования неуправляемой транспортировки

космического мусора двумя двигателями при максимальной и минимальной осредненной ионной силе приведены в случаях 7 и 8 таблицы 7.3.

Рассмотрим случай, когда твердое тело изначально находится в неблагоприятном угловом режиме, когда осредненная сила минимальна, и требуется перевести его на траекторию с максимальной усредненной силой. Будем считать, что космический аппарат оснащен двумя транспортировочными двигателями. Рассмотрим два метода управления. Релейное управление двигателями предполагает, что оси ионных потоков не могут менять своего направления, и управление угловым движением достигается включением и выключением двигателей. Управление направлением оси ионного потока предполагает, что один из двигателей (двигатель 1 на рисунке 7.17) установлен на подвижной платформе и может поворачиваться относительно космического аппарата с помощью электродвигателя. Второй двигатель постоянно поддерживает направление оси своего потока. Для управления движением используется закон описанный в разделе 5.2.4. Граничное значение ионного момента, согласно формуле (5.28), равно  $M_{Izmin} = 0.0015 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

Расчеты зависимости ионного момента от угла  $\theta$  для случая работы одного из двух двигателей показывают, что в случае, когда ось потока направлена в геометрический центр тела ( $\beta = -1.9^\circ$ ), условие (5.28) не выполняется, и описанная в разделе 5.2.4 схема управления не может быть реализована. Увеличение угла  $\beta$ , определяющего направление оси ионного потока, решает эту проблему, но увеличение угла приводит к уменьшению генерируемой ионной силы (рисунок 7.21), что в свою очередь снижает эффективность системы бесконтактной транспортировки и приводит к увеличению времени и затрат топлива. При значении угла  $\beta = -0.4^\circ$  условие (5.28) выполняется (рисунок 7.22). Черная сплошная линия на рисунке 7.22 показывает ионный момент, создаваемый двумя двигателями в положениях 1 и 3 (рисунок 7.17). Красные пунктирные линии на рисунке 7.22 соответствуют ионным моментам, создаваемым двигателем в положении 1. Синие штрихпунктирные линии показывают ионные моменты двигателя в положении 3.

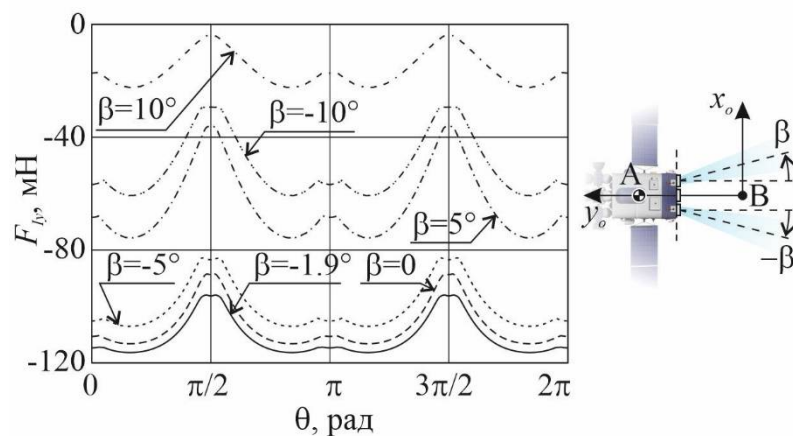


Рисунок 7.21 - Зависимости проекций ионной силы  $F_{iy}$  от угла  $\theta$  для различных углов отклонения  $\beta$

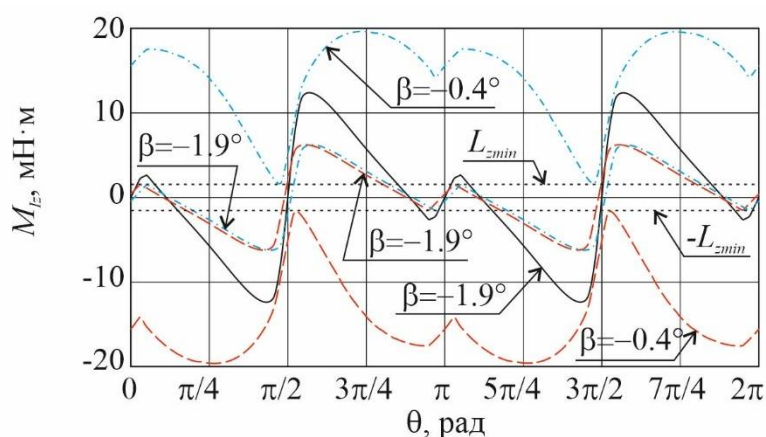


Рисунок 7.22 – Зависимость ионного момента  $M_{iz}$  от угла  $\theta$

Рассмотрим управляемый спуск космического мусора при угле отклонения оси ионного потока  $\beta = -0.4^\circ$ . Активный космический аппарат может находиться в одном из трех состояний. В состоянии  $s=0$  оба импульсных двигателя включены. В состоянии  $s=1$  включается только двигатель в положении 3, что приводит к возникновению положительного ионного момента. В состоянии  $s=2$  включается только двигатель в положении 1. При этом создается отрицательный ионный момент. На рисунке 7.23 показаны фазовые траектории твердого тела при различных методах управления. В начальный момент времени система находится в области, где следует использовать состояние  $s=1$ . В точке  $A_1$  (рисунок 7.23) в соответствии с законом управления, описанным в разделе 5.2.4, система переходит в состояние  $s=2$ . В точке  $B_1$  фазовая траектория достигает целевого положения, и включаются оба двигателя, переводя систему в состояние  $s=0$ . В связи с тем, что рассматриваемая система не является невозмущенной, изображающая точка не останется в положении равновесия, а будет колебаться вокруг него с малой амплитудой. Расчеты



показывают, что смещение изображающей точки из положения, в которое точка была переведена с помощью релейного управления на начальном этапе транспортировки, не превышает 0.035 рад. Весь спуск занимает 990.3 часа и требует 86.96 кг топлива (случай 9 в таблице 7.3). Следует отметить, что полученные значения времени и топлива оказываются хуже полученных для случая неуправляемого движения, когда тело сразу находится в благоприятном угловом положении (случай 7 в таблице 7.3). Это ухудшение связано с тем, что угол  $\beta$  в данном расчете был изменен. Оси ионных потоков не проходят через центр масс тела, что приводит к уменьшению ионной силы.

