

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»
МАИ (НИУ)

На правах рукописи



Гавва Любовь Михайловна

**МЕТОДЫ АНАЛИЗА СТАТИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ
КОНСТРУКТИВНО-АНИЗОТРОПНЫХ ПАНЕЛЕЙ
ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ
НА ОСНОВЕ УТОЧНЁННОЙ ТЕОРИИ
С УЧЁТОМ ТЕХНОЛОГИИ ИЗГОТОВЛЕНИЯ**

Специальность 05. 07. 03
«Прочность и тепловые режимы летательных аппаратов»

Диссертация на соискание учёной степени
доктора технических наук

Научный консультант
доктор технических наук,
профессор В.В. Фирсанов

Москва – 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
ГЛАВА 1 КЛАССИФИКАЦИЯ И ОБЗОР РАБОТ, ПОСВЯЩЁННЫХ ПОСТРОЕНИЮ РАСЧЁТНЫХ МОДЕЛЕЙ, РАЗРАБОТКЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ, ЧИСЛЕННЫХ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ КОНСТРУКТИВНО-АНИЗОТРОПНЫХ ПАНЕЛЕЙ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ	32
ГЛАВА 2 КОНСТРУКТИВНО-АНИЗОТРОПНЫЕ ПАНЕЛИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКИ И ТЕМПЕРАТУРЫ С УЧЁТОМ ТЕХНОЛОГИИ ИЗГОТОВЛЕНИЯ. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ	62
2.1 ПЛОСКАЯ ПРЯМОУГОЛЬНАЯ КОМПОЗИТНАЯ ПАНЕЛЬ, ЭКСЦЕНТРИЧНО ПОДКРЕПЛЁННАЯ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫМ НАБОРОМ. ТОНКОСТЕННЫЙ АНИЗОТРОПНЫЙ СТЕРЖЕНЬ С УЧЁТОМ ДЕФОРМАЦИИ СДВИГА	64
2.1.1 Статико-геометрическая модель анизотропной пластины	64
2.1.2 Тонкостенный анизотропный стержень с учётом деформации сдвига в условиях одностороннего контакта с обшивкой	70
2.1.3 Вариационная формулировка задачи	75
2.1.4 Естественные граничные условия. Внутренние силовые факторы	87
2.1.5 Математическая модель. Уравнения равновесия. Связь внутренних силовых факторов с искомыми перемещениями	90
2.1.6 Уравнения равновесия. Разрешающее уравнение	96
2.2 ПЛОСКАЯ ПРЯМОУГОЛЬНАЯ КОМПОЗИТНАЯ ПАНЕЛЬ, ЭКСЦЕНТРИЧНО ПОДКРЕПЛЁННАЯ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫМ НАБОРОМ. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ УЧЁТ ЗАКРУЧИВАНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ СТЕРЖНЕЙ	106
2.2.1 Статико-геометрическая модель анизотропной панели	106

2.2.2	Внутренние силовые факторы	108
2.2.3	Уравнения равновесия. Разрешающее уравнение	111
2.3	ОБОБЩЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РАСЧЁТА КОНСТРУКТИВНО-АНИЗОТРОПНЫХ ПАНЕЛЕЙ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ	119
2.4	ПЛОСКАЯ ПРЯМОУГОЛЬНАЯ КОМПОЗИТНАЯ ПАНЕЛЬ ОРТОТРОПНОЙ СТРУКТУРЫ	124
2.4.1	Компоненты вектора перемещений	124
2.4.2	Внутренние силовые факторы	125
2.4.3	Уравнение равновесия	128
2.4.4	Уравнение равновесия с учётом краевых эффектов	129
ГЛАВА 3 МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЁННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКТИВНО- АНИЗОТРОПНЫХ ПАНЕЛЕЙ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ОБЩЕГО ВИДА		132
3.1	Постановка краевой задачи	132
3.2	Построение точного общего решения для согласованных граничных условий на части контура	137
3.3	Метод однородных решений в задачах статики конструктивно- анизотропных панелей из композиционных материалов с граничными условиями общего вида	144
3.4	Краевые эффекты в уточнённой теории конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов	169
3.4.1	Постановка краевой задачи	169
3.4.2	Построение точного общего решения для согласованных граничных условий на части контура	172
ГЛАВА 4 НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КОНСТРУКТИВНО-АНИЗОТРОПНЫХ ПАНЕЛЕЙ. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ		176

ГЛАВА 5 УСТОЙЧИВОСТЬ КОНСТРУКТИВНО-АНИЗОТРОПНЫХ ПАНЕЛЕЙ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ОБЩЕГО ВИДА	199
5.1 Изгибная форма потери устойчивости. Постановка задачи. Разрешающие уравнения	203
5.2 Крутильная форма потери устойчивости. Вариационная формулировка задачи. Разрешающие уравнения	206
5.3 Устойчивость панели с согласованными граничными условиями на контуре при сжатии	211
5.3.1 Общая изгибная форма потери устойчивости панели	211
5.3.2 Многоволновая крутильная форма потери устойчивости панели	213
5.4 Докритическое напряжённо-деформированное состояние конструктивно-анизотропных композитных панелей при сжатии	217
5.5 Устойчивость панели с согласованными граничными условиями на контуре при сжатии с учётом неравномерности докритического напряжённого состояния.....	220
5.6 Устойчивость панели с согласованными граничными условиями закрепления двух противоположных кромок при сжатии	223
5.7 Метод однородных решений в задачах устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов с граничными условиями общего вида	231
ГЛАВА 6 УСТОЙЧИВОСТЬ КОНСТРУКТИВНО-АНИЗОТРОПНЫХ ПАНЕЛЕЙ. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ	242
ГЛАВА 7 ВЕРИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИСЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКТИВНО-АНИЗОТРОПНЫХ ПАНЕЛЕЙ	254
7.1 Сопоставление результатов с данными зарубежного эксперимента по деформированию конструктивно-анизотропных панелей из изотропных материалов	254

7.2 Экспериментальные исследования устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов	255
7.3 Экспериментальные исследования устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из изотропных материалов, усиленных КМ-жгутами	257
7.4 Экспериментальные исследования устойчивости конструктивно-анизотропных панелей кессона из изотропных материалов, усиленных КМ-жгутами	262
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	266
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	272
ПРИЛОЖЕНИЕ	
Акты внедрения результатов диссертационной работы	312

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования

Исследование современных проблем прочности относится к числу важнейших задач прикладной механики в свете развития научно-технического прогресса в рамках приоритетных комплексных проектов. Проблемы возникают в связи с необходимостью создания новых объектов авиационной техники, эффективность которых во многом зависит от оптимальности силовых несущих конструкций.

Несущие поверхности современных летательных аппаратов (ЛА) представляют собой геометрически сложные дискретно-континуальные тонкостенные пространственные системы, подкреплённые дискретным набором продольных и поперечных силовых элементов.

Важнейший круг проблем, стоящих перед теорией, практикой проектирования и практикой изготовления, - применение в конструкциях ЛА полимерных волокнистых композиционных материалов, обладающих целым рядом специфических особенностей, включая анизотропию механических свойств, которые необходимо учитывать при построении новых математических моделей (Рисунок 1).



Использование композиционных материалов в авиастроении
Перспективы развития
Текущий статус проектов



Рисунок 1 - Использование композиционных материалов в авиастроении

Опыт эксплуатации полимерных композиционных материалов в ответственных конструкциях авиакосмической техники продемонстрировал снижение массы конструкций до 30–50% при применении композитов вместо металлических сплавов.

В настоящее время нет ни одного современного летательного аппарата, в конструкции которого не были бы использованы композиты» на основе углеродных, стеклянных и других волокон в сочетании с эпоксидными матрицами: углепластики, стеклопластики, органопластики и гибриды на их основе. Полимерные композиционные материалы (ПКМ) применяются в конструкциях пассажирских и транспортных самолётов Ил-86, Ил-96-300, Ил-96-400Т, Ил-114, Ил-114МП, Ил- 476, Ту-204, Ту-214, Ту-334, Ан-124, Ан-225, Ан-70, Ан-140, Ан-148, истребителей серии МиГ-29, Су-27, Як-36, Як-130, Су-47 («Беркут»), спортивных самолётов Су-29, Су-31М, вертолёт (Рисунок 2).



Рисунок 2 - Расширение объёмов применения полимерных композитов в конструкциях авиакосмической техники

Военно-транспортный самолёт Ил-476 (Ил -76МД-90А) на 70% состоит из новых компонентов, по сравнению с предыдущими версиями Ил-76, включая усиленное композитное крыло.

В среднемагистральном Ту-204 из композиционных материалов изготовлено 25% деталей, в том числе вся механизация крыла: **закрылки, элероны, интерцепторы, рули высоты и направления**, а также панели люков, полов и интерьера.

В конструкции самолёта Ан-70 углепластики и органопластики использованы для изготовления деталей фюзеляжа, **крыла, оперения**, мотогондол.

В истребительной авиации углепластики внедрены в конструкцию планера самолёта МиГ-29 – отсеки каналов воздухозаборника, **панели киля, обшивки законцовок крыла**, обтекатели. На модифицированном самолёте МиГ-29 установлены агрегаты из углепластика – **кили, рули, элероны, закрылки**, тормозные щитки. На учебно-тренировочном самолёте МиГ-АТ изготовлены из углепластика **панели киля, стабилизаторы, рули**, щитки шасси, каналы воздухозаборников. В планере современных истребителей, создаваемых РСК «МиГ», из углепластиков изготовлены высоконагруженные детали – **кили, переднее горизонтальное оперение, закрылки, элероны руля**.

Углепластики и органопластики применяются в самолётах спортивного класса Су-26, Су-29, Су-31, **полностью выполненных из композитов**.

Композиционные элементы в конструкциях планера боевой и гражданской авиации представлены на Рисунке 3.



Рисунок 3 - Композиционные элементы в конструкциях планера боевой и гражданской авиации

Углепластики незаменимы в космической технике, нашли применение в конструкциях деталей космического телескопа спутника «Алмаз», зеркал антенн спутниковой связи, установленных практически на всех спутниках типа «Космос».

«Главные проекты – ближне-среднемагистральный пассажирский самолёт МС-21 и широкофюзеляжный дальнемагистральный пассажирский самолёт CRJ929, где применение композиционных материалов (КМ) является ключевым аспектом. С заменой металлических конструкций на композитные происходит смена подхода к проектированию. Новые материалы позволяют проектировать агрегаты, где прочность конструкции распределяется в соответствии с нагрузками в различных зонах в необходимом направлении. Появляется возможность целенаправленно создавать КМ под конкретную конструкцию в соответствии с действующими нагрузками, особенностями ее эксплуатации и технологическими возможностями полимерных композитов. Многообразие волокон и матричных материалов, а также схем армирования, используемых при создании композитных конструкций, позволяет направленно регулировать прочность, жесткость, уровень рабочих температур путем подбора состава, изменения соотношения компонентов и микроструктуры композита. В самолётах будущего применение композитов станет ключевым фактором, который сейчас позволяет реализовать революционный скачок. Тот, кто научится использовать лучшие свойства композитов и сможет создать эффективные конструкции, получит колоссальное преимущество» [Гайданский А.И.].

МС-21 - инновационный самолет. Главная из инноваций: **самолет с композитным крылом** (Рисунок 4). Принципиально важно: композиты используются в высоконагруженных конструкциях.



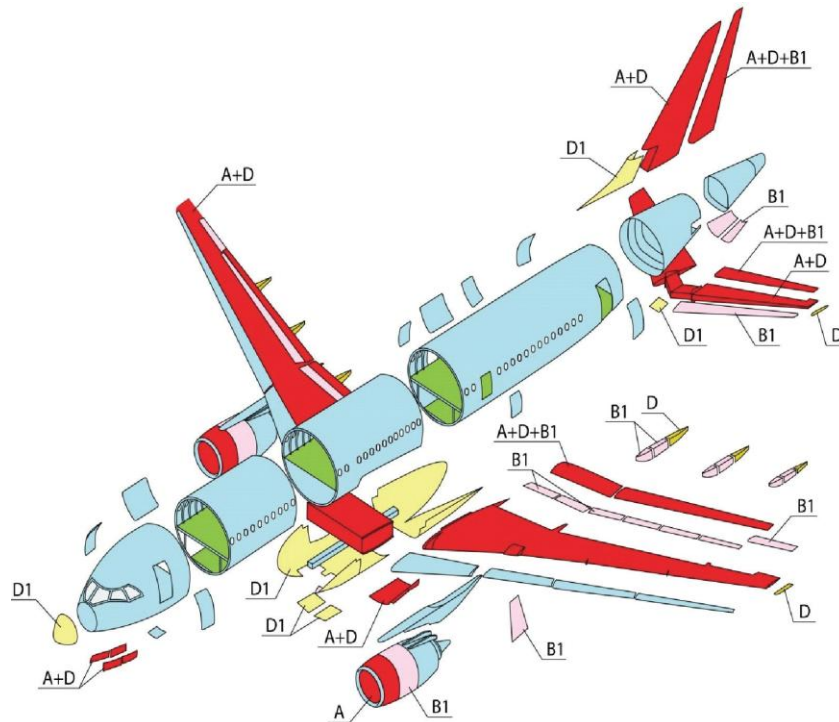
Рисунок 4 - МС-21 – инновационный самолёт с композитным крылом

Из композитов у МС-21 изготовлены отдельные элементы фюзеляжа, центроплан и оперение (Рисунки 5, 6).



Рисунок 5 - Распределение материалов в конструкции планера МС-21

Выпускаются элементы кессона крыла, лонжероны, интегральные панели крыла, и элементы механизации для российских самолетов MC-21 и Superjet 100.



- A Высокопрочная углеродная лента для первичных конструкций
- B1 Углеродная ткань для вторичных конструкций в сочетании с углеродной тканью для соединения обшивки с сотовым наполнителем (для сотовых конструкций)
- D Стеклоткань для вторичных конструкций
- D1 Стеклоткань для вторичных конструкций в сочетании со стеклотканью для формирования соединения обшивки с сотовым наполнителем (для сотовых конструкций)
- Полимерные композиционные панели пола
- Металлы

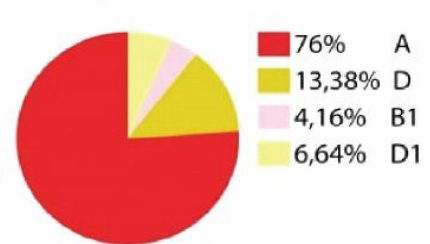
a)

Распределение материалов



б)

Распределение ПКМ



в)

Рисунок 6 - Предварительная схема распределения материалов в конструкции планера MC-21

Изобретение крыла летательного аппарата из полимерных композиционных материалов относится к области авиационной техники и касается разработки конструкций для летательных аппаратов (ЛА) из композиционных материалов (КМ), в частности крыльев и крыльевых устройств. Крыло ЛА из полимерных КМ имеет обшивку, расположенные вдоль размаха крыла лонжероны и ребра жесткости - внутренние нервюры на основе стекло-, углеткани (углеленты) (Рисунки 7, 8).

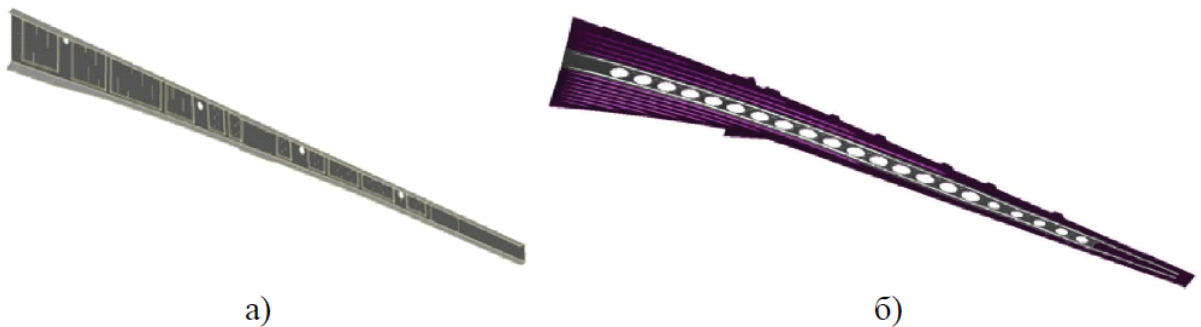
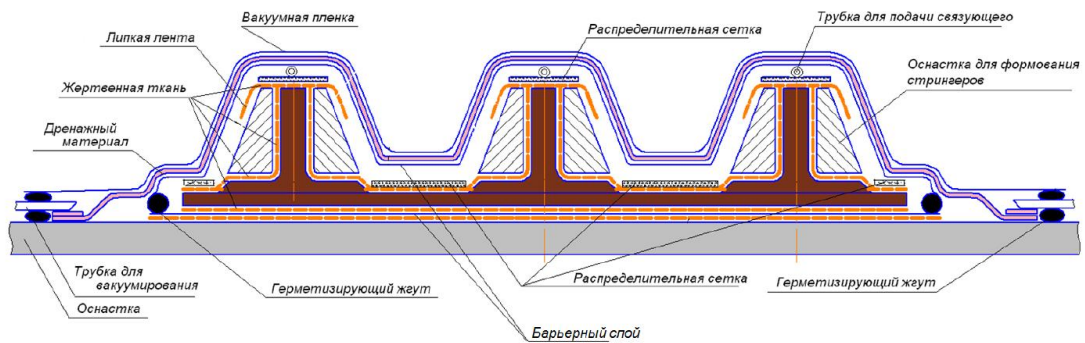


Рисунок 7 - Композитные элементы консоли крыла:

а– лонжерон 1; б – панель нижняя



Рисунок 8 - Верхняя панель крыла со стрингерами из полимерных композиционных материалов (ПКМ)

Практика проектирования авиационных конструкций требует создания и развития общих методов расчёта, совершенствования прикладных способов решения соответствующих краевых задач для каркасированных тонкостенных систем, в том числе – плоских прямоугольных панелей при регулярном и произвольном наборе как постоянной, так и переменной жёсткости, при наборе однонаправленном и перекрёстном, а также при различном расположении рёбер относительно срединной поверхности обшивки.

Расчёт и проектирование конструкций из композиционных материалов является приоритетным тематическим направлением при реализации приоритетных комплексных проектов.

Как отмечается в работах исследователей ведущих научных школ, дальнейшее развитие теории ребристых панелей, диктуемое потребностями авиационной и ракетно-космической техники, должно идти по пути обоснования и ввода в практику новых расчётных схем натурной обшивки с элементами жёсткости продольного силового набора и нервюрами, которые бы, с одной стороны, отражали в достаточно полной мере специфику рассматриваемых конструкций и в то же время были эффективными в смысле возможности построения решения. Здесь особенно важным является уточнение расчётной модели ребра, что, в свою очередь, представляет собой источник новых постановок задач.

Авиастроительная промышленность требует снижения затрат на разработку и эксплуатацию авиационной техники в краткосрочной и долгосрочной перспективе. Снижение веса планера за счёт использования структурных резервов в композитных авиационных конструкциях способствует достижению данной цели, однако, необходим точный и экспериментально подтверждённый анализ, моделирование напряжённо-деформированного состояния (НДС), прочности и устойчивости реальных конструкций в реальных условиях нагружения.

Вышеизложенное указывает на **актуальность** комплексного изучения проблем статичности и устойчивости эксцентрично подкреплённых прямоугольных панелей из композиционных и изотропных материалов с учётом технологии изготовления в условиях силового и температурного воздействия как элементов несущих поверхностей ЛА.

Степень разработанности темы

Основные направления теории и методы расчёта композитных тонкостенных конструкций класса конструктивно-анизотропных панелей проанализированы в главе 1.

Возрастающее использование конструктивно-анизотропных панелей, изготовленных из ПКМ, требует теоретически обоснованного анализа механического поведения данных конструктивных элементов. В обзоре рассматриваются упругие модели в линейной постановке, построенные на основе

моделей методы решения задач и результаты анализа НДС и устойчивости с учётом неоднородности и анизотропии свойств, а также технологии изготовления. В приведённой обзорной библиографии представлен материал, начиная с основополагающих работ до последних достижений. В публикациях последних двадцати лет большинство авторов при проведении теоретических исследований уделяет надлежащее внимание учёту особенностей поведения композитных панелей под нагрузкой. Даны классификация и анализ основных направлений развития теории конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов, обсуждаются наиболее разработанные модели и уравнения, математический аппарат, предназначенный для решения краевых задач.

В российских авиационных университетах, государственных и технических университетах, НИИ РАН и отраслевых НИИ, в авиационных корпорациях сложились **научные школы** и научные направления исследования проблем прочности и устойчивости эксцентрично подкреплённых прямоугольных панелей из композиционных и изотропных материалов в условиях силового и температурного воздействия как элементов несущих поверхностей ЛА (Рисунок 9).



<p align="center">Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана</p>	<p align="center">Московский государственный строительный национальный исследовательский университет</p>	<p align="center">Институт гидродинамики СО РАН</p>
<p>Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О., Губарева Е.А., Юрин Ю.В., Таирова Л.П., Виноградов Ю.И., Гусев Ю.А., Бутенко Ю.И., Баслык К.П., Клюев Ю.И., Матросов А.В., Буянов И.А., Шелофаст В.В.</p>	<p>Рогачёва Н.Н.</p>	<p>Рассказов А.А.</p>
<p align="center">Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева - КАИ</p>	<p align="center">Пермский государственный национальный исследовательский университет</p>	<p align="center">Институт машинovedения РАН</p>
<p>Шатаев П.А., Халиулин В.И., Батраков В.В., Гюнал И.Ш., Торопцова Д.М.</p>	<p>Кусяков А.Ш., Соколкин Ю.В.</p>	<p>Азиков Н.С.</p>
<p align="center">Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева</p>	<p align="center">Саратовский национальный исследовательский государственный университет</p>	<p align="center">Институт прикладной механики РАН</p>
<p>Черняев А.В., Федечев А.Ф., Загузов И.С.</p>	<p>Полиенко А.В.</p>	<p>Лурье С.А., Тютюнников Н.П.</p>
<td data-bbox="651 1402 1034 1621"> <p align="center">Сургутский государственный университет</p> </td> <td data-bbox="1104 920 1493 1043"> <p align="center">Институт проблем механики РАН</p> </td>	<p align="center">Сургутский государственный университет</p>	<p align="center">Институт проблем механики РАН</p>
<p>Горынин Г.Л.</p>	<p>Васильев В.В.</p>	
<p align="center">Институт теоретической и прикладной механики СО РАН</p>	<p>Немировский Ю.В., Янковский А.П.</p>	
<p align="center">Красноярский научный центр СО РАН</p>	<p>Матвеев А.Д.</p>	

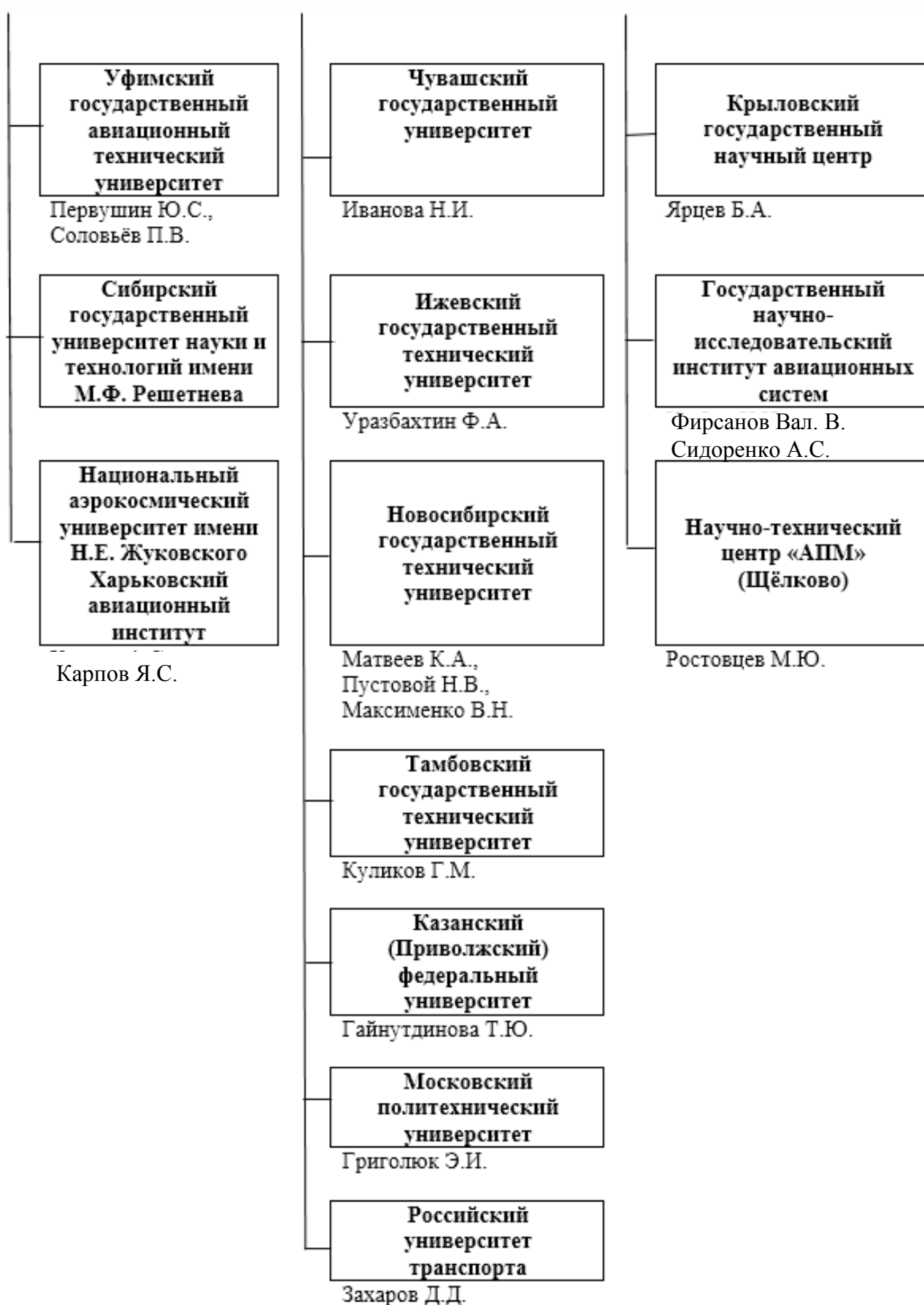


Рисунок 9 - Научные школы и направления исследований проблем прочности и устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из ПКМ

Представленный обзор российских и зарубежных публикаций даёт возможность оценить современное состояние вопроса, очерчивает область дальнейших научных исследований.

Из приведённого обзора следует, - проблема анализа прочности и устойчивости прямоугольных в плане подкреплённых панелей из полимерных композиционных материалов при статическом нагружении отражена в литературе широким спектром постановок задач, методов их решения, полученных результатов. Многообразие научных подходов к проблеме указывает на актуальность работ в данном направлении. Вопросы, возникающие в практике проектирования авиационной техники при жёстких требованиях к её весу, надёжности и стоимости, служат постоянным стимулом к дальнейшему развитию теории, так как каждый существующий метод расчёта имеет свои особенности и свою область применения, обладает как преимуществами, так и недостатками. **Недостаточно изученными** являются возможности использования принципов конструктивной анизотропии в рамках общей контактной задачи композитных обшивки и набора; необходимо совершенствование теории учёта кручения подкрепляющих элементов из ПКМ; практически отсутствуют алгоритмы, реализующие интегрирование разрешающих уравнений восьмого порядка и более высоких порядков в одинарных тригонометрических рядах; не рассматривается возможность построения решения краевых задач с дифференциальным оператором восьмого порядка при расчёте панелей с эксцентричным подкреплением и граничными условиями на смежных сторонах контура, соответствующих реальному закреплению панели в составе проектируемой конструкции. В связи с вышеизложенным в диссертации **представляется целесообразным** попытаться восполнить существующий пробел, а именно исследовать напряжения, деформации и критические параметры произвольным образом закреплённых прямоугольных панелей из ПКМ, усиленных односторонним взаимно-ортогональным жесткостным набором, а также гладких композитных панелей с несимметричной структурой пакета по толщине. Используются подходы в рамках связанных плоской задачи и задачи изгиба,

согласно конструктивно-анизотропной модели, с уточнением расчётной схемы ребра при учёте его работы на кручение. Перспективное направление исследований – проектирование композитных конструкций с учётом технологии изготовления, когда технологический процесс принимается во внимание на этапе разработки изделия.

Представляется целесообразным предложить общую теорию расчёта широкого класса конструктивно-анизотропных панелей: композитных, металлических, комбинированных.

Широкое распространение конструктивно-анизотропных панелей в конструкциях современных образцов авиационной техники приводит к необходимости развития уточнённых методов для оценки напряжённо-деформированного состояния и устойчивости на этапе проектирования. Новые расчётные модели в уточнённой постановке составляют основу процессов проектирования и оптимизации.

Цель диссертации

Разработка в рамках междисциплинарного подхода на основе уточнённой теории с учётом технологии изготовления проблем комплексного исследования статической прочности и устойчивости эксцентрично подкреплённых прямоугольных панелей из композиционных и изотропных материалов как элементов несущих поверхностей ЛА.

Разработка универсального математического аппарата и компьютерного математического обеспечения для снижения и оптимизации весовых характеристик конструктивно-анизотропных панелей ЛА из композиционных материалов необходима при последующей реализации решения проблемы проектирования под заданную стоимость, - в качестве перспективы дальнейшей проработки темы.

Задачи исследования сформулированы для реализации цели диссертационной работы и состоят

- в построении научно обоснованных универсальных расчётных схем для

исследования в уточнённой постановке прочности и устойчивости конструктивно-анизотропных панелей ЛА из композиционных материалов, находящихся в условиях силового и температурного воздействия,

- в обобщении уточнённых расчётных моделей для класса плоских прямоугольных конструктивно-анизотропных панелей:

– изготовленных из полимерных волокнистых композиционных материалов, эксцентрично подкреплённых стержнями двух направлений, расположенными параллельно сторонам опорного профиля (контура);

– гладких, без подкреплений, из высокомодульных композиционных материалов, обладающих анизотропией вследствие несимметрии свойств структуры многослойного пакета по толщине;

– эксцентрично подкреплённых стержнями двух направлений, расположенными параллельно сторонам опорного профиля, изготовленных из изотропных материалов;

– эксцентрично подкреплённых стержнями двух направлений, расположенными параллельно сторонам опорного профиля, изготовленных из изотропных материалов с усилением рёбер жёсткости композитными жгутами;

- в использовании аналитических подходов, основанных на принципах конструктивной анизотропии и дальнейшем развитии теории тонкостенных упругих стержней В.З. Власова,

- в построении научно обоснованных универсальных расчётных схем для исследования прочности и устойчивости конструктивно-анизотропных панелей ЛА, находящихся в условиях силового и температурного воздействия, с учётом технологии изготовления, когда технологический процесс принимается во внимание на этапе разработки изделия,

- в построении уравнений равновесия высоких порядков и естественных граничных условий для исследования общего напряжённого состояния,

- в доказательстве правомочности упрощения расчётной схемы при определении основного напряжённого состояния путём сведения её к краевой

задаче для уравнения с дифференциальным оператором восьмого порядка в соответствии с теорией асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений,

- в разработке общих способов определения напряжённо-деформированного состояния и критических параметров произвольным образом закреплённых прямоугольных панелей с учётом технологических факторов,

- в построении решений уравнений равновесия двенадцатого и восьмого порядков в одинарных тригонометрических рядах с учётом и без учёта краевых эффектов,

- в анализе возможности использования для исследования прочности односторонне усиленных панелей известного в литературе приёма, заключающегося в формальном распространении гипотезы Кирхгофа на всё тело анизотропной среды, в оценке границ применимости теории Кирхгофа,

- в распространении известных способов решения различных краевых бигармонических задач на интегрирование дифференциального уравнения восьмого порядка в частных производных и применении модификаций метода однородных решений к расчёту широкого класса конструктивно-анизотропных панелей с эксцентричным продольно-поперечным набором, с реальными типами опираний и закреплений смежных сторон контура,

- в решении практически важных задач о бифуркации равновесных форм прямоугольных панелей с односторонними подкреплениями по двум взаимно-перпендикулярным направлениям; в выявлении условий возникновения общей изгибающей и многоволновой крутильной форм потери устойчивости при построении решения в двойных тригонометрических рядах,

- в разработке метода определения критических усилий конструктивно-анизотропных панелей с учётом переменности исходного докритического напряжённого состояния,

- в построении алгоритмов исследования задач устойчивости эксцентрично подкреплённых панелей в одинарных тригонометрических рядах, а также с использованием метода однородных решений при произвольных условиях на

контуре,

- в разработке комплекса программ в операционной среде MATLAB, который может быть использован в дальнейшем в системе автоматизированного проектирования при решении задачи проектирования изделия под заданную стоимость; в численном анализе полученных решений, компьютерной параметрической оптимизации конструктивно-анизотропных панелей ЛА,

- в экспериментальном подтверждении достоверности теоретических результатов,

- в изложении новых научно обоснованных технических и технологических решений, внедрение которых внесёт значительный вклад в развитие авиационной промышленности.

Объект исследования – конструктивно-анизотропные панели несущих поверхностей ЛА (Рисунок 10).

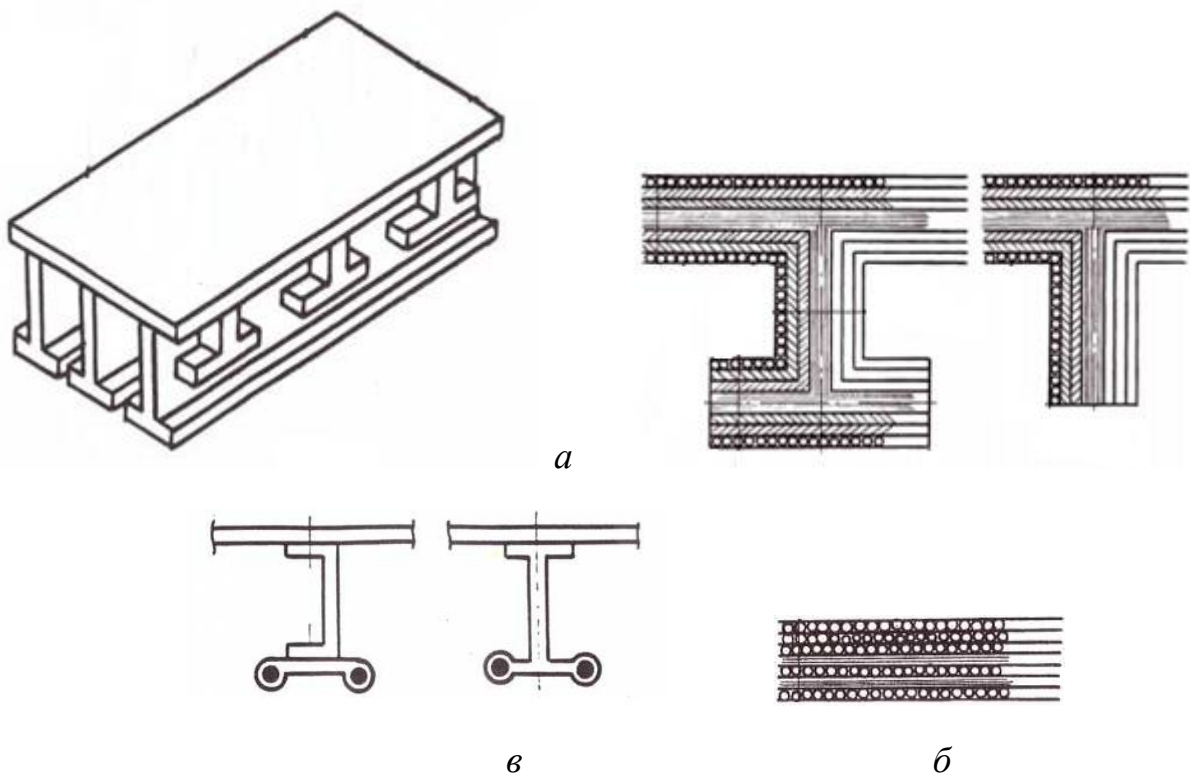


Рисунок 10 - Конструктивно-анизотропные панели:

a - изготовленные из полимерных волокнистых композиционных материалов, с эксцентричным продольно-поперечным набором; *б* - многослойные композитные с несимметричной по толщине структурой пакета; *в* - изготовленные из изотропных материалов, с усилением эксцентрично расположенных рёбер жёсткости композитными жгутами

Научная новизна

Выполненное в диссертации дальнейшее развитие теории тонкостенных упругих стержней В.З.Власова применительно к общей контактной задаче для обшивки и ребра с учётом деформации сдвига при закручивании составляет **научную новизну** работы. Концепция принадлежала профессору кафедры «Строительная механика и прочность ЛА» А.Н. Елпатьевскому.

К новым научным результатам относятся:

- формирование новой обобщённой универсальной математической модели для исследования прочности и устойчивости конструктивно-анизотропных панелей ЛА, находящихся в условиях силового и температурного воздействия; технологический процесс принимается во внимание на этапе разработки изделия из полимерных композиционных материалов,

- обобщение комплексной системы новых уточнённых расчётных моделей для класса конструктивно-анизотропных панелей несущих поверхностей ЛА, изготовленных из композиционных и изотропных материалов,

- постановка и решение новых краевых задач статики конструктивно-анизотропных панелей ЛА; реализация решения краевых задач с дифференциальными операторами уравнений равновесия двенадцатого и восьмого порядков в одинарных тригонометрических рядах,

- доказательство правомочности значительного упрощения обобщённой универсальной математической модели при определении основного напряжённого состояния без учёта краевых эффектов, - в широком диапазоне жесткостей панелей в соответствии с теорией асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений,

- распространение приёмов исследования различных краевых бигармонических задач – вариантов метода однородных решений – на интегрирование дифференциального уравнения восьмого порядка при расчёте конструктивно-анизотропных панелей с реальными условиями закрепления контура в составе проектируемой конструкции,

- разработка методологии определения критических сил различных форм

потери устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов с учётом неравномерности исходного сложного докритического напряжённого состояния, формулы для критических параметров изгибной и крутильной форм рекомендуется использовать в качестве ограничений целевой функции при последующей реализации решения проблемы проектирования несущих поверхностей ЛА,

- оценка влияния технологии изготовления на статику и устойчивость конструктивно-анизотропных панелей из полимерных волокнистых композиционных материалов в рамках решения краевых задач для уравнения восьмого порядка,

- разработка нового универсального математического аппарата и нового компьютерного математического обеспечения для реализации процесса компьютерной многокритериальной оптимизации с учётом технологии изготовления конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов, находящихся в условиях механического, внешнего температурного и технологического температурного воздействий.

Теоретическая значимость работы определяется её новизной.

Практическая значимость работы

В операционной среде MATLAB разработан пакет прикладных программ и реализован процесс компьютерной многокритериальной оптимизации с учётом технологии изготовления конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов, находящихся в условиях механического, внешнего температурного и технологического температурного воздействия.

Так как решение строится точными аналитическими методами, время расчёта минимально, что представляет интерес с точки зрения практики проектирования с использованием параметрического анализа. Результаты расчётов на прочность и устойчивость с учётом технологических факторов дают возможность снижения и оптимизации весовых характеристик конструкции.

Анализ влияния различных жесткостных, геометрических и конструктивных параметров на прочность и устойчивость анизотропных панелей позволил

оценить пределы применимости существующих расчётных моделей и методов, а также выявить некоторые второстепенные факторы, которые в значительной мере упрощают задачу.

Построенные алгоритмы и разработанный комплекс MATLAB-программ предназначены для дальнейшего применения при проектировании авиационной техники. Уточнение в отношении возможностей конструкции противостоять продольно-поперечным и температурным внешним воздействиям при жёстких требованиях к весу и надёжности составляет основу любого анализа о минимальной массе в рамках решения задачи о проектировании под заданную стоимость.

Практическая значимость диссертации подтверждается:

поддержкой гранта Министерства науки и высшего образования РФ, проект № FSFF-2020-0013, руководитель В.Ю. Гидаспов, поддержкой гранта КИАС РФФИ, проект № 17-08-00849/17, руководитель В.В. Фирсанов.

Результаты исследований используются в учебном процессе МАИ (НИУ) в курсе лекций «Основы прочности конструкций», при руководстве курсовыми проектами, при руководстве диссертациями магистрантов совместного университета МАИ – ШУЦТ (Шанхайский университет Цзяо Тун), Shanghai, China.

Методология и методы исследования

В качестве методологической основы используется системный подход с отдельным формированием моделей и алгоритмов, с последующим построением научно обоснованных обобщённых универсальных расчётных схем для исследования прочности и устойчивости конструктивно-анизотропных панелей ЛА, находящихся в условиях силового и температурного воздействия, с учётом технологии изготовления.

Методология как совокупность методов исследования включает аналитические методы теории упругости, строительной механики тонкостенных конструкций, механики композиционных материалов: решение в перемещениях, теорию тонкостенных упругих стержней, вариационный принцип Лагранжа,

теорию асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений, метод символического интегрирования дифференциальных уравнений, решение краевых задач для дифференциальных уравнений высоких порядков в тригонометрических рядах, модификации метода однородных решений.

В качестве **методов исследования** используются принципы конструктивной анизотропии в рамках общей контактной задачи для обшивки и ребра с уточнением модели последнего при закручивании.

К одному из направлений построения достаточно результативных моделей, основу которых составляют аналитические методы расчёта, оперирующие непрерывными зависимостями для напряжений и деформаций, принадлежат работы, базирующиеся на схематизации тонкостенной конструкции крыла в виде конструктивно-анизотропной панели. Модель применима к некоторым типам монолитных крыльев и используется для расчёта несущих поверхностей, усиленных регулярным набором стрингеров и лонжеронов, стенки которых воспринимают поперечное давление подобно тому, как это имеет место в пластинах.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся:

- новая обобщённая универсальная математическая модель для исследования в уточнённой постановке проблем прочности и устойчивости конструктивно-анизотропных панелей ЛА, находящихся в условиях силового и температурного воздействия; технологический процесс принимается во внимание на этапе разработки изделия из полимерных композиционных материалов; теория тонкостенных упругих стержней В.З. Власова свободна от гипотезы об отсутствии деформации сдвига срединной поверхности профиля элемента жёсткости,

- постановка и решение новых краевых задач статики конструктивно-анизотропных панелей ЛА; результаты численной реализации решения краевых задач с дифференциальными операторами уравнений равновесия двенадцатого и восьмого порядков в одинарных тригонометрических рядах,

- доказательство правомочности значительного упрощения обобщённой универсальной математической модели при определении основного напряжённого состояния без учёта влияния краевых эффектов в соответствии с теорией асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений,

- новые алгоритмы интегрирования дифференциального уравнения равновесия восьмого порядка при расчёте конструктивно-анизотропных панелей с реальными условиями закрепления контура в составе проектируемой конструкции, - с использованием приёмов исследования различных краевых бигармонических задач: вариантов метода однородных решений,

- методология определения критических сил изгибной и крутильной форм потери устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов с учётом неравномерности исходного сложного докритического напряжённого состояния, формулы для критических усилий, рекомендуемые в качестве ограничений целевой функции при последующей реализации решения проблемы проектирования несущих поверхностей ЛА,

- оценка влияния технологии изготовления на статику и устойчивость конструктивно-анизотропных панелей из полимерных волокнистых композиционных материалов в рамках решения краевых задач для уравнения восьмого порядка,

- результаты численного анализа проблем устойчивости и компьютерной многокритериальной оптимизации конструктивно-анизотропных панелей ЛА из полимерных композиционных материалов при сжатии,

- результаты экспериментальных исследований проблем устойчивости конструктивно-анизотропных панелей ЛА из полимерных композиционных и изотропных материалов при сжатии, верификация математических моделей.