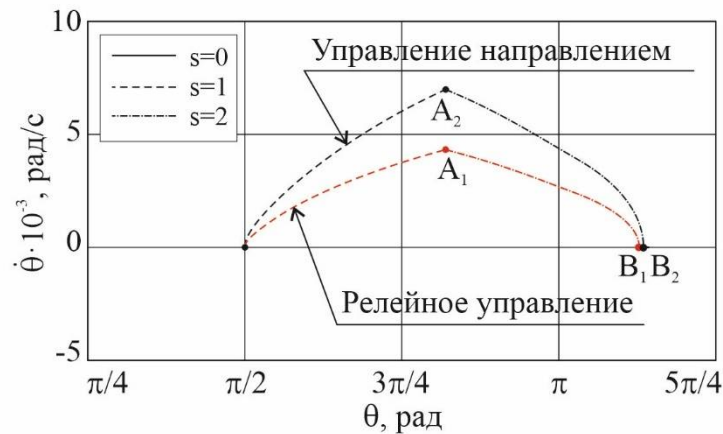


Рисунок 7.23 – Фазовый портрет в случае управляемой транспортировки

Рассмотрим случай, когда управление осуществляется направлением оси ионного потока одного из двигателей. Была проведена серия расчетов для вычисления ионных моментов при различных углах  $\beta$  с целью определения углов отклонения оси первого двигателя, соответствующих максимальному и минимальному ионным моментам в состояниях  $s=1$  и  $s=2$ . На рисунке 7.24 представлены зависимости максимального и минимального ионных моментов двух двигателей в положениях 1 и 3 (рисунок 7.17). Первый двигатель отклонен на угол  $\beta$ , а второй направлен в центр масс тела. Максимальный положительный и минимальный отрицательный момент наблюдаются при углах  $\beta_1 = -8^\circ$  и  $\beta_2 = 4.25^\circ$  соответственно. На рисунке 7.25 показаны соответствующие зависимости ионных моментов от угла отклонения твердого тела  $\theta$ . После того, как требуемые углы отклонения оси ионного потока определены, проведем моделирование управляемого спуска твердого тела. Предполагается, что ось двигателя поворачивается мгновенно. На начальном этапе движения тело находится в области, соответствующей состоянию  $s=1$ , поэтому первый двигатель отклоняется на угол  $\beta_1$ . Фазовая траектория показана на рисунке 7.23 черной линией. В точке  $A_2$  энергия  $E(\theta, \dot{\theta}, 2)$  достигает значения  $E(\theta_{*1}, 0, 2)$  и в соответствии с четвертой строкой таблицы 5.2 система переходит в

состояние  $s=2$ . Для этого первый двигатель поворачивается на угол  $\beta_2$ . В точке  $B_2$  фазовая траектория достигает целевого положения равновесия, ось первого двигателя направляется в центр масс тела ( $\beta = -1.9^\circ$ ), и система переходит в состояние  $s=0$ . Несовпадение конечных точек  $B_1$  и  $B_2$  на рисунке 7.17 обусловлено несовпадением углов  $\beta$  в состоянии  $s=0$  в случае релейного управления и управления осью потока. Расчеты показывают, что для осуществления транспортной операции по спуску тела с орбиты с помощью управления осью потока требуется 974.1 часа и 85.61 кг топлива (случай 10 в таблице 7.3). Эти значения немного хуже, чем в случае 7 (таблица 7.3), когда управление угловым движением не осуществляется, но тело сразу находится в угловом режиме движения с максимальной осредненной ионной силой.

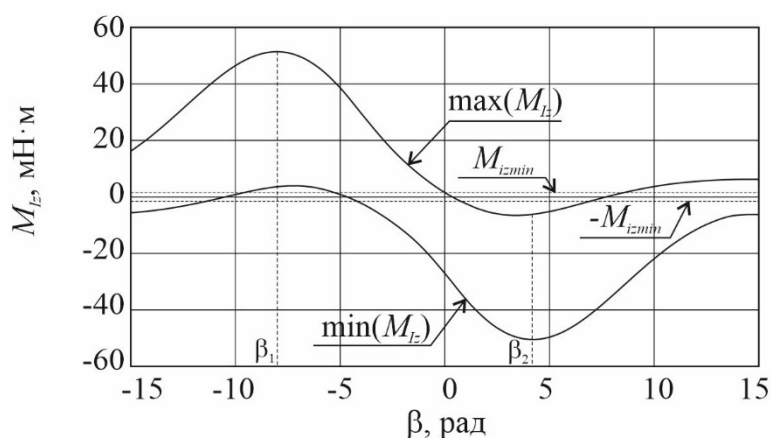


Рисунок 7.24 - Зависимость амплитудных значений ионного момента  $M_{Lz}$  от угла  $\beta$  первого двигателя

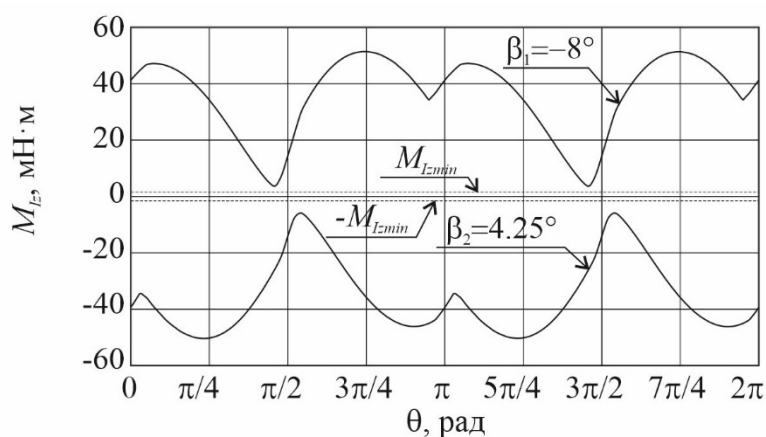


Рисунок 7.25 - Зависимость амплитудных значений ионного момента  $M_{Lz}$  от угла  $\theta$

Анализ двух правых колонок таблицы 7.3 позволяет заключить, что использование нескольких транспортировочных двигателей не приводит к экономии топлива по сравнению с

использованием одного двигателя. В то же время увеличение количества двигателей приводит к кратному уменьшению времени спуска, что может иметь решающее значение для миссии по уборке с орбиты космического мусора. Сокращение времени существования объекта на орбите снижает вероятность его столкновения с другими объектами. Поскольку масса требуемого топлива при использовании разного количества двигателей меняется незначительно, отказ одного из них не приводит к срыву миссии, поскольку транспортировка может быть осуществлена и одним двигателем, однако она займет больше времени.

Использование дополнительных двигателей не влечет за собой существенного изменения массы топлива, однако добавление двигателя приводит не только к увеличению генерируемой ионной силы, но и к росту массы всей двигательной установки космического аппарата. При заданном бюджете массы это означает уменьшение массы топлива, которое может нести космический корабль. Использование дополнительного двигателя также требует дополнительных затрат электроэнергии, что приводит к увеличению сухой массы космического аппарата из-за установки дополнительных сегментов солнечных батарей и аккумуляторов. Расчеты показывают, что разработка и использование более совершенного импульсного двигателя, генерирующего большую тягу при сохранении удельного импульса, не приводит к качественному уменьшению времени транспортировки и массы топлива по сравнению с использованием массива двигателей.

Сравнивая результаты моделирования управляемой транспортировки объекта космического мусора при использовании релейного управления и управления направлением ионного потока одного из двигателей, можно прийти к следующим выводам. Первый метод проще в технической реализации, так как не требует модификации конструкции активного космического аппарата. Второй метод более эффективен с точки зрения затрат времени и топлива, но его реализация требует установки двигателя на подвижную платформу. Переходное время, за которое объект переводится из начального в целевое угловое положение, по первой и второй схемам составляет 1051 с и 659 с соответственно. Меньшая эффективность первого метода связана с необходимостью увеличения угла  $\beta$  для выполнения условия (5.28). В результате после перевода системы в положение равновесия генерируемая ионная сила оказывается меньше, чем в случае, когда оси потоков проходят через центр масс объекта. Альтернативой увеличению угла может быть перемещение активного космического аппарата ближе к объекту космического мусора при сохранении направления осей ионного потока. Однако при изменении расстояния между активным космическим аппаратом и объектом меняются и положения равновесия, что делает невозможным использование предложенного закона управления и требует его существенной модификации.

## Заключение

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Предложены новые методы бесконтактной транспортировки твердого тела цилиндрической формы, основанные на использовании особенностей его углового движения в ионном потоке, генерируемом двигателем активного космического аппарата.
2. Разработаны математические модели, описывающие движение твердого тела относительно центра масс с учетом сил и моментов, генерируемых ионным потоком.
  - 2.1. Модель плоского движения механической системы, состоящей из транспортируемого твердого тела и активного космического аппарата.
  - 2.2. Модель пространственного движения механической системы, состоящей из твердого тела и активного космического аппарата.
  - 2.3. Модель пространственного движения механической системы при наличии у твердого тела малой асимметрии.
  - 2.4. Модель пространственного движения осесимметричного твердого тела под действием ионного потока.
3. Проведен анализ хаотических режимов неуправляемого движения цилиндрического твердого тела в ионном потоке
  - 3.1. Исследована топология фазового пространства, описывающего плоское движение цилиндрического твердого тела на круговой орбите под действием ионного потока. Введен параметр, определяющий отношение ионного и гравитационного момента и проведен анализ влияния этого параметра на расположение и тип положений равновесия системы.
  - 3.2. С помощью сечений Пуанкаре и спектра показателей Ляпунова продемонстрирована возможность существования хаоса в случае неуправляемой ионной транспортировки цилиндрического твердого тела в плоском случае движения.
4. Предложен метод определения наиболее эффективного с точки зрения величины генерируемой ионной силы углового режима движения цилиндрического твердого тела в плоском и пространственном случаях движения.
5. Разработаны новые законы и методы управления ионным потоком, обеспечивающие перевод транспортируемого цилиндрического твердого тела в положение равновесия или требуемый режим углового движения. Выполнен анализ устойчивости управляемого движения твердого тела.
  - 5.1. Предложены методы управления движением твердого тела относительно центра масс посредством ионного потока за счет:

- изменения скорости частиц потока за счет управления тягой генерирующего ионный поток двигателя;
  - изменения направления оси ионного потока;
  - релейного управления генерирующими ионные потоки двигателями в случае использования нескольких транспортировочных двигателей;
  - изменения направления одного из генерирующих поток двигателей в случае использования нескольких транспортировочных двигателей.
- 5.2. Разработан закон управления скоростью ионного потока, обеспечивающий перевод цилиндрического твердого тела в устойчивое положение равновесия в плоском случае движения. Доказана асимптотическая устойчивость положения равновесия при управляемом движении.
- 5.3. Разработан закон управления направлением оси ионного потока, обеспечивающий перевод твердого тела в устойчивое положение равновесия в плоском случае движения.
- 5.4. Разработан основанный на вычислении энергии закон управления ионным потоком для случая плоского движения системы, который обеспечивает перевод цилиндрического твердого тела в требуемый угловой режим движения. Закон может быть реализован с помощью изменения направления оси ионного потока либо с помощью включения и выключения двигателей в случае использования нескольких транспортировочных ионных двигателей.
- 5.5. Разработан закон управления скоростью ионного потока, обеспечивающий стабилизацию пространственного движения осесимметричного твердого тела на геостационарной орбите. Доказана асимптотическая устойчивость положения равновесия при управляемом движении.
- 5.6. Разработан закон управления скоростью ионного потока, обеспечивающий перевод цилиндрического твердого тела в положение равновесия.
6. В результате проведения серии численных экспериментов осуществлена оценка эффективности использования разработанных законов и методов управления ионным потоком с точки зрения затрат времени и топлива, требуемых для осуществления бесконтактной транспортировки цилиндрического твердого тела в случае использования одного или нескольких ионных потоков в плоском случае движения.