Степень достоверности результатов

Необходимым условием **достоверности** теоретических исследований проблем статики и устойчивости конструктивных элементов несущих поверхностей ЛА является корректный математический анализ расчётных моделей. Здесь особую роль играют точные аналитические решения, построенные

в форме конечных выражений или бесконечных рядов, позволяющих получать результаты с любой степенью точности.

Таким образом, достоверность теоретического исследования обеспечивается обоснованностью применения гипотез, полнотой расчётной модели и корректностью её математической обработки.

Предложенные решения оценены по сравнению с известными решениями.

Достоверность подтверждается сравнением полученных теоретических результатов с результатами натуральных экспериментов.

Апробация результатов

Основные положения и результаты доложены и обсуждены

- на международном конгрессе International Council of Aeronautical Sciences ICAS2020(2021) (2021 г., Shanghai, China),

- на международных конференциях International Conference on Aerospace System Science and Engineering ICASSE2018, ICASSE2019, ICASSE2020, ICASSE2021 (2018 г., г. Москва; 2019 г., Toronto, Canada; 2020 г., Shanghai, China; 2021 г., г. Москва),

- на международной конференции International Conference on Mechanical Structures and Smart Materials ICMSSM2019 (2019 г., Xian, China),

- на научных семинарах «Materials & Engineering in Aeronautics» (2017 г., 2019 г., 2020 г., г. Москва, МАИ (НИУ)),

- на XXII международной конференции по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам ВМСППС2021(2021г., г. Алушта, МАИ (НИУ)),

- на XIII международной конференции по Прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли АММАИ2020 (2020 г., г. Алушта, МАИ (НИУ)),

- на XXVII международном симпозиуме «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (2021г., г. Москва, МАИ (НИУ)),

- на конференциях с международным участием «Механика композиционных

материалов и конструкций» (2016 г., 2017 г., г. Москва, ИПРИМ РАН),

- на XV, XVI, XVII, XVIII международных конференциях «Авиация и космонавтика» (2016 г., 2017 г., 2018 г., 2019 г., г. Москва, МАИ (НИУ)).

Содержание диссертации изложено в двадцати девяти публикациях, в том числе – в десяти изданиях перечня ВАК по специальности 05.07.03, из которых три публикации проиндексированы в международных базах данных SCOPUS и Web of Science, в пяти изданиях перечня ВАК по смежным специальностям, пять публикаций статей по материалам конференций проиндексированы в международных базах данных SCOPUS и Web of Science. В представленной библиографии содержатся ссылки на статьи [16], [19], [28], [29], [30], [31], [137], [140], [141], [167], [17], [18], [138], [139], [209], [214], [216].

Личный вклад автора

Исследования, результаты которых изложены в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Исследования включают математическую постановку проблемы, разработку математических моделей, аналитических методов, подходов и алгоритмов, создание программных комплексов, многокритериальные параметрические расчёты, обработку и анализ результатов, представленных в выносимых на защиту положениях. Автор лично подготовил публикации, отражающие содержание диссертации, и лично выступал с докладами по выполненной работе.

Необходимо отметить: проведённые исследования основывались на научных концепциях и научной базе, созданных выдающимися отечественными учёными – профессорами А.Н. Елпатьевским, С.А. Лурье, В.В. Фирсановым.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность своему научному консультанту Заслуженному работнику высшей школы Российской Федерации, Почётному работнику высшего профессионального образования, доктору технических наук, профессору Фирсанову Валерию Васильевичу за поддержку, ценные замечания и рекомендации.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения, списка литературы и приложений с актами внедрения результатов исследования. Общий объём диссертации составляет 315 страниц, работа содержит 43 рисунка, 12 таблиц. Список публикаций и использованных источников включает 364 наименования.

**ГЛАВА 1 КЛАССИФИКАЦИЯ И ОБЗОР РАБОТ,
ПОСВЯЩЁННЫХ ПОСТРОЕНИЮ РАСЧЁТНЫХ МОДЕЛЕЙ,
РАЗРАБОТКЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ, ЧИСЛЕННЫХ И
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ
НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ
КОНСТРУКТИВНО-АНИЗОТРОПНЫХ ПАНЕЛЕЙ
ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ**

Возрастающее использование конструктивно-анизотропных панелей, изготовленных из ПКМ, требует теоретически обоснованного анализа механического поведения данных конструктивных элементов. В литературном обзоре рассматриваются упругие модели, в основном, - в линейной постановке, построенные на основе моделей методы решения задач и результаты анализа НДС и устойчивости с учётом неоднородности и анизотропии свойств, а также технологии изготовления. В приведённой обзорной библиографии представлен материал, начиная с основополагающих работ до последних достижений. В публикациях последних двадцати лет большинство авторов при проведении теоретических исследований уделяет надлежащее внимание учёту особенностей поведения композитных панелей. Даны классификация и анализ основных направлений развития теории и методов расчёта конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов, обсуждаются наиболее разработанные модели и уравнения, математический аппарат, предназначенный для решения краевых задач.

Объектом исследования являются плоские прямоугольные панели с обшивкой постоянной толщины,

– эксцентрично подкреплённые стержнями двух направлений, расположенными параллельно сторонам опорного профиля, изготовленные из полимерных волокнистых композиционных материалов;

– гладкие, без подкреплений, из высокомодульных композиционных материалов, обладающие анизотропией вследствие несимметрии свойств

структуры многослойного пакета по толщине.

Представлен обзор работ отечественных и зарубежных авторов, анализируется современное состояние проблем статики и устойчивости, излагаются получившие наибольшее распространение подходы к проблеме оптимального проектирования. Оценка современного состояния даёт возможность формулировать рекомендации и перспективы последующей разработки темы, очерчивает круг дальнейших исследований в области рационального проектирования несущих поверхностей перспективных изделий авиационной техники из композиционных материалов.

Обзорная литература

В статье [110, Образцов И.Ф., Сироткин О.С., Литвинов В.Б., 2000] рассмотрены состояние и перспективы применения интегральных конструкций из композиционных материалов в авиационных конструкциях, а также вклад научной школы МАИ (НИУ) в создание научных основ механики проектирования и технологии изготовления композитных изделий авиационной и ракетно-космической техники.

В обзоре [5, Альтенбах Х., 1998] приводится классификация существующих теорий, излагаются основные важнейшие подходы, ориентированные на применение в инженерной авиационной практике. В обзоре [252, Kobayashi H., 1997] даны многочисленные примеры эффективного применения композитных пластинчатых конструкций в транспортных средствах воздушного и космического базирования в качестве структурных элементов, изложен обширный список наименований монографий по мировому опыту расчёта, проектирования и производства. Предпринята сравнительная оценка различных теорий для расчёта слоистых композитных пластин [175, Carrera E., 1998]. Приводится анализ современного состояния теорий пластин из композиционных материалов [12, Ахмедов А.Б., 2011]. Дан обзор результатов при решении задач пространственного расчёта НДС многослойных плит [106, Немировский Ю.В., Горынин Г.Л., 2011]. Изложены результаты обширного обзора методов

двумерного аналитического расчёта многослойных систем и конструкций [174, Carrera E., 2001], [177, Carrera E., Demasi L., 2003]. Приведена классификация неклассических моделей механики тонких композитных пакетов, рассмотрены методы решения основных краевых задач [66, Захаров Д.Д., 2000]. Представлен обзор работ, посвящённых обоснованию использования гипотез Кирхгофа и оценке их погрешности применительно к двумерным моделям анизотропных слоистых пластин [282, Motygin O.V., Nazarov S.A., 2000]. [204, Edwards D.A., Williams F.W., Kennedy D., 1998] представили библиографию по оптимальному проектированию прочных и устойчивых аэрокосмических композитных конструкций наименьшей стоимости. Конечно-элементное моделирование слоистых композитных панелей представлено обзорами [338, Tseng Y-P, Jiang Y-C, 1998] и [309, Robbins D.H., Reddy J.N., 1996], [239, Kam T.Y., Sher H.F., Chao T.N., Chang R.R., 1996], продемонстрировано сравнение результатов численных расчётов с имеющимися аналитическими решениями и экспериментальными данными. [326, Soldatos K.P., Watson P., 1997] предложили список литературы по двумерным теориям высокого порядка с учётом деформации поперечного сдвига и строгим трехмерным решениям. В обзоре методов расчёта [172, Carrera E., 2003] особое внимание уделяется теориям Zig-Zag с кусочно-непрерывным полем перемещений по толщине пластины. Результаты расчётов [231, 232, Jalali S.J., Taheri F., 1998] сопоставлены с точным решением на основе теории упругости, вычислениями по теории слоистых пластин высокого порядка и данными конечноэлементного моделирования. Приведены обзоры методов статического расчёта слоистых композитных пластин [360, Zenkour A.M., Fares M.E., 2001], [340, Ugrimov S.V., 2002]. Проведён анализ современных тенденций и перспектив развития методов усреднения механики композитов [128, Соколкин Ю.В., Макарова Е.Ю., 2002].

Библиография по анализу выпучивания слоистых композитных панелей с учётом деформации поперечного сдвига дана [288, Ni Q-Q., Kataoka S., 1998]. Библиография по оптимизации подкреплённых композитных панелей представлена [224, Henderson J.L., Gurdal Z., Loos A.C., 1998].

В монографиях [6, Андреев А. Н., Немировский Ю.В., 2001], [38, Голушко С.К., Немировский Ю.В., 2008] представлены результаты теоретических и численных исследований, выполненных авторами в области механики и вычислительной математики, а также неклассическая математическая модель деформирования тонкостенных многослойных композитных пластин. Дана оценка влияния на характеристики НДС и критические параметры поперечных сдвиговых деформаций, обжатия нормали, моментности основного равновесного состояния, докритических деформаций. Проведены систематические сравнения полученных решений с решениями, найденными при использовании известных в литературе неклассических моделей, в том числе, - и в трёхмерной постановке.

Дан анализ литературы, посвящённой разработке перспективных моделей деформирования упругих многослойных пластин [44, Григолюк Э.И., Куликов Г.М., 2005], в которых не нарушаются условия непрерывности перемещений и поперечных напряжений на поверхности раздела слоёв. Исследованы проблемы деформирования упругих слоистых пластин на основе различных теорий [36, Голушко С.К., 2005]. Проведено сравнение точных решений с приближёнными, построенными на основе гипотез Кирхгофа [107, Немировский Ю.В., Янковский А.П., 2004].

Библиография по анализу напряжённо-деформированного состояния, устойчивости и оптимальному проектированию композитных решётчатых конструкций при наличии слоистой обшивки и гладких композитных пакетов дана в обзорных работах [187, Chen H.J., Tsai S.W., 1996], [267, Liew K.M., Pan Z.Z., Zhang I.W., 2019], [287, Nikbakt S., Kamarian S., Shakeri M., 2018], [332, Thai H.T., Kim S.E., 2015], [235, Jiang J., Chen N., Geng Y., Shao H., Lin F., 2017], [258, Kulkarni P., Dhoble A., Padole P., 2018], [201, Degenhardt R., Tessmer J., 2005],

В монографиях [46, Гришин В.И., Дзюба А.С., Дударьков Ю.И., 2013], [58, Дудченко А.А., Шумова Н.П., 2006], [57, Дудченко А.А., 2013] рассмотрены общие принципы подходов к расчёту на прочность и устойчивость элементов авиационных конструкций из композитов.

Вопросам применения композиционных материалов в авиастроении,

расчёту и проектированию конструкций из композиционных материалов в рамках мультидисциплинарного подхода посвящены обзоры [25, Васильев В.В., 2012], [67, Зорин В.А., 2011], [152, Чернышев С.В., 2013], [127, Смердов А.А., 2011], [278, Mikhasev G. I., Altenbach H., 2019], [342, Morozov E.V., Vasiliev V 2007], [345, Voyiadjis G.Z., Kattan P.I., 2005].

Математическое моделирование

Точные решения, полученные на основе уравнений теории упругости, исследованы [79, Копытько О., 1999], [231, 232, Jalali S.J., Taheri F., 1998], [310, Rohwer K., Rolfes R., 1998]. Трёхмерное решение задачи изгиба представлено [50, Демчук О.Н., 1998], [156, Шалдырван В.А., Сорока В.А., 2001]. Трёхмерные модели конструкций из композитных материалов с применением концепций линейной теории упругости анизотропного тела предложены [4, Алибаев С.Г., Галилеев М.Д., Матросов А.В., 2000] и строятся при помощи метода начальных функций. Использование трёхмерных моделей, которые свободны от гипотез о характере НДС, позволяет выявить особенности при исследовании напряжений и деформаций. Предложены дополнительные условия для функций перемещений в трёхмерных моделях композитных пластин, что приводит к уменьшению размерности данных моделей [90, Матвеев А.Д., 2005].

Построена матрица фундаментальных решений осреднённых уравнений упругости для тонкой слоистой пластины произвольной несимметричной структуры с анизотропией слоёв общего вида, рассмотрены связанные процессы изгиба и растяжения – сжатия - сдвига. Для основных типов связанных краевых задач статики выведена система из четырёх граничных интегральных уравнений, изучены сингулярности ядер, исследованы свойства интегральных уравнений [65, Захаров Д.Д., 1997].

Уточнённые математические модели НДС различной степени приближения, учитывающие деформации поперечного сдвига, предложены [304, Qi Y.Q., Knight N.F., 1996], [113, Пискунов В.Г., Рассказов А.А., 1998], [270, Liu S., Soldatos K.P., 2003], [346, Vuksanovic D., Cetrovic M., 2005], [195, Daghia F.,

Miranda S., Ubertini F., Viola E., 2008], [213, Fiedler L., Lacarbonnara W., Vestroni F., 2010]; [50, Демчук О.Н., 1998] - с применением итерационного подхода. Подход [211, Fan Y., Lin F., 1998] основан на применения теории высокого порядка Reddy, когда три определяющих дифференциальных уравнения в частных производных второго, третьего и четвёртого порядков преобразованы в одно дифференциальное уравнение восьмого порядка с применением «метода дифференциального оператора». Уравнения равновесия сведены автором [361, Zhang C., 1999] к дифференциальному уравнению в частных производных десятого порядка с целью построения общих аналитических решений. [364, Zou G., 1999], [308, Reddy K.J., 1995], [321, Shu X.P., Soldatos K.P., 2000], [202, 203, Duan J., 2002], используются варианты уточнённой теории с учётом поперечного сдвига. Авторы аппроксимируют распределение перемещений и деформаций поперечного сдвига по толщине различным набором функций. Предпринята разработка асимптотически корректной теории ортотропных слоистых пластин, изложены теоретические предпосылки вариационно-асимптотического подхода, учитывается деформация сдвига первого порядка [327, Sutyurin V.G., Hodges D.H., 1996]. На основе гипотезы двойной суперпозиции развита теория сдвиговой деформации высокого порядка [222, He L.W., Li L., 2002]. Определяющие уравнения для слоистых ортотропных пластин составлены на основе теории поперечных сдвиговых деформаций высокого порядка Reddy [202, 203, Duan J., 2002], для композитных пластин с рёбрами жёсткости - [143, Фомин В.П., 2004]. В варианте уточнённой теории высокого порядка с учётом поперечного сдвига получены уравнения равновесия и естественные граничные условия [223, He L., Li L., 2001]. Энергетический подход к линеаризованной контактной задаче предложен [226, Hu W.P., Zhang X., Meng Q.C., 2002]. Модель многослойной анизотропной пластины [272, Loredó A., Castel A., 2013] учитывает поперечные сдвиговые деформации посредством функций связи, получаемых из статических и кинематических связей на границе.

Предложен аналитический подход к формулировке краевых задач расчёта многослойных пластин с учётом поперечного сдвига и обжатия с необходимой

точностью [22, Бутенко Ю.И., 2003], использованы вариационно-асимптотические методы построения неклассических моделей.

Сформулирована физико-математическая модель, которая включает комбинированное взаимодействие пластины и подкрепляющих рёбер с учётом влияния контактных напряжений и деформаций поперечного сдвига [217, Gong S.W., Lam K.Y., 1999]. Модель, предложенная [115, Поляков В.А., Шлица Р.П., Хитров В.В., Жигун В.И., 1999], позволяет анализировать особенности, обусловленные скольжением слоёв, их жёстким сцеплением в рамках гипотезы Кирхгофа-Лява, поперечным сдвигом и сжатием нормали.

В цикле статей [108, Немировский Ю.В., Янковский А.П., 1998] сформулирована контактно-сопряжённая задача поперечного изгиба кирхгофовских пластин. [86, Лурье С.А., Введенский А.Р., Криволицкая И.И., Тучкова Н.П., 1998] предлагают способ построения расчётных моделей, основанный на описании деформационно-силового взаимодействия составных элементов как обобщённых упругих оснований. Контактные взаимодействия вводятся аналитически с помощью дифференциальных операторов. Упрощённые прикладные модели – модели Винклера, Власова – строятся на основе полученных соотношений с использованием разложений дифференциальных операторных коэффициентов жёсткости в ряды Тейлора. Модели учитывают особенности деформирования неоднородных структур, обусловленные сдвиговыми деформациями.

Метод расчёта, основанный на предположении о нерастяжимости применяемого композиционного материала в направлении толщины панели, разработан [231, 232, Jalali S.J., Taheri F., 1998], составлены определяющие дифференциальные уравнения. При построении прикладной теории, основанной на гипотезе Кирхгофа-Лява, предлагается дополнительно учесть сжимаемость нормали [124, Сибиряков А.В., 2002].

В работе [125, Сипетов В.С., Грицук Ю.В., 1997] построены соотношения уточнённого варианта теории слоистых пластин с соблюдением условий жёсткого контакта между анизотропными слоями. Аксиоматический и асимптотический

анализ уточнённых «послойных» моделей композитных несимметричных пластин выполнен [302, 303, Petrolo M., Lamberti A., 2016].

На основе общего вариационного принципа Лагранжа для трёхмерных уравнений теории упругости с помощью теории асимптотических разложений по малому параметру, без введения гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине выведено вариационное уравнение для многослойных пластин [52, Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Юрин Ю.В., 2015]. Уравнение эквивалентно системе дифференциальных уравнений теории Кирхгофа – Лява, дано математически строгое в асимптотическом смысле обоснование классической теории. Найдено распределение шести компонент тензора напряжений.

Уравнения пространственной теории упругости изгиба слоистых пластин решаются с помощью метода асимптотического «расщепления» [41, 42, Горынин Г.Л., Немировский Ю.В., 2004, 2007]. Асимптотическим методом «расчленения» построена двумерная теория слоистых пластин, когда связанная задача не разделяется на плоскую и задачу изгиба [118, Рогачёва Н.Н., 2001]. В результате введения выбранной специальным образом нейтральной поверхности и асимптотического анализа полное упругое состояние расчленено на квазипоперечное и квазитангенциальное. Анализ композитных анизотропных пластин со связью изгиб-растяжение для последующего решения смешанных граничных задач выполнен [273, Lu P., 2004]. [15, Белубекян М.В., 2001] установлено, что при определённых граничных условиях на кромках панели задача определения прогиба на основе гипотезы Кирхгофа отделяется от задачи определения обобщённого плоского напряжённого состояния.

[238, Kabir H.R.H., 2004], [196, Dallot J., Sab K., 2008] применяют классическую теорию слоистой конструкции в рамках гипотезы Кирхгофа. [276, Manne P.M., Tsai S.W., 1998] используют постановку Кирхгофа, исследуется уравнение четвёртого порядка. Асимптотическим методом осуществляется оценка точности гипотез Кирхгофа в теории слоистых пластин [282, Motygin O.V., Nazarov S.A., 2000].

В задачах поперечного изгиба слоистых пластин развит метод расчёта на основе граничных интегральных уравнений, особое внимание уделяется анализу свойств функции Грина [358, Zakharov D.D., 1999].

Представлены результаты по исследованию краевых эффектов и погранслоёв для слоистых пластин в постановке плоской и пространственной задач теории упругости с помощью асимптотического интегрирования [23, Бутенко Ю.И., 2008]. Описание пограничного слоя типа Леви на основе связанной послойной модели дано [241, Kapuria S., Kumari P., 2012].

Рассматриваются особенности деформационного поведения и напряжённого состояния пластин из несбалансированных слоистых композиционных материалов [112, Первушин Ю.С., Соловьёв П.В., 2012], когда несбалансированность структуры вызвана отклонениями углов укладки слоёв и нарушением последовательности их укладки.

Постановка краевых задач для разрешающих уравнений высоких порядков слоистых композитных пластин рассматривается [293, Panasenko G., 2009].

В монографии [57, Дудченко А.А., 2013] рассматриваются подходы и аналитические методы расчёта НДС элементов композитных конструкций ЛА в виде гладких пластин и подкреплённых панелей.

Энергетический подход используется для оценки влияния ориентации волокон на поля напряжений и деформаций в подкреплённых ортотропных панелях при растяжении [284, Nath S.K.D, Afsar A.M., 2009].

Обобщённая модель пластины для высококонтрастных слоистых композитов построена [168, Boutin C., Viverge K., 2016].

Обобщение дискретно- и непрерывно-структурных подходов к построению математических моделей расчёта слоистых панелей осуществлено на основе итерационного метода [89, Марчук А.В., 1996].

Математическое моделирование при термосиловом воздействии

В структурном варианте ортотропных свойств слоистой панели найдено трёхмерное распределение термических напряжений [291, Ootao Y., Tanigava

У.,1998], изложены базовые концепции теории термоупругости [290, Ootao Y., Kawamura R., Tanigawa Y., Imamura R., 1998]. Предложена теория термоупругости тонких многослойных анизотропных композитных пластин, которая построена из уравнений общей трёхмерной теории термоупругости путём введения асимптотических разложений по малому параметру без введения гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине [53, Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О., 2014]. Разработанная теория отличается от теории Кирхгофа-Лява наличием третьего порядка производных от продольных перемещений для пластин с несимметричным расположением слоёв по толщине. Представлен метод отсчётных поверхностей с приложением к анализу трёхмерной задачи термоупругости для слоистых анизотропных пластин [80, Куликов Г.М., Мамонтов А.А., 2013]. Метод использован для получения точных решений трёхмерной задачи термоупругости перекрёстно армированных композитных пластин с заданной степенью точности, когда необходимое число отсчётных поверхностей размещается в узловых точках полинома Чебышева.

Излагается развитие теории высокого порядка с ломаной нормалью слоистых пластин под термомеханическими нагрузками [193, Cho M., Oh J., 2003], для ортотропных пластин проводится вариационная процедура вывода системы дифференциальных уравнений и граничных условий [328, Tabakov P., Verijenko V., Verijenko B., 2003]. Оценка теорий высокого порядка слоистых композитов при наличии градиента температурного поля выполнена [240, Kant T., Shiyekar S.M., 2013].

Рассматривается широкий круг вопросов, связанных с исследованием термопрочности слоистых панелей, работающих в условиях действия механических и термических нагрузок [33, Гандель М.В.,1998], используются вариационные методы в рамках технической теории конструктивно-ортотропных пластин.

Построена аналитическая физико-математическая модель задачи статической термоупругости, и выведены определяющие матричные уравнения термической деформации [289, Noda N., Kimura S.,1998].

Отмечается, что показатели технико-экономической эффективности слоистых панелей из композиционных материалов авиационного назначения обусловлены связью форм изгиба, растяжения и кручения [274, Makeev A., Armanios E.A., Hooke D., 1998], характерная связь изгиб-растяжение-кручение дополнена учётом влияния термических напряжений.

Математическая модель термоупругого состояния размеростабильного зеркала телескопа сформулирована [136, Федечев А.Ф., Жигалин А.Г., Загузов И.С., Головинский В.Н., 2005].

Целью диссертационной работы [123, Самсоненко Г.И., 2012] является построение систем уравнений термоупругого изгиба анизотропных пластин из ПКМ. Подход к решению задач об изгибе слоистых композитных термоупругих пластин на основе послойного моделирования представлен [183, Cetkovic M., 2015].

Процедура коррекции применена для уточнения компонентов термосилового НДС посредством использования результатов процедуры прогноза и конечноэлементного анализа [296, Park J.W., Kim Y.H., 1999]. Использована конечноэлементная модель, построенная на основе применения концепций теории деформаций поперечного сдвига первого порядка.

Математическое моделирование с учётом технологии изготовления

Разработана методология для прогнозирования перемещений из плоскости при искривлении плоских слоистых композитных панелей после охлаждения до комнатной температуры от повышенной температуры затвердевания при изготовлении [151, Чернов В.М., 1996], [197, Dano M-L, Hyer M.W., 1998], [Hyer M.W., Jilani A., 1998]. Выведены аппроксимации полей деформаций в выражении общей потенциальной энергии в рамках применения метода Релея-Ритца. Выявлено, что наличие искривлений в структуре материала пластин существенно изменяет картину распределения напряжений при статическом нагружении [62, Заманов А.Д., 2002].

Рассмотрены теоретические основы изготовления ортотропного

композитного пакета [60, Ерёмин В.Ю., Чернышова С.М., 2009], моделирование и технология изготовления конструкций авиационной техники из композиционных материалов [21, Бохоева Л.А., Курохтин В.Ю., Чермошенцева А.С., Перевалов А.В., 2013]. Представлена математическая модель, с помощью которой оцениваются возникающие напряжения при отверждении пакета из композиционных материалов [135, Уразбахтин Ф.А., Харинова Ю.Ю., Болонкин В.А., 2015].

Аналитические методы решения задач статики

Предлагается обобщённая версия теории многослойных пластин и методов расчёта на основе схемы разложения компонент вектора перемещений каждого слоя в степенные ряды [340, Ugrimov S.V., 2002].

В виде аналитических функций комплексных переменных строятся общие решения для анизотропных слоистых пластин со связью изгиб-растяжение в смешанной постановке задачи [355, Yin W.L., 2003].

Решение [364, Zou G., 1999] получено в форме ортогональных разложений.

Представлено в замкнутой форме аналитическое решение типа Навье [173, Carrera E., 2000], [324, Simion F.P., Decolon C., Alecu A., Bayer M., 1999], в двойных тригонометрических рядах [70, Карпов Я.С., Ставиченко В.Г., 2005].

В задаче изгиба решение строится в одинарных тригонометрических рядах [229, Huang Y., Liao Y., Qiu Z.S., 2002].

Моделирование изгиба слоистых панелей при различных краевых условиях предложено [159, Якубовский Ю.Е., Коновалова О.Н., 1999]. Решение краевой задачи равнонапряжённого армирования поперечно изгибаемых кирхгофовских слоистых пластин выполнено [109, Немировский Ю., Янковский А., 2000].

Исследование НДС проведено с использованием однородных решений Лурье - Воровича [156, Шалдырван В.А., Сорока В.А., 2001]. Осуществлено приложение методологии метода Лурье-Воровича для исследования НДС трёхмерных композитных пластин, разработан эффективный вариант метода однородных решений [155, Шалдырван В.А., 2007]. В виде явных разложений по

функциям Фадля-Папковича – однородным решениям – даются точные решения краевых задач подкреплённых панелей [74, Коваленко М.Д., Попов С.Н., Стрельников А.А., Цыбин Н.Н., Татаринов В.Н., 2006].

Проводится теоретический трёхмерный анализ напряжённого состояния в угловых точках слоистых пластин [279, Mittelstedt С., Becker W., 2003], результаты аналитических исследований согласуются с данными, полученными МКЭ. Анализируется напряжённое состояние в угловых точках при использовании теории высокого порядка с учётом поперечного сдвига [227, Huang С.S., 2004].

Разработаны алгоритмы расчёта на основе метода Ритца со специальными координатными функциями [121, Рябов В.М., Паршина Л.В., Ярцев Б.А., 2006], что позволило свести задачу определения НДС к решению системы линейных алгебраических уравнений. В качестве аппроксимирующей функции при реализации метода Ритца-Тимошенко использовался степенной многочлен с неизвестными коэффициентами [70, Карпов Я.С., Ставиченко В.Г., 2005].

Метод дискретной ортогонализации использован [11, Аристамбекова А.В., 2011] при исследовании НДС изгиба многослойной ортотропной пластины, два края которой свободно оперты, а два других закреплены произвольно.

В нескольких вариантах произвольных граничных условий проведён анализ термических деформаций и напряжений антисимметричных перекрёстно уложенных слоистых пластин, построены точные решения уравнений термоупругости с учётом деформации сдвига первого порядка [249, Khdeir А.А., 1997].

Численные методы решения статических задач

Предпринята разработка асимптотической расчётной модели на основе концепций МКЭ [329, Tarn J. Q., Wang Y. B., Wang Y.M., 1996] с целью уточнённого численного моделирования многослойных композитных пластин, авторами поставлена задача расчёта по принципам трёхмерной теории упругости. На основе полуаналитического МКЭ разработана численная процедура при

использовании точных трёхмерных уравнений механики сплошной среды [62, Заманов А.Д., 2002].

Предложен и реализован эффективный метод численного решения краевых задач неклассической теории, основанный на идеях инвариантного погружения [6, Андреев А. Н., Немировский Ю.В., 2001].

Разработана конечноэлементная модель с непрерывными напряжениями поперечного сдвига [317, Sce K.Y., Chen R., Cheung Y.K., 1998], [188, Chen R.G., Nan Q., 2000]. Сдвиговой элемент высокого порядка построен [163, Attia O., El-Zafrany A., 1999], [265, Li J.J., Cheng C.J., 2003]. Разработан совместный на изгиб-растяжение конечный элемент [306, Raghuram P.V., Krishna M.A.V., 1999], [71, 72, Киласония Д.Н., Беридзе Н.М., 2004, 2005]. Предложена версия МКЭ с элементом, учитывающим деформации растяжения-сжатия, изгиба и деформации поперечного сдвига первого порядка [243, Katori H., 2002]. Аналогичный конечный элемент для задач термоупругости разработан [350, Wu Z., Chen W., 2007]. Рассмотрены и сопоставлены варианты конечноэлементного моделирования [173, Carrera E., 2000]. Применены модифицированные многослойные конечные элементы со ступенчато меняющимися перемещениями, учитывается несоблюдение гипотезы плоских сечений [].

Проведён конечноэлементный анализ напряжений полимеризации [274, Makeev A., Armanios E.A., Hooke D., 1998].

Использован метод конечных элементов для численного анализа НДС при продольном сжатии композитных стрингерных панелей [234, Jegley D.C., 1998]. Математическое моделирование на основе МКЭ деформирования панелей из ПКМ выполнено [134, Тютюнников Н.П., 1996], [87, Мартиросов М.И., 2015], [132, Туктаров С.А., Чедрик В.В., 2015].

Представлены методы валидации отечественной САЕ – системы на примере расчёта слоистых углепластиковых пластин [24, Буянов И.А., Ростовцев М.Ю., Шелофаст В.В., 2016],

Разработан модифицированный метод коллокаций и наименьших невязок, основанный на специальном выборе точек коллокаций в корнях полинома

Чебышева и базисных функций в виде произведения полиномов Лагранжа [37, Голушко С.К., Идимешев С.В., Шапеев В.П., 2014]. Эффективность метода продемонстрирована на решении задач изгиба ортотропных и анизотропных слоистых пластин при специальных видах закрепления.

Многоуровневый численно-аналитический метод исследования термосилового НДС многослойных панелей несущих поверхностей ЛА их ПКМ предложен [111, Осяев О.Г., Татурин Н.А., Костин А.М., Жуков А.В., 2011].

МКЭ используется в рамках связанной задачи для анализа деформирования композитной подкреплённой панели при температурном нагружении [266, Li Y.B., Zhang P., Wu S.Q., Fei Q.G., 2015].

Приведён пример практического использования математической модели при выборе эффективного режима технологического процесса отверждения композитного пакета [135, Уразбахтин Ф.А., Харинова Ю.Ю., Болонкин В.А., 2015].

Экспериментальные исследования]

Анализируется экспериментально поведение конструкции композитного кессона под действием нагрузок, вызывающих его изгиб и кручение [84, Кутьинов В.Ф., Чедрик В.В., 2002]. Испытания кессона крыла из ПКМ являются частью экспериментальных работ по обеспечению прочности конструкции планера самолёта МС-21 [35, Голован В.И., Гулевский И.В., Захарченкова А.Ю., Куликов С.В., Стрижиус В.Е., Филичкина Л.П., Щербань К.С., 2013].

Экспериментальное исследование температурного поведения анизотропных композитных пластин выполнено [314, Santos C., Plaisted T., Arbelaez D., Nemat N.S., 2004].

Проведён анализ погрешностей при исследовании термических деформаций композитов с помощью тензометрии [130, Таирова Л.П., Шапкина В.М., 2011].

Экспериментальная оценка перемещений подкреплённой композитной панели под силовой и тепловой нагрузкой осуществлена [178, Cerracchio P., Gheerlone M., Tessier A., 2015].

Различные аспекты проблем статики слоистых композитных пакетов и подкреплённых композитных панелей несущих поверхностей изделий авиационной техники - математическое моделирование, математическое моделирование при термомеханическом воздействии, математическое моделирование с учётом технологии изготовления, аналитические методы решения задач статики, численные методы решения статических задач, экспериментальные исследования рассматриваются в работах [170, Candiotti S., Mantari J.L., 2015], [171, Candiotti S., Mantari J.L., Yarasca J., Petrolo M., Carrera E., 2017], [176, Carrera E., Cinefra M., Lamberti A., Zenkour A.M., 2015], [181, Cater C., Xiao X., 2014], [185, Chau-Dinh T., Truong-Duc T., Nguyen-Trung K., Nguyen-Van H., 2018], [199, Deb Nath S.K., 2013], [220, Gruttmann F., Wagner W., 2017], [230, Hug N.M.L., Afsar A.M., 2012], [233, Javed S., Viswanathan K.K., Aziz Z.A., Karthik K., Lee J.H., 2016], [237, Joshan Y.S., Grover N., Singh B.N., 2017], [238, Joshan Y.S., Grover N., Singh B.N., 2018], [247, Kefal A., Tessler A., Oterkus E., 2017], [283, Naik N.S., Sayyad A.S., 2019], [286, Nguyen T.N., Thai C.H., Nguyen-Xuan H., 2016], [292, Pagani A., Valvano S., Carrera E., 2018], [301, Petrolo M., Cinefra M., Lamberti A., Carrera E., 2015], [303, Petrolo M., Lamberti A., Miglioretti F., 2016], [307, Ramaswamy S., Rajadurai J.S., Moshi A.A.M., 2017], [316, Sayyad A.S., Ghugal Y.M., Mhaske B.A., 2015], [319, Shahravi M., Fallahzade S., Mokhtari M., 2018], [334, L.V., Kim S.E., 2018], [335, Tran L.V., Thai C.H., Le H.T., Lee J., Nguyen-Xuan H., 2014], [336, Tran L.V., Wahab M.A., Kim S.E., 2017], [352, Yarasca J., Mantari J.L., Petrolo M., Carrera E., 2017], [353, Yarasca J., Mantari J.L., Petrolo M., Carrera E., 2017], [356, York C.B., de Almeida S.F.M., 2017], [359, Zarei A., Khosravifard A., 2019], [363, Zhen W., Li T., 2013], [40, Горбачев В.И., 2017].

Постановка задач устойчивости

Рассматривается общий метод анализа выпучивания слоистых композитных пластин по концепциям трёхмерной теории упругости [318, Setoodeh A.R., Karami G., 2003]. Исследования проводятся на основе трёхмерной линеаризованной

теории устойчивости [154, Чехов В.Н., Шаповалова А.И., 2006].

Вывод разрешающих уравнений устойчивости слоистой композитной пластины с произвольной укладкой слоёв для классической теории и для различных теорий третьего порядка, учитывающих поперечный сдвиг, оценка различий выполнены [144, Фомин В.П., 2002].

О расчётных моделях в задаче устойчивости пластин из композиционных материалов поставлены вопросы в статье [13, Бабич Ю.И., Иванова Н.И., 2006], установлены границы применимости теории типа Тимошенко.

Построена математическая модель с выводом дифференциальных уравнений упругого равновесия и совместности деформаций в выпученном состоянии [Zhou Z., 1998].

Проведён анализ процесса выпучивания при сжатии в вариантах глобального энергетического и локального подходов на основе J-интеграла [169, Bruno D., Greco F., 2000].

Обсуждается возможность применения предложенного метода определения критических нагрузок в структурных вариантах симметричной укладки слоистого пакета для анализа обобщённой слоистой конструкции несимметричного строения [315, Sato M., Fukunaga H., Sekine H., 1997], [102, Мовисян Л.А., Нерсисян Г.Г., 2001].

Потеря устойчивости подкреплённых композитных панелей при произвольной нагрузке рассмотрена [215, Gangadhara P.V., 2008]. Крутильная форма потери устойчивости подкреплённых стрингерами композитных слоистых пластин при поперечном сжатии исследована [280, Mittelstedt C., Schroder K.U., 2010].

Постановка задач устойчивости при термосиловом воздействии

Задачи термоустойчивости исследованы [33. Гандель М.В., 1998], [323, Shukla K.K., Nath Y., 2002], [186, Chen C.S., Lin C.Y., Chen R.D., 2011].

[8, Андронов В.А., Андропова В.А., 1999], [9, Андронов В.А., 1999] разработан подход к решению задачи устойчивости испытывающих воздействие

термо-силовой нагрузки композитных конструкций в виде континуальных пластин, подкреплённых регулярной сеткой перекрёстных рёбер. Проверка устойчивости выполняется на основе теоремы П.Ф. Папковича, критические значения определяются с использованием энергетического критерия в форме Брайана.

Сравниваются собственные значения при потере устойчивости под действием сжатия при термическом выпучивании слоистых пластин [192, Cheng Z.Q., Kitipornchai S., 2000], [320, Shen H.S., 2001]. Сопоставляются результаты по классической теории, по вариантам теорий первого и третьего порядков Reddy, учитывающих поперечный сдвиг.

Предложена двумерная теория высокого порядка для решения задач термоупругой устойчивости [277, Matsunaga H., 2005], в основу теории положено степенное разложение компонентов? вектора перемещений, позволяющее учесть деформации и напряжения поперечного сдвига и обжатия.

Постановка задач устойчивости с учётом технологии изготовления

Отмечается высокая чувствительность поведения при сжатии подкреплённых тонкостенных слоистых композитных панелей к начальным геометрическим несовершенствам, имеющим место при изготовлении [207, Elseifi M.A., Gurdal Z., Nikolaidis E., 1999], [320, Shen H.S., 2001]. Авторы [26, Виноградов Ю.И., Ключев Ю.И., 1998] предлагают использовать математическую модель для решения задач устойчивости предварительно напряжённых тонкостенных конструкций из слоистых композиционных материалов.

Поставлена задача расчёта критических нагрузок выпучивания подкреплённых стрингерами композитных пластин, обсуждается влияние остаточных термических напряжений, обусловленных технологией производства панелей аэрокосмического назначения [Muller A.S.F., Hansen J.S., 1997], [162, Almeida S., Frascino M., Hansen J.S., 2002]. Учёт остаточных напряжений, возникающих в процессе изготовления в композитных слоях конструкции, при исследовании устойчивости при продольном сжатии выполнен [14, Бабышкин

Д.В., Сафронов В.С., Туркин И.К., 1998] в рамках обращения матричного уравнения, которое связывает внутренние силовые фактора с деформациями, без решения соответствующей краевой задачи для разрешающего уравнения равновесия. Рассмотрена задача устойчивости слоистой композитной пластины с начальными технологическими прогибами [190, Chen X., Dai S.L., Xu K, 2001] с учётом связи изгиб-растяжение.

Устойчивость панелей с предварительно напряжёнными слоями исследована [59, Еремеев В.В., 2016].

Аналитические методы решения задач устойчивости

Представлено аналитическое исследование с применением классической, первого и третьего порядков теорий деформаций поперечного сдвига [Мис А., 1996].

Изложены результаты оценки критической нагрузки с использованием новых неизвестных функций, которые удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений, соответствующих дифференциальным уравнениям задачи устойчивости в вариантах двумерной теории [256, Konieczny S, Langier S., Mes R., 2001].

Исследованы критические нагрузки в рамках связанных задач изгиба и растяжения-сжатия и погрешности их определения, связанные с функцией отношения мембранных жесткостей монослоёв и их относительных долей [Venkataraman S., Haftka R.T., Lohson T.F., 2001].

Нелинейная система уравнений устойчивости относительно функций прогиба и напряжений решается вариационным энергетическим методом с представлением неизвестных и начального технологического прогиба обобщёнными рядами Фурье [190, Chen X., Dai S.L., Xu K, 2001]. В условиях термомеханического нагружения нелинейные уравнения сведены к линейным с последующим итерационным решением на основе полиномов Чебышева [322, Shukla K.K., Nath Y., 2001]. Аналитическое решение задачи термоупругой устойчивости строится на базе разложения по полиномам Чебышева [294, Pandey

R., Shukla K.K., Jain A., 2009].

Обсуждаются результаты асимптотического расчёта выпучивания [169, Bruno D., Greco F., 2000].

В замкнутом виде найдены решения для выпучивающей нагрузки шарнирно закреплённых композитных пластин, предпринято обобщение изложенного метода расчёта для пластин произвольной слоистой структуры с разнообразными граничными условиями [281, Moh J.S., Hwu C.B., 1997]. Решение в замкнутой форме по Навье задачи потери устойчивости слоистой пластины с учётом докритического напряжённого состояния построено [268, Liew K.M., Xiang Y., Kitipornchai S., 1996].

Разработаны алгоритмы расчёта на основе метода Ритца со специальными координатными функциями [121, Рябов В.М., Паршина Л.В., Ярцев Б.А., 2006], что позволило вычислить величину критической нагрузки на основе решения алгебраической задачи на собственные значения. Метод Бубнова - Галёркина использован [91, Митрофанов О.В., 2017] в задаче потери устойчивости плоской панели несимметричной структуры из композиционных материалов при сжатии.

Точное решение задачи о потере устойчивости слоистой пластиной при одноосном и двухосном сжатии представлено [343, Vescovini R., Dozio L., 2015]. Точное полуаналитическое решение задачи о потере устойчивости слоистой пластиной при двухосном сжатии построено [244, Kazemi M, 2015].

Вопрос о влиянии гибридизации на устойчивость слоистых композитных пластин рассмотрен [354, Yeter E., Erklig A., Bulut M., 2014].

Выпучивание композитных слоистых подкреплённых панелей при совместном действии сдвига и осевого сжатия исследовано [Abramovich H., Weller T., Bisagni C., 2008].

Численные методы решения задач устойчивости

Существующие программы численного анализа устойчивости по методу Монте-Карло способны прогнозировать критические сжимающие нагрузки для панелей с известной величиной начальных технологических несовершенств [207,

Elseifi M.A., Gurdal Z., Nikolaidis E., 1998]. [8, Андронов В.А., Андропова В.А., 1999], [9, Андронов В.А., 1999] предложены композитные конечные элементы, представляющие собой фрагмент континуальной пластины и жёстко скреплённый с ним фрагмент сетчатой пластины. Соотношения для вычисления матриц жёсткости предложенных конечных элементов не предполагают использования приёма континуализации («размазывания») дискретной сетки рёбер, учитываются особенности работы каждого участка оребрения. Полученные уравнения [Muller A.S.F., Hansen J.S., 1997], [116, Попов Б.Г., Баслык К.П., Кварцхелия И.Н., 2002] решаются по методу конечных элементов. Конечноэлементная модель потери устойчивости перекрёстно подкреплёнными слоистыми композитными пластинами предложена [228, Huang L., Sheikh A.H., Ng C.T., Griffith M.C., 2015].

Сообщены результаты численного исследования МКЭ задачи устойчивости подкреплённых стрингерами панелей из волокнистого углепластика в условиях термического и механического нагружения [311, Rolfes R., Tacke S., Zimmermann R., 1999]. В задаче расчёта на устойчивость подкреплённых слоистых панелей МКЭ рассматривается крутильная форма выпучивания, плоскостные перемещения учитываются при выводе матрицы жёсткости [221, Guo M.W., Harik I.E., Ren W.X., 2002]. Методом конечных элементов решается задача устойчивости слоистой композитной пластины при нагреве [331, Thankam V.S., Singh G., Rao G.V., Rath A.K., 2003], [160, Япичи А., 2005], при осевом сжатии и нагреве [330, Tenek L.T., 2001], при осевом сжатии пластины с различными условиями закрепления контура [122, Савин С.Ю., Ивлев И.А., 2017], пластины с упруго закреплёнными кромками [318, Setoodeh A.R., Karami G., 2003]. Математическая постановка осуществлена [160, Япичи А., 2005] с применением деформационной теории первого порядка и вариационного энергетического принципа.

Эффективный численный метод основан формулировке однородной краевой задачи, разделении переменных и численном решении уравнений устойчивости для подкреплённых анизотропных композитных панелей, нагруженных усилиями сжатия и сдвига, с использованием дискретной

ортогонализации [63, Замула Г.Н., Иерусалимский К.М., 1997].

Экспериментальные исследования

Предпринято экспериментальное исследование критических параметров изгибного выпучивания под действием продольного сжатия свободно опертых слоистых композитных прямоугольных пластин [Zhou Z., 1998], композитных панелей, подкреплённых рёбрами в направлении сжатия [210, Falzon B.G., Stevens K.A., Davies G.O., 2000], [297, Park O., Haftka R.T., Sankar B.V., Starnes J.H., Nagendra S., 2001], [312, Rouse M., Assadi M., 2001], [64. Замула Г.Н., Фомин В.П., Джанхотов С.О., 2009], [51, Джанхотов С.О., 2009]. Содержатся результаты экспериментального исследования при двухосном сжатии [339, Tuttle M., Singhatanadgid P., Hinds G., 1999], [341, Ungbyfkorn V., Singhatanadgid P., 2003]. Представлены результаты экспериментального исследования устойчивости композитных панелей, испытывающих сдвиг в своей плоскости [165, Baker D.J., 2000]. Испытаны на сдвиг композитные панели с рёбрами жёсткости [333, Thomson R.S., Scott M.I., 1995]. Сообщены результаты экспериментального исследования потери устойчивости при комбинации продольного сжатия и термического нагружения подкреплённых стрингерами панелей из волокнистого углепластика [311, Rolfes R., Tacke S., Zimmermann R., 1999], панелей без оребрения [73, Киреев В.А., Осипян Е.Э., 2009]. Выполнена экспериментальная верификация конечноэлементной модели.

Расчётно-экспериментальный анализ потери устойчивости стрингерных панелей из ПКМ при различных видах нагружения с оценкой влияния граничных условий, реализуемых в эксперименте, на величину критического усилия выполнен [56, Дударьков Ю.И., Левченко Е.А., Лимонии М.В., Шевченко А.В., 2018], [55, Дударьков Ю.И., Левченко Е.А., Лимонин М.В., 2019], [114, Полилов А.Н., 2015].

Различные аспекты проблем устойчивости слоистых композитных пакетов и подкреплённых композитных панелей несущих поверхностей изделий авиационной техники - постановка задач устойчивости, постановка задач

устойчивости при термомеханическом воздействии, постановка задач устойчивости с учётом технологии изготовления, аналитические методы решения задач устойчивости, численные методы решения задач устойчивости, экспериментальные исследования рассматриваются в работах [164, Bai R., Bao S., Lei Z., Liu D., Yan C., 2018], [166, Baucke A., Mittelestedt C., 2015], [179, Castro S.G.P., Donadon M.V., 2017], [180, Castro S.G.P., Donadon M.V., Guimaraes T.A.M., 2019], [182, Cetkovic M., 2016], [184, Cetkovic M., Gyorgy I., 2016], [205, 206, Ehsani A., Rezaeepazhand J., 2016], [248, Kettaf F.Z., Benguediab M., Tounsi A., 2015], [259, Kumar S., Kumar R., Mandal S., 2018], [260, Kumar S., Kumar R., Mandal S., Rahul A.K., 2018], [261, Kumar S., Kumar R., Mandal S., Ranjan A., 2018], [271, Lopatin A.V., Morozov E.V., Shanov A.V., 2016], [305, Ragb O., Matbuly M.S., 2017], [313, Sanchez M.L., De Almeida S.F.M., Carrillo J., 2017], [336, Tran L.V., Wahab M.A., Kim S.E., 2017], [337, Tsai T.C., Chen C.S., Fung C. P., Chang Y. C., 2014], [344, Vosoughi A.R., Darabi A., Anjabin N., Topal U., 2017], [351, Xu Y., Tong Y., Liu M., Suman B., 2016], [357, Yshii L.N., Lucena Neto E., Monteiro F.A.C., Santana R.C., 2018], [359, Zarei A., Khosravifard A., 2019], [363, Zhen W., Li T., 2019], [200, Degenhardt R., Kling A., Klein H., Hillger W., Goetting Ch., Zimmermann R., Rohwer K., Gleiter A., 2007].

Оптимальное проектирование

Монография [3, Алёхин В.В., Уржумцев Ю.С., 2002] посвящена выработке подходов к решению задач оптимального проектирования слоистых конструкций. Обсуждается общая формулировка проблемы гибридного проектирования слоистых плит [105, Немировский Ю.В., 2006], [27, Вохмянин И.Т., 2006]. Представлен метод и классы аналитических решений обратных задач рационального проектирования композитных пластин [38, Голушко С.К., Немировский Ю.В., 2008].

Методика прикладного проектирования сжатых композитных подкреплённых панелей минимального веса при обеспечении условий общей и местной устойчивости разработана [92, 93, Митрофанов О.В., 1997, 1998], [98, 99,

100, Митрофанов О.В., Стреляев Д.В., 1999, 1997, 1998], [47, Гришин В.И., Митрофанов О.В., Бондаренко Д.А., 1999]. Применение разработанной методики рационального проектирования позволяет исследовать оптимальность армирования подкреплённых панелей из композиционных материалов и повысить весовую эффективность авиационных конструкций на (25-30)%. Авторами [119, Родионов Г.Л., Сидоренко А.С., Станкевич А.И., 2000] рассматривается методология решения задач многокритериальной оптимизации сжатых панелей из слоистых композиционных материалов в программной среде «Диалоговая система многокритериальной оптимизации».

Даны расчётные формулы при проектировании подкреплённых стенок нервюр и лонжеронов из КМ при сдвиге и при комбинированном действии сжатия и сдвига [94, Митрофанов О.В., 2000], решены задачи рационального армирования и весовой оптимизации. Оптимальное проектирование композитного крыла с учётом выпучивания подкреплённых панелей выполнено [242, Kato Y., Kameyama, Hu N., Fukunaga H., 2004]. Проведён оптимальный расчёт при действии изгибных нагрузок [349, Wicks N, Hutchinson J.W., 2001]. Установлена рациональная схема подкрепления рёбрами сетки композитной панели как несущего элемента кессона крыла ЛА, нагруженного изгибающим моментом и перерезывающей силой [2, Азиков Н.С., Белоусов П.С., 2003], [95, Митрофанов О.В., 2004]. Глобально-локальный подход к решению задач расчёта и оптимизации по условиям прочности и устойчивости, позволяющий осуществить связь между расчётными моделями различных уровней, продемонстрирован [150, Чедрик В.В., Туткаров С.А., 2015] на примере оптимизации конструкции композитного кессона и расчёте НДС его нижней подкреплённой панели. Алгоритм и программный комплекс расчёта проектировочных параметров крыла из композиционного материала разработаны [32, Гайнутдинова Т.Ю., Мирхазов Р.Р., 2011], рассматриваются вопросы ускорения сходимости итерационного проектировочного расчёта.

В работе [158, Шатаев П.А., 2013] приводится алгоритм проектировочного расчёта конструкций из композиционных материалов с учётом стеснённой

депланации сечений, стеснённого изгиба и стеснённого кручения с возможностью варьирования точности решения.

Рассмотрена задача проектирования слоистых композитных пластин с учётом связанных изгибных и мембранных эффектов [75, Колпаков А.А., 2006, 2007].

Обосновано использование гипотезы Кирхгофа при решении задач проектирования тонкостенных композитных конструкций [107, Немировский Ю.В., Янковский А.П., 2004]. [276, Manne P.M., Tsai S.W., 1998] используют постановку Кирхгофа с разрешающим уравнением четвёртого порядка. Теми же авторами представлен пакет программ, реализующий оптимальное проектирование слоистых композитных пластин с учётом технологичности [276, Manne P.M., Tsai S.W., 1998], используется вычислительный комплекс на базе МКЭ с применением многоцелевой оптимизации. Задача структурной технологической оптимизации сформулирована [224, Henderson J.L., Gurdal Z., Loos A.C., 1998] как минимизация веса панели при ограничениях по прочности и устойчивости с учётом технологии изготовления. Включены технологические аспекты в структурную оптимизацию прочных и устойчивых подкреплённых рёбрами композитных панелей наименьшего веса. Алгоритм для проектирования кессона композитного крыла с учётом ограничений, связанных с технологией изготовления композитных конструкций, разработан [54, Дубовиков Е.А., Пеньков Е.А., 2011].

Цель представленного исследования [Muc A., 1996] заключается в решении задачи оптимизации расположения слоёв, когда в качестве критических определены нагрузки, соответствующие выпучиванию, и использованы два подхода: алгоритм линейного программирования и генетический алгоритм с разделением переменных. В поставленной задаче двухступенчатой оптимизации введён алгоритм для анализа последовательности укладки слоёв [250, Kim T.U., Sin H.C., 2001]. Задача нахождения оптимального угла укладки элементарных слоёв рассмотрена [34, Гнуни В.Ц., Элоян А.В., 2002], [104, Нгуен Х.Ф., Бирюков В.И., 2014].

Изложен метод проектирования, где принятая целевая функция, связывающая жесткостные параметры, минимизируется по отношению к углам наклона волокон для получения оптимальной последовательности расположения слоёв [218, 219, Grediac M., 1999, 2000], введена процедура оптимизации на основе градиентного метода.

Предложен алгоритм решения задачи о выпуклых комбинациях для численного решения задачи проектирования [77, Колпаков А.Г., 2001], [10, Аннин Б.Д., Колпаков А.Г., 2001], [253, Колпаков А.А., Колпаков А.Г., 2005]. Получено общее решение соответствующих вариационных задач выпуклого программирования [77, Колпаков А.Г., 2001]. Для решения задачи о выпуклых комбинациях применяется метод свёртывания [76, Колпаков А.Г., 2003].

Рассматривается применение методов теории нелинейного программирования для создания оптимальных проектов многослойных пластин. Алгоритмы оптимизации на основе метода критериев оптимальности и методов нелинейного математического программирования предложены [147, 148, Чедрик В.В., 2004, 2005]. Работоспособность представленных алгоритмов продемонстрирована на тестовых примерах композитных панелей, задачах проектирования крыла большого удлинения и крыла обратной стреловидности маневренного самолёта. Нелинейная оптимизация и проектирование слоистых композитных пластин с ограничениями по устойчивости выполнены [212, Fares M.E., Youssif Y.G., Elshoraky A.E., 2006], [269, Lindgaard E, Lund E., Rasmussen K., 2010].

Представлена многоуровневая процедура решения задач оптимизации с учётом ограничений по прочности и устойчивости, реализованная в рамках программного обеспечения многодисциплинарного проектирования [149, Чедрик В.В., 2011], [82, 83, Кусяков А.Ш., 2013].

Оптимизация статических деформаций слоистых композитных пластин с помощью уточнённого алгоритма дифференциальной эволюции в рамках конечноэлементного подхода выполнена [263, Le A.L., Nguyen T.T., Ho H.V., Dang T.H., Bui X.T., 2015].

Обсуждаются вопросы оптимального проектирования элементов авиационных конструкций из композиционных материалов минимальной массы на примере пластин и подкреплённых панелей с учётом влияния дискретности структуры слоистого композита на постановку и методы решения задач данного класса [153, Черняев А.В., 2011]. Предлагаются математические формулировки задач проектирования с учётом требований прочности и устойчивости, методы снижения вычислительных затрат при оптимизации с использованием генетических алгоритмов

Рассматривается метод проектирования адаптивных к действию градиентов температур размеростабильных силовых конструкций [145, Фомин Г.Е., Шайда А.Н., Байкин В.Д., 2001].

Оптимизируемые критерии проекта [131, Тетерс Г., 2007] – критическая нагрузка при сдвиговом нагружении и температурные напряжения, в пространстве оптимизируемых критериев найдена область допустимых решений. Рассматриваются вопросы оптимального проектирования многослойных конструкций с учётом комплексного термосилового нагружения [133, Туркин И.К., Клименко Б.М., 2013].

Поставлена и решена задача рационального проектирования работающих на одно- и двухосное сжатие и температурное нагружение ортотропных пластин при однородном докритическом напряжённом состоянии [81, Куршин Л.М., Матвеев К.А., Моховцев Д.В., Пустовой Н.В., 2008].

В вариантах преднапряжения проводится топологическая оптимизация слоистых пластин с минимизированием прогиба, преднапряжение учитывается введением эквивалентной нагрузки и присоединением матрицы жёсткости из-за начальных напряжений [298, Pedersen N.L., 2002].

Предложен многоуровневый подход к проектированию композитов, учитывающий влияние структурно-технологических факторов [128, Соколкин Ю.В., Макарова Е.Ю., 2002]. Демонстрируется эффективность применения программных комплексов Siemens NX, FiberSim и PAM-RTM (ESI Group) при проектировании интегральных композитных панелей с учётом технологии их

изготовления [146, Халиулин В.И., Батраков В.В., 2016]. САЕ-системы MSC.Patran- Nastran и ANSYS используют [126, Скворцов Ю.В., Глушков С.В., Хромов А.И., 2012].

Излагаются результаты оптимального конечноэлементного расчёта слоистых композитов [161, Adali S., Lene F., Duvaut G., Chiaruttini V., 2003] и слоистых подкреплённых рёбрами жёсткости композитных пластин [347, Walker M., 2002] с целью максимизации двухосной нагрузки выпучивания.

Проблеме оптимального проектирования слоистых композитных пакетов и подкреплённых композитных панелей авиаконструкций посвящены работы [1, Азиков Н.С., Алипов А.Е., Косарев В.А., 2013], [7, Андриенко В.М., Белоус В.А., 2001], [20, Бохоева Л.А., Балданов А.Б., Чермошенцева А.С., 2020], [48, Грищенко С.В., 2015], [49, Грищенко С.В., 2019], [68, Зинченков М.Ч., Кондаков И.О., Шаныгин А.Н., 2016], [69, Карпов Я.С., 2004], [78, Комаров В.А., Черняев А.В., 2009], [82, 83, Кусяков А.Ш., 2013], [96, Митрофанов О.В., Кайков К.В., 2017], [97, Митрофанов О.В. Огнянова Т.С., 2013], [100, Михайловский К.В., Барановский С.В., 2018], [117, Попов Ю.И., Стрелец Д.Ю., Солошенко В.Н., 2017], [129, Солошенко В.Н., Попов Ю.И., 2013], [157, Шаныгин А.Н., 2011], [127, Смердов А.А., 2011], [189, Chen X., Wang X., Qiu Z., Li X., Shi Q., 2018], [206, Ehsani A., Rezaeepazhand J., 2016], [], [225, Ho-Huu V., Do-Thi T.D., Dang-Trung H., Vo-Duy T., Nguyen-Thoi T., 2016], [245, Kazemi M., Verchery G., 2016], [246, Kazemi M., Verchery G., 2016], [262, Lam –Phat T., Nguyen-Hoai S., Ho-Huu V., Nguyen Q., Nguyen-Thoi T., 2018], [348, Wang G.D., Wang J., Hossain S.K.M., Chen H., 2015], [208, Emmanuel Nicholas P., Dharmaraja C., Sathya Sofia A., Vasudevan D., 2019], [251, Kirubakaran R., Lokesharun D., Rajkumar S., Anand R., 2017], [264, Li D., 103, Xiang J., 2013], [275, Maksimenko V.N, 2003], [295, Park C.H., 2004], [325, Singha Maloy K., Ramachandra L.S., Bandyopadhyay J.N., 2000].

Во введении к диссертационной работе, - в структурном элементе «степень разработанности темы», - отмечено: представленный обзор даёт возможность

оценить современное состояние вопроса, очерчивает область дальнейших научных исследований.

Из приведённого обзора следует, - проблема анализа прочности и устойчивости прямоугольных в плане подкреплённых панелей из полимерных композиционных материалов при статическом нагружении отражена в литературе широким спектром постановок задач, методов их решения, полученных результатов. Многообразие научных подходов к проблеме указывает на актуальность работ в данном направлении. Вопросы, возникающие в практике проектирования авиационной техники при жёстких требованиях к её весу, надёжности и стоимости, служат постоянным стимулом к дальнейшему развитию теории, так как каждый существующий метод расчёта имеет свои особенности и свою область применения, обладает как преимуществами, так и недостатками. **Недостаточно изученными** являются возможности использования принципов конструктивной анизотропии в рамках общей контактной задачи композитных обшивки и набора; необходимо совершенствование теории учёта кручения подкрепляющих элементов из ПКМ; практически отсутствуют алгоритмы, реализующие интегрирование разрешающих уравнений восьмого порядка и более высоких порядков в одинарных тригонометрических рядах; не рассматривается возможность построения решения краевых задач с дифференциальным оператором восьмого порядка при расчёте панелей с эксцентричным подкреплением и граничными условиями на смежных сторонах контура, соответствующих реальному закреплению панели в составе проектируемой конструкции. В связи с вышеизложенным в диссертации представляется целесообразным попытаться восполнить существующий пробел, а именно: на основе уточнённой теории исследовать напряжения, деформации и критические параметры произвольным образом закреплённых прямоугольных панелей из ПКМ, усиленных односторонним взаимно-ортогональным жесткостным набором, а также гладких композитных панелей с несимметричной структурой пакета по толщине. Используются подходы в рамках связанных плоской задачи и задачи изгиба, согласно конструктивно-анизотропной модели, с уточнением расчётной

схемы ребра при учёте его работы на кручение. Перспективное направление исследований – проектирование композитных конструкций с учётом технологии изготовления, когда технологический процесс принимается во внимание на этапе разработки изделия.

Представляется целесообразным предложить общую теорию для расчёта широкого класса конструктивно-анизотропных панелей: композитных, металлических, комбинированных.

Выполненные исследования должны способствовать полной применимости усовершенствованных методов анализа на основе уточнённой теории в проектировании. Перспективой дальнейшей разработки темы является сценарий оптимального проектирования композитных подкреплённых панелей, который позволяет использовать значительные резервы в многослойных композитных конструкциях.

ГЛАВА 2 КОНСТРУКТИВНО-АНИЗОТРОПНЫЕ ПАНЕЛИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКИ И ТЕМПЕРАТУРЫ С УЧЁТОМ ТЕХНОЛОГИИ ИЗГОТОВЛЕНИЯ. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Эффективность применения композиционных материалов (КМ) в несущих конструкциях ЛА определяется степенью совершенства согласованных концепций расчёта, методов расчёта и технологии производства изделия.

Решение новой задачи проектирования – проектирование под заданную стоимость – возможно при объединении моделей высокой точности с современными компьютерными технологиями и снижении объёма экспериментальных исследований. Снижение объёма экспериментальных исследований при проектировании обеспечивается подтверждением достоверности уточнённых математических моделей в рамках тестовых натуральных экспериментов. Перспективное направление исследований – проектирование композитных конструкций с учётом технологии изготовления, когда технологический процесс принимается во внимание на этапе разработки изделия.

Широкое распространение конструктивно-анизотропных панелей в конструкциях современных образцов авиационной техники приводит к необходимости развития уточнённых методов для оценки их напряжённо-деформированного состояния и устойчивости на этапе проектирования. Новые расчётные модели в уточнённой постановке составляют основу процессов проектирования и оптимизации.

Одним из актуальных вопросов проектирования наиболее распространённых элементов современных авиационных конструкций – прямоугольных панелей с эксцентричными дискретными подкреплениями, выполненных из полимерных композиционных материалов, – является обоснование и внедрение в практику расчётов новых математических моделей,

которые, отражая специфику деформирования тонкостенных пространственных систем, были бы эффективными с точки зрения построения решения. Примером служит схематизация композитной панели, усиленной продольно-поперечным набором, в виде конструктивно-анизотропной пластины. Для того, чтобы обшивка не теряла устойчивости, а также для обеспечения жёсткости, соответствующей требованиям аэродинамики, подкрепляющие элементы располагают достаточно часто. Таким образом, задачу исследования напряжённо-деформированного состояния конструкции можно свести к расчёту композитной пластины, то есть к нахождению перемещений единой базисной поверхности приведения, «размазывая» при этом жёсткости элементов набора, находящегося вследствие одностороннего контакта с обшивкой в условиях сложного сопротивления.

Разрабатывается проблема исследования напряжённо-деформированного состояния конструктивно-анизотропных композитных панелей в уточнённой постановке в рамках мультидисциплинарного подхода. Математическая модель и численная реализация решения представляют интерес с точки зрения практики проектирования панелей из современных композиционных материалов для перспективных изделий авиационной техники.

2.1 ПЛОСКАЯ ПРЯМОУГОЛЬНАЯ КОМПОЗИТНАЯ ПАНЕЛЬ, ЭКСЦЕНТРИЧНО ПОДКРЕПЛЁННАЯ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫМ НАБОРОМ. ТОНКОСТЕННЫЙ АНИЗОТРОПНЫЙ СТЕРЖЕНЬ С УЧЁТОМ ДЕФОРМАЦИИ СДВИГА

Рассматриваются статические задачи – определение сложного напряжённо-деформированного состояния (НДС) плоской прямоугольной многослойной панели, изготовленной из полимерных волокнистых композиционных материалов (ПКМ), с эксцентричным продольно-поперечным набором (Рисунок 11). Панель находится под действием произвольным образом распределённой поперечной нагрузки $q(x, y)$ в стационарном температурном поле ΔT . Условия закрепления контура предполагаются достаточно общими.

Принимаются во внимание технологические факторы, имеющие место при изготовлении композитов: остаточные температурные напряжения, возникающие при охлаждении после завершения процесса отверждения, и технологическая операция предварительного натяжения армирующих волокон, осуществляемая в целях повышения несущей способности конструкции. Препреги при укладке слоёв предварительно натянуты, после отверждения натяжение снято.

Задачи решаются в перемещениях с использованием гипотез технической теории тонких пластин для обшивки и приводятся к нахождению смещений единой базисной поверхности приведения. В качестве математической модели предлагается схематизация панелей как конструктивно-анизотропных с осреднением жесткостей тонкостенных подкрепляющих элементов, которые находятся в условиях косоугольного изгиба и стеснённого кручения вследствие одностороннего контакта с обшивкой.

2.1.1 Статико-геометрическая модель анизотропной пластины

Согласно трём формулам Коши в рамках гипотезы Кирхгофа теории тонких

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОБЛЕМ
СЛОЖНОГО НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
КОНСТРУКТИВНО-АНИЗОТРОПНЫХ ПАНЕЛЕЙ
ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ**

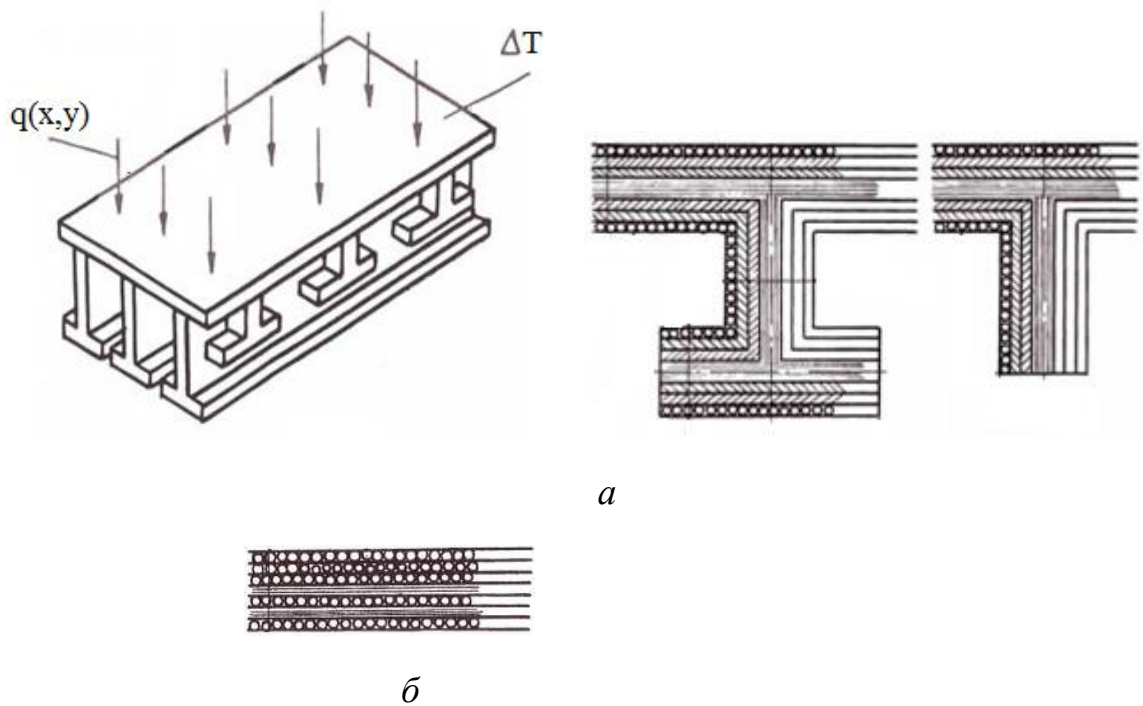


Рисунок 11 – Конструктивно-анизотропные панели из композиционных материалов при механическом и температурном воздействии
a - изготовленные из полимерных волокнистых композиционных материалов, с эксцентричным продольно-поперечным набором; *б* - многослойные композитные с несимметричной по толщине структурой пакета

пластин для компонент вектора перемещений k -ого слоя обшивки

$$\left. \begin{aligned} u^{(k)}(x, y, z) &= u_0(x, y) - \frac{\partial w}{\partial x}(x, y)z^{(k)} \\ v^{(k)}(x, y, z) &= v_0(x, y) - \frac{\partial w}{\partial y}(x, y)z^{(k)} \\ w^{(k)}(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

где $u_0(x, y)$ и $v_0(x, y)$ – перемещения $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ при $z=0$, то есть в плоскости приведения.

Компоненты деформированного состояния k -ого слоя обшивки с учётом влияния температуры и предварительного натяжения волокон вводятся оставшимися соотношениями Коши в соответствии с гипотезой Дюамеля-Неймана и геометрическими преобразованиями при повороте осей координат:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^{(k)} &= \varepsilon_x^0 + K_x^0 z^{(k)} - \bar{\alpha}_1^{(k)} \Delta T - \bar{\varepsilon}_{H1}^{(k)} \\ \varepsilon_y^{(k)} &= \varepsilon_y^0 + K_y^0 z^{(k)} - \bar{\alpha}_2^{(k)} \Delta T - \bar{\varepsilon}_{H2}^{(k)} \\ \gamma_{xy}^{(k)} &= \gamma_{xy}^0 + K_{xy}^0 z^{(k)} - \bar{\alpha}_6^{(k)} \Delta T - \bar{\varepsilon}_{H6}^{(k)} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

где $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ - деформации в плоскости приведения

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x},$$

K_x^0, K_y^0, K_{xy}^0 - кривизны панели

$$K_x^0 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad K_y^0 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad K_{xy}^0 = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$\bar{\alpha}_j^{(k)}, j=1,2,6$, - коэффициенты температурного расширения k -ого слоя, приведённые к осям координат панели,

$\bar{\varepsilon}_{Hj}^{(k)}, j=1,2,6$, - деформации натяжения k -ого слоя, приведённые к осям координат панели,

ΔT - разность между комнатной температурой и температурой отверждения при расчёте остаточных температурных напряжений, либо уровень

температуры внешнего температурного поля.

С использованием физических уравнений, а также формул преобразования напряжений при повороте осей координат компоненты тензора напряжений k -ого слоя панели на макро-уровне с учётом влияния температуры и предварительного натяжения волокон определяются равенствами

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} & -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z^{(k)} & -\bar{\alpha}_1^{(k)} \Delta T & -\bar{\varepsilon}_{H1}^{(k)} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} & -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z^{(k)} & -\bar{\alpha}_2^{(k)} \Delta T & -\bar{\varepsilon}_{H2}^{(k)} \\ \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) & -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} 2z^{(k)} & -\bar{\alpha}_6^{(k)} \Delta T & -\bar{\varepsilon}_{H6}^{(k)} \end{Bmatrix}, \quad (2.3)$$

где $\bar{Q}_{i,j}^{(k)}, i, j = 1, 2, 6$ – жёсткости слоя, приведённые к осям координат панели.

Уровень деформации предварительного натяжения слоя определяется допускаемой деформацией слоя с точностью до безразмерного коэффициента $K_{Hj}, j = 1, 2, 6$, меняющегося от 0 до 1. При записи физических соотношений в виде (2.3) не принимается во внимание, что в препреге - слое предварительно натягиваются лишь волокна, в то время как после снятия натяжения слой деформируется полностью.

Жёсткости слоя $\bar{Q}_{i,j}^{(k)}, i, j = 1, 2, 6$, коэффициенты температурного расширения $\bar{\alpha}_j^{(k)}, j = 1, 2, 6$ и деформация натяжения слоя $\bar{\varepsilon}_{Hj}^{(k)}, j = 1, 2, 6$ в формулах (2.2), (2.3), приведённые к осям координат панели, определяются механическими и температурными характеристиками слоя, заданными в связанной со слоем системе координат, при повороте последней относительно декартовой системы координат.

Соответствующие преобразования имеют вид:

для жесткостей

$$\begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{22} \\ \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{66} \end{pmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} m^4 & 2m^2n^2 & n^4 & 4m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^4 + n^4 & m^2n^2 & -4m^2n^2 \\ m^3n & -mn(m^2 - n^2) & -mn^3 & -2mn(m^2 - n^2) \\ n^4 & 2m^2n^2 & m^4 & 4m^2n^2 \\ mn^3 & mn(m^2 - n^2) & -m^3n & 2mn(m^2 - n^2) \\ m^2n^2 & -2m^2n^2 & m^2n^2 & (m^2 - n^2)^2 \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ Q_{22} \\ Q_{66} \end{Bmatrix}^{(k)},$$

для коэффициентов температурного расширения k – ого слоя

$$\begin{Bmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \\ \bar{\alpha}_6 \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 \\ n^2 & m^2 \\ 2mn & -2mn \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}^{(k)},$$

для деформации натяжения k – ого слоя

$$\begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_{H1} \\ \bar{\varepsilon}_{H2} \\ \bar{\varepsilon}_{H6} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} m^2 \\ n^2 \\ 2mn \end{bmatrix}^{(k)} \{\varepsilon_H\}^{(k)}$$

Здесь $m^{(k)}$ и $n^{(k)}$ - тригонометрические функции угла поворота φ_k осей координат, связанных со слоем, относительно декартовой системы координат

$$m^{(k)} = \cos \varphi_k, \quad n^{(k)} = \sin \varphi_k$$

Жёсткости однонаправленного k – ого слоя

$$Q_{11}^{(k)} = \frac{E_1^{(k)}}{1 - \mu_{12}^{(k)} \mu_{21}^{(k)}} - \text{жёсткость в продольном направлении,}$$

$$Q_{22}^{(k)} = \frac{E_2^{(k)}}{1 - \mu_{12}^{(k)} \mu_{21}^{(k)}} - \text{жёсткость в поперечном направлении,}$$

$$Q_{66}^{(k)} = G_{12}^{(k)} - \text{жёсткость на сдвиг,}$$

$$Q_{12}^{(k)} = Q_{11}^{(k)} \cdot \mu_{21}^{(k)} - \text{смешанная жёсткость, } Q_{21}^{(k)} = Q_{22}^{(k)} \cdot \mu_{12}^{(k)} = Q_{12}^{(k)}$$

$E_1^{(k)}$ - модуль упругости k – ого слоя в продольном направлении,

$E_2^{(k)}$ - модуль упругости k – ого слоя в поперечном направлении,

$G_{12}^{(k)}$ - модуль сдвига k – ого слоя,

$\mu_{12}^{(k)}, \mu_{21}^{(k)}$ - коэффициенты Пуассона k – ого слоя,

$\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}$ - температурные коэффициенты k – ого слоя в продольном и поперечном направлениях, соответственно,

$$\varepsilon_H^{(k)} = K_H \cdot [\varepsilon_B]^{(k)}, \text{ где}$$

K_H - безразмерный коэффициент, определяющий уровень предварительного натяжения и изменяющийся по модулю от 0 до 1

$[\varepsilon_B]^{(k)}$ - допустимая деформация волокна k – ого слоя.

Модули упругости $E_1^{(k)}, E_2^{(k)}$ в направлении укладки и перпендикулярно ей, модуль сдвига $G_{12}^{(k)}$, коэффициенты Пуассона $\mu_{12}^{(k)}, \mu_{21}^{(k)}$, коэффициенты температурного расширения $\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}$ зависят от термо - упругих свойств волокна и матрицы, а также от степени армирования слоя.

Формулы (2.3) справедливы для расчёта напряжений в композитной обшивке. В отношении напряжённого состояния подкрепляющих элементов возникает необходимость более точного решения задачи о кручении композитных рёбер жёсткости. Если на основании формального учёта закручивания стрингеров получить выражения для внутренних силовых факторов, интегрируя соотношения (2.3) по площадям поперечных сечений рёбер с присоединёнными поясами обшивки, не выполняются условия контакта. Однако, этот подход, рассматриваемый ниже (раздел 2.2), представляет интерес в отношении плоских панелей без подкреплений, изготовленных из полимерных композиционных материалов и обладающих анизотропией вследствие несимметрии свойств структуры пакета по толщине.

2.1.2 Тонкостенный анизотропный стержень с учётом деформации сдвига в условиях одностороннего контакта с обшивкой

Расчёт на прочность композитной панели, подкреплённой односторонним жесткостным набором, принадлежит к числу контактных проблем прикладной теории упругости. Элементы, усиливающие обшивку в продольном и поперечном направлениях, рассматриваются как тонкостенные стержни – цилиндрические оболочки незамкнутого профиля, воспринимающие не только осевые нормальные и сдвигающие силы, но также поперечные изгибающие и крутящие моменты. Так как тонкостенный стержень работает в контакте с обшивкой, на линии контакта, по которой стрингер жёстко присоединяется к обшивке, перемещения и углы поворота пластины и тонкостенного стержня полагаются равными.

В силу совместной работы в одностороннем контакте с ПКМ - обшивкой рёбра жёсткости из ПКМ находятся в условиях сложного сопротивления: косоугольного изгиба и стеснённого кручения. Для определения НДС рёбер жёсткости применяется предложенный В.З. Власовым вариационный метод расчёта тонкостенных пространственных систем в перемещениях, дающий возможность построить теорию тонкостенных упругих стержней без введения гипотезы об отсутствии деформации сдвига срединной поверхности профиля в соответствии с концепцией А.Н. Елпатьевского. Теория тонкостенных стержней, подкрепляющих обшивку, не подтверждается экспериментом; деформация сдвига оказывается наиболее существенной в том случае, когда стрингер не имеет осей симметрии.

В рамках общего вариационного метода расчёта в перемещениях тонкостенных пространственных систем В.З. Власова построены уравнения, соответствующие работе подкрепляющих композитных элементов. Согласно данному методу деформированное состояние стержня-оболочки определено при известных продольном перемещении произвольной точки его срединной поверхности $u^{(k)}(\tilde{z}, s)$ в направлении образующей \tilde{z} и перемещении $v^{(k)}(\tilde{z}, s)$ в направлении по касательной к контуру поперечного сечения s , которые строятся

в виде суммы произведений

$$\left. \begin{aligned} u^{(k)}(\tilde{z}, s) &= \sum_{i=1}^m u_i(\tilde{z}) \cdot \varphi_i^{(k)}(s) \\ v^{(k)}(\tilde{z}, s) &= \sum_{j=1}^m v_j(\tilde{z}) \cdot \psi_j^{(k)}(s) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

В первом из разложений (2.4) за три из m возможных перемещений принимаются величины $u_1(\tilde{z})$, $u_2(\tilde{z})$, $u_3(\tilde{z})$, представляющие собой перемещения стержня как жёсткой плоской системы и определяющие деформации растяжения-сжатия и изгиба в двух плоскостях. Каждый из соответствующих данным величинам сомножителей $\varphi_1^{(k)}(s)$; $\varphi_2^{(k)}(s)$; $\varphi_3^{(k)}(s)$ является линейной функцией декартовых координат точки контура поперечного сечения стержня-оболочки. Остальные члены разложения (2.4) для функции $u^{(k)}(\tilde{z}, s)$ определяют депланацию поперечного сечения, которая в целях упрощения модели ограничена одной величиной $u_4(\tilde{z})$ в соответствии с законом секториальных площадей для открытого профиля.

Поперечное сечение стержня наделяется четырьмя степенями свободы в отношении продольных перемещений и тремя степенями свободы в отношении контурных перемещений. Осевое смещение u и контурное смещение v произвольного k – ого слоя стержня

$$\left. \begin{aligned} u^{(k)}(\tilde{z}, s) &= u_1(\tilde{z})\varphi_1^{(k)}(s) + u_2(\tilde{z})\varphi_2^{(k)}(s) + u_3(\tilde{z})\varphi_3^{(k)}(s) + u_4(\tilde{z})\varphi_4^{(k)}(s) \\ v^{(k)}(\tilde{z}, s) &= v_2(\tilde{z})\psi_2^{(k)}(s) + v_3(\tilde{z})\psi_3^{(k)}(s) + v_4(\tilde{z})\psi_4^{(k)}(s) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Здесь $u_1(\tilde{z})$ - поступательное перемещение поперечного сечения стержня в направлении его продольной оси \tilde{z} ,

$u_2(\tilde{z}), u_3(\tilde{z})$ - углы поворота поперечного сечения при изгибе относительно осей системы координат, связанной с поверхностью приведения,

$u_4(\tilde{z})$ - депланация поперечного сечения,

$\varphi_i^{(k)}(s), i = 1, 2, 3$ - осевые перемещения точек поперечного сечения при

$$u_i(\tilde{z}) = 1, \quad i = 1, 2, 3,$$

$\varphi_4^{(k)}(s)$ - определяется эпюрой секториальных площадей $\omega^{(k)}(s)$ для открытых контуров,

$$v_2(\tilde{z}), v_3(\tilde{z}) - \text{прогибы,}$$

$v_4(\tilde{z})$ - угол поворота сечения как жёсткого целого относительно некоторого полюса,

$$\psi_2^{(k)}(s), \psi_3^{(k)}(s) - \text{контурные перемещения при единичных прогибах,}$$

$\psi_4^{(k)}(s)$ - контурное перемещение от единичного угла поворота, определяемое формулой $\psi_4^{(k)}(s) = \rho^{(k)}(s)$, где $\rho^{(k)}(s)$ - длина перпендикуляра, опущенного из полюса на касательную к контуру в рассматриваемой точке.

За полюс, относительно которого происходит поворот поперечного сечения стержня при его деформировании, выбирается точка контакта стрингера с обшивкой без учёта её толщины.

Так как система координат связана с плоскостью приведения, для симметричного профиля одна из осей является главной центральной, а вторая параллельна главной центральной оси. При данном выборе координат выполняются условия ортогональности функций $\varphi_i^{(k)}(s)$, упрощающие в дальнейшем разрешающие уравнения. Для стрингера, ось которого совпадает с осью x , имеют место соотношения

$$\int_{F_1} y^{(k)} dF = \int_{F_1} z^{(k)} y^{(k)} dF = \int_{F_1} \omega^{(k)} dF = \int_{F_1} y^{(k)} \omega^{(k)} dF = \int_{F_1} z^{(k)} \omega^{(k)} dF = 0 \quad (2.6)$$

F_1 - площадь поперечного сечения продольного ребра.

Последними тремя равенствами определяются начало отсчёта секториальных площадей и координаты центра изгиба.

При построении компонент вектора перемещений стержня в форме (2.5) в рамках контактной задачи следует учесть равенства перемещений, а также углов поворота обшивки и подкрепляющих её рёбер по линиям контакта.

Для стрингера, расположенного по оси x ,

$$\begin{aligned} u_1(x) = u_0(x), \quad u_2(x) = -\frac{\partial w}{\partial x}(x), \quad u_3(x) = -\frac{\partial v_0}{\partial x}(x) \\ v_2(x) = w(x), \quad v_3(x) = v_0(x), \quad v_4(x) = -\frac{\partial w}{\partial y}(x) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Деформация $u_4(x)$ полагается свободной.

Для k -ого слоя элементов жёсткости с осями вдоль оси x и поперечными сечениями, перпендикулярными оси x

$$\left. \begin{aligned} u_1^{(k)}(x, s) &= u_0(x) - \frac{\partial w}{\partial x}(x)z^{(k)} - \frac{\partial v_0}{\partial x}(x)y^{(k)} + [u_4(x)]_1 \omega_1^{(k)}(s) \\ v_1^{(k)}(x, s) &= w(x)z'^{(k)} + v_0y'^{(k)} - \frac{\partial w}{\partial y}(x)\rho_1^{(k)}(s) \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Для компонент вектора перемещений k -ого слоя подкрепляющих стержней с осями вдоль оси y и поперечными сечениями, перпендикулярными оси y

$$\left. \begin{aligned} u_2^{(k)}(y, s) &= v_0(y) - \frac{\partial w}{\partial y}(y)z^{(k)} - \frac{\partial u_0}{\partial y}(y)x^{(k)} + [u_4(y)]_2 \omega_2^{(k)}(s) \\ v_2^{(k)}(y, s) &= w(y)z'^{(k)} + u_0(y)x'^{(k)} - \frac{\partial w}{\partial x}(y)\rho_2^{(k)}(s) \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Компоненты деформированного состояния k -ого слоя продольного набора с учётом влияния температуры и предварительного натяжения волокон вводятся соотношениями Коши в соответствии с гипотезой Дюамеля-Неймана и геометрическими преобразованиями при повороте осей координат:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{x_1}^{(k)} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z^{(k)} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} y^{(k)} + \frac{\partial(u_4)_1}{\partial x} \omega_1^{(k)} - \bar{\alpha}_1^{(k)} \Delta T - \bar{\varepsilon}_{H1}^{(k)} \\ \gamma_{xy_1}^{(k)} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\rho_1 + \rho_1^0)^{(k)} + (u_4)_1 \rho_{\omega_1}^{(k)} - \bar{\alpha}_6^{(k)} \Delta T - \bar{\varepsilon}_{H6}^{(k)} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Компоненты деформированного состояния k -ого слоя поперечного набора

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{y_2}^{(k)} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z^{(k)} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} x^{(k)} + \frac{\partial(u_4)_2}{\partial y} \omega_2^{(k)} - \bar{\alpha}_2^{(k)} \Delta T - \bar{\varepsilon}_{H2}^{(k)} \\ \gamma_{yx_2}^{(k)} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\rho_2 + \rho_2^0)^{(k)} + (u_4)_2 \rho_{\omega_2}^{(k)} - \bar{\alpha}_6^{(k)} \Delta T - \bar{\varepsilon}_{H6}^{(k)} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

В формулах (2.10), (2.11) слагаемые $\left[-\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} y^{(k)} \right]$ и $\left[-\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} x^{(k)} \right]$

представляют собой дополнительные по сравнению с теорией тонких пластин осевые деформации, обусловленные изгибом подкрепляющих элементов в плоскости обшивки. Слагаемые $\frac{\partial(u_4)_1}{\partial x} \omega_1^{(k)}$ и $\frac{\partial(u_4)_2}{\partial y} \omega_2^{(k)}$ представляют собой дополнительные по сравнению с теорией тонких пластин осевые деформации, вызванные депланацией поперечных сечений. Депланации поперечных сечений $[u_4(x)]_1$ и $[u_4(y)]_2$ полагаются свободными, $\omega_i^{(k)}(s)$, $i=1,2$ строятся в соответствии с эпюрами секториальных площадей для открытых контуров. Учитываются деформации сдвига при кручении тонкостенных стержней. Деформации сдвига при кручении тонкостенных стержней определяются поворотом поперечных сечений относительно выбранного полюса – начала отсчёта $\rho_i^{(k)}$, $i=1,2$, а также относительно центра изгиба – начала отсчёта $\rho_{\omega_i}^{(k)}$, $i=1,2$ в рамках поправок по теории «чистого кручения», $\rho_i^{(k)}(s)$, $\rho_{\omega_i}^{(k)}(s)$, $i=1,2$ - длины перпендикуляров, опущенных на касательную к контуру в рассматриваемой точке из точек контакта рёбер с обшивкой и из центров изгиба, соответственно

$$\rho_{\omega_i}^{(k)} = \frac{\partial \omega_i^{(k)}}{\partial s}, \quad i=1,2$$

По теории «чистого кручения» Сен-Венана в (2.10), (2.11) введены поправки $\rho_i^{0(k)}$, $i=1,2$ для деформаций сдвига $\gamma_{xy_1}^{(k)}$ и $\gamma_{yx_2}^{(k)}$, соответственно. $\rho_i^{0(k)}(s)$, $i=1,2$ определяют дополнительные моменты инерции рёбер при «чистом кручении».