Полученные результаты обладают фундаментальной научной новизной во области механики космического полета и являются актуальными с точки зрения возможности их использования при создании систем бесконтактной транспортировки космического мусора ионным потоком.

Основные результаты исследований опубликованы в 17 печатных работах среди которых монография на английском языке в соавторстве с профессором В.С. Аслановым [8]; 15 статей в англоязычных журналах, входящих в базы Web of Science и Scopus [9,10,19–23,11–18], из них 8 в журналах Q1 и 2 в журналах Q2; одна статья в рецензируемом научном журнале, из перечня рекомендованных ВАК РФ [24].

**Список литературы**

1. Letizia, F. Assessment of orbital capacity thresholds through long-term simulations of the debris environment / F. Letizia, V.B. Bastida, S. Lemmens // *Advances in Space Research*. - 2023. - Vol. 71, №7. - P. 2552-2569.
2. McKnight, D. Identifying the 50 statistically-most-concerning derelict objects in LEO / D. McKnight, R. Witner, F. Letizia, S. Lemmens, L. Anselmo, C. Pardini, A. Rossi, C. Kunstadter, S. Kawamoto, V. Aslanov, J. D. Perez, V. Ruch, H. Lewis, M. Nicolls, L. Jing, S. Dan, W. Dongfang, A. Baranov, D. Grishko // *Acta Astronautica*. - 2021. - Vol. 181. - P. 282–291.
3. Svitina, V.V. Space debris removal – Review of technologies and techniques. Flexible or virtual connection between space debris and service spacecraft / V.V. Svitina, M.V. Cherkasova // *Acta Astronautica*. - 2023. - Vol. 4. - P. 840-853.
4. Shan, M. Review and comparison of active space debris capturing and removal methods / M. Shan, J. Guo, E. Gill // *Progress in Aerospace Sciences*. - 2016. - Vol. 80. - P. 18–32.
5. Kitamura, S. Large space debris reorbiter using ion beam irradiation / S. Kitamura // *61st International Astronautical Congress*. Prague, Czech Repub. 2010. - IAC-10-A6.4.8. - P. 5668–5674.
6. Ruault, J.M. Active Debris Removal (ADR): From identification of problematics to in flight demonstration preparation / J.M. Ruault, M.C. Desjean, C. Bonnal, P. Bultel // *1st European Workshop on Active Debris Removal*, Paris, June. - 2010.
7. Bombardelli, C. Ion Beam Shepherd for contactless space debris removal / C. Bombardelli, J. Pelaez // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. - 2011. - Vol. 34, № 3. - P. 916–920.
8. Aslanov, V. Attitude dynamics and control of space debris during ion beam transportation / V. Aslanov, A. Ledkov. - New York: Elsevier, 2022. - 320 p.
9. Aslanov, V.S. Attitude motion of cylindrical space debris during its removal by ion beam / V.S. Aslanov, A.S. Ledkov // *Mathematical Problems in Engineering*. - 2017. - Vol. 2017. - P. 1-7.
10. Ledkov, A.S. Attitude motion of space debris during its removal by ion beam taking into account atmospheric disturbance / A.S. Ledkov, V.S. Aslanov // *Journal of Physics: Conference Series*. - 2018. - Vol. 1050, 012041. - P. 1-8.
11. Aslanov, V.S. Fuel costs estimation for ion beam assisted space debris removal mission with and without attitude control / V.S. Aslanov, A.S. Ledkov // *Acta Astronautica*. - 2021. - Vol. 187. - P. 123–132.
12. Aslanov, V. Detumbling of axisymmetric space debris during transportation by ion beam shepherd in 3D case / V. Aslanov, A. Ledkov // *Advances in Space Research*. - 2022. - Vol. 69, № 1. - P. 570–580.

13. Ledkov, A. Review of contact and contactless active space debris removal approaches / A. Ledkov, V. Aslanov // *Progress in Aerospace Sciences*. - 2022. - Vol. 134, 100858. - P. 1-19.
14. Ledkov, A.S. Active space debris removal by ion multi-beam shepherd spacecraft / A.S. Ledkov, V.S. Aslanov // *Acta Astronautica*. - 2023. - Vol. 205. - P. 247–257.
15. Ledkov, A.S. Determining the effective space debris attitude motion modes for ion-beam-assisted transportation / A.S. Ledkov // *Journal of Spacecraft and Rockets*. - 2023. P. 1–10. Режим доступа: <https://doi.org/10.2514/1.A35735>.
16. Aslanov, V.S. Space debris attitude control during contactless transportation in planar case / V.S. Aslanov, A.S. Ledkov // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. - 2020. - Vol. 43, № 3. - P. 451–461.
17. Aslanov, V. Attitude dynamics and control of space object during contactless transportation by ion beam / V. Aslanov, A. Ledkov, M. Konstantinov // *Proceedings of the International Astronautical Congress, IAC*. - 2020. - Vol. 2020, IAC-20-C1,8,4,x56927. - P. 1–7.
18. Popov, G. Influence of space debris attitude motion on ion beam assisted removal mission costs / G. Popov, V. Aslanov, V. Petukhov, A. Ledkov // *Proceedings of the International Astronautical Congress, IAC*. - 2020. - Vol. 2020, IAC-20-A6,6,8,x56928. - P. 1–7.
19. Aslanov, V. Chaotic motion of a passive space object during its contactless ion beam transportation / V. Aslanov, A. Ledkov // *2020 International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT)*. IEEE. - 2020. - P. 1–6. DOI: 10.1109/ITNT49337.2020.9253185.
20. Aslanov, V. Chaotic motion of a cylindrical body during contactless transportation from MEO to LEO by ion beam / V. Aslanov, A. Ledkov, M. Konstantinov // *Nonlinear Dynamics*. - 2020. - Vol. 101, № 2. - P. 1221–1231.
21. Aslanov, V.S. Dynamics and control of space debris during its contactless ion beam assisted removal / V.S. Aslanov, A.S. Ledkov // *Journal of Physics: Conference Series*. - 2020. - Vol. 1705, 012006. - P. 1-10.
22. Aslanov, V.S. Spatial dynamics and attitude control during contactless ion beam transportation / V.S. Aslanov, A.S. Ledkov, V.G. Petukhov // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. - 2021. - Vol. 44, № 8. - P. 1572–1577.
23. Aslanov, V.S., Attitude motion of a space object during its contactless ion beam transportation / V.S. Aslanov, A.S. Ledkov, M.S. Konstantinov // *Acta Astronautica*. - 2021. - Vol. 179. - P. 359–370.