С использованием физических уравнений, а также формул преобразования напряжений при повороте осей координат определяются нормальные и касательные напряжения k – ого слоя рёбер жёсткости с учётом влияния температуры и предварительного натяжения волокон.

Компоненты напряжённого состояния k –ого слоя композитных стрингеров

на макро-уровне вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x_1}^{(k)} &= \bar{Q}_{11}^{(k)} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z^{(k)} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} y^{(k)} + \frac{\partial(u_4)_1}{\partial x} \omega_1^{(k)} - \bar{\alpha}_1^{(k)} \Delta T - \bar{\varepsilon}_{H1}^{(k)} \right] \\ \tau_{xy_1}^{(k)} &= \bar{Q}_{66}^{(k)} \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\rho_1 + \rho_1^0)^{(k)} + (u_4)_1 \rho_{\omega_1}^{(k)} - \bar{\alpha}_6^{(k)} \Delta T - \bar{\varepsilon}_{H6}^{(k)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Для элементов поперечного набора

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{y_2}^{(k)} &= \bar{Q}_{22}^{(k)} \left[\frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z^{(k)} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} x^{(k)} + \frac{\partial(u_4)_2}{\partial y} \omega_2^{(k)} - \bar{\alpha}_2^{(k)} \Delta T - \bar{\varepsilon}_{H2}^{(k)} \right] \\ \tau_{yx_2}^{(k)} &= \bar{Q}_{66}^{(k)} \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\rho_2 + \rho_2^0)^{(k)} + (u_4)_2 \rho_{\omega_2}^{(k)} - \bar{\alpha}_6^{(k)} \Delta T - \bar{\varepsilon}_{H6}^{(k)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Нормальные напряжения обусловлены растяжением-сжатием, изгибом из плоскости обшивки, изгибом в плоскости обшивки и депланацией поперечных сечений. Касательные напряжения, связанные с задачей кручения стержня, определяются поворотом поперечного сечения относительно выбранного полюса и относительно центра изгиба, поправки по теории «чистого кручения» принимаются во внимание.

Учитывается деформация сдвига при кручении тонкостенного стержня, которая определяется его поворотом относительно выбранного полюса, а также относительно центра изгиба в рамках поправок по теории «чистого кручения».

2.1.3 Вариационная формулировка задачи

Уравнения равновесия и естественные граничные условия эксцентрично подкреплённой панели из полимерных композиционных материалов с учётом закручивания рёбер жёсткости построены на основании вариационного принципа Лагранжа в результате минимизации функционала полной потенциальной энергии системы.

Потенциальная энергия внутренних сил рассматриваемой тонкостенной системы складывается из потенциальной энергии деформации композитной

обшивки и потенциальной энергии деформации продольного и поперечного наборов из композиционных материалов

$$U = U_{обш} + U_1 + U_2 \quad , \quad (2.14)$$

где

$$U_{обш} = \frac{1}{2} \iint_{F_{xy}} \left[\int_H (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy})^{(k)} dz \right] dx dy$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \iint_{F_{xy}} \left[\frac{1}{c_1} \int_{F_1} (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy})_1^{(k)} dF \right] dx dy$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \iint_{F_{xy}} \left[\frac{1}{c_2} \int_{F_2} (\sigma_y \varepsilon_y + \tau_{yx} \gamma_{yx})_2^{(k)} dF \right] dx dy$$

Здесь c_1 и c_2 - расстояния между осями продольных и поперечных рёбер, соответственно,

F_1 и F_2 - площади поперечных сечений продольных и поперечных рёбер, соответственно,

F_{xy} - площадь панели в плане,

H - толщина обшивки.

При введении потенциальной энергии внутренних сил набора учитывается потенциальная энергия внутренних сил растяжения – сжатия, изгиба в двух плоскостях и кручения. «Размазывание» – осреднение жесткостей продольных рёбер по y и поперечных рёбер по x равносильно условному переходу в формулах (2.10) - (2.13) от функций, зависящих от одной из координат – x или y – к функциям двух координат: x и y .

Полная потенциальная энергия системы с учётом работы внешних сил

$$A = \iint_{F_{xy}} q(x, y) \cdot w dx dy \quad ,$$

а также условий ортогональности вида (2.6)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D} &= U - A = \\
&= \frac{1}{2} \iint_{F_{xy}} \left\{ \left[A_{11} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + A_{22} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + A_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + 2A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + 2A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right] - \right. \\
&\quad - 2 \left\{ B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \right. \\
&\quad \left. + B_{12} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + B_{16} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \right. \\
&\quad \left. \left. + B_{26} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \right\} + \right. \\
&\quad + \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \\
&\quad + A_{11}^x \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 - 2B_{11}^x \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{11}^x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \\
&\quad + D_{z,11}^x \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right)^2 + D_{\omega,11}^x \left[\frac{\partial (u_4)_1}{\partial x} \right]^2 + \\
&\quad + D_{\rho,66}^x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2D_{\rho\omega\rho,66}^x \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (u_4)_1 + D_{\rho\omega,66}^x \left[(u_4)_1 \right]^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + A_{22}^y \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 - 2B_{22}^y \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22}^y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \\
& + D_{z,22}^y \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right)^2 + D_{\omega,22}^y \left[\frac{\partial (u_4)_2}{\partial y} \right]^2 + \\
& + D_{\rho,66}^y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2D_{\rho\omega\rho,66}^y \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (u_4)_2 + D_{\rho\omega,66}^y [(u_4)_2]^2 - \\
& - 2 \left[\left(A_{11}^T + A_{12}^T + A_{16}^T \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} + \left(A_{21}^T + A_{22}^T + A_{26}^T \right) \frac{\partial v_0}{\partial y} + \left(A_{61}^T + A_{62}^T + A_{66}^T \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right] + \\
& + 2 \left[\left(B_{11}^T + B_{12}^T + B_{16}^T \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(B_{21}^T + B_{22}^T + B_{26}^T \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \left(B_{61}^T + B_{62}^T + B_{66}^T \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] - \\
& - 2A_{11}^{Tx} \frac{\partial u_0}{\partial x} + 2 \left(B_{11}^{Tx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{66}^{Tx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \\
& - 2A_{22}^{Ty} \frac{\partial v_0}{\partial y} + 2 \left(B_{22}^{Ty} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_{66}^{Ty} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \\
& - 2 \left[\left(A_{11}^H + A_{12}^H + A_{16}^H \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} + \left(A_{21}^H + A_{22}^H + A_{26}^H \right) \frac{\partial v_0}{\partial y} + \left(A_{61}^H + A_{62}^H + A_{66}^H \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right] + \\
& + 2 \left[\left(B_{11}^H + B_{12}^H + B_{16}^H \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(B_{21}^H + B_{22}^H + B_{26}^H \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \left(B_{61}^H + B_{62}^H + B_{66}^H \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] - \\
& - 2A_{11}^{Hx} \frac{\partial u_0}{\partial x} + 2 \left(B_{11}^{Hx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{66}^{Hx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \\
& - 2A_{22}^{Hy} \frac{\partial v_0}{\partial y} + 2 \left(B_{22}^{Hy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_{66}^{Hy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \\
& \qquad \qquad \qquad - 2qw \left. \vphantom{\begin{matrix} - 2A_{11}^{Hx} \\ - 2A_{22}^{Hy} \end{matrix}} \right\} dx dy \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Для удобства последующих выкладок введены обозначения:

Обобщённые жесткостные характеристики многослойной обшивки

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \int_H \bar{Q}_{ij}^{(k)} dF \\
 B_{ij} &= \int_H \bar{Q}_{ij}^{(k)} z^{(k)} dF \\
 D_{ij} &= \int_H \bar{Q}_{ij}^{(k)} [z^{(k)}]^2 dF
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
 A_{ij}^T &= \Delta T \int_H \bar{Q}_{ij}^{(k)} \bar{\alpha}_j^{(k)} dF & A_{ij}^H &= \int_H \bar{Q}_{ij}^{(k)} \bar{\varepsilon}_{Hj}^{(k)} dF \\
 B_{ij}^T &= \Delta T \int_H \bar{Q}_{ij}^{(k)} \bar{\alpha}_j^{(k)} z^{(k)} dF & B_{ij}^H &= \int_H \bar{Q}_{ij}^{(k)} \bar{\varepsilon}_{Hj}^{(k)} z^{(k)} dF
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

$i, j = 1, 2, 6,$

A_{ij} - жёсткости пакета обшивки на растяжение - сжатие,

B_{ij} - смешанные жёсткости пакета обшивки,

D_{ij} - изгибные жёсткости пакета обшивки,

A_{ij}^T - температурные жёсткости пакета обшивки на растяжение-сжатие,

B_{ij}^T - смешанные температурные жёсткости пакета обшивки,

A_{ij}^H - жёсткости пакета обшивки на растяжение-сжатие от натяжения,

B_{ij}^H - смешанные жёсткости пакета обшивки от натяжения.

Обобщённые жесткостные характеристики многослойной обшивки вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} F^{(k)}, \\
 B_{ij} &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} S^{(k)}, \\
 D_{ij} &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} I^{(k)},
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
A_{ij}^T &= \Delta T \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} \cdot \bar{\alpha}_j^{(k)} \cdot F^{(k)}, & A_{ij}^H &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} \cdot \bar{\varepsilon}_{Hj}^{(k)} \cdot F^{(k)}, \\
B_{ij}^T &= \Delta T \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} \cdot \bar{\alpha}_j^{(k)} \cdot S^{(k)}, & B_{ij}^H &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} \cdot \bar{\varepsilon}_{Hj}^{(k)} \cdot S^{(k)},
\end{aligned} \tag{2.19}$$

где N - число слоёв пакета обшивки,

$F^{(k)}$, $S^{(k)}$, $I^{(k)}$ - площадь, статический момент и момент инерции k -го слоя единичной полоски обшивки относительно плоскости приведения, соответственно:

$$\begin{aligned}
F^{(k)} &= z_k - z_{k-1} = h_k \\
S^{(k)} &= \frac{1}{2} \cdot (z_k^2 - z_{k-1}^2) = h_k \cdot \left(\frac{h_k}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} h_i \right) \\
I^{(k)} &= \frac{1}{3} \cdot (z_k^3 - z_{k-1}^3) = \frac{h_k^3}{2} + h_k \cdot \left(\frac{h_k}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} h_i \right)^2,
\end{aligned}$$

z_k - координаты границ слоёв пакета обшивки по оси z относительно плоскости приведения.

h_k - толщины слоёв пакета обшивки.

Обобщённые жесткостные характеристики многослойного продольного ребра

$$\begin{aligned}
A_{11}^x &= \frac{1}{c_1} \int_{F_1} \bar{Q}_{11}^{(k)} dF \\
B_{11}^x &= \frac{1}{c_1} \int_{F_1} \bar{Q}_{11}^{(k)} z^{(k)} dF \\
D_{11}^x &= \frac{1}{c_1} \int_{F_1} \bar{Q}_{11}^{(k)} [z^{(k)}]^2 dF
\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$D_{z,11}^x = \frac{1}{c_1} \int_{F_1} \bar{Q}_{11}^{(k)} \left[y^{(k)} \right]^2 dF$$

$$D_{\omega,11}^x = \frac{1}{c_1} \int_{F_1} \bar{Q}_{11}^{(k)} \left[\omega_1^{(k)} \right]^2 dF$$
(2.21)

$$D_{\rho,66}^x = \frac{1}{c_1} \int_{F_1} \bar{Q}_{66}^{(k)} \left[\left(\rho_1 + \rho_1^0 \right)^{(k)} \right]^2 dF$$

$$D_{\rho\omega\rho,66}^x = \frac{1}{c_1} \int_{F_1} \bar{Q}_{66}^{(k)} \left(\rho_1 + \rho_1^0 \right)^{(k)} \rho_{\omega_1}^{(k)} dF$$

$$D_{\rho\omega,66}^x = \frac{1}{c_1} \int_{F_1} \bar{Q}_{66}^{(k)} \left[\rho_{\omega_1}^{(k)} \right]^2 dF$$
(2.22)

$$A_{11}^{Tx} = \frac{\Delta T}{c_1} \int_{F_1} \bar{Q}_{11}^{(k)} \bar{\alpha}_1^{(k)} dF$$

$$A_{11}^{Hx} = \frac{1}{c_1} \int_{F_1} \bar{Q}_{11}^{(k)} \bar{\varepsilon}_{H1}^{(k)} dF$$

$$A_{66}^{Tx} = 0$$

$$A_{66}^{Hx} = 0$$

$$B_{11}^{Tx} = \frac{\Delta T}{c_1} \int_{F_1} \bar{Q}_{11}^{(k)} \bar{\alpha}_1^{(k)} z^{(k)} dF$$

$$B_{11}^{Hx} = \frac{1}{c_1} \int_{F_1} \bar{Q}_{11}^{(k)} \bar{\varepsilon}_{H1}^{(k)} z^{(k)} dF$$

$$B_{66}^{Tx} = \frac{\Delta T}{c_1} \int_{F_1} \bar{Q}_{66}^{(k)} \bar{\alpha}_6^{(k)} \left(\rho_1 + \rho_1^0 \right)^{(k)} dF$$

$$B_{66}^{Hx} = \frac{1}{c_1} \int_{F_1} \bar{Q}_{66}^{(k)} \bar{\varepsilon}_{H6}^{(k)} \left(\rho_1 + \rho_1^0 \right)^{(k)} dF$$
(2.23)

A_{11}^x - жёсткость продольного ребра на растяжение - сжатие,

B_{11}^x - смешанная жёсткость продольного ребра,

D_{11}^x - изгибная жёсткость продольного ребра,

$D_{z,11}^x$ - жёсткость продольного ребра на изгиб в плоскости панели,

$D_{\omega,11}^x$ - жёсткость продольного ребра на изгиб при депланации поперечного

сечения,

$D_{\rho,66}^x, D_{\rho\omega\rho,66}^x, D_{\rho\omega,66}^x$ - крутильные жёсткости продольного ребра,

A_{11}^{Tx}, A_{66}^{Tx} - температурные жёсткости продольного ребра на растяжение-сжатие,

B_{11}^{Tx}, B_{66}^{Tx} - смешанные температурные жёсткости продольного ребра,

A_{11}^{Hx}, A_{66}^{Hx} - жёсткости продольного ребра на растяжение-сжатие от натяжения,

B_{11}^{Hx}, B_{66}^{Hx} - смешанные жёсткости продольного ребра от натяжения.

Обобщённые жесткостные характеристики многослойного продольного ребра вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} A_{11}^x &= \frac{1}{c_1} \sum_{l=1}^{M_1} \sum_{k=1}^{N_{l1}} \bar{Q}_{11}^{(k)} F_1^{(k)} \\ B_{11}^x &= \frac{1}{c_1} \sum_{l=1}^{M_1} \sum_{k=1}^{N_{l1}} \bar{Q}_{11}^{(k)} S_1^{(k)} \\ D_{11}^x &= \frac{1}{c_1} \sum_{l=1}^{M_1} \sum_{k=1}^{N_{l1}} \bar{Q}_{11}^{(k)} I_1^{(k)} \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} D_{z,11}^x &= \frac{1}{c_1} \sum_{l=1}^{M_1} \sum_{k=1}^{N_{l1}} \bar{Q}_{11}^{(k)} I_{z1}^{(k)} \\ D_{\omega,11}^x &= \frac{1}{c_1} \sum_{l=1}^{M_1} \sum_{k=1}^{N_{l1}} \bar{Q}_{11}^{(k)} I_{\omega 1}^{(k)} \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} D_{\rho,66}^x &= \frac{1}{c_1} \sum_{l=1}^{M_1} \sum_{k=1}^{N_{l1}} \bar{Q}_{66}^{(k)} I_{\rho 1}^{(k)} \\ D_{\rho\omega\rho,66}^x &= \frac{1}{c_1} \sum_{l=1}^{M_1} \sum_{k=1}^{N_{l1}} \bar{Q}_{66}^{(k)} I_{\rho\omega\rho 1}^{(k)} \\ D_{\rho\omega,66}^x &= \frac{1}{c_1} \sum_{l=1}^{M_1} \sum_{k=1}^{N_{l1}} \bar{Q}_{66}^{(k)} I_{\rho\omega 1}^{(k)} \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned}
A_{11}^{Tx} &= \frac{\Delta T}{c_1} \sum_{l=1}^{M_1} \sum_{k=1}^{N_{l1}} \bar{Q}_{11}^{(k)} \bar{\alpha}_1^{(k)} F_1^{(k)} & A_{11}^{Hx} &= \frac{1}{c_1} \sum_{l=1}^{M_1} \sum_{k=1}^{N_{l1}} \bar{Q}_{11}^{(k)} \bar{\varepsilon}_{H1}^{(k)} F_1^{(k)} \\
A_{66}^{Tx} &= 0 & A_{66}^{Hx} &= 0 \\
B_{11}^{Tx} &= \frac{\Delta T}{c_1} \sum_{l=1}^{M_1} \sum_{k=1}^{N_{l1}} \bar{Q}_{11}^{(k)} \bar{\alpha}_1^{(k)} S_1^{(k)} & B_{11}^{Hx} &= \frac{1}{c_1} \sum_{l=1}^{M_1} \sum_{k=1}^{N_{l1}} \bar{Q}_{11}^{(k)} \bar{\varepsilon}_{H1}^{(k)} S_1^{(k)} \\
B_{66}^{Tx} &= \frac{\Delta T}{c_1} \sum_{l=1}^{M_1} \sum_{k=1}^{N_{l1}} \bar{Q}_{66}^{(k)} \bar{\alpha}_6^{(k)} S_{\rho_1}^{(k)} & B_{66}^{Hx} &= \frac{1}{c_1} \sum_{l=1}^{M_1} \sum_{k=1}^{N_{l1}} \bar{Q}_{66}^{(k)} \bar{\varepsilon}_{H6}^{(k)} S_{\rho_1}^{(k)},
\end{aligned} \tag{2.27}$$

где N_{l1} - число слоёв пакета стенки/полки продольного ребра жёсткости,

M_1 - количество элементов поперечного сечения стрингера,

$F_1^{(k)}$, $S_1^{(k)}$, $I_1^{(k)}$ - площадь, статический момент и момент инерции k -го слоя стенки/полки поперечного сечения продольного ребра относительно плоскости приведения, соответственно,

$S_{\rho_1}^{(k)}$ - статический момент k -го слоя стенки/полки поперечного сечения продольного ребра при стеснённом кручении,

$I_{z1}^{(k)}$ - момент инерции k -го слоя стенки/полки поперечного сечения продольного ребра относительно вертикальной оси,

$I_{\omega 1}^{(k)}$ - момент инерции k -го слоя стенки/полки поперечного сечения продольного ребра в соответствии с эпюрой секториальных площадей,

$I_{\rho_1}^{(k)}$, $I_{\rho_{\omega\rho_1}}^{(k)}$, $I_{\rho_{\omega 1}}^{(k)}$ - моменты инерции k -го слоя стенки/полки поперечного сечения продольного ребра при стеснённом кручении.

Поперечное сечение продольного стержня состоит из M_1 элементов, каждый элемент – стенка/полка – содержит N_{l1} слоёв.

Обобщённые жесткостные характеристики многослойного поперечного ребра A_{22}^y , B_{22}^y , D_{22}^y ; $D_{z,22}^y$, $D_{\omega,22}^y$; $D_{\rho,66}^y$, $D_{\rho_{\omega\rho},66}^y$, $D_{\rho_{\omega},66}^y$; A_{22}^{Ty} , A_{66}^{Ty} , B_{22}^{Ty} , B_{66}^{Ty} , A_{22}^{Hy} , B_{22}^{Hy} , A_{66}^{Hy} , B_{66}^{Hy} определяются аналогично, по формулам (2.20)-(2.27), с заменой индекса «1» на индекс «2» при интегрировании и осреднении.

Согласно принципу Лагранжа задача сводится к нахождению минимума функционала

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} = \iint_{F_{xy}} \Phi \left[x, y; u_{0x}, u_{0y}, u_{0yy}; v_{0x}, v_{0y}, v_{0xx}; \right. \\ \left. w, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}, w_{x^2y}, w_{xy^2}; \right. \\ \left. (u_4)_1, (u_4)_{1x}; (u_4)_2, (u_4)_{2y} \right] dx dy \end{aligned} \quad (2.28)$$

Для дальнейших выкладок в функционале (2.28) дополнительно по отношению к функционалу (2.15) введены производные w_{x^2y} и w_{xy^2} .

Равенство первой вариации функционалов (2.15), (2.28) $\delta\mathfrak{E}$ нулю позволяет построить систему дифференциальных уравнений равновесия конструктивно-анизотропной панели из ПКМ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial u_{0x}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial u_{0y}} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_{0yy}} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial v_{0x}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial v_{0y}} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \Phi}{\partial v_{0xx}} &= 0 \\ \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial w_{x^2y}} + \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial \Phi}{\partial w_{xy^2}} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \Phi}{\partial w_{xx}} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial w_{xy}} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial \Phi}{\partial w_{yy}} - \frac{\partial \Phi}{\partial w} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial (u_4)_{1x}} - \frac{\partial \Phi}{\partial (u_4)_1} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial (u_4)_{2y}} - \frac{\partial \Phi}{\partial (u_4)_2} &= 0 \end{aligned} \right\} (2.29)$$

и естественные граничные условия

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_{0x}} \delta u_0 \right) \Big|_{x=const} + \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_{0y}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial u_{0yy}} \right) \delta u_0 \right] \Big|_{y=const} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_{0yy}} \delta u_{0y} \right) \Big|_{y=const} = 0 \\
 2) \quad & \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v_{0y}} \delta v_0 \right) \Big|_{y=const} + \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v_{0x}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial v_{0xx}} \right) \delta v_0 \right] \Big|_{x=const} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v_{0xx}} \delta v_{0x} \right) \Big|_{x=const} = 0 \\
 3) \quad & - \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial \Phi}{\partial w_{xy^2}} - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial w_{xy}} \right)_{обш.} - \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial w_{xy}} \right)_2 - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial w_{xx}} \right] \delta w \right\} \Big|_{x=const} - \\
 & - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_{xx}} \delta w_x \right) \Big|_{x=const} - \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial w_{xy}} \right)_{обш.} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_{xy}} \right)_1 - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial w_{x^2y}} \right] \delta w_y \right\} \Big|_{x=const} - \\
 & - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_{x^2y}} \delta w_{xy} \right) \Big|_{x=const} - \\
 & - \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \Phi}{\partial w_{x^2y}} - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial w_{xy}} \right)_{обш.} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial w_{xy}} \right)_1 - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial w_{yy}} \right] \delta w \right\} \Big|_{y=const} - \\
 & - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_{yy}} \delta w_y \right) \Big|_{y=const} - \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial w_{xy}} \right)_{обш.} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_{xy}} \right)_2 - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial w_{xy^2}} \right] \delta w_x \right\} \Big|_{y=const} - \\
 & - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_{xy^2}} \delta w_{xy} \right) \Big|_{y=const} = 0 \\
 4) \quad & \left[\frac{\partial \Phi}{\partial (u_4)_{1x}} \delta (u_4)_1 \right] \Big|_{x=const} = 0 \\
 5) \quad & \left[\frac{\partial \Phi}{\partial (u_4)_{2y}} \delta (u_4)_2 \right] \Big|_{y=const} = 0
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Четвёртое и пятое естественные граничные условия выполняются тождественно, если

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial (u_4)_{1x}} &= 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial (u_4)_{2y}} &= 0\end{aligned}\tag{2.31}$$

При этом из четвёртого и пятого уравнений равновесия следует связь функций $(u_4)_1$ и $(u_4)_2$, обусловленных депланацией профилей, с погонными углами закручивания

$$\begin{aligned}(u_4)_1 &= \frac{D_{\rho\omega\rho,66}^x}{D_{\rho\omega,66}^x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ (u_4)_2 &= \frac{D_{\rho\omega\rho,66}^y}{D_{\rho\omega,66}^y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{2.32}$$

Тогда в функционал полной потенциальной энергии (2.15) вводятся дополнительные обобщённые жесткостные характеристики на изгиб и кручение, где содержатся производные w_{x^2y}, w_{xy^2} :

для продольного ребра

$$\begin{aligned}& D_{z,11}^x \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right)^2 + D_{\omega,11}^x \left[\frac{\partial (u_4)_1}{\partial x} \right]^2 + \\ & + D_{\rho,66}^x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2D_{\rho\omega\rho,66}^x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) (u_4)_1 + D_{\rho\omega,66}^x \left[(u_4)_1 \right]^2 = \\ & = D_{z,11}^x \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right)^2 + \bar{D}_{\omega,11}^x \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)^2 + \bar{D}_{\alpha,66}^x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2,\end{aligned}\tag{2.33}$$

где

$$\bar{D}_{\omega,11}^x = \left(\frac{D_{\rho\omega\rho,66}^x}{D_{\rho\omega,66}^x} \right)^2 \cdot D_{\omega,11}^x,$$

$$\bar{D}_{\alpha,66}^x = \left[D_{\rho,66}^x - \left(\frac{D_{\rho\omega\rho,66}^x}{D_{\rho\omega,66}^x} \right)^2 \cdot D_{\rho\omega,66}^x \right] = \left[D_{\rho,66}^x - \frac{\left(D_{\rho\omega\rho,66}^x \right)^2}{D_{\rho\omega,66}^x} \right]$$

для поперечного ребра

$$\begin{aligned} & D_{z,22}^y \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right)^2 + D_{\omega,22}^y \left[\frac{\partial (u_4)_2}{\partial y} \right]^2 + \\ & + D_{\rho,66}^y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2D_{\rho\omega\rho,66}^y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) (u_4)_2 + D_{\rho\omega,66}^y \left[(u_4)_2 \right]^2 = \quad (2.34) \\ & = D_{z,22}^y \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right)^2 + \bar{D}_{\omega,11}^y \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)^2 + \bar{D}_{\alpha,66}^y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2, \end{aligned}$$

где

$$\bar{D}_{\omega,22}^y = \left(\frac{D_{\rho\omega\rho,66}^y}{D_{\rho\omega,66}^y} \right)^2 \cdot D_{\omega,22}^y,$$

$$\bar{D}_{\alpha,66}^y = \left[D_{\rho,66}^y - \left(\frac{D_{\rho\omega\rho,66}^y}{D_{\rho\omega,66}^y} \right)^2 \cdot D_{\rho\omega,66}^y \right] = \left[D_{\rho,66}^y - \frac{\left(D_{\rho\omega\rho,66}^y \right)^2}{D_{\rho\omega,66}^y} \right]$$

2.1.4 Естественные граничные условия. Внутренние силовые факторы

Естественные граничные условия (2.30) позволяют построить выражения для внутренних силовых факторов, а также перейти в уравнениях равновесия (2.29) к усилиям и моментам.

Первая и вторая суммы в естественных граничных условиях (2.30)

$$\begin{aligned} (N_x \cdot \delta u_0) \Big|_{x=const} &= 0 & (N_y \cdot \delta v_0) \Big|_{y=const} &= 0 \\ (N_{xy} \cdot \delta v_0) \Big|_{x=const} &= 0 & (N_{yx} \cdot \delta u_0) \Big|_{y=const} &= 0 \\ (C_x \cdot \delta v_{0x}) \Big|_{x=const} &= 0 & (C_y \cdot \delta u_{0y}) \Big|_{y=const} &= 0 \end{aligned}$$

Первые два уравнения равновесия (2.29)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\},$$

где

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial u_{0x}}, & N_{xy} &= \frac{\partial \Phi}{\partial v_{0x}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial v_{0xx}} \\ N_y &= \frac{\partial \Phi}{\partial v_{0y}}, & N_{yx} &= \frac{\partial \Phi}{\partial u_{0y}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial u_{0yy}} \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} N_{xy} &= N^o + N_{xy}^x \\ N_{yx} &= N^o + N_{yx}^y, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} N^o &= \frac{\partial \Phi}{\partial v_{0x}} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_{0y}} & N_{xy}^x &= \frac{\partial C_x}{\partial x}, \quad C_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial v_{0xx}} \\ & & N_{yx}^y &= \frac{\partial C_y}{\partial y}, \quad C_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial u_{0yy}} \end{aligned}$$

N_x, N_y - продольные и поперечные усилия, соответственно,

N_{xy}, N_{yx} - тангенциальные усилия,

N^o - потоки касательных сил в обшивке,

N_{xy}^x, N_{yx}^y - потоки касательных сил, действующие по площадкам

продольных и поперечных рёбер, соответственно,

C_x, C_y - изгибающие моменты в плоскости обшивки, действующие по площадкам продольных и поперечных рёбер, соответственно.

Третья сумма в естественных граничных условиях (2.30)

$$\left(M_x \cdot \delta w_x \right) \Big|_{x=const} = 0 \qquad \left(M_y \cdot \delta w_y \right) \Big|_{y=const} = 0$$

$$\left(H_{xy} \cdot \delta w_y \right) \Big|_{x=const} = 0 \qquad \left(H_{yx} \cdot \delta w_x \right) \Big|_{y=const} = 0$$

$$\left(B_{xy} \cdot \delta w_{xy} \right) \Big|_{x=const} = 0 \qquad \left(B_{yx} \cdot \delta w_{xy} \right) \Big|_{y=const} = 0$$

$$\left(\bar{Q}_x \cdot \delta w \right) \Big|_{x=const} = 0 \qquad \left(\bar{Q}_y \cdot \delta w \right) \Big|_{y=const} = 0$$

Третье уравнение равновесия (2.29)

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (H_{xy} + H_{yx})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q ,$$

где

$$M_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial w_{xx}}, \qquad H_{xy} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_{xy}} \right)_{обш} + \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial w_{xy}} \right)_1 + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial w_{x^2 y}}$$

$$M_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial w_{yy}}, \qquad H_{yx} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_{xy}} \right)_{обш} + \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial w_{xy}} \right)_2 + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial w_{xy^2}}$$

или

$$\begin{aligned} H_{xy} &= H^o + H_{xy}^x \\ H_{yx} &= H^o + H_{yx}^y \end{aligned} ,$$

где

$$H^o = \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial w_{xy}} \right)_{обш} \qquad H_{xy}^x = \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial w_{xy}} \right)_1 - \frac{\partial B_{xy}}{\partial x}$$

$$H_{yx}^y = \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial w_{xy}} \right)_2 - \frac{\partial B_{yx}}{\partial y}$$

$$\bar{Q}_x = -\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial H_{yx}}{\partial y} \quad B_{xy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial w_{x^2y}}$$

$$\bar{Q}_y = -\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial H_{xy}}{\partial x} \quad B_{yx} = -\frac{\partial \Phi}{\partial w_{xy^2}}$$

M_x, M_y - изгибающие моменты в вертикальной плоскости,

H_{xy}, H_{yx} - крутящие моменты,

H^o - крутящий момент для обшивки,

H_{xy}^x, H_{yx}^y - крутящие моменты, действующие по площадкам продольных и поперечных рёбер, соответственно,

B_{xy}, B_{yx} - крутящие моменты, связанные с деформацией поперечных сечений рёбер жёсткости,

\bar{Q}_x, \bar{Q}_y - обобщённые перерезывающие силы.

2.1.5 Математическая модель. Уравнения равновесия.

Связь внутренних силовых факторов с искомыми перемещениями

Математическая модель задачи сформулирована.

Уравнения равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (H_{xy} + H_{yx})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} &= -q \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

Естественные граничные условия

$$\begin{aligned}
(N_x \cdot \delta u_0) \Big|_{x=const} &= 0 & (N_y \cdot \delta v_0) \Big|_{y=const} &= 0 \\
(N_{xy} \cdot \delta v_0) \Big|_{x=const} &= 0 & (N_{yx} \cdot \delta u_0) \Big|_{y=const} &= 0 \\
(C_x \cdot \delta v_{0x}) \Big|_{x=const} &= 0 & (C_y \cdot \delta u_{0y}) \Big|_{y=const} &= 0 \\
(M_x \cdot \delta w_x) \Big|_{x=const} &= 0 & (M_y \cdot \delta w_y) \Big|_{y=const} &= 0 \\
(H_{xy} \cdot \delta w_y) \Big|_{x=const} &= 0 & (H_{yx} \cdot \delta w_x) \Big|_{y=const} &= 0 \\
(B_{xy} \cdot \delta w_{xy}) \Big|_{x=const} &= 0 & (B_{yx} \cdot \delta w_{xy}) \Big|_{y=const} &= 0 \\
(\bar{Q}_x \cdot \delta w) \Big|_{x=const} &= 0 & (\bar{Q}_y \cdot \delta w) \Big|_{y=const} &= 0
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Связь внутренних силовых факторов с искомыми перемещениями $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$ и $w(x, y)$ через деформации плоскости приведения и кривизны плоскости приведения осуществляется по формулам:

$$\begin{aligned}
N_x &= \bar{A}_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{16} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \\
&\quad + \bar{B}_{11} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + B_{12} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + B_{16} \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \bar{N}_x^T - \bar{N}_x^H \\
N_y &= A_{21} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \bar{A}_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{26} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{v_0}{\partial x} \right) + \\
&\quad + B_{21} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \bar{B}_{22} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + B_{26} \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \bar{N}_y^T - \bar{N}_y^H \\
N^0 &= A_{61} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{62} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \\
&\quad + B_{61} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + B_{62} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + B_{66} \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - N^{To} - N^{Ho}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$N_{xy} = N^o + D_{z,11}^x \cdot \left(-\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} \right)$$

$$N_{yx} = N^o + D_{z,22}^y \cdot \left(-\frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} \right)$$

$$\begin{aligned}
M_x &= \bar{B}_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{16} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \\
&\quad + \bar{D}_{11} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + D_{12} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + D_{16} \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \bar{M}_x^T - \bar{M}_x^H \\
M_y &= B_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \bar{B}_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{26} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \\
&\quad + D_{21} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \bar{D}_{22} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + D_{26} \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \bar{M}_y^T - \bar{M}_y^H \\
H^o &= B_{61} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{62} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \\
&\quad + D_{61} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + D_{62} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + D_{66} \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - H^{To} - H^{Ho}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$H_{xy} = H^o + \bar{D}_{\alpha,66}^x \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \bar{D}_{\omega,11}^x \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y}$$

$$H_{yx} = H^o + \bar{D}_{\alpha,66}^y \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \bar{D}_{\omega,22}^y \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3}$$

или

$$\begin{aligned}
H_{xy} &= H^o + \bar{D}_{\alpha,66}^x \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \bar{D}_{\omega,11}^x \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} \\
H_{yx} &= H^o + \bar{D}_{\alpha,66}^y \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \bar{D}_{\omega,22}^y \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{D}_{\alpha,66}^x &= \frac{1}{2} \left[D_{\rho,66}^x - \left(\frac{D_{\rho\omega\rho,66}^x}{D_{\rho\omega,66}^x} \right)^2 D_{\rho\omega,66}^x \right] \\
\bar{D}_{\alpha,66}^y &= \frac{1}{2} \left[D_{\rho,66}^y - \left(\frac{D_{\rho\omega\rho,66}^y}{D_{\rho\omega,66}^y} \right)^2 D_{\rho\omega,66}^y \right]
\end{aligned} \tag{2.39}$$

В формулах (2.39) для крутящих моментов панели не учтены температурные моменты и моменты от натяжения при стеснённом кручении рёбер.

В матрице жесткостей панели из ПКМ

$$\begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ B_{ij} & D_{ij} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

для дальнейших выкладок и обобщений введено

$$A_{ij} = A_{ji}, \quad B_{ij} = B_{ji}, \quad D_{ij} = D_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 6$$

$$\bar{A}_{11} = A_{11}^o + A_{11}^x, \quad \bar{B}_{11} = B_{11}^o + B_{11}^x, \quad \bar{D}_{11} = D_{11}^o + D_{11}^x$$

$$\bar{A}_{22} = A_{22}^o + A_{22}^y, \quad \bar{B}_{22} = B_{22}^o + B_{22}^y, \quad \bar{D}_{22} = D_{22}^o + D_{22}^y$$

Тангенциальные усилия и моменты определяются жесткостями обшивки и набора по формулам (2.37), (2.38), (2.39),

$$\begin{aligned} \text{где} \quad \bar{D}_{66,11} &= D_{66}^o + \bar{D}_{\alpha,66}^x \\ \bar{D}_{66,22} &= D_{66}^o + \bar{D}_{\alpha,66}^y \end{aligned}$$

Остальные компоненты матрицы жёсткости панели (2.40) определяются жесткостями композитной обшивки.

Температурные усилия и моменты

$$\begin{aligned} \bar{N}_x^T &= \bar{A}_{11}^T + A_{12}^T + A_{16}^T, & \bar{M}_x^T &= \bar{B}_{11}^T + B_{12}^T + B_{16}^T \\ \bar{N}_y^T &= A_{21}^T + \bar{A}_{22}^T + A_{26}^T, & \bar{M}_y^T &= B_{21}^T + \bar{B}_{22}^T + B_{26}^T \\ N^T &= A_{61}^T + A_{62}^T + A_{66}^T, & H^T &= B_{61}^T + B_{62}^T + B_{66}^T \\ & & \bar{H}_{xy}^T &= B_{61}^T + B_{62}^T + \bar{B}_{66}^{Tx} \\ & & \bar{H}_{yx}^T &= B_{61}^T + B_{62}^T + \bar{B}_{66}^{Ty} \end{aligned}$$

Температурные жёсткости композитной панели

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11}^T &= A_{11}^{To} + A_{11}^{Tx}, & \bar{B}_{11}^T &= B_{11}^{To} + B_{11}^{Tx} \\ \bar{A}_{22}^T &= A_{22}^{To} + A_{22}^{Ty}, & \bar{B}_{22}^T &= B_{22}^{To} + B_{22}^{Ty} \\ & & \bar{B}_{66}^{Tx} &= B_{66}^{To} + B_{66}^{Tx} \\ & & \bar{B}_{66}^{Ty} &= B_{66}^{To} + B_{66}^{Ty} \end{aligned}$$

Остальные компоненты матрицы температурных жёсткостей панели определяются температурными жесткостями композитной обшивки, причем

$$N^T = N^{To}, \quad H^T = H^{To}, \quad \bar{H}_{xy}^T = H^{To} + B_{66}^{Tx}, \quad \bar{H}_{yx}^T = H^{To} + B_{66}^{Ty}$$

Усилия и моменты от натяжения

$$\begin{aligned}
\bar{N}_x^H &= \bar{A}_{11}^H + A_{12}^H + A_{16}^H, & \bar{M}_x^H &= \bar{B}_{11}^H + B_{12}^H + B_{16}^H \\
\bar{N}_y^H &= A_{21}^H + \bar{A}_{22}^H + A_{26}^H, & \bar{M}_y^H &= B_{21}^H + \bar{B}_{22}^H + B_{26}^H \\
N^H &= A_{61}^H + A_{62}^H + A_{66}^H, & H^H &= B_{61}^H + B_{62}^H + B_{66}^H \\
\bar{H}_{xy}^H & & &= B_{61}^H + B_{62}^H + \bar{B}_{66}^{Hx} \\
\bar{H}_{yx}^H & & &= B_{61}^H + B_{62}^H + \bar{B}_{66}^{Hy}
\end{aligned}$$

Жёсткости композитной панели, связанные с натяжением

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{11}^H &= A_{11}^{Ho} + A_{11}^{Hx}, & \bar{B}_{11}^H &= B_{11}^{Ho} + B_{11}^{Hx} \\
\bar{A}_{22}^H &= A_{22}^{Ho} + A_{22}^{Hy}, & \bar{B}_{22}^H &= B_{22}^{Ho} + B_{22}^{Hy} \\
& & \bar{B}_{66}^{Hx} &= B_{66}^{Ho} + B_{66}^{Hx} \\
& & \bar{B}_{66}^{Hy} &= B_{66}^{Ho} + B_{66}^{Hy}
\end{aligned}$$

Остальные компоненты матрицы жёсткостей панели, связанных с натяжением, определяются жесткостями при натяжении слоев композитной обшивки, причем

$$N^H = N^{Ho}, \quad H^H = H^{Ho}, \quad \bar{H}_{xy}^H = H^{Ho} + B_{66}^{Hx}, \quad \bar{H}_{yx}^H = H^{Ho} + B_{66}^{Hy}$$

Не учитываются температурные эффекты и эффекты, связанные с предварительным натяжением армирующих волокон, при определении функций продольных перемещений от деформации поперечных сечений $[u_4(x)]_1$ и $[u_4(x)]_2$ через погонные углы закручивания тонкостенного стержня w_{xy} .

Математическая модель конструктивно-анизотропных панелей из ПКМ с эксцентричным жесткостным набором значительно упрощается, если при построении выражений для внутренних силовых факторов в соотношениях (2.12), (2.13), пренебречь членами, содержащими производные v_{0xx} , u_{0yy} , $[(u_4)_1]_x$, $[(u_4)_2]_y$, которые соответствуют краевым эффектам. Данное допущение означает пренебрежение нормальными напряжениями, вызванными изгибом в плоскости обшивки и деформацией поперечных сечений. Задача сводится к исследованию медленно меняющегося основного напряжённого состояния.