24. Ледков, А.С. Динамика и управление цилиндрическим космическим мусором при бесконтактной транспортировке ионным потоком / А.С. Ледков // Труды МАИ. - 2023. - № 131. - P. 1–39.
25. Kessler, D.J. Collision frequency of artificial satellites: The creation of a debris belt / D.J. Kessler, B.G. Cour-Palais // Journal of Geophysical Research: Space Physics. - 1978. - Vol. 83, № A6. - P. 2637–2646.
26. ESA. Space debris by the numbers [сайт]. URL: [https://www.esa.int/Safety\\_Security/Space\\_Debris/Space\\_debris\\_by\\_the\\_numbers](https://www.esa.int/Safety_Security/Space_Debris/Space_debris_by_the_numbers) (дата обращения: 18.06.2023).
27. Pardini, C. Physical properties and long-term evolution of the debris clouds produced by two catastrophic collisions in Earth orbit / C. Pardini, L. Anselmo // Advances in Space Research. - 2011. - Vol. 48, № 3. - P. 557–569.
28. Le May, S. Space debris collision probability analysis for proposed global broadband constellations / S. Le May, S. Gehly, B.A. Carter, S. Flegel // Acta Astronautica. - 2018. - Vol. 151. - P. 445–455.
29. Pardini, C. Environmental sustainability of large satellite constellations in low earth orbit / C. Pardini, L. Anselmo // Acta Astronautica. - 2020. - Vol. 170. - P. 27–36.
30. Добрица, Д.Б. Исследование эффективности сеточных гофрированных экранов для защиты космических аппаратов от воздействия метеорно-техногенных частиц / Д.Б. Добрица, С.В. Пашков, Ю.Ф. Христенко // Космические исследования. - 2020. - Т. 58, № 2. - С. 131–137.
31. Bonnal, C. CNES technical considerations on space traffic management / C. Bonnal, L. Francillout, M. Moury, U. Aniakou, J.C.D. Perez, J. Mariez, S. Michel // Acta Astronautica. - 2020. - Vol. 167. - P. 296–301.
32. Bonnal, C. Just in time collision avoidance – A review / C. Bonnal, D. McKnight, C. Phipps, C. Dupont, S. Missonnier, L. Lequette, M. Merle, S. Rommelaere // Acta Astronautica. - 2020. - Vol. 170. - P. 637–651.
33. IADC, IADC Space Debris Mitigation Guidelines. IADC-02-01. - IADC Steering Group and Working Group 4, 2000. - 14p.
34. Lewis, H.G. Understanding long-term orbital debris population dynamics / H.G. Lewis // Journal of Space Safety Engineering. - 2020. - Vol. 7, № 3. - P. 164–170.
35. Bonnal, C. Active debris removal: Recent progress and current trends / C. Bonnal, J.M. Ruault, M.C. Desjean // Acta Astronautica. - 2013. - Vol. 85. - P. 51–60.

36. Liou, J.C. Controlling the growth of future LEO debris populations with active debris removal / J.C. Liou, N.L. Johnson, N.M. Hill // *Acta Astronautica*. - 2010. - Vol. 66, № 5–6. - P. 648–653.
37. Mark, C.P. Review of active space debris removal methods / C.P. Mark, S. Kamath // *Space Policy*. - 2019. - Vol. 47. - P. 194–206.
38. Aslanov, V.S. Gravitational trap for space debris in geosynchronous orbit / V.S. Aslanov // *Journal of Spacecraft and Rockets*. - 2019. - Vol. 56, № 4. - P. 1277–1281.
39. Aslanov, V. Motion control of space tug during debris removal by a Coulomb force / V. Aslanov, V. Yudinsev // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. - 2018. - Vol. 41, № 7. - P. 1476–1484.
40. Yu, Y. Prospects of de-tumbling large space debris using a two-satellite electromagnetic formation / Y. Yu, F. Yang, H. Yue, Y. Lu, S. Li, H. Zhao // *Advances in Space Research*. - 2021. - Vol. 67, № 6. - P. 1816–1829.
41. Phipps, C.R. LADROIT - A spaceborne ultraviolet laser system for space debris clearing / C.R. Phipps // *Acta Astronautica*. - 2014. - Vol. 104, № 1. - P. 243–255.
42. Ледков, А.С. Сравнение эффективности использования лазерной абляции и ионного потока для бесконтактной уборки космического мусора с квазикруговой орбиты / А.С. Ледков, А.А. Белов, И.А. Тчаников // *Труды МАИ*. - 2022. - № 127. - С. 1–28.
43. Ruiz, M. The FP7 LEOSWEEP project: Improving low earth orbit security with enhanced electric propulsion / M. Ruiz, I. Urdampilleta, C. Bombardelli, E. Ahedo, M. Merino, F. Cichocki // *Space Propulsion Conference*. - 2014. - № 2980908. - P. 35–42.
44. Dobkevicius, M. Design and testing of a double-sided ion thruster for ion-beam shepherd / M. Dobkevicius, D. Feili, M. Smirnova, A.M. Perez // *Journal of Propulsion and Power*. - 2020. - Vol. 36, № 2. - P. 202–210.
45. Takahashi, K. Demonstrating a new technology for space debris removal using a bi-directional plasma thruster / K. Takahashi, C. Charles, R.W. Boswell, A. Ando // *Scientific reports*. - 2018. - Vol. 8, № 1. - P. 1–10.
46. Надирадзе, А.Б. Моделирование силового и эрозионного воздействия ионного пучка на крупный объект космического мусора техногенной природы / А.Б. Надирадзе, В.А. Обухов, А.И. Покрышкин, Г.А. Попов, В.В. Свотина // *Известия Российской академии наук. Энергетика*. - 2016. - № 2. - С. 146–157.
47. Cichocki, F. Spacecraft-plasma-debris interaction in an ion beam shepherd mission / F. Cichocki, M. Merino, E. Ahedo // *Acta Astronautica*. - 2018. - Vol. 146. - P. 216–227.
48. Надирадзе, А.Б. Эффекты эрозионного и загрязняющего воздействия при уводе объектов космического мусора ионным пучком / А.Б. Надирадзе, В.А. Обухов, Р.Р. Рахматуллин,

- В.В. Свотина // Известия Российской академии наук. Энергетика. - 2018. - № 3. - P. 131–139.
49. Alpatov, A.P. Contactless de-orbiting of space debris by the ion beam. Dynamics and Control / A.P. Alpatov, S.V. Khoroshylov, A.I. Maslova. - Kyiv: Akadempriodyka, 2019. - 170 p.
  50. Alpatov, A. Determination of the force transmitted by an ion thruster plasma plume to an orbital object / A. Alpatov, F. Cichocki, A. Fokov, S. Khoroshylov, M. Merino, A. Zakrzhevskii // Acta Astronautica. - 2016. - Vol. 119. - P. 241–251.
  51. Merino, M. Hypersonic plasma plume expansion in space / M. Merino, E. Ahedo, C. Bombardelli, H. Urrutxua, J. Pelaez // 32nd International Electric Propulsion Conference. - 2011. - P. 1–14.
  52. Korsun, A.G. Simulation of plasma plume-to-spacecraft interaction / A.G. Korsun, E.M. Tverdokhlebova, F.F. Gabdullin // Computer physics communications. - 2004. - Vol. 164, № 1–3. - P. 353–364.
  53. Borisov, B. The influence of an electric thruster plasma plume on downlink communications in space experiments / B. Borisov, V. Garkusha, N. Kozyrev, A. Korsun, L. Sokolov // 27th Joint Propulsion Conference. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1991. - 12 p.
  54. Dannenmayer, K. Hall effect thruster plasma plume characterization with probe measurements and self-similar fluid models / K. Dannenmayer, S. Mazouffre, S., M. Merino-Martinez, E. Ahedo // 48th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2012. - P. 1–10.
  55. Cichocki, F. Modeling and simulation of EP plasma plume expansion into vacuum / F. Cichocki, M. Merino, E. Ahedo // 50th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference. - 2014. - P. 1–17.
  56. Nakajima, Y. Contactless space debris detumbling: A database approach based on computational fluid dynamics / Y. Nakajima, H. Tani, T. Yamamoto, N. Murakami, S. Mitani, K. Yamanaka // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. - 2018. - Vol. 41, № 9. - P. 1906–1918.
  57. Рязанов, В.В. Увод наноспутника с низкой орбиты с помощью ионного потока / В.В. Рязанов, А.С. Ледков // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. - 2019. - Vol. 19, № 1. - P. 82–93.
  58. Cichocki, F. Electric propulsion subsystem optimization for "Ion Beam Shepherd" missions / F. Cichocki, M. Merino, E. Ahedo, M. Smirnova, A. Mingo, M. Dobkevicius // Journal of Propulsion and Power. - 2017. - Vol. 33, № 2. - P. 370–378.

59. Balashov, V. Radio frequency source of a weakly expanding wedge-shaped xenon ion beam for contactless removal of large-sized space debris objects / V. Balashov, M. Cherkasova, K. Kruglov, A. Kudriavtsev, P. Masherov, A. Mogulkin, V. Obukhov, V. Riaby , V. Svitina // *Review of scientific instruments*. - 2017. Vol. 88(083304). - P. 1-5.
60. Holste, K. Ion thrusters for electric propulsion: Scientific issues developing a niche technology into a game changer / K. Holste, P. Dietz, S. Scharmann, K. Keil, T. Henning, D. Zschätzsch, M. Reitemeyer, B. Nauschütt, F. Kiefer, F. Kunze, J. Zorn, C. Heiliger, N. Joshi, U. Probst, R. Thüringer, C. Volkmar , D. Packan, S. Peterschmitt, K. -T. Brinkmann, H.-G. Zaunick, M. H. Thoma, M. Kretschmer, H. J. Leiter, S. Schippers, K. Hannemann, P. J. Klar // *Review of Scientific Instruments*. - 2020. - Vol. 91(061101). - P. 1-55.
61. Bombardelli, C. Relative dynamics and control of an ion beam shepherd satellite / C. Bombardelli, H. Urrutxua, M. Merino Martínez, E. Ahedo, J Peláez // *Advances in the Astronautical Sciences*. - 2012. - Vol. 143. - P. 2145–2157.
62. Alpatov, A. Relative control of an ion beam shepherd satellite using the impulse compensation thruster / A. Alpatov, S. Khoroshylov, C. Bombardelli // *Acta Astronautica*. - 2018. - Vol. 151. - P. 543–554.
63. Khoroshylov, S. Relative control of an ion beam shepherd satellite in eccentric orbits / S. Khoroshylov // *Acta Astronautica*. - 2020. - Vol. 176. - P. 89–98.
64. Lewis, F. Optimal control / F. Lewis, D. Vrabie, V. Syrmo. - New Jersey: John Wiley & Sons, 2012. - 540 p.
65. Khoroshylov, S. Out-of-plane relative control of an ion beam shepherd satellite using yaw attitude deviations / S. Khoroshylov // *Acta Astronautica*. - 2019. - Vol. 164. - P. 254–261.
66. Urrutxua, H. A preliminary design procedure for an ion-beam shepherd mission / H. Urrutxua, C. Bombardelli, J.M. Hedo // *Aerospace Science and Technology*. - 2019. - Vol. 88. - P. 421–435.
67. Obukhov, V.A. Problematic issues of spacecraft development for contactless removal of space debris by ion beam / V.A. Obukhov, V.A. Kirillov, V.G. Petukhov, G.A. Popov, V.V. Svitina, N.A. Testoyedov, I.V. Usovik // *Acta Astronautica*. - 2021. - Vol. 181. - P. 569–578.
68. Li, H. Dynamics and control for contactless interaction between spacecraft and tumbling debris / H. Li, J. Li, F. Jiang // *Advances in Space Research*. - 2018. - Vol. 61, № 1. - P. 154–166.
69. Nakajima, Y. Efficiency Improving Guidance for Detumbling of Space Debris Using Thruster Plume Impingement / Y. Nakajima, H. Tani, S. Mitani, T. Yamamoto // *IEEE Aerospace Conference*. - 2020. - Vol. 2020. - P. 1–12.