Связь внутренних силовых факторов с искомыми перемещениями $u_0(x, y), v_0(x, y)$ и $w(x, y)$ через деформации плоскости приведения и кривизны плоскости приведения в матричной форме

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ N_{yx} \\ M_x \\ M_y \\ H_{xy} \\ H_{yx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & A_{12} & A_{16} & \bar{B}_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & \bar{A}_{22} & A_{26} & B_{21} & \bar{B}_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ \bar{B}_{11} & B_{12} & B_{16} & \bar{D}_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & \bar{B}_{22} & B_{26} & D_{21} & \bar{D}_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & \bar{D}_{66,11} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & \bar{D}_{66,22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{N}_x^T \\ \bar{N}_y^T \\ N^T \\ N^T \\ \bar{M}_x^T \\ \bar{M}_y^T \\ \bar{H}_{xy}^T \\ \bar{H}_{yx}^T \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}_x^H \\ \bar{N}_y^H \\ N^H \\ N^H \\ \bar{M}_x^H \\ \bar{M}_y^H \\ \bar{H}_{xy}^H \\ \bar{H}_{yx}^H \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

Усилия и моменты согласно формулам (2.37), (2.38), (2.39) зависят как от функций перемещений в плоскости обшивки $u_0(x, y), v_0(x, y)$, так и от функции прогиба $w(x, y)$. В рассматриваемой постановке задача является связанной, то есть не разделяется на плоскую и изгиб пластины.

2.1.6 Уравнения равновесия. Разрешающее уравнение

Уравнения равновесия панели при действии внешней погонной нагрузки в направлении нормали к поверхности представляют собой систему трёх дифференциальных уравнений относительно трёх искомым функций перемещений – $u_0(x, y), v_0(x, y), w(x, y)$, которая в операторной форме имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} L_{11}u_0 + L_{12}v_0 + L_{13}w &= 0 \\ L_{21}u_0 + L_{22}v_0 + L_{23}w &= 0 \\ L_{31}u_0 + L_{32}v_0 + L_{33}w &= -q \end{aligned} \right\}, \quad (2.42)$$

где $L_{i,j}, i, j = 1, 2, 3$ – линейные дифференциальные операторы.

$$1) \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = 0$$

$$\begin{array}{l} u_0 \\ v_0 \\ w \end{array} \left| \begin{array}{l} \bar{A}_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ A_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\bar{B}_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - B_{12} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - 2B_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \end{array} \right| \frac{\partial N_x}{\partial x}$$

$$\begin{array}{l} u_0 \\ v_0 \\ w \end{array} \left| \begin{array}{l} A_{61} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ A_{62} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ -B_{61} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - B_{62} \frac{\partial^3}{\partial y^3} - 2B_{66} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \end{array} \right| \frac{\partial N_{yx}}{\partial x}$$

$$L_{11} = \bar{A}_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (A_{16} + A_{61}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{12} = A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{62} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{13} = -\bar{B}_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - (2B_{16} + B_{61}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - B_{62} \frac{\partial^3}{\partial y^3}$$

$$2) \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0$$

$$\begin{array}{c} u_0 \\ v_0 \\ w \end{array} \left| \begin{array}{c} A_{61} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ A_{62} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -B_{61} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - B_{62} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - 2B_{66} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \end{array} \right| \frac{\partial N_{xy}}{\partial x}$$

$$\begin{array}{c} u_0 \\ v_0 \\ w \end{array} \left| \begin{array}{c} A_{21} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \bar{A}_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ -B_{21} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - \bar{B}_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3} - 2B_{26} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \end{array} \right| \frac{\partial N_y}{\partial y}$$

$$L_{21} = A_{61} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (A_{21} + A_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{22} = A_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (A_{26} + A_{62}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \bar{A}_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{23} = -B_{61} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - (B_{21} + 2B_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (2B_{26} + B_{62}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - \bar{B}_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3}$$

$$3) \quad \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (H_{xy} + H_{yx})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q$$

u_0	$\bar{B}_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + B_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}$	$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}$
v_0	$B_{12} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + B_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^3}$	
w	$-\bar{D}_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - D_{12} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y}$	
u_0	$B_{61} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + B_{66} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}$	$\frac{\partial^2 H_{xy}}{\partial x \partial y}$
v_0	$B_{62} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}$	
w	$-D_{61} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} - D_{62} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} - 2\bar{D}_{66,11} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$	
u_0	$B_{61} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + B_{66} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}$	$\frac{\partial^2 H_{yx}}{\partial x \partial y}$
v_0	$B_{62} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}$	
w	$-D_{61} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} - D_{62} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} - 2\bar{D}_{66,22} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$	
u_0	$B_{21} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + B_{26} \frac{\partial^3}{\partial y^3}$	$\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}$
v_0	$\bar{B}_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3} + B_{26} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}$	
w	$-D_{21} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - \bar{D}_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} - 2D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3}$	

$$\begin{aligned}
L_{31} &= \bar{B}_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (B_{16} + 2B_{61}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + (B_{21} + 2B_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + B_{26} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \\
L_{32} &= B_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + (B_{26} + 2B_{62}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \bar{B}_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \\
L_{33} &= -\bar{D}_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2(D_{16} + D_{61}) \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} - (D_{12} + D_{21} + 2\bar{D}_{66,11} + 2\bar{D}_{66,22}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - \\
&\quad - 2(D_{26} + D_{62}) \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} - \bar{D}_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4}
\end{aligned}$$

Система дифференциальных уравнений равновесия может быть сведена к одному разрешающему дифференциальному уравнению относительно потенциальной функции $\Phi(x, y)$, через которую выражаются все расчётные величины задачи.

В рамках метода символического интегрирования перемещения определяются минорами детерминанта,

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix},$$

составленными по его третьей строке, соответствующей неоднородному уравнению системы; первые два однородные уравнения удовлетворяются тождественно:

$$u_0(x, y) = \begin{vmatrix} L_{12} & L_{13} \\ L_{22} & L_{23} \end{vmatrix} \Phi(x, y), \quad u_0(x, y) = (L_{12}L_{23} - L_{22}L_{13})\Phi(x, y)$$

$$v_0(x, y) = -\begin{vmatrix} L_{11} & L_{13} \\ L_{21} & L_{23} \end{vmatrix} \Phi(x, y), \quad v_0(x, y) = -(L_{11}L_{23} - L_{21}L_{13})\Phi(x, y) \quad (2.43)$$

$$w(x, y) = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} \Phi(x, y), \quad w(x, y) = (L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12})\Phi(x, y)$$

ИЛИ

$$u_0(x, y) = \left(R_{50} \frac{\partial^5}{\partial x^5} + R_{41} \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial y} + R_{32} \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2} + R_{23} \frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} + \right. \\ \left. + R_{14} \frac{\partial^5}{\partial x \partial y^4} + R_{05} \frac{\partial^5}{\partial y^5} \right) \Phi(x, y),$$

где $R_{ij} = R_{ij}^1 + R_{ij}^2$, $i, j=0,1,\dots,5$

$L_{12}L_{23} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} R_{50}^1 &= -A_{16}B_{61} \\ R_{41}^1 &= -(A_{12} + A_{66})B_{61} - A_{16}(B_{21} + 2B_{66}) \\ R_{32}^1 &= -A_{62}B_{61} - (A_{12} + A_{66})(B_{21} + 2B_{66}) - A_{16}(2B_{26} + B_{62}) \\ R_{23}^1 &= -A_{62}(B_{21} + 2B_{66}) - (A_{12} + A_{66})(2B_{26} + B_{62}) - A_{16}\bar{B}_{22} \\ R_{14}^1 &= -A_{62}(2B_{26} + B_{62}) - (A_{12} + A_{66})\bar{B}_{22} \\ R_{05}^1 &= -A_{62}\bar{B}_{22} \end{aligned}$$

$-L_{13}L_{22} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} R_{50}^2 &= A_{66}\bar{B}_{11} \\ R_{41}^2 &= (A_{26} + A_{62})\bar{B}_{11} + A_{66}(2B_{16} + B_{61}) \\ R_{32}^2 &= \bar{A}_{22}\bar{B}_{11} + (A_{26} + A_{62})(2B_{16} + B_{61}) + A_{66}(B_{12} + 2B_{66}) \\ R_{23}^2 &= \bar{A}_{22}(2B_{16} + B_{61}) + (A_{26} + A_{62})(B_{12} + 2B_{66}) + A_{66}B_{62} \\ R_{14}^2 &= \bar{A}_{22}(B_{12} + 2B_{66}) + (A_{26} + A_{62})B_{62} \\ R_{05}^2 &= \bar{A}_{22}B_{62} \end{aligned}$$

$$v_0(x, y) = \left(S_{50} \frac{\partial^5}{\partial x^5} + S_{41} \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial y} + S_{32} \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2} + S_{23} \frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} + \right. \\ \left. + S_{14} \frac{\partial^5}{\partial x \partial y^4} + S_{05} \frac{\partial^5}{\partial y^5} \right) \Phi(x, y),$$

где $S_{ij} = S_{ij}^1 + S_{ij}^2$, $i, j=0,1,\dots,5$

$L_{13}L_{21} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} S_{50}^1 &= -A_{61} \bar{B}_{11} \\ S_{41}^1 &= -(A_{21} + A_{66}) \bar{B}_{11} - A_{61} (2B_{16} + B_{61}) \\ S_{32}^1 &= -A_{26} \bar{B}_{11} - (A_{21} + A_{66}) (2B_{16} + B_{61}) - A_{61} (B_{12} + 2B_{66}) \\ S_{23}^1 &= -A_{26} (2B_{16} + B_{61}) - (A_{21} + A_{66}) (B_{12} + 2B_{66}) - A_{61} B_{62} \\ S_{14}^1 &= -A_{26} (B_{12} + 2B_{66}) - (A_{21} + A_{66}) B_{62} \\ S_{05}^1 &= -A_{26} B_{62} \end{aligned}$$

$-L_{11}L_{23} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} S_{50}^2 &= \bar{A}_{11} B_{61} \\ S_{41}^2 &= (A_{16} + A_{61}) B_{61} + \bar{A}_{11} (B_{21} + 2B_{66}) \\ S_{32}^2 &= A_{66} B_{61} + (A_{16} + A_{61}) (B_{21} + 2B_{66}) + \bar{A}_{11} (2B_{26} + B_{62}) \\ S_{23}^2 &= A_{66} (B_{21} + 2B_{66}) + (A_{16} + A_{61}) (2B_{26} + B_{62}) + \bar{A}_{11} \bar{B}_{22} \\ S_{14}^2 &= A_{66} (2B_{26} + B_{62}) + (A_{16} + A_{61}) \bar{B}_{22} \\ S_{05}^2 &= A_{66} \bar{B}_{22} \end{aligned}$$

$$w(x, y) = \left(R_{40} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + R_{31} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + R_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + R_{13} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + R_{04} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \Phi(x, y),$$

где $R_{ij} = R_{ij}^1 + R_{ij}^2$, $i, j=0,1,\dots,4$

$$L_{11}L_{22} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} R_{40}^1 &= \bar{A}_{11}A_{66} \\ R_{31}^1 &= (A_{16} + A_{61})A_{66} + \bar{A}_{11}(A_{26} + A_{62}) \\ R_{22}^1 &= A_{66}A_{66} + (A_{16} + A_{61})(A_{26} + A_{62}) + \bar{A}_{11}\bar{A}_{22} \\ R_{13}^1 &= A_{66}(A_{26} + A_{62}) + (A_{16} + A_{61})\bar{A}_{22} \\ R_{04}^1 &= A_{66}\bar{A}_{22} \end{aligned}$$

$$-L_{12}L_{21} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} R_{40}^2 &= -A_{16}A_{61} \\ R_{31}^2 &= -(A_{12} + A_{66})A_{61} - A_{16}(A_{21} + A_{66}) \\ R_{22}^2 &= -A_{62}A_{61} - (A_{12} + A_{66})(A_{21} + A_{66}) - A_{16}A_{26} \\ R_{13}^2 &= -A_{62}(A_{21} + A_{66}) - (A_{12} + A_{66})A_{26} \\ R_{04}^2 &= -A_{62}A_{26} \end{aligned}$$

(2.44)

Третье уравнение системы на основании формул связи сводится к неоднородному линейному дифференциальному уравнению в частных производных восьмого порядка относительно искомой потенциальной функции $\Phi(x, y)$

$$L_{31}u_0 + L_{32}v_0 + L_{33}w = -q$$

$$\begin{aligned} &\left(K_{80} \frac{\partial^8}{\partial x^8} + K_{71} \frac{\partial^8}{\partial x^7 \partial y} + K_{62} \frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + K_{53} \frac{\partial^8}{\partial x^5 \partial y^3} + K_{44} \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + \right. \\ &\left. + K_{35} \frac{\partial^8}{\partial x^3 \partial y^5} + K_{26} \frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} + K_{17} \frac{\partial^8}{\partial x \partial y^7} + K_{08} \frac{\partial^8}{\partial y^8} \right) \Phi(x, y) = q, \end{aligned} \quad (2.45)$$

где $K_{ij} = K_{ij}^1 + K_{ij}^2 + K_{ij}^3$, $i, j=0,1,\dots,8$

$L_{31}u_0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
K_{80}^1 &= -\bar{B}_{11}R_{50} \\
K_{71}^1 &= -\bar{B}_{11}R_{41} - (B_{16} + 2B_{61})R_{50} \\
K_{62}^1 &= -\bar{B}_{11}R_{32} - (B_{16} + 2B_{61})R_{41} - (B_{21} + 2B_{66})R_{50} \\
K_{53}^1 &= -\bar{B}_{11}R_{23} - (B_{16} + 2B_{61})R_{32} - (B_{21} + 2B_{66})R_{41} - B_{26}R_{50} \\
K_{44}^1 &= -\bar{B}_{11}R_{14} - (B_{16} + 2B_{61})R_{23} - (B_{21} + 2B_{66})R_{32} - B_{26}R_{41} \\
K_{35}^1 &= -\bar{B}_{11}R_{05} - (B_{16} + 2B_{61})R_{14} - (B_{21} + 2B_{66})R_{23} - B_{26}R_{32} \\
K_{26}^1 &= - (B_{16} + 2B_{61})R_{05} - (B_{21} + 2B_{66})R_{14} - B_{26}R_{23} \\
K_{17}^1 &= - (B_{21} + 2B_{66})R_{05} - B_{26}R_{14} \\
K_{08}^1 &= - B_{26}R_{05}
\end{aligned}$$

$L_{32}v_0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
K_{80}^2 &= -B_{16}S_{50} \\
K_{71}^2 &= -B_{16}S_{41} - (B_{12} + 2B_{66})S_{50} \\
K_{62}^2 &= -B_{16}S_{32} - (B_{12} + 2B_{66})S_{41} - (B_{26} + 2B_{62})S_{50} \\
K_{53}^2 &= -B_{16}S_{23} - (B_{12} + 2B_{66})S_{32} - (B_{26} + 2B_{62})S_{41} - \bar{B}_{22}S_{50} \\
K_{44}^2 &= -B_{16}S_{14} - (B_{12} + 2B_{66})S_{23} - (B_{26} + 2B_{62})S_{32} - \bar{B}_{22}S_{41} \\
K_{35}^2 &= -B_{16}S_{05} - (B_{12} + 2B_{66})S_{14} - (B_{26} + 2B_{62})S_{23} - \bar{B}_{22}S_{32} \\
K_{26}^2 &= - (B_{12} + 2B_{66})S_{05} - (B_{26} + 2B_{62})S_{14} - \bar{B}_{22}S_{23} \\
K_{17}^2 &= - (B_{26} + 2B_{62})S_{05} - \bar{B}_{22}S_{14} \\
K_{08}^2 &= - \bar{B}_{22}S_{05}
\end{aligned}$$

$$L_{33}w \Rightarrow$$

$$K_{80}^3 = \bar{D}_{11}R_{40}$$

$$K_{71}^3 = \bar{D}_{11}R_{31} + 2(D_{16} + D_{61})R_{40}$$

$$K_{62}^3 = \bar{D}_{11}R_{22} + 2(D_{16} + D_{61})R_{31} + (D_{12} + D_{21} + 2\bar{D}_{66,11} + 2\bar{D}_{66,22})R_{40}$$

$$K_{53}^3 = \bar{D}_{11}R_{13} + 2(D_{16} + D_{61})R_{22} + (D_{12} + D_{21} + 2\bar{D}_{66,11} + 2\bar{D}_{66,22})R_{31} + \\ + 2(D_{26} + D_{62})R_{40}$$

$$K_{44}^3 = \bar{D}_{11}R_{04} + 2(D_{16} + D_{61})R_{13} + (D_{12} + D_{21} + 2\bar{D}_{66,11} + 2\bar{D}_{66,22})R_{22} + \\ + 2(D_{26} + D_{62})R_{31} + \\ + \bar{D}_{22}R_{40}$$

$$K_{35}^3 = 2(D_{16} + D_{61})R_{04} + (D_{12} + D_{21} + 2\bar{D}_{66,11} + 2\bar{D}_{66,22})R_{13} + \\ + 2(D_{26} + D_{62})R_{22} + \\ + \bar{D}_{22}R_{31}$$

$$K_{26}^3 = (D_{12} + D_{21} + 2\bar{D}_{66,11} + 2\bar{D}_{66,22})R_{04} + 2(D_{26} + D_{62})R_{13} + \\ + \bar{D}_{22}R_{22}$$

$$K_{17}^3 = 2(D_{26} + D_{62})R_{04} + \\ + \bar{D}_{22}R_{13}$$

$$K_{08}^3 = \bar{D}_{22}R_{04}$$

Коэффициенты $R_{5-i,i}$ $i=0,1,\dots,5$, $S_{5-i,i}$ $i=0,1,\dots,5$, $R_{4-i,i}$ $i=0,1,\dots,4$ в формулах связи (2.44) и $K_{8-i,i}$ $i=0,1,\dots,8$ в разрешающем уравнении (2.45) – постоянные величины, зависящие от упругих свойств материала и геометрических параметров конструкции.

**2.2 ПЛОСКАЯ ПРЯМОУГОЛЬНАЯ КОМПОЗИТНАЯ ПАНЕЛЬ,
ЭКСЦЕНТРИЧНО ПОДКРЕПЛЁННАЯ
ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫМ НАБОРОМ.
ИНТЕГРАЛЬНЫЙ УЧЁТ ЗАКРУЧИВАНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ СТЕРЖНЕЙ**

Математическая модель эксцентрично подкреплённой панели их ПКМ может быть сформулирована путём распространения гипотезы Кирхгофа на всё тело анизотропной среды. Интегрально вводятся внутренние силовые факторы по площадкам поперечных сечений – поясков обшивки с присоединёнными рёбрами, строятся дифференциальные уравнения равновесия в усилиях и моментах с последующим решением задачи в перемещениях.

Модель представляет интерес с точки зрения обобщений, является точной для расчёта гладких обшивок, обладающих анизотропией вследствие несимметрии свойств структуры пакета по толщине.

2.2.1 Статико-геометрическая модель анизотропной панели

С использованием физических уравнений, а также формул преобразования напряжений при повороте осей координат компоненты напряжённого состояния k – ого слоя панели на макро-уровне с учётом влияния температуры и предварительного натяжения волокон определяются равенствами (2.3)

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{matrix} \right\}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} & -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z^{(k)} & -\bar{\alpha}_1^{(k)} \Delta T & -\bar{\varepsilon}_{H1}^{(k)} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} & -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z^{(k)} & -\bar{\alpha}_2^{(k)} \Delta T & -\bar{\varepsilon}_{H2}^{(k)} \\ \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) & -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} 2z^{(k)} & -\bar{\alpha}_6^{(k)} \Delta T & -\bar{\varepsilon}_{H6}^{(k)} \end{matrix} \right\}$$

Нормальные, сдвигающие и перерезывающие силы, изгибающие и крутящие моменты в рамках формального, интегрального учёта закручивания

рёбер жёсткости определяются

$$\begin{aligned}
 N_x &= \frac{1}{c_1} \int_{F+F_1} \sigma_x^{(k)} dF & N_y &= \frac{1}{c_2} \int_{F+F_2} \sigma_y^{(k)} dF \\
 N_{xy} &= \frac{1}{c_1} \int_{F+F_1} \tau_{xy}^{(k)} dF & N_{yx} &= \frac{1}{c_2} \int_{F+F_2} \tau_{xy}^{(k)} dF \\
 M_x &= \frac{1}{c_1} \int_{F+F_1} \sigma_x^{(k)} z^{(k)} dF & M_x &= \frac{1}{c_2} \int_{F+F_2} \sigma_y^{(k)} z^{(k)} dF \\
 H_{xy} &= \frac{1}{c_1} \int_{F+F_1} \tau_{xy}^{(k)} z^{(k)} dF & H_{yx} &= \frac{1}{c_2} \int_{F+F_2} \tau_{xy}^{(k)} z^{(k)} dF \\
 Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H_{yx}}{\partial y} & Q_y &= \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H_{xy}}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

F – площадь поперечного сечения обшивки между стрингерами (нервюрами).

Вводятся обозначения:

обобщённые жесткостные характеристики многослойной обшивки (2.16), (2.17)

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \int_H \bar{Q}_{ij}^{(k)} dF \\
 B_{ij} &= \int_H \bar{Q}_{ij}^{(k)} z^{(k)} dF \\
 D_{ij} &= \int_H \bar{Q}_{ij}^{(k)} [z^{(k)}]^2 dF \\
 A_{ij}^T &= \Delta T \int_H \bar{Q}_{ij}^{(k)} \bar{\alpha}_j^{(k)} dF & A_{ij}^H &= \int_H \bar{Q}_{ij}^{(k)} \bar{\varepsilon}_{Hj}^{(k)} dF \\
 B_{ij}^T &= \Delta T \int_H \bar{Q}_{ij}^{(k)} \bar{\alpha}_j^{(k)} z^{(k)} dF & B_{ij}^H &= \int_H \bar{Q}_{ij}^{(k)} \bar{\varepsilon}_{Hj}^{(k)} z^{(k)} dF,
 \end{aligned}$$

$i, j = 1, 2, 6,$

обобщённые жесткостные характеристики многослойного продольного ребра
(2.20), (2.23)

$$A_{ij}^x = \frac{1}{c_1} \int_{F_1} \bar{Q}_{ij}^{(k)} dF$$

$$B_{ij}^x = \frac{1}{c_1} \int_{F_1} \bar{Q}_{ij}^{(k)} z^{(k)} dF$$

$$D_{ij}^x = \frac{1}{c_1} \int_{F_1} \bar{Q}_{ij}^{(k)} [z^{(k)}]^2 dF$$

$$A_{ij}^{Tx} = \frac{\Delta T}{c_1} \int_{F_1} \bar{Q}_{ij}^{(k)} \bar{\alpha}_j^{(k)} dF$$

$$A_{ij}^{Hx} = \frac{1}{c_1} \int_{F_1} \bar{Q}_{ij}^{(k)} \bar{\varepsilon}_{Hj}^{(k)} dF$$

$$B_{ij}^{Tx} = \frac{\Delta T}{c_1} \int_{F_1} \bar{Q}_{ij}^{(k)} \bar{\alpha}_j^{(k)} z^{(k)} dF$$

$$B_{ij}^{Hx} = \frac{1}{c_1} \int_{F_1} \bar{Q}_{ij}^{(k)} \bar{\varepsilon}_{Hj}^{(k)} z^{(k)} dF$$

$i, j = 1, 2, 6$.

Обобщённые жесткостные характеристики многослойного поперечного ребра $A_{ij}^y, B_{ij}^y, D_{ij}^y, A_{ij}^{Ty}, B_{ij}^{Ty}, A_{ij}^{Hy}, B_{ij}^{Hy}$ определяются аналогично, по формулам (2.20), (2.23), с заменой индекса «1» на индекс «2» при интегрировании и осреднении.

2.2.2 Внутренние силовые факторы

Связь внутренних силовых факторов с искомыми перемещениями $u_0(x, y), v_0(x, y)$ и $w(x, y)$ через деформации плоскости приведения и кривизны

плоскости приведения в матричной форме:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ N_{yx} \\ M_x \\ M_y \\ H_{xy} \\ H_{yx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & A_{16} & \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} & B_{16} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & A_{26} & \bar{B}_{21} & \bar{B}_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & \bar{A}_{66,11} & B_{61} & B_{62} & \bar{B}_{66,11} \\ A_{61} & A_{62} & \bar{A}_{66,22} & B_{61} & B_{62} & \bar{B}_{66,22} \\ \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} & B_{16} & \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} & D_{16} \\ \bar{B}_{21} & \bar{B}_{22} & B_{26} & \bar{D}_{21} & \bar{D}_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & \bar{B}_{66,11} & D_{61} & D_{62} & \bar{D}_{66,11} \\ B_{61} & B_{62} & \bar{B}_{66,22} & D_{61} & D_{62} & \bar{D}_{66,22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{N}_x^T \\ \bar{N}_y^T \\ \bar{N}_{xy}^T \\ \bar{N}_{yx}^T \\ \bar{M}_x^T \\ \bar{M}_y^T \\ \bar{H}_{xy}^T \\ \bar{H}_{yx}^T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{N}_x^H \\ \bar{N}_y^H \\ \bar{N}_{xy}^H \\ \bar{N}_{yx}^H \\ \bar{M}_x^H \\ \bar{M}_y^H \\ \bar{H}_{xy}^H \\ \bar{H}_{yx}^H \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

Усилия и моменты зависят как от функций перемещений в плоскости обшивки $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$, так и от функции прогиба $w(x, y)$. В рассматриваемой постановке задача является связанной, то есть не разделяется на плоскую и изгиб пластины.

В матрице жесткостей панели из ПКМ (2.40)

$$\begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ B_{ij} & D_{ij} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

для дальнейших выкладок и обобщений введено

$$A_{ij} = A_{ji}, \quad B_{ij} = B_{ji}, \quad D_{ij} = D_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 6$$

$$\begin{aligned}
 \bar{A}_{11} &= A_{11}^o + A_{11}^x, & \bar{B}_{11} &= B_{11}^o + B_{11}^x, & \bar{D}_{11} &= D_{11}^o + D_{11}^x \\
 \bar{A}_{12} &= A_{12}^o + A_{12}^x, & \bar{B}_{12} &= B_{12}^o + B_{12}^x, & \bar{D}_{12} &= D_{12}^o + D_{12}^x \\
 \bar{A}_{21} &= A_{21}^o + A_{21}^y, & \bar{B}_{21} &= B_{21}^o + B_{21}^y, & \bar{D}_{21} &= D_{21}^o + D_{21}^y \\
 \bar{A}_{22} &= A_{22}^o + A_{22}^y, & \bar{B}_{22} &= B_{22}^o + B_{22}^y, & \bar{D}_{22} &= D_{22}^o + D_{22}^y
 \end{aligned}$$

Тангенциальные усилия и моменты определяются жесткостями обшивки и набора,

где

$$\begin{aligned}\bar{A}_{66,11} &= A_{66}^o + A_{66}^x, & \bar{B}_{66,11} &= B_{66}^o + B_{66}^x, & \bar{D}_{66,11} &= D_{66}^o + D_{66}^x \\ \bar{A}_{66,22} &= A_{66}^o + A_{66}^y, & \bar{B}_{66,22} &= B_{66}^o + B_{66}^y, & \bar{D}_{66,22} &= D_{66}^o + D_{66}^y\end{aligned}$$

Остальные компоненты матрицы жёсткости панели (2.48) определяются жесткостями композитной обшивки.

Температурные усилия и моменты

$$\begin{aligned}\bar{N}_x^T &= \bar{A}_{11}^T + \bar{A}_{12}^T + A_{16}^T, & \bar{M}_x^T &= \bar{B}_{11}^T + \bar{B}_{12}^T + B_{16}^T \\ \bar{N}_y^T &= \bar{A}_{21}^T + \bar{A}_{22}^T + A_{26}^T, & \bar{M}_y^T &= \bar{B}_{21}^T + \bar{B}_{22}^T + B_{26}^T \\ \bar{N}_{xy}^T &= A_{61}^T + A_{62}^T + \bar{A}_{66}^{Tx}, & \bar{H}_{xy}^T &= B_{61}^T + B_{62}^T + \bar{B}_{66}^{Tx} \\ \bar{N}_{yx}^T &= A_{61}^T + A_{62}^T + \bar{A}_{66}^{Ty}, & \bar{H}_{yx}^T &= B_{61}^T + B_{62}^T + \bar{B}_{66}^{Ty}\end{aligned}$$

Температурные жёсткости композитной панели

$$\begin{aligned}\bar{A}_{11}^T &= A_{11}^{To} + A_{11}^{Tx}, & \bar{B}_{11}^T &= B_{11}^{To} + B_{11}^{Tx} \\ \bar{A}_{12}^T &= A_{12}^{To} + A_{12}^{Tx}, & \bar{B}_{12}^T &= B_{12}^{To} + B_{12}^{Tx} \\ \bar{A}_{21}^T &= A_{21}^{To} + A_{21}^{Ty}, & \bar{B}_{21}^T &= B_{21}^{To} + B_{21}^{Ty} \\ \bar{A}_{22}^T &= A_{22}^{To} + A_{22}^{Ty}, & \bar{B}_{22}^T &= B_{22}^{To} + B_{22}^{Ty} \\ \bar{A}_{66}^{Tx} &= A_{66}^{To} + A_{66}^{Tx}, & \bar{B}_{66}^{Tx} &= B_{66}^{To} + B_{66}^{Tx} \\ \bar{A}_{66}^{Ty} &= A_{66}^{To} + A_{66}^{Ty}, & \bar{B}_{66}^{Ty} &= B_{66}^{To} + B_{66}^{Ty}\end{aligned}$$

Остальные компоненты матрицы температурных жёсткостей панели определяются температурными жесткостями композитной обшивки.

Усилия и моменты от натяжения

$$\begin{aligned}\bar{N}_x^H &= \bar{A}_{11}^H + \bar{A}_{12}^H + A_{16}^H, & \bar{M}_x^H &= \bar{B}_{11}^H + \bar{B}_{12}^H + B_{16}^H \\ \bar{N}_y^H &= \bar{A}_{21}^H + \bar{A}_{22}^H + A_{26}^H, & \bar{M}_y^H &= \bar{B}_{21}^H + \bar{B}_{22}^H + B_{26}^H \\ \bar{N}_{xy}^H &= A_{61}^H + A_{62}^H + \bar{A}_{66}^{Hx}, & \bar{H}_{xy}^H &= B_{61}^H + B_{62}^H + \bar{B}_{66}^{Hx} \\ \bar{N}_{yx}^H &= A_{61}^H + A_{62}^H + \bar{A}_{66}^{Hy}, & \bar{H}_{yx}^H &= B_{61}^H + B_{62}^H + \bar{B}_{66}^{Hy}\end{aligned}$$

Жёсткости композитной панели, связанные с натяжением

$$\begin{aligned}
 \bar{A}_{11}^H &= A_{11}^{Ho} + A_{11}^{Hx}, & \bar{B}_{11}^H &= B_{11}^{Ho} + B_{11}^{Hx} \\
 \bar{A}_{12}^H &= A_{12}^{Ho} + A_{12}^{Hx}, & \bar{B}_{12}^H &= B_{12}^{Ho} + B_{12}^{Hx} \\
 \bar{A}_{21}^H &= A_{21}^{Ho} + A_{21}^{Hy}, & \bar{B}_{21}^H &= B_{21}^{Ho} + B_{21}^{Hy} \\
 \bar{A}_{22}^H &= A_{22}^{Ho} + A_{22}^{Hy}, & \bar{B}_{22}^H &= B_{22}^{Ho} + B_{22}^{Hy} \\
 \bar{A}_{66}^{Hx} &= A_{66}^{Ho} + A_{66}^{Hx}, & \bar{B}_{66}^{Hx} &= B_{66}^{Ho} + B_{66}^{Hx} \\
 \bar{A}_{66}^{Hy} &= A_{66}^{Ho} + A_{66}^{Hy}, & \bar{B}_{66}^{Hy} &= B_{66}^{Ho} + B_{66}^{Hy}
 \end{aligned}$$

Остальные компоненты матрицы жёсткостей панели, связанных с натяжением, определяются жесткостями при натяжении слоёв композитной обшивки.

2.2.3 Уравнения равновесия. Разрешающее уравнение

Уравнения равновесия панели при действии внешней погонной нагрузки в направлении нормали к поверхности (2.35)

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (H_{xy} + H_{yx})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} &= -q
 \end{aligned} \right\}$$

представляют собой систему трёх дифференциальных уравнений относительно трёх искомых функций перемещений – $u_0(x,y)$, $v_0(x,y)$, $w(x,y)$, которая в операторной форме имеет вид (2.42):

$$\left. \begin{aligned}
 L_{11}u_0 + L_{12}v_0 + L_{13}w &= 0 \\
 L_{21}u_0 + L_{22}v_0 + L_{23}w &= 0 \\
 L_{31}u_0 + L_{32}v_0 + L_{33}w &= -q
 \end{aligned} \right\},$$

где $L_{i,j}$, $i, j = 1, 2, 3$ – линейные дифференциальные операторы.

$$1) \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = 0$$

$$L_{11} = \bar{A}_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (A_{16} + A_{61}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \bar{A}_{66,22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{12} = A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\bar{A}_{12} + \bar{A}_{66,22}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{62} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{13} = -\bar{B}_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - (2B_{16} + B_{61}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (\bar{B}_{12} + 2\bar{B}_{66,22}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - B_{62} \frac{\partial^3}{\partial y^3}$$

$$2) \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0$$

$$L_{21} = A_{61} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\bar{A}_{21} + \bar{A}_{66,11}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{22} = \bar{A}_{66,11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (A_{26} + A_{62}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \bar{A}_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{23} = -B_{61} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - (\bar{B}_{21} + 2\bar{B}_{66,11}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (2B_{26} + B_{62}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - \bar{B}_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3}$$

$$3) \quad \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (H_{xy} + H_{yx})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q$$

$$L_{31} = \bar{B}_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (B_{16} + 2B_{61}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + (\bar{B}_{21} + \bar{B}_{66,11} + \bar{B}_{66,22}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + B_{26} \frac{\partial^3}{\partial y^3}$$

$$L_{32} = B_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{66,11} + \bar{B}_{66,22}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + (B_{26} + 2B_{62}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \bar{B}_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3}$$

$$L_{33} = -\bar{D}_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2(D_{16} + D_{61}) \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} - (\bar{D}_{12} + \bar{D}_{21} + 2\bar{D}_{66,11} + 2\bar{D}_{66,22}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - \\ - 2(D_{26} + D_{62}) \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} - \bar{D}_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

Система дифференциальных уравнений равновесия может быть сведена к одному разрешающему дифференциальному уравнению относительно потенциальной функции $\Phi(x, y)$, через которую выражаются все расчётные величины задачи. В рамках метода символического интегрирования перемещения определяются минорами детерминанта, L_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, составленными по его третьей строке, соответствующей неоднородному уравнению системы, первые два однородные уравнения удовлетворяются тождественно – (2.43), (2.44):

$$u_0(x, y) = (L_{12}L_{23} - L_{22}L_{13})\Phi(x, y)$$

$$v_0(x, y) = -(L_{11}L_{23} - L_{21}L_{13})\Phi(x, y)$$

$$w(x, y) = (L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12})\Phi(x, y)$$

ИЛИ

$$u_0(x, y) = \left(R_{50} \frac{\partial^5}{\partial x^5} + R_{41} \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial y} + R_{32} \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2} + R_{23} \frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} + \right. \\ \left. + R_{14} \frac{\partial^5}{\partial x \partial y^4} + R_{05} \frac{\partial^5}{\partial y^5} \right) \Phi(x, y) ,$$

где $R_{ij} = R_{ij}^1 + R_{ij}^2$, $i, j=0,1,\dots,5$

$L_{12}L_{23} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} R_{50}^1 &= -A_{16}B_{61} \\ R_{41}^1 &= -(\bar{A}_{12} + \bar{A}_{66,22})B_{61} - A_{16}(\bar{B}_{21} + 2\bar{B}_{66,11}) \\ R_{32}^1 &= -A_{62}B_{61} - (\bar{A}_{12} + \bar{A}_{66,22})(\bar{B}_{21} + 2\bar{B}_{66,11}) - A_{16}(2B_{26} + B_{62}) \\ R_{23}^1 &= -A_{62}(\bar{B}_{21} + 2\bar{B}_{66,11}) - (\bar{A}_{12} + \bar{A}_{66,22})(2B_{26} + B_{62}) - \\ & - A_{16}\bar{B}_{22} \\ R_{14}^1 &= -A_{62}(2B_{26} + B_{62}) - \\ & - (\bar{A}_{12} + \bar{A}_{66,22})\bar{B}_{22} \\ R_{05}^1 &= -A_{62}\bar{B}_{22} \end{aligned}$$

$-L_{13}L_{22} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} R_{50}^2 &= \bar{A}_{66,11}\bar{B}_{11} \\ R_{41}^2 &= (A_{26} + A_{62})\bar{B}_{11} + \bar{A}_{66,11}(2B_{16} + B_{61}) \\ R_{32}^2 &= \bar{A}_{22}\bar{B}_{11} + (A_{26} + A_{62})(2B_{16} + B_{61}) + \bar{A}_{66,11}(\bar{B}_{12} + 2\bar{B}_{66,22}) \\ R_{23}^2 &= \bar{A}_{22}(2B_{16} + B_{61}) + (A_{26} + A_{62})(\bar{B}_{12} + 2\bar{B}_{66,22}) + \bar{A}_{66,11}B_{62} \\ R_{14}^2 &= \bar{A}_{22}(\bar{B}_{12} + 2\bar{B}_{66,22}) + (A_{26} + A_{62})B_{62} \\ R_{05}^2 &= \bar{A}_{22}B_{62} \end{aligned}$$

$$v_0(x, y) = \left(S_{50} \frac{\partial^5}{\partial x^5} + S_{41} \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial y} + S_{32} \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2} + S_{23} \frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} + S_{14} \frac{\partial^5}{\partial x \partial y^4} + S_{05} \frac{\partial^5}{\partial y^5} \right) \Phi(x, y) ,$$

где $S_{ij} = S_{ij}^1 + S_{ij}^2$, $i, j=0,1,\dots,5$

$L_{13}L_{21} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} S_{50}^1 &= -A_{61} \bar{B}_{11} \\ S_{41}^1 &= -(\bar{A}_{21} + \bar{A}_{66,11}) \bar{B}_{11} - A_{61} (2B_{16} + B_{61}) \\ S_{32}^1 &= -A_{26} \bar{B}_{11} - (\bar{A}_{21} + \bar{A}_{66,11}) (2B_{16} + B_{61}) - A_{61} (\bar{B}_{12} + 2\bar{B}_{66,22}) \\ S_{23}^1 &= -A_{26} (2B_{16} + B_{61}) - (\bar{A}_{21} + \bar{A}_{66,11}) (\bar{B}_{12} + 2\bar{B}_{66,22}) - A_{61} B_{62} \\ S_{14}^1 &= -A_{26} (\bar{B}_{12} + 2\bar{B}_{66,22}) - (\bar{A}_{21} + \bar{A}_{66,11}) B_{62} \\ S_{05}^1 &= -A_{26} B_{62} \end{aligned}$$

$-L_{11}L_{23} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} S_{50}^2 &= \bar{A}_{11} B_{61} \\ S_{41}^2 &= (A_{16} + A_{61}) B_{61} + \bar{A}_{11} (\bar{B}_{21} + 2\bar{B}_{66,11}) \\ S_{32}^2 &= \bar{A}_{66,22} B_{61} + (A_{16} + A_{61}) (\bar{B}_{21} + 2\bar{B}_{66,11}) + \bar{A}_{11} (2B_{26} + B_{62}) \\ S_{23}^2 &= \bar{A}_{66,22} (\bar{B}_{21} + 2\bar{B}_{66,11}) + (A_{16} + A_{61}) (2B_{26} + B_{62}) + \bar{A}_{11} \bar{B}_{22} \\ S_{14}^2 &= \bar{A}_{66,22} (2B_{26} + B_{62}) + (A_{16} + A_{61}) \bar{B}_{22} \\ S_{05}^2 &= \bar{A}_{66,22} \bar{B}_{22} \end{aligned}$$

$$w(x, y) = \left(R_{40} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + R_{31} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + R_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + R_{13} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + R_{04} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \Phi(x, y) ,$$

где $R_{ij} = R_{ij}^1 + R_{ij}^2$, $i, j=0,1,\dots,4$

$L_{11}L_{22} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} R_{40}^1 &= \bar{A}_{11} \bar{A}_{66,11} \\ R_{31}^1 &= (A_{16} + A_{61}) \bar{A}_{66,11} + \bar{A}_{11} (A_{26} + A_{62}) \\ R_{22}^1 &= \bar{A}_{66,22} \bar{A}_{66,11} + (A_{16} + A_{61}) (A_{26} + A_{62}) + \bar{A}_{11} \bar{A}_{22} \\ R_{13}^1 &= \bar{A}_{66,22} (A_{26} + A_{62}) + (A_{16} + A_{61}) \bar{A}_{22} \\ R_{04}^1 &= \bar{A}_{66,22} \bar{A}_{22} \end{aligned}$$

$-L_{12}L_{21} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} R_{40}^2 &= -A_{16} A_{61} \\ R_{31}^2 &= -(\bar{A}_{12} + \bar{A}_{66,22}) A_{61} - A_{16} (\bar{A}_{21} + \bar{A}_{66,11}) \\ R_{22}^2 &= -A_{62} A_{61} - (\bar{A}_{12} + \bar{A}_{66,22}) (\bar{A}_{21} + \bar{A}_{66,11}) - A_{16} A_{26} \\ R_{13}^2 &= -A_{62} (\bar{A}_{21} + \bar{A}_{66,11}) - (\bar{A}_{12} + \bar{A}_{66,22}) A_{26} \\ R_{04}^2 &= -A_{62} A_{26} \end{aligned}$$

Третье уравнение системы на основании формул связи сводится к неоднородному линейному дифференциальному уравнению в частных производных восьмого порядка относительно искомой потенциальной функции $\Phi(x, y)$ (2.45):

$$\begin{aligned} &L_{31}u_0 + L_{32}v_0 + L_{33}w = -q \\ &\left(K_{80} \frac{\partial^8}{\partial x^8} + K_{71} \frac{\partial^8}{\partial x^7 \partial y} + K_{62} \frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + K_{53} \frac{\partial^8}{\partial x^5 \partial y^3} + K_{44} \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + \right. \\ &\quad \left. + K_{35} \frac{\partial^8}{\partial x^3 \partial y^5} + K_{26} \frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} + K_{17} \frac{\partial^8}{\partial x \partial y^7} + K_{08} \frac{\partial^8}{\partial y^8} \right) \Phi(x, y) = q , \end{aligned}$$

где $K_{ij} = K_{ij}^1 + K_{ij}^2 + K_{ij}^3$, $i, j=0,1,\dots,8$

$L_{31}u_0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
K_{80}^1 &= -\bar{B}_{11}R_{50} \\
K_{71}^1 &= -\bar{B}_{11}R_{41} - (B_{16} + 2B_{61})R_{50} \\
K_{62}^1 &= -\bar{B}_{11}R_{32} - (B_{16} + 2B_{61})R_{41} - (\bar{B}_{21} + \bar{B}_{66,11} + \bar{B}_{66,22})R_{50} \\
K_{53}^1 &= -\bar{B}_{11}R_{23} - (B_{16} + 2B_{61})R_{32} - (\bar{B}_{21} + \bar{B}_{66,11} + \bar{B}_{66,22})R_{41} - B_{26}R_{50} \\
K_{44}^1 &= -\bar{B}_{11}R_{14} - (B_{16} + 2B_{61})R_{23} - (\bar{B}_{21} + \bar{B}_{66,11} + \bar{B}_{66,22})R_{32} - B_{26}R_{41} \\
K_{35}^1 &= -\bar{B}_{11}R_{05} - (B_{16} + 2B_{61})R_{14} - (\bar{B}_{21} + \bar{B}_{66,11} + \bar{B}_{66,22})R_{23} - B_{26}R_{32} \\
K_{26}^1 &= - (B_{16} + 2B_{61})R_{05} - (\bar{B}_{21} + \bar{B}_{66,11} + \bar{B}_{66,22})R_{14} - B_{26}R_{23} \\
K_{17}^1 &= - (\bar{B}_{21} + \bar{B}_{66,11} + \bar{B}_{66,22})R_{05} - B_{26}R_{14} \\
K_{08}^1 &= - B_{26}R_{05}
\end{aligned}$$

$L_{32}v_0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
K_{80}^2 &= -B_{16}S_{50} \\
K_{71}^2 &= -B_{16}S_{41} - (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{66,11} + \bar{B}_{66,22})S_{50} \\
K_{62}^2 &= -B_{16}S_{32} - (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{66,11} + \bar{B}_{66,22})S_{41} - (B_{26} + 2B_{62})S_{50} \\
K_{53}^2 &= -B_{16}S_{23} - (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{66,11} + \bar{B}_{66,22})S_{32} - (B_{26} + 2B_{62})S_{41} - \bar{B}_{22}S_{50} \\
K_{44}^2 &= -B_{16}S_{14} - (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{66,11} + \bar{B}_{66,22})S_{23} - (B_{26} + 2B_{62})S_{32} - \bar{B}_{22}S_{41} \\
K_{35}^2 &= -B_{16}S_{05} - (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{66,11} + \bar{B}_{66,22})S_{14} - (B_{26} + 2B_{62})S_{23} - \bar{B}_{22}S_{32} \\
K_{26}^2 &= - (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{66,11} + \bar{B}_{66,22})S_{05} - (B_{26} + 2B_{62})S_{14} - \bar{B}_{22}S_{23} \\
K_{17}^2 &= - (B_{26} + 2B_{62})S_{05} - \bar{B}_{22}S_{14} \\
K_{08}^2 &= - \bar{B}_{22}S_{05}
\end{aligned}$$

$$L_{33}w \Rightarrow$$

$$K_{80}^3 = \bar{D}_{11}R_{40}$$

$$K_{71}^3 = \bar{D}_{11}R_{31} + 2(D_{16} + D_{61})R_{40}$$

$$K_{62}^3 = \bar{D}_{11}R_{22} + 2(D_{16} + D_{61})R_{31} + (\bar{D}_{12} + \bar{D}_{21} + 2\bar{D}_{66,11} + 2\bar{D}_{66,22})R_{40}$$

$$K_{53}^3 = \bar{D}_{11}R_{13} + 2(D_{16} + D_{61})R_{22} + (\bar{D}_{12} + \bar{D}_{21} + 2\bar{D}_{66,11} + 2\bar{D}_{66,22})R_{31} + \\ + 2(D_{26} + D_{62})R_{40}$$

$$K_{44}^3 = \bar{D}_{11}R_{04} + 2(D_{16} + D_{61})R_{13} + (\bar{D}_{12} + \bar{D}_{21} + 2\bar{D}_{66,11} + 2\bar{D}_{66,22})R_{22} + \\ + 2(D_{26} + D_{62})R_{31} + \\ + \bar{D}_{22}R_{40}$$

$$K_{35}^3 = 2(D_{16} + D_{61})R_{04} + (\bar{D}_{12} + \bar{D}_{21} + 2\bar{D}_{66,11} + 2\bar{D}_{66,22})R_{13} + \\ + 2(D_{26} + D_{62})R_{22} + \\ + \bar{D}_{22}R_{31}$$

$$K_{26}^3 = (\bar{D}_{12} + \bar{D}_{21} + 2\bar{D}_{66,11} + 2\bar{D}_{66,22})R_{04} + 2(D_{26} + D_{62})R_{13} + \\ + \bar{D}_{22}R_{22}$$

$$K_{17}^3 = 2(D_{26} + D_{62})R_{04} + \\ + \bar{D}_{22}R_{13}$$

$$K_{08}^3 = \bar{D}_{22}R_{04}$$

Коэффициенты $R_{5-i,b}$ $i=0,1,\dots,5$, $S_{5-i,b}$ $i=0,1,\dots,5$, $R_{4-i,b}$ $i=0,1,\dots,4$ в формулах связи и $K_{8-i,b}$ $i=0,1,\dots,8$ в разрешающем уравнении – постоянные величины, зависящие от упругих свойств материала и геометрических параметров конструкции.