70. Perales-Diaz, J. Formation and neutralization of electric charge and current of an ion thruster plume / J. Perales-Díaz, F. Cichocki, M. Merino, E. Ahedo // *Plasma Sources Science and Technology*. - 2021. - Vol. 30, № 10. - P. 105023.
71. VanGilder, D.B. Hybrid Monte Carlo-particle-in-cell simulation of an ion thruster plume / D.B. VanGilder, G.I. Font, I.D. Boyd // *Journal of Propulsion and Power*. - 1999. - Vol. 15, № 4. - P. 530–538.
72. Giono, G. Non-Maxwellian electron energy probability functions in the plume of a SPT-100 Hall thruster / G. Giono, J.T. Gudmundsson, N. Ivchenko, S. Mazouffre, K. Dannenmayer, D. Loubère, L. Popelier, M. Merino, G. Olentšenko // *Plasma Sources Science and Technology*. - 2017. - Vol. 27, № 1. - P. 015006.
73. Nakles, M. Experimental and numerical examination of the BHT-200 hall thruster plume / M. Nakles, L. Brieda, G. Reed, W. Hargus, R. Spicer // *43rd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit*. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2007. - P. 1–19.
74. Zhang, Z. Three-dimensional measurement of a stationary plasma plume with a Faraday probe array / Z. Zhang, Z. Zhang, S. Xu, W.Y.L. Ling, J. Ren, H. Tang // *Aerospace Science and Technology Masson SAS*. - 2021. - Vol. 110, № 106480. - P. 1–11.
75. Gabdullin, F.F. The plasma plume emitted onboard the international space station under the effect of the geomagnetic field / F.F. Gabdullin, A.G. Korsun, E.M. Tverdokhlebova // *IEEE Transactions on Plasma Science*. - 2008. - Vol. 36, № 5. - P. 2207–2213.
76. Hilgers, A. A simple model of the effect of solar array orientation on SMART-1 floating potential / A. Hilgers, B. Thiébault, D. Estublier, E. Gengembre, JAG Del Amo, M. Capacci, J.F. Roussel, M. Tajmar, J. Forest // *IEEE Transactions on Plasma Science*. - 2006. - Vol. 34, № 5. - P. 2159–2165.
77. Cichocki, F. Hybrid 3D model for the interaction of plasma thruster plumes with nearby objects / F. Cichocki, A. Domínguez-Vázquez, M. Merino, E. Ahedo // *Plasma Sources Science and Technology*. - 2017. - Vol. 26, № 12. - P. 125008.
78. Shang, S. Sputtering distribution of LIPS200 ion thruster plume / S. Shang, S. Xiang, L. Jiang, W. Wang, B. He, H. Weng // *Acta Astronautica*. - 2019. - Vol. 160. - P. 7–14.
79. Beal, B.E. Plasma properties downstream of a low-power Hall thruster / B.E. Beal, A.D. Gallimore, W.A. Hargus // *Physics of plasmas*. - 2005. - Vol. 12, № 12. - P. 1–8.
80. Takegahara, H. Beam characteristics evaluation of ETS-VI xenon ion thruster / H. Takegahara, Y. Kasai, Y. Gotoh, K. Miyazaki, Y. Hayakawa, S. Kitamura, H. Nagano, K. Nanamura // *IEPC paper*. - 1993. - № 93–235. - P. 2166–2174.

81. Narasimha, R. Collisionless expansion of gases into vacuum / R. Narasimha // *Journal of Fluid Mechanics*. - 1962. - Vol. 12, № 2. - P. 294–308.
82. Roberts, L. Comments on exhaust flow field and surface impingement / L. Roberts // *AIAA Journal*. - 1964. - Vol. 2. - P. 971–973.
83. Carney, L. Evaluation of the communications impact of a low power arcjet thruster / L. Carney // *24th Joint Propulsion Conference*. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1988. - P. 1–25.
84. Korsun, A.G. Comparison between plasma plume theoretical models and experimental data / A.G. Korsun, F.F. Gabdullin, E.M. Tverdokhlebova, B.S. Borisov // *26th Electric Propulsion Conference (International)*. - 1999. - IEPC-99-221. - P. 1291–1302.
85. Korsun, A.G. The characteristics of the EP exhaust plume in space / A.G. Korsun, E.M. Tverdokhlebova // *33rd Joint Propulsion Conference and Exhibit*. - 1997. - P. 3065.
86. Merino, M. A collisionless plasma thruster plume expansion model / M. Merino, F. Cichocki, E. Ahedo // *Plasma Sources Science and Technology*. - 2015. - Vol. 24, № 3. - P. 035006.
87. Bombardelli, C. Ariadna call for ideas: active removal of space debris. Ion Beam Shepherd for contactless debris removal / C. Bombardelli, M. Merino-Martinez, E.A. Galilea, J. Pelaez, H. Urrutxua, J. Herrera-Montojo, A. Iturri-Torrea. - ESA, 2011. - 90 p.
88. Korsun, A. The Distinction between the EP plume expansion in space and in vacuum chamber / A. Korsun, E. Tverdokhlebova, F. Gabdullin // *The 29th International Electric Propulsion Conference*, Princeton University. – 2005. – Vol. 31. - P. 1–10.
89. Gallimore, A.D. Near- and far-field characterization of stationary plasma thruster plumes / A.D. Gallimore // *Journal of Spacecraft and Rockets*. - 2001. - Vol. 38, № 3. - P. 441–453.
90. Mikellides, I.G. Plume modeling of stationary plasma thrusters and interactions with the Express-A spacecraft / I.G. Mikellides, G.A. Jongeward, I. Katz, D.H. Manzella // *Journal of Spacecraft and Rockets*. - 2002. - Vol. 39, № 6. - P. 894–903.
91. Parks, D. A preliminary model of ion beam neutralization / D. Parks, I. Katz // *14th International Electric Propulsion Conference*. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1979. - P. 1–10.
92. Kluever, C.A. *Space flight dynamics*. / C.A. Kluever. - Hoboken, United States: John Wiley and Sons Ltd, 2018. - 584 p.
93. Lev, D. The technological and commercial expansion of electric propulsion / D. Lev, R.M. Myers, K.M. Lemmer, J. Kolbeck, H. Koizumi, K. Polzin // *Acta Astronautica*. - 2019. - Vol. 159. - P. 213–227.

94. Sidi, M.J. *Spacecraft Dynamics and Control: a practical engineering approach* / M.J. Sidi. - Cambridge: Cambridge University Press, 1997. - 432 p.
95. Hughes, P.C. *Spacecraft attitude dynamics*/ P.C. Hughes. - New York: Dover Publications, 2004. - 592 p.
96. Schaub, H. *Analytical mechanics of space systems* / H. Schaub, J.L. Junkins. - Washington, DC: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 2014. - 853 p.
97. Aslanov, V.S. *Rigid body dynamics for space applications* / V.S. Aslanov. - Oxford: Butterworth-Heinemann, 2017. - 410 p.
98. Маркеев, А.П. *Теоретическая механика. Учебник для высших учебных заведений/ А.П. Маркееву - Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2007. - 592 с.*
99. Wolf, A. *Determining Lyapunov exponents from a time series* / A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, J.A. Vastano // *Physica D: nonlinear phenomena*. - 1985. - Vol. 16, № 3. - P. 285–317.
100. Малкин, И.Г. *Теория устойчивости движения* / И.Г. Малкин. - М.: Наука, 1966. - 530 с.
101. Пантелеев, А.В. *Теория управления в примерах и задачах* / А.В. Пантелеев, А.С. Бортаковский. - М.: Высшая школа, 2003. - 583 с.
102. Albuja, A.A. *Evolution of angular velocity for defunct satellites as a result of YORP: An initial study* / A.A. Albuja, D.J. Scheeres, J.W. McMahon // *Advances in Space Research*. - 2015. - Vol. 56, № 2. - P. 237–251.
103. Schmetz, J. *An Introduction to Meteosat Second Generation (MSG)* / J. Schmetz, P. Pili, S. Tjemkes, D. Just, J. Kerkmann, S. Rota, A. Ratier // *Bulletin of the American Meteorological Society*. - 2002. - Vol. 83, № 7. - P. 977–992.
104. Lagarias, J.C. *Convergence properties of the Nelder-Mead simplex method in low dimensions* / J.C. Lagarias, J.A. Reeds, M.H. Wright, P.E. Wright // *SIAM Journal on optimization*. - 1998. - Vol. 9, № 1. - P. 112–147.
105. Šilha, J. *Apparent rotation properties of space debris extracted from photometric measurements* / J. Šilha, J.N. Pittet, M. Hamara, T. Schildknecht // *Advances in space research*. - 2018. - Vol. 61, № 3. - P. 844–861.
106. Kulkov, V.M. *Issues of controlling the motion of a space object by the impact of the ion beam* / V.M. Kulkov, N.N. Markin, Y.G. Egorov // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. - 2020. - Vol. 927, № 012051. - P. 1-7.
107. Pardini, C. *Evaluating the environmental criticality of massive objects in LEO for debris mitigation and remediation* / C. Pardini, L. Anselmo // *Acta Astronautica*. - 2018. - Vol. 145. - P. 51–75.

108. Patterson, M. NEXT: NASA's Evolutionary Xenon Thruster Development Status / M. Patterson, M. Domonkos, J. Foster, T. Haag, G. Soulas, S. Kovaleski // 39th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2003. - P. 1–10.
109. Kitamura, S. A reorbiter for large GEO debris objects using ion beam irradiation / S. Kitamura, Y. Hayakawa, S. Kawamoto // *Acta Astronautica*. - 2014. - Vol. 94, № 2. - P. 725–735.
110. Fisher, J. NEXT-C flight ion system status / J. Fisher // AIAA Propulsion and Energy 2020 Forum. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2020. - P. 1–32.
111. Patterson, M. NEXT multi-thruster array test - Engineering Demonstration / M. Patterson, J. Foster, H. McEwen, D. Herman, E. Pencil, J. VanNoord // 42nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2006. - Vol. 10, № May. - P. 8187–8208.
112. Liou, J.C. An active debris removal parametric study for LEO environment remediation / J.C. Liou // *Advances in Space Research*. - 2011. - Vol. 47, № 11. - P. 1865–1876.