2.3 ОБОБЩЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РАСЧЁТА КОНСТРУКТИВНО-АНИЗОТРОПНЫХ ПАНЕЛЕЙ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ И ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Математическая модель, построенная в рамках интегрального учёта закручивания стержней (раздел 2.2), является наименее точной при расчётах, но, с математической точки зрения, – наиболее общей, так как в символическом виде включает формулы

- математической модели эксцентрично подкреплённой композитной панели с тонкостенным стержнем с учётом деформации сдвига (раздел 2.1),

- математической модели гладкого композитного пакета несимметричной структуры (разделы 2.1, 2.2),

- математической модели эксцентрично подкреплённой металло-композитной панели и панели из изотропного материала с тонкостенным стержнем с учётом деформации сдвига ¹,

- математической модели эксцентрично подкреплённой металло-композитной панели и панели из изотропного материала при интегральном учёте закручивания стержней ¹.

Связь внутренних силовых факторов с искомыми перемещениями $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$ и $w(x, y)$ через деформации плоскости приведения и кривизны плоскости приведения в матричной форме:

¹ Гавва Л.М. Напряжённо-деформированное состояние и устойчивость конструктивно-анизотропных панелей как элементов летательных аппаратов: автореф. дис. канд. техн. наук: 05.07.03 / М. – 1983. – 24 с.

Тонкостенный анизотропный стержень с учётом деформации сдвига (2.41)

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ N_{yx} \\ M_x \\ M_y \\ H_{xy} \\ H_{yx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & A_{12} & A_{16} & \bar{B}_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & \bar{A}_{22} & A_{26} & B_{21} & \bar{B}_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ \bar{B}_{11} & B_{12} & B_{16} & \bar{D}_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & \bar{B}_{22} & B_{26} & D_{21} & \bar{D}_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & \bar{D}_{66,11} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & \bar{D}_{66,22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{N}_x^T \\ \bar{N}_y^T \\ N^T \\ N^T \\ \bar{M}_x^T \\ \bar{M}_y^T \\ \bar{H}_{xy}^T \\ \bar{H}_{yx}^T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{N}_x^H \\ \bar{N}_y^H \\ N^H \\ N^H \\ \bar{M}_x^H \\ \bar{M}_y^H \\ \bar{H}_{xy}^H \\ \bar{H}_{yx}^H \end{Bmatrix},$$

$$N_{yx} = N_{xy}, \quad H_{yx} \neq H_{xy}.$$

Обобщённые жесткостные характеристики панели из ПКМ, температурные усилия и моменты, усилия и моменты от предварительного натяжения волокон введены в разделе 2.1 формулами (2.16) – (2.27), (2.40).

Гладкая ПКМ-панель с несимметричной структурой пакета по толщине

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ N_{yx} = N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ H_{xy} \\ H_{yx} = H_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \\ M_x^T \\ M_y^T \\ H_{xy}^T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \\ M_x^H \\ M_y^H \\ H_{xy}^H \end{Bmatrix},$$

Обобщённые жесткостные характеристики панели, температурные усилия и моменты, усилия и моменты от предварительного натяжения волокон введены в

разделе 2.1 формулами (2.16) – (2.19), (2.40).

Интегральный учет закручивания стержней (2.47)

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ N_{yx} \\ M_x \\ M_y \\ H_{xy} \\ H_{yx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & A_{16} & \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} & B_{16} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & A_{26} & \bar{B}_{21} & \bar{B}_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & \bar{A}_{66,11} & B_{61} & B_{62} & \bar{B}_{66,11} \\ A_{61} & A_{62} & \bar{A}_{66,22} & B_{61} & B_{62} & \bar{B}_{66,22} \\ \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} & B_{16} & \bar{D}_{11} & D_{12} & D_{16} \\ \bar{B}_{21} & \bar{B}_{22} & B_{26} & D_{21} & \bar{D}_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & \bar{B}_{66,11} & D_{61} & D_{62} & \bar{D}_{66,11} \\ B_{61} & B_{62} & \bar{B}_{66,22} & D_{61} & D_{62} & \bar{D}_{66,22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{N}_x^T \\ \bar{N}_y^T \\ \bar{N}_{xy}^T \\ \bar{N}_{yx}^T \\ \bar{M}_x^T \\ \bar{M}_y^T \\ \bar{H}_{xy}^T \\ \bar{H}_{yx}^T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{N}_x^H \\ \bar{N}_y^H \\ \bar{N}_{xy}^H \\ \bar{N}_{yx}^H \\ \bar{M}_x^H \\ \bar{M}_y^H \\ \bar{H}_{xy}^H \\ \bar{H}_{yx}^H \end{Bmatrix},$$

$$N_{yx} \neq N_{xy}, \quad H_{yx} \neq H_{xy}.$$

Обобщённые жесткостные характеристики панели из ПКМ, температурные усилия и моменты, усилия и моменты от предварительного натяжения волокон введены в разделах 2.1, 2.2 формулами (2.16), (2.17), (2.20), (2.23), (2.48).

Связь компонентов вектора перемещений с функцией $\Phi(x,y)$ осуществляется по формулам (2.43),(2.44)

$$\left. \begin{aligned} u_0(x, y) &= \sum_{i=0,1,\dots}^5 R_{5-i,i} \frac{\partial^5 \Phi(x, y)}{\partial x^{5-i} \partial y^i} \\ v_0(x, y) &= \sum_{i=0,1,\dots}^5 S_{5-i,i} \frac{\partial^5 \Phi(x, y)}{\partial x^{5-i} \partial y^i} \\ w(x, y) &= \sum_{i=0,1,\dots}^4 R_{4-i,i} \frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial x^{4-i} \partial y^i} \end{aligned} \right\}$$

Связь внутренних силовых факторов (2.41), (2.47) с функцией $\Phi(x, y)$ на основании (2.43), (2.44) осуществляется по формулам:

$$\left. \begin{aligned}
 N_x(x, y) &= \sum_{i=0,1,2,\dots}^6 P_{6-i,i}^x \frac{\partial^6 \Phi(x, y)}{\partial x^{6-i} \partial y^i} - \bar{N}_x^T - \bar{N}_x^H \\
 N_{xy}(x, y) &= \sum_{i=0,1,2,\dots}^6 Q_{6-i,i}^x \frac{\partial^6 \Phi(x, y)}{\partial x^{6-i} \partial y^i} - \bar{N}_{xy}^T - \bar{N}_{xy}^H \\
 \bar{Q}_x(x, y) &= \sum_{i=0,1,2,\dots}^7 T_{7-i,i}^x \frac{\partial^7 \Phi(x, y)}{\partial x^{7-i} \partial y^i} \\
 M_x(x, y) &= \sum_{i=0,1,2,\dots}^6 R_{6-i,i}^x \frac{\partial^6 \Phi(x, y)}{\partial x^{6-i} \partial y^i} - \bar{M}_x^T - \bar{M}_x^H \\
 H_{xy}(x, y) &= \sum_{i=0,1,2,\dots}^6 S_{6-i,i}^x \frac{\partial^6 \Phi(x, y)}{\partial x^{6-i} \partial y^i} - \bar{H}_{xy}^T - \bar{H}_{xy}^H \\
 \\
 N_y(x, y) &= \sum_{i=0,1,2,\dots}^6 P_{6-i,i}^y \frac{\partial^6 \Phi(x, y)}{\partial x^{6-i} \partial y^i} - \bar{N}_y^T - \bar{N}_y^H \\
 N_{yx}(x, y) &= \sum_{i=0,1,2,\dots}^6 Q_{6-i,i}^y \frac{\partial^6 \Phi(x, y)}{\partial x^{6-i} \partial y^i} - \bar{N}_{yx}^T - \bar{N}_{yx}^H \\
 \bar{Q}_y(x, y) &= \sum_{i=0,1,2,\dots}^7 T_{7-i,i}^y \frac{\partial^7 \Phi(x, y)}{\partial x^{7-i} \partial y^i} \\
 M_y(x, y) &= \sum_{i=0,1,2,\dots}^6 R_{6-i,i}^y \frac{\partial^6 \Phi(x, y)}{\partial x^{6-i} \partial y^i} - \bar{M}_y^T - \bar{M}_y^H \\
 H_{yx}(x, y) &= \sum_{i=0,1,2,\dots}^6 S_{6-i,i}^y \frac{\partial^6 \Phi(x, y)}{\partial x^{6-i} \partial y^i} - \bar{H}_{yx}^T - \bar{H}_{yx}^H
 \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

Уравнение равновесия (2.45):

$$\sum_{i=0,1,2,\dots}^8 K_{8-i,i} \frac{\partial^8 \Phi(x, y)}{\partial x^{8-i} \partial y^i} = q$$

Постоянные коэффициенты (2.45), (2.49) приведены в разделе 2.4 для ПКМ-панели ортотропной структуры.

Уточнённые расчётные модели обобщены для класса плоских прямоугольных конструктивно-анизотропных панелей:

- изготовленных из полимерных волокнистых композиционных материалов, эксцентрично подкреплённых стержнями двух направлений, расположенными параллельно сторонам опорного контура;
- гладких, без подкреплений, из высокомодульных композиционных материалов, обладающих анизотропией вследствие несимметрии свойств структуры многослойного пакета по толщине;
- эксцентрично подкреплённых стержнями двух направлений, расположенными параллельно сторонам опорного контура, изготовленных из изотропных материалов;
- эксцентрично подкреплённых стержнями двух направлений, расположенными параллельно сторонам опорного контура, изготовленных из изотропных материалов с усилением рёбер жёсткости композитными жгутами.

2.4 ПЛОСКАЯ ПРЯМОУГОЛЬНАЯ КОМПОЗИТНАЯ ПАНЕЛЬ ОРТОТРОПНОЙ СТРУКТУРЫ

Если структура панели из ПКМ ортотропна, обобщённые жесткости $A_{16} = A_{61} = A_{26} = A_{62} = 0$, жесткостями $B_{16}, B_{61}, B_{26}, B_{62}, D_{16}, D_{61}, D_{26}, D_{62}$ можно пренебречь по сравнению с остальными жесткостными характеристиками. В формулах связи (2.44) компонентов вектора перемещений с потенциальной функцией $\Phi(x, y)$, в уравнении равновесия (2.45) пропадут коэффициенты

$$\left. \begin{aligned} R_{41} = R_{23} = R_{05} = 0 \\ S_{50} = S_{32} = S_{14} = 0 \\ R_{31} = R_{13} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} P_{51}^x = P_{33}^x = P_{15}^x = 0 \\ Q_{60}^x = Q_{42}^x = Q_{24}^x = Q_{06}^x = 0 \\ R_{51}^x = R_{33}^x = R_{15}^x = 0 \\ S_{60}^x = S_{42}^x = S_{24}^x = S_{06}^x = 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} P_{51}^y = P_{33}^y = P_{15}^y = 0 \\ Q_{60}^y = Q_{42}^y = Q_{24}^y = Q_{06}^y = 0 \\ R_{51}^y = R_{33}^y = R_{15}^y = 0 \\ S_{60}^y = S_{42}^y = S_{24}^y = S_{06}^y = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

$$K_{71} = K_{53} = K_{35} = K_{17} = 0$$

2.4.1 Компоненты вектора перемещений

Формулы связи компонентов вектора перемещений $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$, $w(x, y)$ с обобщённой функцией перемещений $\Phi(x, y)$ (2.44) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} u_0(x, y) &= \left(R_{50} \frac{\partial^5}{\partial x^5} + R_{32} \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2} + R_{14} \frac{\partial^5}{\partial x \partial y^4} \right) \Phi(x, y) \\ v_0(x, y) &= \left(S_{41} \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial y} + S_{23} \frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} + S_{15} \frac{\partial^5}{\partial y^5} \right) \Phi(x, y) \\ w(x, y) &= \left(R_{40} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + R_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + R_{04} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \Phi(x, y) \end{aligned} \right\}, \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned}
R_{50} &= \bar{A}_{66,11} \bar{B}_{11} \\
R_{32} &= \bar{A}_{22} \bar{B}_{11} + \bar{A}_{66,11} (\bar{B}_{12} + 2\bar{B}_{66,22}) - (\bar{A}_{12} + \bar{A}_{66,22}) (\bar{B}_{21} + 2\bar{B}_{66,11}) \\
R_{14} &= \bar{A}_{22} (\bar{B}_{12} + 2\bar{B}_{66,22}) - (\bar{A}_{12} + \bar{A}_{66,22}) \bar{B}_{22} \\
\\
S_{41} &= \bar{A}_{11} (\bar{B}_{21} + 2\bar{B}_{66,11}) - (\bar{A}_{21} + \bar{A}_{66,11}) \bar{B}_{11} \\
S_{23} &= \bar{A}_{11} \bar{B}_{22} + \bar{A}_{66,22} (\bar{B}_{21} + 2\bar{B}_{66,11}) - (\bar{A}_{21} + \bar{A}_{66,11}) (\bar{B}_{21} + 2\bar{B}_{66,22}) \\
S_{05} &= \bar{A}_{66,22} \bar{B}_{22} \\
\\
R_{40} &= \bar{A}_{11} \bar{A}_{66,11} \\
R_{22} &= \bar{A}_{11} \bar{A}_{22} + \bar{A}_{66,11} \bar{A}_{66,22} - (\bar{A}_{12} + \bar{A}_{66,22}) (\bar{A}_{21} + \bar{A}_{66,11}) \\
R_{04} &= \bar{A}_{22} \bar{A}_{66,22}
\end{aligned}$$

При построении математической модели для эксцентрично подкреплённой композитной панели ортотропной структуры с тонкостенным стержнем с учётом деформации сдвига (раздел 2.1) обобщённые жесткостные характеристики в формулах связи (2.51) следует вводить в соответствии с формулами (2.16), (2.18), (2.20) – (2.22), (2.24) – (2.26), (2.33), (2.34), (2.39), (2.40), (2.41).

2.4.2 Внутренние силовые факторы

Формулы связи внутренних силовых факторов $N_x(x, y)$, $N_{xy}(x, y)$, $\bar{Q}_x(x, y)$, $M_x(x, y)$, $H_{xy}(x, y)$, $N_y(x, y)$, $N_{yx}(x, y)$, $\bar{Q}_y(x, y)$, $M_y(x, y)$, $H_{yx}(x, y)$

с обобщённой функцией перемещений $\Phi(x, y)$ (2.49) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned}
 N_x(x, y) &= \left(P_{60}^x \frac{\partial^6}{\partial x^6} + P_{42}^x \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + P_{24}^x \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} + P_{06}^x \frac{\partial^6}{\partial y^6} \right) \Phi(x, y) - \bar{N}_x^T - \bar{N}_x^H \\
 N_{xy}(x, y) &= \left(Q_{51}^x \frac{\partial^6}{\partial x^5 \partial y} + Q_{33}^x \frac{\partial^6}{\partial x^3 \partial y^3} + Q_{15}^x \frac{\partial^6}{\partial x \partial y^5} \right) \Phi(x, y) - \bar{N}_{xy}^T - \bar{N}_{xy}^H \\
 \bar{Q}_x(x, y) &= \left(T_{70}^x \frac{\partial^7}{\partial x^7} + T_{52}^x \frac{\partial^7}{\partial x^5 \partial y^2} + T_{34}^x \frac{\partial^7}{\partial x^3 \partial y^4} + T_{16}^x \frac{\partial^7}{\partial x \partial y^6} \right) \Phi(x, y) \\
 M_x(x, y) &= \left(R_{60}^x \frac{\partial^6}{\partial x^6} + R_{42}^x \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + R_{24}^x \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} + R_{06}^x \frac{\partial^6}{\partial y^6} \right) \Phi(x, y) - \bar{M}_x^T - \bar{M}_x^H \\
 H_{xy}(x, y) &= \left(S_{51}^x \frac{\partial^6}{\partial x^5 \partial y} + S_{33}^x \frac{\partial^6}{\partial x^3 \partial y^3} + S_{15}^x \frac{\partial^6}{\partial x \partial y^5} \right) \Phi(x, y) - \bar{H}_{xy}^T - \bar{H}_{xy}^H \\
 \\
 N_y(x, y) &= \left(P_{60}^y \frac{\partial^6}{\partial x^6} + P_{42}^y \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + P_{24}^y \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} + P_{06}^y \frac{\partial^6}{\partial y^6} \right) \Phi(x, y) - \bar{N}_y^T - \bar{N}_y^H \\
 N_{yx}(x, y) &= \left(Q_{51}^y \frac{\partial^6}{\partial x^5 \partial y} + Q_{33}^y \frac{\partial^6}{\partial x^3 \partial y^3} + Q_{15}^y \frac{\partial^6}{\partial x \partial y^5} \right) \Phi(x, y) - \bar{N}_{yx}^T - \bar{N}_{yx}^H \\
 \bar{Q}_y(x, y) &= \left(T_{61}^y \frac{\partial^7}{\partial x^6 \partial y} + T_{43}^y \frac{\partial^7}{\partial x^4 \partial y^3} + T_{25}^y \frac{\partial^7}{\partial x^2 \partial y^5} + T_{07}^y \frac{\partial^7}{\partial y^7} \right) \Phi(x, y) \\
 M_y(x, y) &= \left(R_{60}^y \frac{\partial^6}{\partial x^6} + R_{42}^y \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + R_{24}^y \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} + R_{06}^y \frac{\partial^6}{\partial y^6} \right) \Phi(x, y) - \bar{M}_y^T - \bar{M}_y^H \\
 H_{yx}(x, y) &= \left(S_{51}^y \frac{\partial^6}{\partial x^5 \partial y} + S_{33}^y \frac{\partial^6}{\partial x^3 \partial y^3} + S_{15}^y \frac{\partial^6}{\partial x \partial y^5} \right) \Phi(x, y) - \bar{H}_{yx}^T - \bar{H}_{yx}^H
 \end{aligned} \right\} (2.52)$$

$$\begin{array}{ll}
 P_{60}^x = \bar{A}_{11} R_{50} & - \bar{B}_{11} R_{40} & P_{60}^y = \bar{A}_{21} R_{50} & - \bar{B}_{21} R_{40} \\
 P_{42}^x = \bar{A}_{11} R_{32} + \bar{A}_{12} S_{41} & - \bar{B}_{11} R_{22} - \bar{B}_{12} R_{40} & P_{42}^y = \bar{A}_{21} R_{32} + \bar{A}_{22} S_{41} & - \bar{B}_{21} R_{22} - \bar{B}_{22} R_{40} \\
 P_{24}^x = \bar{A}_{11} R_{14} + \bar{A}_{12} S_{23} & - \bar{B}_{11} R_{04} - \bar{B}_{12} R_{22} & P_{24}^y = \bar{A}_{21} R_{14} + \bar{A}_{22} S_{23} & - \bar{B}_{21} R_{04} - \bar{B}_{22} R_{22} \\
 P_{06}^x = & + \bar{A}_{12} S_{05} & - \bar{B}_{12} R_{04} & P_{06}^y = & + \bar{A}_{22} S_{05} & - \bar{B}_{22} R_{04}
 \end{array}$$

$$Q_{51}^x = \bar{A}_{66,11} (R_{50} + S_{41}) - 2\bar{B}_{66,11} R_{40}$$

$$Q_{33}^x = \bar{A}_{66,11} (R_{32} + S_{23}) - 2\bar{B}_{66,11} R_{22}$$

$$Q_{15}^x = \bar{A}_{66,11} (R_{14} + S_{05}) - 2\bar{B}_{66,11} R_{04}$$

$$Q_{51}^y = \bar{A}_{66,22} (R_{50} + S_{41}) - 2\bar{B}_{66,22} R_{40}$$

$$Q_{33}^y = \bar{A}_{66,22} (R_{32} + S_{23}) - 2\bar{B}_{66,22} R_{22}$$

$$Q_{15}^y = \bar{A}_{66,22} (R_{14} + S_{05}) - 2\bar{B}_{66,22} R_{04}$$

$$R_{60}^x = \bar{B}_{11} R_{50} - \bar{D}_{11} R_{40}$$

$$R_{42}^x = \bar{B}_{11} R_{32} + \bar{B}_{12} S_{41} - \bar{D}_{11} R_{22} - \bar{D}_{12} R_{40}$$

$$R_{24}^x = \bar{B}_{11} R_{14} + \bar{B}_{12} S_{23} - \bar{D}_{11} R_{04} - \bar{D}_{12} R_{22}$$

$$R_{06}^x = \bar{B}_{12} S_{05} - \bar{D}_{12} R_{04}$$

$$R_{60}^y = \bar{B}_{21} R_{50} - \bar{D}_{21} R_{40}$$

$$R_{42}^y = \bar{B}_{21} R_{32} + \bar{B}_{22} S_{41} - \bar{D}_{21} R_{22} - \bar{D}_{22} R_{40}$$

$$R_{24}^y = \bar{B}_{21} R_{14} + \bar{B}_{22} S_{23} - \bar{D}_{21} R_{04} - \bar{D}_{22} R_{22}$$

$$R_{06}^y = \bar{B}_{22} S_{05} - \bar{D}_{22} R_{04}$$

$$S_{51}^x = \bar{B}_{66,11} (R_{50} + S_{41}) - 2\bar{D}_{66,11} R_{40}$$

$$S_{33}^x = \bar{B}_{66,11} (R_{32} + S_{23}) - 2\bar{D}_{66,11} R_{22}$$

$$S_{15}^x = \bar{B}_{66,11} (R_{14} + S_{05}) - 2\bar{D}_{66,11} R_{04}$$

$$S_{51}^y = \bar{B}_{66,22} (R_{50} + S_{41}) - 2\bar{D}_{66,22} R_{40}$$

$$S_{33}^y = \bar{B}_{66,22} (R_{32} + S_{23}) - 2\bar{D}_{66,22} R_{22}$$

$$S_{15}^y = \bar{B}_{66,22} (R_{14} + S_{05}) - 2\bar{D}_{66,22} R_{04}$$

$$\bar{N}_x^T = \bar{A}_{11}^T + \bar{A}_{12}^T$$

$$\bar{N}_{xy}^T = \bar{A}_{66}^{Tx}$$

$$\bar{M}_x^T = \bar{B}_{11}^T + \bar{B}_{12}^T$$

$$\bar{H}_{xy}^T = \bar{B}_{66}^{Tx}$$

$$\bar{N}_y^T = \bar{A}_{21}^T + \bar{A}_{22}^T$$

$$\bar{N}_{yx}^T = \bar{A}_{66}^{Ty}$$

$$\bar{M}_y^T = \bar{B}_{21}^T + \bar{B}_{22}^T$$

$$\bar{H}_{yx}^T = \bar{B}_{66}^{Ty}$$

$$\bar{N}_x^H = \bar{A}_{11}^H + \bar{A}_{12}^H$$

$$\bar{N}_{xy}^H = \bar{A}_{66}^H$$

$$\bar{M}_x^H = \bar{B}_{11}^H + \bar{B}_{12}^H$$

$$\bar{H}_{xy}^H = \bar{B}_{66}^{Hy}$$

$$\bar{N}_y^H = \bar{A}_{21}^H + \bar{A}_{22}^H$$

$$\bar{N}_{yx}^H = \bar{A}_{66}^{Hy}$$

$$\bar{M}_y^H = \bar{B}_{21}^H + \bar{B}_{22}^H$$

$$\bar{H}_{yx}^H = \bar{B}_{66}^{Hy}$$

При построении математической модели для эксцентрично подкреплённой композитной панели ортотропной структуры с тонкостенным стержнем с учётом деформации сдвига (раздел 2.1) обобщённые жесткостные характеристики, температурные усилия и моменты, усилия и моменты от предварительного

натяжения волокон в формулах связи (2.52) следует вводить в соответствии с формулами (2.16) – (2.27), (2.33), (2.34), (2.39), (2.40), (2.41).

2.4.3 Уравнение равновесия

Разрешающим уравнением задачи является неоднородное линейное дифференциальное уравнение в частных производных восьмого порядка относительно искомой потенциальной функции $\Phi(x,y)$, линейный дифференциальный оператор которого содержит производные чётной степени по каждой из координат

$$K_{80} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^8} + K_{62} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^6 \partial y^2} + K_{44} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^4 \partial y^4} + K_{26} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^2 \partial y^6} + K_{08} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial y^8} = q \quad (2.53)$$

$$K_{80} = -\bar{B}_{11} R_{50} + \bar{D}_{11} R_{40}$$

$$K_{62} = -\bar{B}_{11} R_{32} - (\bar{B}_{21} + \bar{B}_{66,11} + \bar{B}_{66,22}) R_{50} - (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{66,11} + \bar{B}_{66,22}) S_{41} + \bar{D}_{11} R_{22} + (\bar{D}_{12} + \bar{D}_{21} + 2\bar{D}_{66,11} + 2\bar{D}_{66,22}) R_{40}$$

$$K_{44} = -\bar{B}_{11} R_{14} - (\bar{B}_{21} + \bar{B}_{66,11} + \bar{B}_{66,22}) R_{32} - (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{66,11} + \bar{B}_{66,22}) S_{23} - \bar{B}_{22} S_{41} + \bar{D}_{11} R_{04} + (\bar{D}_{12} + \bar{D}_{21} + 2\bar{D}_{66,11} + 2\bar{D}_{66,22}) R_{22} + \bar{D}_{22} R_{40}$$

$$K_{26} = -(\bar{B}_{21} + \bar{B}_{66,11} + \bar{B}_{66,22}) R_{14} - (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{66,11} + \bar{B}_{66,22}) S_{05} - \bar{B}_{22} S_{23} + (\bar{D}_{12} + \bar{D}_{21} + 2\bar{D}_{66,11} + 2\bar{D}_{66,22}) R_{04} + \bar{D}_{22} R_{22}$$

$$K_{08} = -\bar{B}_{22} S_{05} + \bar{D}_{22} R_{04}$$

При построении математической модели для эксцентрично подкреплённой композитной панели ортотропной структуры с тонкостенным стержнем с учётом деформации сдвига (раздел 2.1) обобщённые жесткостные характеристики в уравнении равновесия (2.53) следует вводить в соответствии с формулами (2.16), (2.18), (2.20) – (2.22), (2.24) – (2.26), (2.33), (2.34), (2.39), (2.40), (2.41).

2.4.4 Уравнение равновесия с учётом краевых эффектов

Построены и приведены соотношения математических моделей для исследования влияния краевых эффектов типа «погранслоя» на медленно меняющееся основное напряжённо-деформированное состояние конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов и конструктивно-анизотропных панелей из изотропных материалов с усилением элементов набора композитными жгутами.

С математической точки зрения проблема исследования общего НДС конструктивно-анизотропных панелей, трактуемых как ортотропные, сводится к решению краевых задач в прямоугольной области для неоднородного линейного дифференциального уравнения восемнадцатого порядка в частных производных относительно искомой потенциальной функции $\Phi(x,y)$.

Если принимаются во внимание нормальные напряжения, связанные с изгибом рёбер жёсткости в плоскости обшивки и депланацией поперечных сечений при закручивании, разрешающее уравнение задачи представляет собой неоднородное линейное дифференциальное уравнение в частных производных относительно потенциальной функции $\Phi(x,y)$, линейный дифференциальный оператор которого содержит производные чётной степени по каждой из координат. Наибольший порядок смешанных производных – восемнадцатый,

максимальный порядок производных по x или y – двенадцатый:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ K_{108} \frac{\partial^{18}}{\partial x^{10} \partial y^8} + K_{810} \frac{\partial^{18}}{\partial x^8 \partial y^{10}} + \right. \\
 & + K_{124} \frac{\partial^{16}}{\partial x^{12} \partial y^4} + K_{106} \frac{\partial^{16}}{\partial x^{10} \partial y^6} + K_{88} \frac{\partial^{16}}{\partial x^8 \partial y^8} + K_{610} \frac{\partial^{16}}{\partial x^6 \partial y^{10}} + K_{412} \frac{\partial^{16}}{\partial x^4 \partial y^{12}} \\
 & + K_{122} \frac{\partial^{14}}{\partial x^{12} \partial y^2} + K_{104} \frac{\partial^{14}}{\partial x^{10} \partial y^4} + K_{86} \frac{\partial^{14}}{\partial x^8 \partial y^6} + K_{68} \frac{\partial^{14}}{\partial x^6 \partial y^8} + K_{410} \frac{\partial^{14}}{\partial x^4 \partial y^{10}} + K_{212} \frac{\partial^{14}}{\partial x^2 \partial y^{12}} + \\
 & + K_{120} \frac{\partial^{12}}{\partial x^{12}} + K_{102} \frac{\partial^{12}}{\partial x^{10} \partial y^2} + K_{84} \frac{\partial^{12}}{\partial x^8 \partial y^4} + K_{66} \frac{\partial^{12}}{\partial x^6 \partial y^6} + K_{48} \frac{\partial^{12}}{\partial x^4 \partial y^8} + K_{210} \frac{\partial^{12}}{\partial x^2 \partial y^{10}} + \\
 & \qquad \qquad \qquad + K_{012} \frac{\partial^{12}}{\partial y^{12}} + \\
 & + K_{100} \frac{\partial^{10}}{\partial x^{10}} + K_{82} \frac{\partial^{10}}{\partial x^8 \partial y^2} + K_{64} \frac{\partial^{10}}{\partial x^6 \partial y^4} + K_{46} \frac{\partial^{10}}{\partial x^4 \partial y^6} + K_{28} \frac{\partial^{10}}{\partial x^2 \partial y^8} + \\
 & \qquad \qquad \qquad + K_{010} \frac{\partial^{10}}{\partial y^{10}} + \\
 & + K_{80} \frac{\partial^8}{\partial x^8} + K_{62} \frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + K_{44} \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + K_{26} \frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} + \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + K_{08} \frac{\partial^8}{\partial y^8} \right\} \Phi(x, y) = q
 \end{aligned}
 \tag{2.54}$$

Общее НДС, включая краевые эффекты и основное НДС, определяется решением краевых задач и анализируется в рамках разрешающего уравнения (2.54). Коэффициенты уравнения (2.54) $K_{12-i,i}, i=0,2,4,6,\dots,12$ зависят от упругих и геометрических параметров конструкции.

Ниже, в главе 4, приводятся результаты выполненного численного анализа краевых задач, сформулированных согласно уточнённой теории для уравнений (2.53) и (2.54). Разрешающие уравнения восемнадцатого (2.54) и восьмого (2.53) порядков построены с различной степенью уточнения моделей при закручивании рёбер жёсткости, находящихся в условиях одностороннего контакта с обшивкой. В рамках общего НДС подкрепляющие рёбра работают на растяжение – сжатие,

изгиб из плоскости панели, изгиб в плоскости панели и кручение. В рамках основного НДС подкрепляющие рёбра работают на растяжение – сжатие, изгиб из плоскости панели и кручение. Нормальными напряжениями, вызванными изгибом набора в плоскости обшивки и депланацией поперечных сечений, пренебрегаем.

Все слагаемые, входящие в левую часть уравнения (2.54) и представляющие собой производные более высокого порядка, чем восьмой, соответствуют краевым эффектам при исследовании напряжённо-деформированного состояния, весьма быстро затухающим от краёв. Краевые эффекты существенны, если рассматривать НДС панели типа "погранслои" в зоне граничных кромок.

Проанализировано влияние конструктивных параметров на уровень перемещений и напряжений. Обоснована возможность упрощения математических моделей с целью использования результатов в практике проектирования конструктивно-анизотропных панелей с применением композиционных материалов для перспективных изделий авиационной техники.

**ГЛАВА 3 МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
КОНСТРУКТИВНО-АНИЗОТРОПНЫХ ПАНЕЛЕЙ
ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ
С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ОБЩЕГО ВИДА**

3.1 Постановка краевой задачи

С математической точки зрения проблема исследования напряжённо-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей, трактуемых как ортотропные, сводится к решению краевой задачи в прямоугольной области для неоднородного линейного дифференциального уравнения восьмого порядка в частных производных относительно искомой потенциальной функции $\Phi(x, y)$ []

$$L^{(8)}\Phi = q. \quad (3.1)$$

Линейный дифференциальный оператор (3.1) содержит производные чётной степени по каждой из координат:

$$L^{(8)} = \frac{K_{80}}{a^8} \frac{\partial^8}{\partial x^8} + \frac{K_{62}}{a^6 b^2} \frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{K_{44}}{a^4 b^4} \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + \frac{K_{26}}{a^2 b^6} \frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{K_{08}}{b^8} \frac{\partial^8}{\partial y^8}.$$

Линейные дифференциальные операторы связи кинематических и статических компонентов НДС с разрешающей потенциальной функцией $\Phi(x, y)$

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= L_{u_0} \Phi \\ v_0 &= L_{v_0} \Phi \\ w &= L_w \Phi \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} N_x &= L_{N_x} \Phi - N_x^T - N_x^H \\ N_{xy} &= L_{N_{xy}} \Phi - N_{xy}^T - N_{xy}^H \\ \bar{Q}_x &= L_{\bar{Q}_x} \Phi \\ M_x &= L_{M_x} \Phi - M_x^T - M_x^H \\ H_{xy} &= L_{H_{xy}} \Phi - H_{xy}^T - H_{xy}^H \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} N_y &= L_{N_y} \Phi - N_y^T - N_y^H \\ N_{yx} &= L_{N_{yx}} \Phi - N_{yx}^T - N_{yx}^H \\ \bar{Q}_y &= L_{\bar{Q}_y} \Phi \\ M_y &= L_{M_y} \Phi - M_y^T - M_y^H \\ H_{yx} &= L_{H_{yx}} \Phi - H_{yx}^T - H_{yx}^H \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

ИМЕЮТ ВИД:

$$\begin{aligned}
 L_{u_0} &= \frac{R_{50}}{a^5} \frac{\partial^5}{\partial x^5} + \frac{R_{32}}{a^3 b^2} \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2} + \frac{R_{14}}{a b^4} \frac{\partial^5}{\partial x \partial y^4} \\
 L_{v_0} &= \frac{S_{41}}{a^4 b} \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial y} + \frac{S_{23}}{a^2 b^3} \frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} + \frac{S_{05}}{b^5} \frac{\partial^5}{\partial y^5} \\
 L_w &= \frac{R_{40}}{a^4} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{R_{22}}{a^2 b^2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{R_{04}}{b^4} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \\
 L_{N_x} &= \frac{P_{60}^x}{a^6} \frac{\partial^6}{\partial x^6} + \frac{P_{42}^x}{a^4 b^2} \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{P_{24}^x}{a^2 b^4} \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{P_{06}^x}{b^6} \frac{\partial^6}{\partial y^6} \\
 L_{N_{xy}} &= \frac{Q_{51}^x}{a^5 b} \frac{\partial^6}{\partial x^5 \partial y} + \frac{Q_{33}^x}{a^3 b^3} \frac{\partial^6}{\partial x^3 \partial y^3} + \frac{Q_{15}^x}{a b^5} \frac{\partial^6}{\partial x \partial y^5} \\
 L_{\bar{Q}_x} &= \frac{T_{70}^x}{a^7} \frac{\partial^7}{\partial x^7} + \frac{T_{52}^x}{a^5 b^2} \frac{\partial^7}{\partial x^5 \partial y^2} + \frac{T_{34}^x}{a^3 b^4} \frac{\partial^7}{\partial x^3 \partial y^4} + \frac{T_{16}^x}{a b^6} \frac{\partial^7}{\partial x \partial y^6} \\
 L_{M_x} &= \frac{R_{60}^x}{a^6} \frac{\partial^6}{\partial x^6} + \frac{R_{42}^x}{a^4 b^2} \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{R_{24}^x}{a^2 b^4} \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{R_{06}^x}{b^6} \frac{\partial^6}{\partial y^6} \\
 L_{H_{xy}} &= \frac{S_{51}^x}{a^5 b} \frac{\partial^6}{\partial x^5 \partial y} + \frac{S_{33}^x}{a^3 b^3} \frac{\partial^6}{\partial x^3 \partial y^3} + \frac{S_{15}^x}{a b^5} \frac{\partial^6}{\partial x \partial y^5} \quad ,
 \end{aligned}$$

$L_{N_y}, L_{N_{yx}}, L_{\bar{Q}_y}, L_{M_y}, L_{H_{yx}}$ строятся аналогично $L_{N_x}, L_{N_{xy}}, L_{\bar{Q}_x}, L_{M_x}, L_{H_{xy}}$ с заменой коэффициентов с индексом « x » на коэффициенты с индексом « y »; дифференциальные операторы $L_{N_y}, L_{N_{yx}}, L_{M_y}, L_{H_{yx}}$ - шестого порядка, дифференциальный оператор $L_{\bar{Q}_y}$ - седьмого порядка;

$N_x^T, N_y^T, N_{xy}^T, N_{yx}^T, M_x^T, M_y^T, H_{xy}^T, H_{yx}^T$ – температурные усилия и моменты, $N_x^H, N_y^H, N_{xy}^H, N_{yx}^H, M_x^H, M_y^H, H_{xy}^H, H_{yx}^H$ – усилия и моменты от натяжения. Здесь знак верхней черты опущен.

Коэффициенты $K_{8-i,i}$, $i = 0, 2, 4, 6, 8$ в разрешающем уравнении (3.1) и коэффициенты, $R_{5-i,i}$ $i = 0, 2, 4$, $S_{5-i,i}$ $i = 1, 3, 5$, $R_{4-i,i}$ $i = 0, 2, 4$ и т.д. в формулах связи (3.2) – постоянные величины, которые зависят от упругих свойств материала и геометрических параметров конструкции; $x = x/a$, $y = y/b$ – безразмерные

координаты, отнесённые к полудлине a и к ширине панели b , соответственно.

Линейные дифференциальные операторы связи (3.2) для симметричных компонентов НДС так же, как и линейный дифференциальный оператор разрешающего уравнения (3.1), содержат производные чётной степени по каждой из координат. Косо-симметричные компоненты НДС определяются нечётными производными.

Краевая задача общего вида в прямоугольной области представлена условиями упругой заделки

при

$$x = const \quad (\gamma_1 u_0 + \delta_1 N_x) = (\gamma_2 v_0 + \delta_2 N_{xy}) = (\gamma_3 w + \delta_3 \bar{Q}_x) = (\gamma_4 w'_x + \delta_4 M_x) = 0 \quad (3.3)$$

$$y = const \quad (\alpha_1 u_0 + \beta_1 N_{yx}) = (\alpha_2 v_0 + \beta_2 N_y) = (\alpha_3 w + \beta_3 \bar{Q}_y) = (\alpha_4 w'_y + \beta_4 M_y) = 0, \quad (3.4)$$

коэффициенты $\gamma_i, \delta_i, \alpha_i, \beta_i, i = 1, 2, 3, 4$ меняются от 0 до 1.

Равенства (3.3), (3.4) позволяют рассмотреть все возможные варианты закрепления граничных кромок в отношении связанных плоской задачи и задачи изгиба: защемление, скользящую заделку, шарнирное опирание, свободный край.

Влияние остаточных температурных напряжений, имеющих место при охлаждении после завершения процесса отверждения, а также предварительного натяжения армирующих волокон на несущую способность конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов представляется возможным оценить в том случае, когда граничные условия являются несогласованными, а решение строится в одинарных тригонометрических рядах либо с использованием метода однородных решений.

Конкретные исследования связаны с условиями закрепления панелей в составе проектируемой конструкции (Таблицы 1, 2).

Таблица 1 – Коэффициенты упругой заделки и граничные условия панели при $x=const$

№	Коэффициенты упругой заделки при $x=const$	Граничные условия	Плоская задача	Изгиб
1	$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0$	$u_0 = v_0 = w = w'_x = 0$	1	1
2	$\delta_1 = \delta_2 = \gamma_3 = \delta_4 = 0$	$u_0 = v_0 = w'_x = \bar{Q}_x = 0$	1	2
3	$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \gamma_4 = 0$	$u_0 = v_0 = w = M_x = 0$	1	3
4	$\delta_1 = \delta_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$	$u_0 = v_0 = M_x = \bar{Q}_x = 0$	1	4
5	$\gamma_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0$	$v_0 = N_x = w = w'_x = 0$	2	1
6	$\gamma_1 = \delta_2 = \gamma_3 = \delta_4 = 0$	$v_0 = N_x = w'_x = \bar{Q}_x = 0$	2	2
7	$\gamma_1 = \delta_2 = \delta_3 = \gamma_4 = 0$	$v_0 = N_x = w = M_x = 0$	2	3
8	$\gamma_1 = \delta_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$	$v_0 = N_x = M_x = \bar{Q}_x = 0$	2	4
9	$\delta_1 = \gamma_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0$	$u_0 = N_{xy} = w = w'_x = 0$	3	1
10	$\delta_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \delta_4 = 0$	$u_0 = N_{xy} = w'_x = \bar{Q}_x = 0$	3	2
11	$\delta_1 = \gamma_2 = \delta_3 = \gamma_4 = 0$	$u_0 = N_{xy} = w = M_x = 0$	3	3
12	$\delta_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$	$u_0 = N_{xy} = M_x = \bar{Q}_x = 0$	3	4
13	$\gamma_1 = \gamma_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0$	$N_x = N_{xy} = w = w'_x = 0$	4	1
14	$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \delta_4 = 0$	$N_x = N_{xy} = w'_x = \bar{Q}_x = 0$	4	2
15	$\gamma_1 = \gamma_2 = \delta_3 = \gamma_4 = 0$	$N_x = N_{xy} = w = M_x = 0$	4	3
16	$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$	$N_x = N_{xy} = M_x = \bar{Q}_x = 0$	4	4

1 – заделка

2 – скользящая заделка

3 – шарнир

4 – свободный край

Таблица 2 – Коэффициенты упругой заделки и граничные условия панели при $y=const$

№	Коэффициенты упругой заделки при $y=const$	Граничные условия	Плоская задача	Изгиб
1	$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$	$u_0 = v_0 = w = w'_y = 0$	1	1
2	$\beta_1 = \beta_2 = \alpha_3 = \beta_4 = 0$	$u_0 = v_0 = w'_y = \bar{Q}_y = 0$	1	2
3	$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \alpha_4 = 0$	$u_0 = v_0 = w = M_y = 0$	1	3
4	$\beta_1 = \beta_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$	$u_0 = v_0 = M_y = \bar{Q}_y = 0$	1	4
5	$\beta_1 = \alpha_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$	$u_0 = N_y = w = w'_y = 0$	2	1
6	$\beta_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_4 = 0$	$u_0 = N_y = w'_y = \bar{Q}_y = 0$	2	2
7	$\beta_1 = \alpha_2 = \beta_3 = \alpha_4 = 0$	$u_0 = N_y = w = M_y = 0$	2	3
8	$\beta_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$	$u_0 = N_y = M_y = \bar{Q}_y = 0$	2	4
9	$\alpha_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$	$v_0 = N_{yx} = w = w'_y = 0$	3	1
10	$\alpha_1 = \beta_2 = \alpha_3 = \beta_4 = 0$	$v_0 = N_{yx} = w'_y = \bar{Q}_y = 0$	3	2
11	$\alpha_1 = \beta_2 = \beta_3 = \alpha_4 = 0$	$v_0 = N_{yx} = w = M_y = 0$	3	3
12	$\alpha_1 = \beta_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$	$v_0 = N_{yx} = M_y = \bar{Q}_y = 0$	3	4
13	$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$	$N_y = N_{yx} = w = w'_y = 0$	4	1
14	$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_4 = 0$	$N_y = N_{yx} = w'_y = \bar{Q}_y = 0$	4	2
15	$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_3 = \alpha_4 = 0$	$N_y = N_{yx} = w = M_y = 0$	4	3
16	$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$	$N_y = N_{yx} = M_y = \bar{Q}_y = 0$	4	4

1 – заделка

2 – скользящая заделка

3 – шарнир

4 – свободный край

3.2 Построение точного общего решения для согласованных граничных условий на части контура

Решение краевых задач в прямоугольной области для уравнения (3.1)

$$L^{(8)}\Phi = q \quad (3.5)$$

с линейным дифференциальным оператором, который содержит производные чётной степени по каждой из координат

$$L^{(8)} = \frac{K_{80}}{a^8} \frac{\partial^8}{\partial x^8} + \frac{K_{62}}{a^6 b^2} \frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{K_{44}}{a^4 b^4} \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + \frac{K_{26}}{a^2 b^6} \frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{K_{08}}{b^8} \frac{\partial^8}{\partial y^8},$$

построено в замкнутом виде в одинарных тригонометрических рядах для частного случая граничных условий по двум противоположным кромкам:

$$\begin{aligned} \text{при } y=0 \text{ и } y=1 \quad u_0[x,0] = N_y[x,0] = w[x,0] = M_y[x,0] = 0 \\ u_0[x,1] = N_y[x,1] = w[x,1] = M_y[x,1] = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Эти условия принято называть согласованными: они соответствуют шарниру в отношении изгиба, а в отношении плоской задачи – скользящей заделке в тангенциальном направлении, когда часть контура панели нагружена потоками касательных сил. Панель по границе, перпендикулярной оси y , нагружена потоками касательных сил N_{yx} , которые уравниваются нормальными усилиями N_x на границе и площадках, перпендикулярных оси x .

Условия на торцах произвольны и могут быть условиями упругой заделки типа

$$x = \pm 1 \rightarrow (\gamma_1 u_0 + \delta_1 N_x) = (\gamma_2 v_0 + \delta_2 N_{xy}) = (\gamma_3 w + \delta_3 \bar{Q}_x) = (\gamma_4 w'_x + \delta_4 M_x) = 0 \quad (3.7)$$

$$\left. \begin{aligned} x = -1 \rightarrow (\varepsilon_1 u_0 + \xi_1 N_x) = (\varepsilon_2 v_0 + \xi_2 N_{xy}) = (\varepsilon_3 w + \xi_3 \bar{Q}_x) = (\varepsilon_4 w'_x + \xi_4 M_x) = 0 \\ x = 1 \rightarrow (\gamma_1 u_0 + \delta_1 N_x) = (\gamma_2 v_0 + \delta_2 N_{xy}) = (\gamma_3 w + \delta_3 \bar{Q}_x) = (\gamma_4 w'_x + \delta_4 M_x) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

в симметричной либо в несимметричной краевых задачах, соответственно; коэффициенты $\gamma_i, \delta_i, \varepsilon_i, \xi_i, i=1,2,3,4$ меняются от 0 до 1.

Разрешающая функция $\Phi(x, y)$ – обобщённая функция перемещений,

удовлетворяющая (3.5), (3.6) и затем – (3.7) или (3.8), раскладывается в одинарный ряд по системе тригонометрических функций:

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \Phi_n(x) \sin(n\pi y) \quad , \quad (3.9)$$

где $\Phi_n(x)$ подлежит определению.

При решении задачи общего вида в отношении краевых условий по поперечным кромкам в разложении (3.9) для $\Phi_n(x)$ следует сохранить и чётные, и нечётные функции. С точностью до восьми произвольных постоянных обобщённая функция перемещений

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 A_{nL} \operatorname{sh}(\lambda_{nL} x) + \sum_{L=1}^4 B_{nL} \operatorname{ch}(\lambda_{nL} x) + \Phi_{n^{ч/н}} \right] \sin(n\pi y) \quad (3.10)$$

Здесь $\Phi_{n^{ч/н}}$ - частный интеграл обыкновенного неоднородного линейного дифференциального уравнения восьмого порядка для $\Phi_n(x)$

$$\frac{K_{80}}{a^8} \frac{d^8 \Phi_n}{dx^8} - \frac{K_{62}}{a^6} \lambda_{ny}^2 \frac{d^6 \Phi_n}{dx^6} + \frac{K_{44}}{a^4} \lambda_{ny}^4 \frac{d^4 \Phi_n}{dx^4} - \frac{K_{26}}{a^2} \lambda_{ny}^6 \frac{d^2 \Phi_n}{dx^2} + K_{08} \lambda_{ny}^8 \Phi_n = q_n \quad (3.11)$$

$$\lambda_{nL} = z_L \lambda_{ny} a, \quad \lambda_{ny} = \frac{n\pi}{b},$$

z_L - корни соответствующего характеристического полинома

$$K_{80} z^8 - K_{62} z^6 + K_{44} z^4 - K_{26} z^2 + K_{08} = 0 \quad , \quad (3.12)$$

определяемые численно с использованием стандартных программ.

При изгибе панели постоянной поперечной нагрузкой

$$q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin(n\pi y), \quad q(x, y) = \text{const} \quad (3.13)$$

$$\Phi_{n^{ч/н}} = \frac{4q}{n\pi} \cdot \frac{1}{K_{08} \lambda_{ny}^8}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Компоненты вектора перемещений, деформация поверхности приведения, углы поворота, кривизны поверхности приведения и внутренние силовые

факторы вычисляются по формулам:

$$u_0(x, y) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 A_{nL}^{u_0} sh(\lambda_{nL}x) + \sum_{L=1}^4 B_{nL}^{u_0} ch(\lambda_{nL}x) + u_{0n}^{y/h} \right] \sin(n\pi y)$$

$$v_0(x, y) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 A_{nL}^{v_0} sh(\lambda_{nL}x) + \sum_{L=1}^4 B_{nL}^{v_0} ch(\lambda_{nL}x) + v_{0n}^{y/h} \right] \cos(n\pi y)$$

$$w(x, y) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 A_{nL}^w sh(\lambda_{nL}x) + \sum_{L=1}^4 B_{nL}^w ch(\lambda_{nL}x) + w_n^{y/h} \right] \sin(n\pi y)$$

$$\varepsilon_x^0(x, y) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 A_{nL}^{\varepsilon_x^0} sh(\lambda_{nL}x) + \sum_{L=1}^4 B_{nL}^{\varepsilon_x^0} ch(\lambda_{nL}x) + \varepsilon_{xn}^{y/h} \right] \sin(n\pi y)$$

$$\varepsilon_y^0(x, y) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 A_{nL}^{\varepsilon_y^0} sh(\lambda_{nL}x) + \sum_{L=1}^4 B_{nL}^{\varepsilon_y^0} ch(\lambda_{nL}x) + \varepsilon_{yn}^{y/h} \right] \sin(n\pi y)$$

$$\gamma_{xy}^0(x, y) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 A_{nL}^{\gamma_{xy}^0} sh(\lambda_{nL}x) + \sum_{L=1}^4 B_{nL}^{\gamma_{xy}^0} ch(\lambda_{nL}x) + \gamma_{xyn}^{y/h} \right] \cos(n\pi y)$$

$$\theta_x(x, y) = w'_x(x, y) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 A_{nL}^{\theta_x} sh(\lambda_{nL}x) + \sum_{L=1}^4 B_{nL}^{\theta_x} ch(\lambda_{nL}x) + \theta_{xn}^{y/h} \right] \sin(n\pi y)$$

$$\theta_y(x, y) = w'_y(x, y) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 A_{nL}^{\theta_y} sh(\lambda_{nL}x) + \sum_{L=1}^4 B_{nL}^{\theta_y} ch(\lambda_{nL}x) + \theta_{yn}^{y/h} \right] \cos(n\pi y)$$

$$|K_x^0(x, y)| = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 A_{nL}^{K_x^0} sh(\lambda_{nL}x) + \sum_{L=1}^4 B_{nL}^{K_x^0} ch(\lambda_{nL}x) + K_{xn}^{y/h} \right] \sin(n\pi y)$$

$$|K_y^0(x, y)| = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 A_{nL}^{K_y^0} sh(\lambda_{nL}x) + \sum_{L=1}^4 B_{nL}^{K_y^0} ch(\lambda_{nL}x) + K_{yn}^{y/h} \right] \sin(n\pi y)$$

$$|K_{xy}^0(x, y)| = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 A_{nL}^{K_{xy}^0} sh(\lambda_{nL}x) + \sum_{L=1}^4 B_{nL}^{K_{xy}^0} ch(\lambda_{nL}x) + K_{xyn}^{y/h} \right] \cos(n\pi y)$$

$$K_x^0(x, y) = -|K_x^0(x, y)| \quad K_y^0(x, y) = -|K_y^0(x, y)| \quad K_{xy}^0(x, y) = -2|K_{xy}^0(x, y)|$$

$$\begin{aligned}
N_x(x, y) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 A_{nL}^{N_x} sh(\lambda_{nL}x) + \sum_{L=1}^4 B_{nL}^{N_x} ch(\lambda_{nL}x) + N_{xn}^{q/h} \right] \sin(n\pi y) - N_x^T - N_x^H \\
N_{xy}(x, y) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 A_{nL}^{N_{xy}} sh(\lambda_{nL}x) + \sum_{L=1}^4 B_{nL}^{N_{xy}} ch(\lambda_{nL}x) + N_{xyn}^{q/h} \right] \cos(n\pi y) - N_{xy}^T - N_{xy}^H \\
\bar{Q}_x(x, y) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 A_{nL}^{\bar{Q}_x} sh(\lambda_{nL}x) + \sum_{L=1}^4 B_{nL}^{\bar{Q}_x} ch(\lambda_{nL}x) + \bar{Q}_{xn}^{q/h} \right] \sin(n\pi y) \\
M_x(x, y) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 A_{nL}^{M_x} sh(\lambda_{nL}x) + \sum_{L=1}^4 B_{nL}^{M_x} ch(\lambda_{nL}x) + M_{xn}^{q/h} \right] \sin(n\pi y) - M_x^T - M_x^H \\
H_{xy}(x, y) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 A_{nL}^{H_{xy}} sh(\lambda_{nL}x) + \sum_{L=1}^4 B_{nL}^{H_{xy}} ch(\lambda_{nL}x) + H_{xyn}^{q/h} \right] \cos(n\pi y) - H_{xy}^T - H_{xy}^H \\
\\
N_y(x, y) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 A_{nL}^{N_y} sh(\lambda_{nL}x) + \sum_{L=1}^4 B_{nL}^{N_y} ch(\lambda_{nL}x) + N_{yn}^{q/h} \right] \sin(n\pi y) - N_y^T - N_y^H \\
N_{yx}(x, y) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 A_{nL}^{N_{yx}} sh(\lambda_{nL}x) + \sum_{L=1}^4 B_{nL}^{N_{yx}} ch(\lambda_{nL}x) + N_{yxn}^{q/h} \right] \cos(n\pi y) - N_{yx}^T - N_{yx}^H \\
\bar{Q}_y(x, y) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 A_{nL}^{\bar{Q}_y} sh(\lambda_{nL}x) + \sum_{L=1}^4 B_{nL}^{\bar{Q}_y} ch(\lambda_{nL}x) + \bar{Q}_{yn}^{q/h} \right] \sin(n\pi y) \\
M_y(x, y) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 A_{nL}^{M_y} sh(\lambda_{nL}x) + \sum_{L=1}^4 B_{nL}^{M_y} ch(\lambda_{nL}x) + M_{yn}^{q/h} \right] \sin(n\pi y) - M_y^T - M_y^H \\
H_{yx}(x, y) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 A_{nL}^{H_{yx}} sh(\lambda_{nL}x) + \sum_{L=1}^4 B_{nL}^{H_{yx}} ch(\lambda_{nL}x) + H_{yxn}^{q/h} \right] \cos(n\pi y) - H_{yx}^T - H_{yx}^H
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Константы $A_{nL}^{u_0}, B_{nL}^{u_0}, A_{nL}^{v_0}, B_{nL}^{v_0}, A_{nL}^w, B_{nL}^w,$

$$A_{nL}^{\varepsilon_x^0}, B_{nL}^{\varepsilon_x^0}, A_{nL}^{\varepsilon_y^0}, B_{nL}^{\varepsilon_y^0}, A_{nL}^{\gamma_{xy}^0}, B_{nL}^{\gamma_{xy}^0}, A_{nL}^{\theta_x}, B_{nL}^{\theta_x}, A_{nL}^{\theta_y}, B_{nL}^{\theta_y},$$

$$A_{nL}^{K_x^0}, B_{nL}^{K_x^0}, A_{nL}^{K_y^0}, B_{nL}^{K_y^0}, A_{nL}^{K_{xy}^0}, B_{nL}^{K_{xy}^0},$$

$$A_{nL}^{N_x}, B_{nL}^{N_x}, A_{nL}^{N_{xy}}, B_{nL}^{N_{xy}}, A_{nL}^{\bar{Q}_x}, B_{nL}^{\bar{Q}_x}, A_{nL}^{M_x}, B_{nL}^{M_x}, A_{nL}^{H_{xy}}, B_{nL}^{H_{xy}},$$

$$A_{nL}^{N_y}, B_{nL}^{N_y}, A_{nL}^{N_{yx}}, B_{nL}^{N_{yx}}, A_{nL}^{\bar{Q}_y}, B_{nL}^{\bar{Q}_y}, A_{nL}^{M_y}, B_{nL}^{M_y}, A_{nL}^{H_{yx}}, B_{nL}^{H_{yx}}$$

($n=1,3,5,\dots,\infty; L=\overline{1,4}$),

а также частные интегралы

$$\begin{aligned}
 & u_{0n\psi/H}, v_{0n\psi/H}, w_{n\psi/H}, \varepsilon_{xn\psi/H}^0, \varepsilon_{yn\psi/H}^0, \gamma_{xyn\psi/H}^0, \theta_{xn\psi/H}, \theta_{yn\psi/H}, \\
 & K_{xn\psi/H}^0, K_{yn\psi/H}^0, K_{xyn\psi/H}^0, \\
 & N_{xn\psi/H}, N_{xyn\psi/H}, \bar{Q}_{xn\psi/H}, M_{xn\psi/H}, H_{xyn\psi/H}, \\
 & N_{yn\psi/H}, N_{yxn\psi/H}, \bar{Q}_{yn\psi/H}, M_{yn\psi/H}, H_{yxn\psi/H}
 \end{aligned}$$

связаны с константами A_{nL} , B_{nL} и $\Phi_{n\psi/H}$ в рамках соотношений (2.51), (2.52)

$$\begin{aligned}
 A_{nL}^{u_0} &= C_{nL}^{u_0} B_{nL}, & B_{nL}^{u_0} &= C_{nL}^{u_0} A_{nL}, & u_{0n\psi/H} &= 0 \\
 A_{nL}^{v_0} &= C_{nL}^{v_0} A_{nL}, & B_{nL}^{v_0} &= C_{nL}^{v_0} B_{nL}, & v_{0n\psi/H} &= S_{05} \lambda_{ny}^5 \Phi_{n\psi/H} \\
 A_{nL}^w &= C_{nL}^w A_{nL}, & B_{nL}^w &= C_{nL}^w B_{nL}, & w_{n\psi/H} &= R_{04} \lambda_{ny}^4 \Phi_{n\psi/H} \\
 \\
 A_{nL}^{\varepsilon_x^0} &= C_{nL}^{\varepsilon_x^0} A_{nL}, & B_{nL}^{\varepsilon_x^0} &= C_{nL}^{\varepsilon_x^0} B_{nL}, & \varepsilon_{xn\psi/H}^0 &= 0 \\
 A_{nL}^{\varepsilon_y^0} &= C_{nL}^{\varepsilon_y^0} A_{nL}, & B_{nL}^{\varepsilon_y^0} &= C_{nL}^{\varepsilon_y^0} B_{nL}, & \varepsilon_{yn\psi/H}^0 &= -S_{05} \lambda_{ny}^6 \Phi_{n\psi/H} \\
 A_{nL}^{\gamma_{xy}^0} &= C_{nL}^{\gamma_{xy}^0} B_{nL}, & B_{nL}^{\gamma_{xy}^0} &= C_{nL}^{\gamma_{xy}^0} A_{nL}, & \gamma_{xyn\psi/H}^0 &= 0 \\
 \\
 A_{nL}^{\theta_x} &= C_{nL}^{\theta_x} B_{nL}, & B_{nL}^{\theta_x} &= C_{nL}^{\theta_x} A_{nL}, & \theta_{xn\psi/H} &= 0 \\
 A_{nL}^{\theta_y} &= C_{nL}^{\theta_y} A_{nL}, & B_{nL}^{\theta_y} &= C_{nL}^{\theta_y} B_{nL}, & \theta_{yn\psi/H} &= R_{04} \lambda_{ny}^5 \Phi_{n\psi/H} \\
 \\
 A_{nL}^{K_x^0} &= C_{nL}^{K_x^0} A_{nL}, & B_{nL}^{K_x^0} &= C_{nL}^{K_x^0} B_{nL}, & K_{xn\psi/H}^0 &= 0 \\
 A_{nL}^{K_y^0} &= C_{nL}^{K_y^0} A_{nL}, & B_{nL}^{K_y^0} &= C_{nL}^{K_y^0} B_{nL}, & K_{yn\psi/H}^0 &= -R_{04} \lambda_{ny}^6 \Phi_{n\psi/H} \\
 A_{nL}^{K_{xy}^0} &= C_{nL}^{K_{xy}^0} B_{nL}, & B_{nL}^{K_{xy}^0} &= C_{nL}^{K_{xy}^0} A_{nL}, & K_{xyn\psi/H}^0 &= 0
 \end{aligned}$$

$$A_{nL}^{N_x} = C_{nL}^{N_x} A_{nL},$$

$$A_{nL}^{N_{xy}} = C_{nL}^{N_{xy}} B_{nL},$$

$$A_{nL}^{\bar{Q}_x} = C_{nL}^{\bar{Q}_x} B_{nL},$$

$$A_{nL}^{M_x} = C_{nL}^{M_x} A_{nL},$$

$$A_{nL}^{H_{xy}} = C_{nL}^{H_{xy}} B_{nL},$$

$$B_{nL}^{N_x} = C_{nL}^{N_x} B_{nL},$$

$$B_{nL}^{N_{xy}} = C_{nL}^{N_{xy}} A_{nL},$$

$$B_{nL}^{\bar{Q}_x} = C_{nL}^{\bar{Q}_x} A_{nL},$$

$$B_{nL}^{M_x} = C_{nL}^{M_x} B_{nL},$$

$$B_{nL}^{H_{xy}} = C_{nL}^{H_{xy}} A_{nL},$$

$$N_{xn^{4/H}} = -P_{06}^x \lambda_{ny}^6 \Phi_{n^{4/H}}$$

$$N_{xyn^{4/H}} = 0$$

$$\bar{Q}_{xn^{4/H}} = 0$$

$$M_{xn^{4/H}} = -R_{06}^x \lambda_{ny}^6 \Phi_{n^{4/H}}$$

$$H_{xyn^{4/H}} = 0$$

$$A_{nL}^{N_y} = C_{nL}^{N_y} A_{nL},$$

$$A_{nL}^{N_{yx}} = C_{nL}^{N_{yx}} B_{nL},$$

$$A_{nL}^{\bar{Q}_y} = C_{nL}^{\bar{Q}_y} B_{nL},$$

$$A_{nL}^{M_y} = C_{nL}^{M_y} A_{nL},$$

$$A_{nL}^{H_{yx}} = C_{nL}^{H_{yx}} B_{nL},$$

$$B_{nL}^{N_y} = C_{nL}^{N_y} B_{nL},$$

$$B_{nL}^{N_{yx}} = C_{nL}^{N_{yx}} A_{nL},$$

$$B_{nL}^{\bar{Q}_y} = C_{nL}^{\bar{Q}_y} A_{nL},$$

$$B_{nL}^{M_y} = C_{nL}^{M_y} B_{nL},$$

$$B_{nL}^{H_{yx}} = C_{nL}^{H_{yx}} A_{nL},$$

$$N_{yn^{4/H}} = -P_{06}^y \lambda_{ny}^6 \Phi_{n^{4/H}}$$

$$N_{yxn^{4/H}} = 0$$

$$\bar{Q}_{yn^{4/H}} = 0$$

$$M_{yn^{4/H}} = -R_{06}^y \lambda_{ny}^6 \Phi_{n^{4/H}}$$

$$H_{yxn^{4/H}} = 0$$

В свою очередь

$$C_{nL}^{u_0} = D_L^{u_0} \lambda_{ny}^5,$$

$$C_{nL}^{v_0} = D_L^{v_0} \lambda_{ny}^5,$$

$$C_{nL}^w = D_L^w \lambda_{ny}^4,$$

$$D_L^{u_0} = (R_{50} z_L^4 - R_{32} z_L^2 + R_{14}) z_L$$

$$D_L^{v_0} = S_{41} z_L^4 - S_{32} z_L^2 + S_{05}$$

$$D_L^w = R_{40} z_L^4 - R_{22} z_L^2 + R_{04}$$

$$C_{nL}^{\varepsilon_x^0} = D_L^{\varepsilon_x^0} \lambda_{ny}^6,$$

$$C_{nL}^{\varepsilon_y^0} = D_L^{\varepsilon_y^0} \lambda_{ny}^6,$$

$$C_{nL}^{\gamma_{xy}^0} = D_L^{\gamma_{xy}^0} \lambda_{ny}^6,$$

$$D_L^{\varepsilon_x^0} = D_L^{u_0} z_L$$

$$D_L^{\varepsilon_y^0} = -D_L^{v_0}$$

$$D_L^{\gamma_{xy}^0} = D_L^{u_0} + D_L^{v_0} z_L$$

$$C_{nL}^{\theta_x} = D_L^{\theta_x} \lambda_{ny}^5,$$

$$C_{nL}^{\theta_y} = D_L^{\theta_y} \lambda_{ny}^5,$$

$$D_L^{\theta_x} = D_L^w z_L$$

$$D_L^{\theta_y} = D_L^w$$

$$C_{nL}^{K^0_x} = D_L^{K^0_x} \lambda_{ny}^6,$$

$$C_{nL}^{K^0_y} = D_L^{K^0_y} \lambda_{ny}^6,$$

$$C_{nL}^{K^0_{xy}} = D_L^{K^0_{xy}} \lambda_{ny}^6,$$

$$D_L^{K^0_x} = D_L^w z_L^2$$

$$D_L^{K^0_y} = -D_L^w$$

$$D_L^{K^0_{xy}} = D_L^w z_L$$

$$C_{nL}^{N_x} = D_L^{N_x} \lambda_{ny}^6,$$

$$C_{nL}^{N_{xy}} = D_L^{N_{xy}} \lambda_{ny}^6,$$

$$C_{nL}^{\bar{Q}_x} = D_L^{\bar{Q}_x} \lambda_{ny}^7,$$

$$C_{nL}^{M_x} = D_L^{M_x} \lambda_{ny}^6,$$

$$C_{nL}^{H_{xy}} = D_L^{H_{xy}} \lambda_{ny}^6,$$

$$D_L^{N_x} = P_{60}^x z_L^6 - P_{42}^x z_L^4 + P_{24}^x z_L^2 - P_{06}^x$$

$$D_L^{N_{xy}} = \left(Q_{51}^x z_L^4 - Q_{33}^x z_L^2 + Q_{15}^x \right) z_L$$

$$D_L^{\bar{Q}_x} = \left(T_{70}^x z_L^6 - T_{52}^x z_L^4 + T_{34}^x z_L^2 - T_{16}^x \right) z_L$$

$$D_L^{M_x} = R_{60}^x z_L^6 - R_{42}^x z_L^4 + R_{24}^x z_L^2 - R_{06}^x$$

$$D_L^{H_{xy}} = \left(S_{51}^x z_L^4 - S_{33}^x z_L^2 + S_{15}^x \right) z_L$$

$$C_{nL}^{N_y} = D_L^{N_y} \lambda_{ny}^6,$$

$$C_{nL}^{N_{yx}} = D_L^{N_{yx}} \lambda_{ny}^6,$$

$$C_{nL}^{\bar{Q}_y} = D_L^{\bar{Q}_y} \lambda_{ny}^7,$$

$$C_{nL}^{M_y} = D_L^{M_y} \lambda_{ny}^6,$$

$$C_{nL}^{H_{yx}} = D_L^{H_{yx}} \lambda_{ny}^6,$$

$$D_L^{N_y} = P_{60}^y z_L^6 - P_{42}^y z_L^4 + P_{24}^y z_L^2 - P_{06}^y$$

$$D_L^{N_{yx}} = \left(Q_{51}^y z_L^4 - Q_{33}^y z_L^2 + Q_{15}^y \right) z_L$$

$$D_L^{\bar{Q}_y} = \left(T_{61}^y z_L^6 - T_{43}^y z_L^4 + T_{25}^y z_L^2 - T_{07}^y \right) z_L$$

$$D_L^{M_y} = R_{60}^y z_L^6 - R_{42}^y z_L^4 + R_{24}^y z_L^2 - R_{06}^y$$

$$D_L^{H_{yx}} = \left(S_{51}^y z_L^4 - S_{33}^y z_L^2 + S_{15}^y \right) z_L$$

(3.15)

3.3 Метод однородных решений в задачах статики конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов с граничными условиями общего вида

Рассматривается класс точных аналитических решений краевых задач, соответствующих общей трактовке физических граничных условий элементов конструкции.

Проблема определения напряжённо-деформированного состояния (НДС) конструктивно-анизотропных композитных панелей сведена к решению краевой задачи для уравнения восьмого порядка в частных производных в прямоугольной области. Данное решение в замкнутом виде построено методом однородных решений для произвольных несогласованных граничных условий на контуре. Рассматриваются все возможные варианты закрепления граничных кромок в отношении связанных плоской задачи и задачи изгиба.

Применяется схема решения краевых задач для конечных областей, предложенная профессором С.А. Лурье в качестве подхода к исследованию бигармонической проблемы теории упругости.

Особенность метода однородных решений для бигармонического уравнения состоит в сведении задачи к разложению двух вещественных функций с одной системой констант, которые, не являясь ортогональными, подчиняются условию обобщённой ортогональности. При реализации метода однородных решений возникает ряд трудностей, связанных с построением условий расширенной ортогональности, с определением достаточных условий разложимости граничных функций. Исследование поставленных вопросов применительно к оператору восьмого порядка предлагается осуществить с использованием теорем теории линейных дифференциальных операторов.

Изложен алгоритм нового метода, позволяющего представить решение уравнения (3.1) в виде разложения по неортогональной системе обобщённых собственных функций с коэффициентами, определяемыми явно.

С математической точки зрения проблема исследования напряжённо-

деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей, трактуемых как ортотропные, сводится к решению краевой задачи в прямоугольной области для неоднородного линейного дифференциального уравнения восьмого порядка в частных производных относительно искомой потенциальной функции $\Phi(x,y)$. Линейный дифференциальный оператор уравнения содержит производные чётной степени по каждой из координат

$$L^{(8)}\Phi = q, \quad (3.16)$$

$$L^{(8)} = \frac{K_{80}}{a^8} \frac{\partial^8}{\partial x^8} + \frac{K_{62}}{a^6 b^2} \frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{K_{44}}{a^4 b^4} \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + \frac{K_{26}}{a^2 b^6} \frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{K_{08}}{b^8} \frac{\partial^8}{\partial y^8}$$

Линейные дифференциальные операторы связи для симметричных компонентов НДС так же, как и линейный дифференциальный оператор разрешающего уравнения, содержат производные чётной степени по каждой из координат. Косо-симметричные компоненты НДС определяются нечётными производными (раздел 3.2).

Краевая задача общего вида в прямоугольной области представлена условиями упругой заделки, которые позволяют рассмотреть все возможные варианты закрепления граничных кромок в отношении связанных плоской задачи и задачи изгиба – защемление, скользящую заделку, шарнирное опирание, свободный край:

$$\text{при } x = \pm 1 \quad (\gamma_1 u_0 + \delta_1 N_x) = (\gamma_2 v_0 + \delta_2 N_{xy}) = (\gamma_3 w + \delta_3 \bar{Q}_x) = (\gamma_4 w'_x + \delta_4 M_x) = 0, \quad (3.17)$$

$$\text{при } y = \pm 1 \quad (\alpha_1 u_0 + \beta_1 N_{yx}) = (\alpha_2 v_0 + \beta_2 N_y) = (\alpha_3 w + \beta_3 \bar{Q}_y) = (\alpha_4 w'_y + \beta_4 M_y) = 0, \quad (3.18)$$

Краевые условия могут быть кинематическими, статическими и смешанными:

$$\text{при } x = \text{const} \quad L_i^{(j)}\Phi = \xi_i(y) \quad (3.19)$$

$$\text{при } y = \text{const} \quad M_i^{(j)}\Phi = \chi_i(x), \quad i = \overline{1,4}, \quad j = \overline{4,7} \quad (3.20)$$

Здесь $L_i^{(j)}\Phi$, $M_i^{(j)}\Phi$ - дифференциальные граничные операторы, $\xi_i(y)$, $\chi_i(x)$ - известные граничные функции.

Задача считается симметричной относительно центральных координат. В качестве примера рассматривается вариант граничных условий на контуре,

которые соответствуют шарнирному опиранию в смысле изгиба и свободным кромкам в отношении плоской задачи:

$$\left. \begin{aligned} N_y(x, \pm 1) = N_{yx}(x, \pm 1) = w(x, \pm 1) = M_y(x, \pm 1) = 0 \\ N_x(\pm 1, y) = N_{xy}(\pm 1, y) = w(\pm 1, y) = M_x(\pm 1, y) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Конкретные исследования связаны с условиями закрепления панелей в составе проектируемой конструкции. Вид граничных условий диктуется характером закрепления реальных конструктивных элементов.

Рассматриваются центрально симметричные статические задачи с несогласованными условиями на контуре панелей, что представляет интерес с точки зрения расчётов на прочность и практики проектирования. Для исследования напряжённо-деформированного состояния используются модификации метода однородных решений, позволяющие представить искомые функции $\Phi(x, y)$ в виде разложения в ряды по неортогональной системе обобщённых собственных функций с коэффициентами, определяемыми явно.

Регулярная составляющая общего интеграла строится в форме разложения по однородным функциям $\Phi_k(y)$

$$\Phi(x, y) = \Phi_{01}(x, y) + \Phi_{02}(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \Phi_k(y) \operatorname{ch}(\lambda_k x) \quad (3.22)$$

Частные решения $\Phi_{01}(x, y)$ и $\Phi_{02}(x, y)$ позволяют сформулировать однородную краевую задачу для собственных функций $\Phi_k(y)$ по координате y :

$\Phi_{01}(x, y)$ – частное решение неоднородного уравнения (3.16),

$\Phi_{02}(x, y)$ – решение однородного уравнения для (3.16), удовлетворяющее неоднородным граничным условиям по продольным кромкам $y = \pm 1$.

Регулярная составляющая общего интеграла, построенная в форме разложения по однородным функциям $\Phi_k(y)$: $\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \Phi_k(y) \operatorname{ch}(\lambda_k x)$, – соответствует

решению однородного уравнения для (3.16), удовлетворяет однородным граничным условиям при $y = \pm 1$ и содержит произвол для выполнения краевых

условий на торцах при $x = \pm 1$.

Частное решение раскладывается в двойной ряд Фурье по косинусам

$$\Phi_{01}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \cos \left[(2m-1) \frac{\pi}{2} x \right] \cos \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} y \right], \quad (3.23)$$

коэффициенты которого при действии произвольным образом распределённой поперечной нагрузки $q(x, y)$ определяются:

$$f_{mn} = \frac{q_{mn}}{(K_{80} \lambda_{mx}^8 + K_{62} \lambda_{mx}^6 \lambda_{ny}^2 + K_{44} \lambda_{mx}^4 \lambda_{ny}^4 + K_{26} \lambda_{mx}^2 \lambda_{ny}^6 + K_{08} \lambda_{ny}^8)},$$

где $\lambda_{mx} = \frac{(2m-1)\pi}{2a}$, $\lambda_{ny} = \frac{(2n-1)\pi}{2b}$,

$$q_{mn} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 q(x, y) \cos \left[(2m-1) \frac{\pi}{2} x \right] \cos \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} y \right] dx dy$$

При постоянном давлении $q(x, y) = const$

$$q_{mn} = \frac{16q}{\pi^2 (2m-1)(2n-1)}$$

Граничные линейные дифференциальные операторы (3.21) по продольным кромкам при $y = \pm 1$ с учетом связей (3.2), и формы разложения (3.23) для частного решения $\Phi_{01}(x, y)$ без температурных усилий и моментов, без усилий и моментов от натяжения

$$\begin{aligned} L_{N_y} \Phi_{01} &= 0 \\ L_{N_{yx}} \Phi_{01} &= \sum_{m=1}^{\infty} K_m \sin \left[(2m-1) \frac{\pi}{2} x \right], \\ L_w \Phi_{01} &= 0 \\ L_{M_y} \Phi_{01} &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

где $K_m = \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} (Q_{51}^y \lambda_{mx}^5 \lambda_{ny} + Q_{33}^y \lambda_{mx}^3 \lambda_{ny}^3 + Q_{15}^y \lambda_{mx} \lambda_{ny}^5) \sin \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} \right]$

Функция $\Phi_{02}(x, y)$ ищется в форме одинарного тригонометрического ряда

$$\Phi_{02}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{0m}(y) \cos \left[(2m-1) \frac{\pi}{2} x \right], \quad (3.25)$$

где $\Phi_{0m}(y)$ подлежит определению.

Так как задача в смысле граничных условий симметрична, в решении для $\Phi_{0m}(y)$ следует оставить чётные функции. С точностью до системы четырёх произвольных констант

$$\Phi_{02}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 B_{mL} \operatorname{ch}(\lambda_{mL} y) \right] \cos \left[(2m-1) \frac{\pi}{2} x \right] ,$$

где $\lambda_{mL} = \lambda_{mx} b z_L$, $\lambda_{mx} = \frac{(2m-1)\pi}{2a}$,

z_L – корни характеристического уравнения

$$K_{08} z^8 - K_{26} z^6 + K_{44} z^4 - K_{62} z^2 + K_{80} = 0$$

Неоднородные граничные условия при $y = \pm 1$ (3.21) для интеграла $\Phi_{02}(x, y)$ на основании связей (3.2), общего интеграла (3.22), граничных дифференциальных операторов (3.24) и формы разложения (3.25)

$$\begin{aligned} L_{N_y} \Phi_{02} - N_y^T - N_y^H &= 0 \\ L_{N_{yx}} \Phi_{02} - N_{yx}^T - N_{yx}^H &= - \sum_{m=1}^{\infty} K_m \sin \left[(2m-1) \frac{\pi}{2} x \right] \\ L_w \Phi_{02} &= 0 \\ L_{M_y} \Phi_{02} - M_y^T - M_y^H &= 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Система четырёх линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных констант B_{mL} строится с использованием свойств ортогональности

функций $\left\{ \cos \left[(2m-1) \frac{\pi}{2} x \right] \right\}$ и имеет вид:

$$\sum_{L=1}^4 C_{pL}^m B_{mL} = R_p^m, \quad p = 1, 2, 3, 4 \quad ()$$

$$\begin{aligned} \text{Здесь} \quad C_{1L}^m &= (-P_{60}^y + P_{42}^y z_L^2 - P_{24}^y z_L^4 + P_{06}^y z_L^6) \lambda_{mx}^6 \operatorname{ch}(\lambda_{mL}) \\ C_{2L}^m &= (-Q_{51}^y + Q_{33}^y z_L^2 - Q_{15}^y z_L^4) z_L \lambda_{mx}^6 \operatorname{sh}(\lambda_{mL}) \\ C_{3L}^m &= (R_{40} - R_{22} z_L^2 + R_{04} z_L^4) \lambda_{mx}^4 \operatorname{ch}(\lambda_{mL}) \\ C_{4L}^m &= (-R_{60}^y + R_{42}^y z_L^2 - R_{24}^y z_L^4 + R_{05}^y z_L^6) \lambda_{mx}^6 \operatorname{ch}(\lambda_{mL}) \end{aligned}$$

$$R_1^m = + (N_y^T)_m + (N_y^H)_m$$

$$R_2^m = -K_m + (N_{yx}^T)_m + (N_{yx}^H)_m$$

$$R_3^m = 0$$

$$R_4^m = + (M_y^T)_m + (M_y^H)_m$$

$$N_y^T = \sum_{m=1}^{\infty} (N_y^T)_m \cos \left[(2m-1) \frac{\pi}{2} x \right], \quad (N_y^T)_m = \frac{4N_y^T}{\pi(2m-1)} \sin \left[(2m-1) \frac{\pi}{2} \right]$$

$$N_{yx}^T = \sum_{m=1}^{\infty} (N_{yx}^T)_m \sin \left[(2m-1) \frac{\pi}{2} x \right], \quad (N_{yx}^T)_m = 0$$

$$M_y^T = \sum_{m=1}^{\infty} (M_y^T)_m \cos \left[(2m-1) \frac{\pi}{2} x \right], \quad (M_y^T)_m = \frac{4M_y^T}{\pi(2m-1)} \sin \left[(2m-1) \frac{\pi}{2} \right]$$

Формулы для усилий и моментов от натяжения с индексом «Н» аналогичны температурным с индексом «Т».

Регулярная составляющая общего интеграла строится в форме разложения по однородным функциям $\Phi_k(y)$

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \Phi_k(y) \operatorname{ch}(\lambda_k x), \quad (3.27)$$

B_k - произвольные постоянные, определяемые из условий на торцах при $x = \pm 1$.

Частные решения $\Phi_{01}(x, y)$ и $\Phi_{02}(x, y)$ позволяют сформулировать однородную краевую задачу для собственных функций $\Phi_k(y)$ по координате y :

$$\hat{L}^{(8)} \Phi_k = 0 \quad (3.28)$$

$$\text{при } y = \pm 1 \quad \hat{M}_i^{(j)} \Phi_k = 0, \quad i = \overline{1, 4}, \quad j = \overline{4, 7}, \quad (3.29)$$

где $\hat{L}^{(8)}$ - обыкновенный линейный дифференциальный оператор, соответствующий уравнению (3.16),

$\hat{M}_i^{(j)}$ - обыкновенные линейные дифференциальные операторы, отвечающие граничным условиям (3.20), (3.21) при $y = \pm 1$.

Собственные функции $\Phi_k(y)$ удовлетворяют обыкновенному однородному дифференциальному уравнению восьмого порядка

$$K_{08} \frac{d^8 \Phi_k}{dy^8} + K_{26} \left(\lambda_k \frac{b}{a} \right)^2 \frac{d^6 \Phi_k}{dy^6} + K_{44} \left(\lambda_k \frac{b}{a} \right)^4 \frac{d^4 \Phi_k}{dy^4} + K_{62} \left(\lambda_k \frac{b}{a} \right)^6 \frac{d^2 \Phi_k}{dy^2} + K_{80} \left(\lambda_k \frac{b}{a} \right)^8 \Phi_k = 0 \quad (3.30)$$

и, в качестве примера, однородным граничным условиям при $y = \pm 1$

$$\left. \begin{aligned} P_{06}^y \frac{d^6 \Phi_k}{dy^6} + P_{24}^y \left(\lambda_k \frac{b}{a} \right)^2 \frac{d^4 \Phi_k}{dy^4} + P_{42}^y \left(\lambda_k \frac{b}{a} \right)^4 \frac{d^2 \Phi_k}{dy^2} + P_{60}^y \left(\lambda_k \frac{b}{a} \right)^6 \Phi_k &= 0 \\ Q_{15}^y \left(\lambda_k \frac{b}{a} \right) \frac{d^5 \Phi_k}{dy^5} + Q_{33}^y \left(\lambda_k \frac{b}{a} \right)^3 \frac{d^3 \Phi_k}{dy^3} + Q_{51}^y \left(\lambda_k \frac{b}{a} \right)^5 \frac{d \Phi_k}{dy} &= 0 \\ R_{04} \frac{d^4 \Phi_k}{dy^4} + R_{22} \left(\lambda_k \frac{b}{a} \right)^2 \frac{d^2 \Phi_k}{dy^2} + R_{40} \left(\lambda_k \frac{b}{a} \right)^4 \Phi_k &= 0 \\ R_{06}^y \frac{d^6 \Phi_k}{dy^6} + R_{24}^y \left(\lambda_k \frac{b}{a} \right)^2 \frac{d^4 \Phi_k}{dy^4} + R_{42}^y \left(\lambda_k \frac{b}{a} \right)^4 \frac{d^2 \Phi_k}{dy^2} + R_{60}^y \left(\lambda_k \frac{b}{a} \right)^6 \Phi_k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

Собственные функции $\Phi_k(y)$ строятся в виде

$$\Phi_k(y) = \sum_{L=1}^4 B_{kL} \operatorname{ch} \left(\lambda_k z_L \frac{b}{a} y \right), \quad (3.32)$$

где z_L - корни характеристического полинома

$$K_{08} z^8 + K_{26} z^6 + K_{44} z^4 + K_{62} z^2 + K_{80} = 0 \quad (3.33)$$

Константы B_{kL} (3.32) являются решением системы четырёх однородных линейных алгебраических уравнений при удовлетворении собственных функций граничным условиям (3.31)

$$\sum_{L=1}^4 C_{rL}^k B_{kL} = 0, \quad r = 1, 2, 3, 4 \quad (3.34)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
C_{1L}^k &= Q_{1L} \left(\lambda_k \frac{b}{a} \right)^6 ch \left(\lambda_k z_L \frac{b}{a} \right) \\
C_{2L}^k &= Q_{2L} \left(\lambda_k \frac{b}{a} \right)^6 sh \left(\lambda_k z_L \frac{b}{a} \right) \\
C_{3L}^k &= Q_{3L} \left(\lambda_k \frac{b}{a} \right)^4 ch \left(\lambda_k z_L \frac{b}{a} \right) \\
C_{4L}^k &= Q_{4L} \left(\lambda_k \frac{b}{a} \right)^6 ch \left(\lambda_k z_L \frac{b}{a} \right)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
Q_{1L} &= P_{06}^y z_L^6 + P_{24}^y z_L^4 + P_{42}^y z_L^2 + P_{60}^y \\
Q_{2L} &= (Q_{15}^y z_L^4 + Q_{33}^y z_L^2 + Q_{51}^y) z_L \\
Q_{3L} &= R_{04} z_L^4 + R_{22} z_L^2 + R_{40} \\
Q_{4L} &= R_{06}^y z_L^6 + R_{24}^y z_L^4 + R_{42}^y z_L^2 + R_{60}^y
\end{aligned}$$

Константы B_{kL} , определяющие однородные функции $\Phi_k(y)$, являются нетривиальным решением системы (3.34) при известных λ_k

$$B_{kL} = \frac{\sum_{p=1}^4 Y_{Lp} th \left(\lambda_k z_p \frac{b}{a} \right) ch \left(\lambda_k z_1 \frac{b}{a} \right)}{\sum_{p=1}^4 Y_{1p} th \left(\lambda_k z_1 \frac{b}{a} \right) ch \left(\lambda_k z_p \frac{b}{a} \right)}, \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned}
Y_{11} &= 0 & Y_{21} &= [Q_{14}(Q_{23} - Q_{43}) - Q_{13}(Q_{24} - Q_{44})]Q_{31} \\
Y_{12} &= [Q_{13}(Q_{24} - Q_{44}) - Q_{14}(Q_{23} - Q_{43})]Q_{32} & Y_{22} &= 0 \\
Y_{13} &= [Q_{14}(Q_{22} - Q_{42}) - Q_{12}(Q_{24} - Q_{44})]Q_{33} & Y_{23} &= [Q_{11}(Q_{24} - Q_{44}) - Q_{14}(Q_{21} - Q_{41})]Q_{33} \\
Y_{14} &= [Q_{12}(Q_{23} - Q_{43}) - Q_{13}(Q_{22} - Q_{42})]Q_{34} & Y_{24} &= [Q_{13}(Q_{21} - Q_{41}) - Q_{11}(Q_{23} - Q_{43})]Q_{34} \\
Y_{31} &= [Q_{12}(Q_{24} - Q_{44}) - Q_{14}(Q_{22} - Q_{42})]Q_{31} & Y_{41} &= [Q_{13}(Q_{22} - Q_{42}) - Q_{12}(Q_{23} - Q_{43})]Q_{31} \\
Y_{32} &= [Q_{14}(Q_{21} - Q_{41}) - Q_{11}(Q_{24} - Q_{44})]Q_{32} & Y_{42} &= [Q_{11}(Q_{23} - Q_{43}) - Q_{13}(Q_{21} - Q_{41})]Q_{32} \\
Y_{33} &= 0 & Y_{43} &= [Q_{12}(Q_{21} - Q_{41}) - Q_{11}(Q_{22} - Q_{42})]Q_{33} \\
Y_{34} &= [Q_{11}(Q_{22} - Q_{42}) - Q_{12}(Q_{21} - Q_{41})]Q_{34} & Y_{44} &= 0
\end{aligned}$$

Нетривиальность решения системы (3.34) обеспечивается равенством нулю её детерминанта, что позволяет построить трансцендентное уравнение относительно собственных параметров задачи λ_k

$$\sum_{L=1}^4 X_L th \left(\lambda_k z_L \frac{b}{a} \right) = 0, \quad (3.36)$$

где

$$\begin{aligned}
 X_1 &= -Q_{31}(Q_{12}Y_2 + Q_{13}Y_3 + Q_{14}Y_4) & X_3 &= Q_{11}Q_{33}Y_3 & Y_2 &= Z_{24}Z_{43} - Z_{23}Z_{44} \\
 X_2 &= Q_{11}Q_{32}Y_2 & X_4 &= Q_{11}Q_{34}Y_4 & Y_3 &= Z_{22}Z_{44} - Z_{24}Z_{42} \\
 & & & & Y_4 &= Z_{23}Z_{42} - Z_{22}Z_{43} \\
 Z_{22} &= Q_{22}Q_{11} - Q_{12}Q_{21} & Z_{42} &= Q_{42}Q_{11} - Q_{12}Q_{41} \\
 Z_{23} &= Q_{23}Q_{11} - Q_{13}Q_{21} & Z_{43} &= Q_{43}Q_{11} - Q_{13}Q_{41} \\
 Z_{24} &= Q_{24}Q_{11} - Q_{14}Q_{21} & Z_{44} &= Q_{44}Q_{11} - Q_{14}Q_{41}
 \end{aligned}$$

Формулы для коэффициентов (3.35), (3.36) выведены при перемене порядка следования граничных условий (3.34) и замене

$$\begin{aligned}
 C_{1L}^k &\text{ на } C_{2L}^k, & Q_{1L} &\text{ на } Q_{2L} \\
 C_{2L}^k &\text{ на } C_{3L}^k, & Q_{2L} &\text{ на } Q_{3L} \\
 C_{3L}^k &\text{ на } C_{1L}^k, & Q_{3L} &\text{ на } Q_{1L} \\
 C_{4L}^k &\equiv C_{4L}^k, & Q_{4L} &\equiv Q_{4L}
 \end{aligned}$$

с целью представления трансцендентного уравнения относительно собственных параметров λ_k в форме (3.36).

В общем случае при различных граничных условиях по продольным кромкам $y = \pm 1$ собственные числа λ_k являются корнями трансцендентного уравнения типа

$$\begin{aligned}
 \sum_{L=1}^4 X_L th\left(\lambda_k z_L \frac{b}{a}\right) &= 0 & \sum_{L=1}^4 X_L cth\left(\lambda_k z_L \frac{b}{a}\right) &= 0 \\
 \sum_{L=1}^3 \sum_{m=1}^3 X_{Lm} th\left(\lambda_k z_L \frac{b}{a}\right) th\left(\lambda_k z_m \frac{b}{a}\right) &= 0 & & , \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

представляющего собой условие нетривиальности решения системы линейных алгебраических уравнений при удовлетворении однородным граничным условиям по продольным кромкам, где X_L, X_{Lm} – коэффициенты, зависящие от вида граничных операторов (3.29), z_L – корни характеристического полинома восьмой степени, λ_k – собственные числа однородной задачи.

Трансцендентные уравнения общего вида решаются численно с помощью стандартных программ операционной среды MATLAB, существуют определённые трудности при нахождении начальных значений корней. Для решения данного вопроса построен алгоритм асимптотики собственных значений на основе аппарата теории линейных дифференциальных операторов [].

Система однородных функций $\{\Phi_k(y)\}$ не образует ортогонального семейства. Для выполнения краевых условий на торцах $x = \pm 1$ необходимо воспользоваться свойствами однородных функций, аналогичными свойствам, указанным П.Ф. Папковичем, – условием обобщённой ортогональности собственных функций. Воспользуемся условием биортогональности собственных функций прямой и соответствующей сопряжённой задач. Собственная функция сопряжённой задачи строится в рамках аппарата теории линейных дифференциальных операторов.

В пространстве восьмикомпонентных векторов ψ_k краевая задача по координате y для собственной функции

$$\Phi_k(y) = \sum_{L=1}^4 B_{kL} \operatorname{ch}\left(\lambda_k z_L \frac{b}{a} y\right) \quad (3.38)$$

формулируется следующим образом:

$$\text{при } y = \pm 1 \quad \left. \begin{array}{l} \psi'_k = \lambda_k R \psi_k \\ M(\psi_k) = 0 \end{array} \right\}, \quad (3.39)$$

$$\text{где } \psi_k = (\psi_0^k, \psi_1^k, \dots, \psi_7^k)^* = \left(\Phi_k, \frac{1}{\lambda_k} \frac{d\Phi_k}{dy}, \dots, \frac{1}{\lambda_k^7} \frac{d^7\Phi_k}{dy^7} \right)^*, \quad (3.40)$$

индекс «*» здесь и ниже означает операцию транспонирования.

С помощью разложения (3.40) обыкновенное дифференциальное уравнение восьмого порядка (3.30) сводится к системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\psi'_k = \lambda_k R \psi_k$$

с весовой квадратной матрицей

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_{80}}{K_{08}}\left(\frac{b}{a}\right)^8 & 0 & -\frac{K_{62}}{K_{08}}\left(\frac{b}{a}\right)^6 & 0 & -\frac{K_{44}}{K_{08}}\left(\frac{b}{a}\right)^4 & 0 & -\frac{K_{26}}{K_{08}}\left(\frac{b}{a}\right)^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Граничные условия, определяющие вектор ψ_k при $y = \pm 1$, с учётом (3.31) и (3.40) сводятся к системе

$$\left. \begin{aligned} P_{60}^y \left(\frac{b}{a}\right)^6 \psi_0^k + P_{42}^y \left(\frac{b}{a}\right)^4 \psi_2^k + P_{24}^y \left(\frac{b}{a}\right)^2 \psi_4^k + P_{06}^y \psi_6^k &= 0 \\ Q_{51}^y \left(\frac{b}{a}\right)^5 \psi_1^k + Q_{33}^y \left(\frac{b}{a}\right)^3 \psi_3^k + Q_{15}^y \left(\frac{b}{a}\right) \psi_5^k &= 0 \\ R_{40} \left(\frac{b}{a}\right)^4 \psi_0^k + R_{22} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \psi_2^k + R_{04} \psi_4^k &= 0 \\ R_{60}^y \left(\frac{b}{a}\right)^6 \psi_0^k + R_{42}^y \left(\frac{b}{a}\right)^4 \psi_2^k + R_{24}^y \left(\frac{b}{a}\right)^2 \psi_4^k + R_{06}^y \psi_6^k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

или $M(\psi_k) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда} \quad \psi_2^k &= \frac{P_2}{P_0} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \psi_0^k \\ \psi_4^k &= \frac{P_4}{P_0} \left(\frac{b}{a}\right)^4 \psi_0^k \\ \psi_6^k &= \frac{P_6}{P_0} \left(\frac{b}{a}\right)^6 \psi_0^k \\ \psi_5^k &= -\frac{Q_{51}^y}{Q_{15}^y} \left(\frac{b}{a}\right)^4 \psi_1^k - \frac{Q_{33}^y}{Q_{15}^y} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \psi_3^k, \end{aligned} \quad (3.43)$$

где

$$\begin{aligned}
P_0 &= R_{04} \left(P_{42}^y R_{06}^y - P_{06}^y R_{42}^y \right) - R_{22} \left(P_{24}^y R_{06}^y - P_{06}^y R_{24}^y \right) \\
P_2 &= R_{40} \left(P_{24}^y R_{06}^y - P_{06}^y R_{24}^y \right) + R_{04} \left(P_{06}^y R_{60}^y - P_{60}^y R_{06}^y \right) \\
P_4 &= -R_{22} \left(P_{06}^y R_{60}^y - P_{60}^y R_{06}^y \right) + R_{40} \left(P_{06}^y R_{42}^y - P_{42}^y R_{06}^y \right) \\
P_6 &= R_{04} \left(P_{60}^y R_{42}^y - P_{42}^y R_{60}^y \right) - R_{22} \left(P_{60}^y R_{24}^y - P_{24}^y R_{60}^y \right) + \\
&\quad + R_{40} \left(P_{42}^y R_{24}^y - P_{24}^y R_{42}^y \right)
\end{aligned}$$

Собственная функция сопряжённой задачи строится в рамках аппарата теории линейных дифференциальных операторов.

В соответствии с теоремами теории линейных дифференциальных операторов оператор, представляющий собственную вектор-функцию сопряжённой задачи φ_k , является сопряжённым к дифференциальному оператору, представляющему собственную вектор-функцию прямой задачи ψ_k (3.40). Обыкновенное дифференциальное уравнение восьмого порядка относительно собственной функции сопряжённой задачи $F_k(y)$ и уравнение, содержащее собственную функцию прямой задачи $\Phi_k(y)$ (3.30), являются самосопряжёнными.

Для сопряжённой функции

$$F_k(y) = \sum_{L=1}^4 A_{kL} sh \left(\bar{\lambda}_k z_L \frac{b}{a} y \right) \quad (3.44)$$

$$\text{при } y = \pm 1 \quad \left. \begin{aligned} \varphi_k' &= -\bar{\lambda}_k R^* \varphi_k \\ N(\varphi_k) &= 0 \end{aligned} \right\} , \quad (3.45)$$

$$\text{где } \varphi_k = \left(\varphi_0^k, \varphi_1^k, \dots, \varphi_7^k \right)^* = \left(F_k, \frac{1}{\bar{\lambda}_k} \frac{dF_k}{dy}, \dots, \frac{1}{\bar{\lambda}_k^7} \frac{d^7 F_k}{dy^7} \right)^* \quad (3.46)$$

При известных собственных параметрах λ_k и, следовательно, константах B_{kL} (3.38) постоянные A_{kL} (3.44) определяются по (3.45).

Сопряжённые краевые условия по продольным кромкам при $y = \pm 1$ определяются равенством

$$\left(\psi_k^* \bar{\varphi}_k \right) \Big|_{y=\pm 1} = 0 \quad (3.47)$$

или линейными комбинациями при наличии связей (3.43) между компонентами вектора ψ_k

$$\begin{aligned} \psi_0^k \left(\bar{\varphi}_0^k + k_2 \bar{\varphi}_2^k + k_4 \bar{\varphi}_4^k + k_6 \bar{\varphi}_6^k \right) &= 0 \\ \psi_1^k \left(\bar{\varphi}_1^k + k_1 \bar{\varphi}_5^k \right) &= 0 \\ \psi_3^k \left(\bar{\varphi}_3^k + k_3 \bar{\varphi}_5^k \right) &= 0 \\ \psi_7^k \bar{\varphi}_7^k &= 0 \end{aligned} \quad , \quad (3.48)$$

где

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{P_2}{P_0} \left(\frac{b}{a} \right)^2, & k_1 &= -\frac{Q_{51}^y}{Q_{15}^y} \left(\frac{b}{a} \right)^4 \\ k_4 &= \frac{P_4}{P_0} \left(\frac{b}{a} \right)^4, & k_3 &= -\frac{Q_{33}^y}{Q_{15}^y} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \\ k_6 &= \frac{P_6}{P_0} \left(\frac{b}{a} \right)^6, \end{aligned}$$

Однородные граничные условия для векторов φ_k и $\bar{\varphi}_k$ совпадают. Относительно искомой собственной функции сопряжённой задачи $F_k(y)$ по продольным кромкам при $y = \pm 1$

$$\begin{aligned} F_k + \frac{P_2}{P_0} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \frac{1}{\bar{\lambda}_k^2} \frac{d^2 F_k}{dy^2} + \frac{P_4}{P_0} \left(\frac{b}{a} \right)^4 \frac{1}{\bar{\lambda}_k^4} \frac{d^4 F_k}{dy^4} + \frac{P_6}{P_0} \left(\frac{b}{a} \right)^6 \frac{1}{\bar{\lambda}_k^6} \frac{d^6 F_k}{dy^6} &= 0 \\ \frac{1}{\bar{\lambda}_k} \frac{dF_k}{dy} - \frac{Q_{51}^y}{Q_{15}^y} \left(\frac{b}{a} \right)^4 \frac{1}{\bar{\lambda}_k^5} \frac{d^5 F_k}{dy^5} &= 0 \\ \frac{1}{\bar{\lambda}_k^3} \frac{d^3 F_k}{dy^3} - \frac{Q_{33}^y}{Q_{15}^y} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \frac{1}{\bar{\lambda}_k^5} \frac{d^5 F_k}{dy^5} &= 0 \\ \frac{1}{\bar{\lambda}_k^7} \frac{d^7 F_k}{dy^7} &= 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Константы A_{kL} (3.44) являются решением системы четырёх однородных

линейных алгебраических уравнений при удовлетворении собственных функций сопряженной задачи граничным условиям (3.49)

$$\sum_{L=1}^4 C_{rL}^k A_{kL} = 0, \quad r = 1, 2, 3, 4 \quad (3.50)$$

Здесь

$$C_{1L}^k = \hat{Q}_{1L} ch\left(\bar{\lambda}_k z_L \frac{b}{a}\right), \quad \text{где } \hat{Q}_{1L} = \left[1 - \frac{Q_{51}^y}{Q_{15}^y} \left(\frac{b}{a}\right)^4 \left(z_L \frac{b}{a}\right)^4\right] \left(z_L \frac{b}{a}\right)$$

$$C_{2L}^k = \hat{Q}_{2L} ch\left(\bar{\lambda}_k z_L \frac{b}{a}\right), \quad \text{где } \hat{Q}_{2L} = \left[1 - \frac{Q_{33}^y}{Q_{15}^y} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(z_L \frac{b}{a}\right)^2\right] \left(z_L \frac{b}{a}\right)^3$$

$$C_{3L}^k = \hat{Q}_{3L} sh\left(\bar{\lambda}_k z_L \frac{b}{a}\right), \quad \text{где } \hat{Q}_{3L} = 1 + \frac{P_2}{P_0} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(z_L \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{P_4}{P_0} \left(\frac{b}{a}\right)^4 \left(z_L \frac{b}{a}\right)^4 + \frac{P_6}{P_0} \left(\frac{b}{a}\right)^6 \left(z_L \frac{b}{a}\right)^6$$

$$C_{4L}^k = \hat{Q}_{4L} ch\left(\bar{\lambda}_k z_L \frac{b}{a}\right), \quad \text{где } \hat{Q}_{4L} = \left(z_L \frac{b}{a}\right)^7$$

Произвольные постоянные A_{kL} аналогично константам B_{kL} вычисляются по формуле (3.35) с соответствующей заменой λ_k на $\bar{\lambda}_k$ и Q_{rL} на \hat{Q}_{rL} , $r = 1, 2, 3, 4$ в выражениях (3.34). Порядок следования граничных условий (3.50) изменён с целью использования формулы (3.35).

Условие обобщённой ортогональности, которому подчиняются однородные функции прямой (3.38), (3.40) и сопряжённой (3.44), (3.46) задач в векторном пространстве, содержит весовую матрицу R (3.41)

$$\int_{-1}^1 \left(\bar{\varphi}_k^* R \psi_i\right) dy = \begin{cases} 0, & \lambda_k \neq \bar{\lambda}_i \\ H_i, & \lambda_k = \bar{\lambda}_i \end{cases}, \quad (3.51)$$

где H_i – норма обобщённых собственных функций.

Норма H_i вычисляется по формуле

$$H_i = - \left[\frac{K_{80}}{K_{08}} \left(\frac{b}{a}\right)^8 (M_{07})_i + \frac{K_{62}}{K_{08}} \left(\frac{b}{a}\right)^6 (M_{27})_i + \frac{K_{44}}{K_{08}} \left(\frac{b}{a}\right)^4 (M_{47})_i + \frac{K_{26}}{K_{08}} \left(\frac{b}{a}\right)^2 (M_{67})_i \right. \\ \left. + \left[(M_{21})_i + (M_{43})_i + (M_{65})_i \right] + \left[(N_{10})_i + (N_{32})_i + (N_{54})_i + (N_{76})_i \right] \right], \quad (3.52)$$

где $(M_{pq})_i = \sum_{T=1}^4 \left[\sum_{L=1}^4 (J_{LT})_i \left(z_L \frac{b}{a} \right)^{(p)} B_{iL} \right] \left(z_T \frac{b}{a} \right)^{(q)} \bar{A}_{iT}$, $p=0,2,4,6$, $q=1,3,5,7$

$(N_{rs})_i = \sum_{T=1}^4 \left[\sum_{L=1}^4 (I_{LT})_i \left(z_L \frac{b}{a} \right)^{(r)} B_{iL} \right] \left(z_T \frac{b}{a} \right)^{(s)} \bar{A}_{iT}$, $r=1,3,5,7$, $s=0,2,4,6$

$(I_{LT})_i = \int_{-1}^1 sh \left(\lambda_i z_L \frac{b}{a} y \right) sh \left(\bar{\lambda}_i z_T \frac{b}{a} y \right) dy$

$(J_{LT})_i = \int_{-1}^1 ch \left(\lambda_i z_L \frac{b}{a} y \right) ch \left(\bar{\lambda}_i z_T \frac{b}{a} y \right) dy$

В результате удовлетворения краевых условий по поперечным кромкам $x = \pm 1$ следует найти коэффициенты B_k разложений (3.22), (3.27) для искомой потенциальной функции $\Phi(x, y)$. Предлагается два подхода к решению данной проблемы. Рассмотрим первый подход, который предполагает переход к задаче Коши в пространстве вектор-функций. Второй вариант предполагает использование специальных граничных функций.

Неоднородные граничные условия по торцам (3.21) с учётом линейных дифференциальных операторов (3.2), разложения (3.38) и формул перехода в пространство вектор-функций (3.40) для компонент восьми-вектора ψ_k сводятся к системе

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{b^6} \sum_{k=1}^{\infty} B_k \left[P_{60}^x \left(\frac{b}{a} \right)^6 \psi_0^k + P_{42}^x \left(\frac{b}{a} \right)^4 \psi_2^k + P_{24}^x \left(\frac{b}{a} \right)^2 \psi_4^k + P_{06}^x \psi_6^k \right] \lambda_k^6 ch(\lambda_k) - N_x^T - N_x^H &= 0 \\ \frac{1}{b^6} \sum_{k=1}^{\infty} B_k \left[Q_{51}^x \left(\frac{b}{a} \right)^5 \psi_1^k + Q_{33}^x \left(\frac{b}{a} \right)^3 \psi_3^k + Q_{15}^x \left(\frac{b}{a} \right) \psi_5^k \right] \lambda_k^6 sh(\lambda_k) + L_{N_{xy}} (\Phi_{01} + \Phi_{02}) - \\ &- N_{xy}^T - N_{xy}^H = 0 \\ \frac{1}{b^4} \sum_{k=1}^{\infty} B_k \left[R_{40} \left(\frac{b}{a} \right)^4 \psi_0^k + R_{22} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \psi_2^k + R_{04} \psi_4^k \right] \lambda_k^4 ch(\lambda_k) &= 0 \\ \frac{1}{b^6} \sum_{k=1}^{\infty} B_k \left[R_{60}^x \left(\frac{b}{a} \right)^6 \psi_0^k + R_{42}^x \left(\frac{b}{a} \right)^4 \psi_2^k + R_{24}^x \left(\frac{b}{a} \right)^2 \psi_4^k + R_{06}^x \psi_6^k \right] \lambda_k^6 ch(\lambda_k) - M_x^T - M_x^H &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned}
\text{Здесь } L_{N_{xy}} \Phi_{01} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \lambda_{mx} \lambda_{ny} \left(Q_{51}^x \lambda_{mx}^4 + Q_{33}^x \lambda_{mx}^2 \lambda_{ny}^2 + \right. \\
&\quad \left. + Q_{15}^x \lambda_{ny}^4 \right) \sin \left[(2m-1) \frac{\pi}{2} \right] \sin \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} y \right] \\
L_{N_{xy}} \Phi_{02} &= - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{L=1}^4 B_{mL} \lambda_{mx}^6 z_L \left(Q_{51}^x - Q_{33}^x z_L^2 + Q_{15}^x z_L^4 \right) \sin \left[(2m-1) \frac{\pi}{2} \right] sh(\lambda_{mL} y)
\end{aligned} \tag{3.54}$$

в соответствии с обозначениями (3.23) и (3.25).

$$\begin{aligned}
\text{или} \quad L_{N_{xy}} \Phi_{01} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_{mn} \sin \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} y \right] \\
L_{N_{xy}} \Phi_{02} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{L=1}^4 \hat{B}_{mL} sh(\lambda_{mL} y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}_{mn} &= f_{mn} \lambda_{mx} \lambda_{ny} \left(Q_{51}^x \lambda_{mx}^4 + Q_{33}^x \lambda_{mx}^2 \lambda_{ny}^2 + Q_{15}^x \lambda_{ny}^4 \right) \sin \left[(2m-1) \frac{\pi}{2} \right] \\
\hat{B}_{mL} &= -B_{mL} \lambda_{mx}^6 z_L \left(Q_{51}^x - Q_{33}^x z_L^2 + Q_{15}^x z_L^4 \right) \sin \left[(2m-1) \frac{\pi}{2} \right]
\end{aligned}$$

После двойного дифференцирования третьего граничного условия (3.53) по прогибу и составления необходимых линейных комбинаций уравнения (3.53), содержащие чётные элементы вектора ψ_k , приводятся к треугольному виду

$$\begin{aligned}
a_{10} \psi_0^k + a_{12} \psi_2^k + a_{14} \psi_4^k + a_{16} \psi_6^k - M_x^T - M_x^H &= 0 \\
a_{22} \psi_2^k + a_{24} \psi_4^k + a_{26} \psi_6^k &= 0 \\
a_{34} \psi_4^k + a_{35} \psi_6^k - Pol(N_x^T, N_x^H) &= 0
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Коэффициенты системы уравнений (3.55) определяются суммами

$$a_{ij} = \hat{a}_{ij} \sum_{k=1}^{\infty} B_k (\lambda_k)^6 ch(\lambda_k), \quad i=1,2,3 \quad j=0,2,4,6$$

Так как граничные условия по продольным кромкам панели при $y = \pm 1$ (3.21), (3.29), (3.31) предварительно удовлетворены, прогиб w в угловых точках отсутствует, и, кроме того, в силу симметрии рассматриваемой краевой задачи выражение, полученное при дифференцировании третьего равенства (3.53), и само это равенство эквивалентны.

Граничное уравнение (3.53), содержащее нечётные компоненты вектора

$$a_{41}\psi_1^k + a_{43}\psi_3^k + a_{45}\psi_5^k + L_{N_{xy}}\Phi_{01} + L_{N_{xy}}\Phi_{02} - N_{xy}^T - N_{xy}^H = 0 \quad (3.56)$$

Коэффициенты уравнения (3.56) определяются суммами

$$a_{ij} = \hat{a}_{ij} \sum_{k=1}^{\infty} B_k (\lambda_k)^6 sh(\lambda_k), \quad i = 4, \quad j = 1, 3, 5$$

На основании (3.54), (3.55) и (3.56) условия закрепления поперечных кромок (3.53) предлагается трактовать как разложение вектор-функции восьмого порядка

$$\Theta(y) = \begin{pmatrix} K_{06}f_6(y) + L_0\Phi_0^{T,H} \\ K_{11}\omega_1(y) \\ K_{26}f_6(y) + L_2\Phi_0^{T,H} \\ K_{31}\omega_1(y) + K_{35}\omega_5(y) + L_3\Phi_0(y) \\ K_{46}f_6(y) + L_4\Phi_0^{T,H} \\ K_{51}\omega_1(y) + K_{53}\omega_3(y) + L_5\Phi_0(y) \\ K_{66}f_6(y) \\ K_{77}\omega_7(y) \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

по системе собственных восьмикомпонентных векторов ψ_k с выделением чётной и нечётной составляющих:

$$\begin{pmatrix} K_{06}f_6(y) + L_0\Phi_0^{T,H} \\ 0 \\ K_{26}f_6(y) + L_2\Phi_0^{T,H} \\ 0 \\ K_{46}f_6(y) + L_4\Phi_0^{T,H} \\ 0 \\ K_{66}f_6(y) \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k (\lambda_k)^6 ch(\lambda_k) \psi_k(y) \begin{pmatrix} 0 \\ K_{11}\omega_1(y) \\ 0 \\ K_{31}\omega_1(y) + K_{35}\omega_5(y) + L_3\Phi_0(y) \\ 0 \\ K_{51}\omega_1(y) + K_{53}\omega_3(y) + L_5\Phi_0(y) \\ 0 \\ K_{77}\omega_7(y) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k (\lambda_k)^6 sh(\lambda_k) \psi_k(y) \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \text{Здесь} \quad K_{66} &= \hat{K}_{66} \left(\frac{a}{b} \right)^0, & \hat{K}_{66} &= 1 \\ K_{46} &= \hat{K}_{46} \left(\frac{a}{b} \right)^2, & \hat{K}_{46} &= \frac{R_{04}P_{42}^x - R_{40}P_{60}^x}{R_{40}P_{24}^x - R_{22}P_{42}^x} \\ K_{26} &= \hat{K}_{26} \left(\frac{a}{b} \right)^4, & \hat{K}_{26} &= - \left(\frac{R_{22}}{R_{40}} \hat{K}_{46} + \frac{R_{04}}{R_{40}} \hat{K}_{66} \right) \\ K_{06} &= \hat{K}_{06} \left(\frac{a}{b} \right)^6, & \hat{K}_{06} &= - \left(\frac{R_{42}^x}{R_{60}^x} \hat{K}_{26} + \frac{R_{24}^x}{R_{60}^x} \hat{K}_{46} + \frac{R_{06}^x}{R_{60}^x} \hat{K}_{66} \right) \end{aligned}$$

$$K_{11} = 1$$

$$K_{31} = - \frac{Q_{51}^x}{Q_{33}^x} \left(\frac{b}{a} \right)^2, \quad K_{35} = - \frac{Q_{15}^x}{Q_{33}^x} \left(\frac{a}{b} \right)^2$$

$$K_{51} = - \frac{Q_{51}^x}{Q_{15}^x} \left(\frac{b}{a} \right)^4, \quad K_{53} = - \frac{Q_{33}^x}{Q_{15}^x} \left(\frac{b}{a} \right)^2$$

$$K_{77} = 1$$

$$L_3 \Phi_0(y) = - \frac{a^3 b^3}{Q_{33}^x} \left(L_{N_{xy}} \Phi_{01} + L_{N_{xy}} \Phi_{02} - N_{xy}^T - N_{xy}^H \right)$$

$$L_5 \Phi_0(y) = - \frac{a b^5}{Q_{15}^x} \left(L_{N_{xy}} \Phi_{01} + L_{N_{xy}} \Phi_{02} - N_{xy}^T - N_{xy}^H \right)$$

$L_0 \Phi_0^{T,H}$ определяется линейными комбинациями температурных усилий N_x^T , усилий от натяжений N_x^H , температурных моментов M_x^T , моментов от натяжения M_x^H ; $L_2 \Phi_0^{T,H}$, $L_4 \Phi_0^{T,H}$ определяются линейными комбинациями температурных усилий N_x^T и усилий от натяжений N_x^H .

С использованием условия расширенной ортогональности (3.51) разложение (3.58) может быть представлено как скалярное произведение

$$\left(\Omega_k \left(\begin{array}{c} K_{66} f_6 \\ K_{11} \omega_1 \\ K_{31} \omega_1 + K_{35} \omega_5 \\ K_{51} \omega_1 + K_{53} \omega_3 \\ K_{77} \omega_7 \end{array} \right) \right) = C_k, \quad K_{66} = K_{11} = K_{77} = 1, \quad (3.59)$$

когда под скалярным произведением в пространстве двух вещественных функций, кусочно-непрерывных в интервале $(-1, +1)$, понимается равенство

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(y)g(y)dy$$

Составляющие вектора

$$\Omega_k = (\Omega_1^k \ \Omega_2^k \ \Omega_3^k \ \Omega_4^k \ \Omega_5^k) \quad (3.60)$$

определяются выражениями

$$\begin{aligned} \Omega_1^k = th(\lambda_k) \left\{ \right. & \left[-\frac{K_{80}}{K_{08}} \left(\frac{b}{a}\right)^8 \frac{1}{\bar{\lambda}_k^7} \frac{d^7 \bar{F}_k}{dy^7} \right] K_{06} + \\ & + \left[\frac{1}{\bar{\lambda}_k} \frac{d\bar{F}_k}{dy} - \frac{K_{62}}{K_{08}} \left(\frac{b}{a}\right)^6 \frac{1}{\bar{\lambda}_k^7} \frac{d^7 \bar{F}_k}{dy^7} \right] K_{26} + \\ & + \left[\frac{1}{\bar{\lambda}_k^3} \frac{d^3 \bar{F}_k}{dy^3} - \frac{K_{44}}{K_{08}} \left(\frac{b}{a}\right)^4 \frac{1}{\bar{\lambda}_k^7} \frac{d^7 \bar{F}_k}{dy^7} \right] K_{46} + \\ & \left. + \left[\frac{1}{\bar{\lambda}_k^5} \frac{d^5 \bar{F}_k}{dy^5} - \frac{K_{26}}{K_{08}} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{1}{\bar{\lambda}_k^7} \frac{d^7 \bar{F}_k}{dy^7} \right] K_{66} \right\} \end{aligned}$$

$$\Omega_2^k = -\bar{F}_k, \quad \Omega_3^k = -\frac{1}{\bar{\lambda}_k^2} \frac{d^2 \bar{F}_k}{dy^2}, \quad \Omega_4^k = -\frac{1}{\bar{\lambda}_k^4} \frac{d^4 \bar{F}_k}{dy^4}, \quad \Omega_5^k = -\frac{1}{\bar{\lambda}_k^6} \frac{d^6 \bar{F}_k}{dy^6}$$

Правая часть уравнения (3.59) C_k известным образом зависит от частных интегралов $\Phi_{01}(x, y)$, $\Phi_{02}(x, y)$ и вычисляется по формуле

$$C_k = \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\bar{\lambda}_k^2} \frac{d^2 \bar{F}_k}{dy^2} L_3 \Phi_0(y) + \frac{1}{\bar{\lambda}_k^4} \frac{d^4 \bar{F}_k}{dy^4} L_5 \Phi_0(y) \right] dy \quad (3.61)$$

С учётом (3.44), (3.53) и (3.58) интеграл (3.61) удобно вычислять как суммы

$$C_k = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn}^k \right) + P_m^k \right] - C_k^T - C_k^H, \quad (3.62)$$

где

$$Q_{mn}^k = \sum_{T=1}^4 \left[\hat{f}_{mn}(\hat{I}_T)_{nk} \right] \hat{B}_{kT}, \quad P_m^k = \sum_{T=1}^4 \left[\sum_{L=1}^4 \hat{B}_{mL}(\hat{I}_{LT})_{mk} \right] \hat{B}_{kT}$$

Константы \hat{f}_{mn} и \hat{B}_{mL} соответствуют обозначениям (3.54),

$$\hat{B}_{kT} = \left[-\frac{a^3 b^3}{Q_{33}^x} - \frac{ab^5}{Q_{15}^x} \left(z_L \frac{b}{a} \right)^2 \right] \left(z_L \frac{b}{a} \right)^2 \bar{A}_{kL}$$

$$\left(\hat{I}_T \right)_{nk} = \int_{-1}^1 \sin \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} y \right] sh \left(\bar{\lambda}_k z_T \frac{b}{a} y \right) dy$$

$$\left(\hat{I}_{LT} \right)_{mk} = \int_{-1}^1 sh(\lambda_{mL} y) sh \left(\bar{\lambda}_k z_T \frac{b}{a} y \right) dy$$

$$C_k^T \text{ от } N_{xy}^T = \int_{-1}^1 \left[\left(-\frac{a^3 b^3}{Q_{33}^x} \right) \frac{1}{\bar{\lambda}_k^2} \frac{d^2 \bar{F}_k}{dy^2} + \left(-\frac{ab^5}{Q_{15}^x} \right) \frac{1}{\bar{\lambda}_k^4} \frac{d^4 \bar{F}_k}{dy^4} \right] N_{xy}^T dy$$

$$C_k^H \text{ от } N_{xy}^H = \int_{-1}^1 \left[\left(-\frac{a^3 b^3}{Q_{33}^x} \right) \frac{1}{\bar{\lambda}_k^2} \frac{d^2 \bar{F}_k}{dy^2} + \left(-\frac{ab^5}{Q_{15}^x} \right) \frac{1}{\bar{\lambda}_k^4} \frac{d^4 \bar{F}_k}{dy^4} \right] N_{xy}^H dy$$

Операторы $L_0 \Phi_0^{T,H}$, $L_2 \Phi_0^{T,H}$ и $L_4 \Phi_0^{T,H}$ (3.58) определяют C_k^T от N_x^T , M_x^T и C_k^H от N_x^H , M_x^H .

Искомую вектор-функцию

$$\Theta(y) = \begin{pmatrix} K_{66} f_6(y) \\ K_{11} \omega_1(y) \\ K_{31} \omega_1(y) + K_{35} \omega_5(y) \\ K_{51} \omega_1(y) + K_{53} \omega_3(y) \\ K_{77} \omega_7(y) \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

разложим в ряд по системе нормированных проортгонализованных векторов $Y_k(y)$:

$$\Theta(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k Y_k(y) \quad , \quad (3.64)$$

где $Y_k(y) = \frac{1}{\sqrt{\Gamma_k \Gamma_{k-1}}} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_{kn} \Omega_n$ (3.65)

Здесь Γ_k – определитель Грамма

$$\Gamma_k = \begin{vmatrix} (\Omega_1, \Omega_1) & \dots & (\Omega_1, \Omega_k) \\ \vdots & & \vdots \\ (\Omega_k, \Omega_1) & \dots & (\Omega_k, \Omega_k) \end{vmatrix},$$

Δ_{kn} – алгебраические дополнения элементов Ω_n определителя

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} & & & \Omega_1 \\ & & & \vdots \\ & \Gamma_{k-1} & & \\ & & & \Omega_{k-1} \\ (\Omega_k, \Omega_1) & \dots & (\Omega_k, \Omega_{k-1}) & \Omega_k \end{vmatrix}$$

Составляющие определителя Грамма представляют собой скалярные произведения

$$(\Omega_i, \Omega_j) = \int_{-1}^1 \Omega_i \bar{\Omega}_j^* dy, \quad i, j = 1, 2, \dots, k \quad (3.66)$$

и на основании соотношений для вектора Ω_k (3.66) принимают следующий вид

$$\begin{aligned} (\Omega_i, \Omega_j) = & th(\lambda_i) th(\bar{\lambda}_j) \cdot \\ & \cdot \left\{ \left[(M_{11})_{ij} K_{26} + (M_{13})_{ij} K_{46} + (M_{15})_{ij} K_{66} + (M_{17})_{ij} \Sigma \right] K_{26} + \right. \\ & + \left[(M_{31})_{ij} K_{26} + (M_{33})_{ij} K_{46} + (M_{35})_{ij} K_{66} + (M_{37})_{ij} \Sigma \right] K_{46} + \\ & + \left[(M_{51})_{ij} K_{26} + (M_{53})_{ij} K_{46} + (M_{55})_{ij} K_{66} + (M_{57})_{ij} \Sigma \right] K_{66} + \\ & + \left. \left[(M_{71})_{ij} K_{26} + (M_{73})_{ij} K_{46} + (M_{75})_{ij} K_{66} + (M_{77})_{ij} \Sigma \right] \Sigma \right\} + \\ & + (N_{00})_{ij} + (N_{22})_{ij} + (N_{44})_{ij} + (N_{66})_{ij}, \end{aligned}$$

$$\text{где } \Sigma = - \left[\frac{K_{26}}{K_{08}} \left(\frac{b}{a} \right)^2 K_{66} + \frac{K_{44}}{K_{08}} \left(\frac{b}{a} \right)^4 K_{46} + \frac{K_{62}}{K_{08}} \left(\frac{b}{a} \right)^6 K_{26} + \frac{K_{80}}{K_{08}} \left(\frac{b}{a} \right)^8 K_{06} \right]$$

$$(M_{pq})_{ij} = \sum_{T=1}^4 \left[\sum_{L=1}^4 (J_{LT})_{ij} \left(z_L \frac{b}{a} \right)^{(p)} A_{jL} \right] \left(z_T \frac{b}{a} \right)^{(q)} \bar{A}_{iT}, \quad p, q = 1, 3, 5, 7$$

$$(N_{rs})_{ij} = \sum_{T=1}^4 \left[\sum_{L=1}^4 (I_{LT})_{ij} \left(z_L \frac{b}{a} \right)^{(r)} A_{jL} \right] \left(z_T \frac{b}{a} \right)^{(s)} \bar{A}_{iT}, \quad r, s = 0, 2, 4, 6$$

в свою очередь

$$(I_{LT})_{ij} = \int_{-1}^1 sh\left(\lambda_j z_L \frac{b}{a} y\right) sh\left(\bar{\lambda}_i z_T \frac{b}{a} y\right) dy$$

$$(J_{LT})_{ij} = \int_{-1}^1 ch\left(\lambda_j z_L \frac{b}{a} y\right) ch\left(\bar{\lambda}_i z_T \frac{b}{a} y\right) dy$$

Так как векторы $Y_k(y)$ (3.65) являются ортонормированными, для коэффициентов разложения (3.64) с учётом (3.59) и (3.65) справедлива формула

$$\alpha_k = \sum_{n=1}^k C_n \Delta_{kn} \frac{1}{\sqrt{\Gamma_k \Gamma_{k-1}}} \quad (3.67)$$

На основании (3.64), (3.65) и (3.67) определяется любой из компонентов искомой вектор-функции $\Theta(y)$ (3.63), например

$$f_6(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma_k \Gamma_{k-1}} \sum_{i,n=1}^k \Delta_{kn} C_n \Delta_{ki} \Omega_1^i \quad (3.68)$$

Если некоторая функция может быть представлена в виде ряда по системе собственных векторов

$$f(y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k(y) \quad , \quad (3.69)$$

для коэффициентов данного ряда согласно свойству биортогональности справедлива зависимость

$$f_k = \frac{\left(\bar{\varphi}_k^* R f\right)}{\left(\bar{\varphi}_k^* R \psi_k\right)} = \frac{\int_{-1}^1 \left(\bar{\varphi}_k^* R f\right) dy}{\int_{-1}^1 \left(\bar{\varphi}_k^* R \psi_k\right) dy} \quad (3.70)$$

С применением условия обобщённой ортогональности в форме (3.69), (3.70) и (3.51), (3.52) к разложению (3.58) найдена константа B_k , доопределяющая

интеграл $\Phi(x, y)$ (3.27) и, следовательно, общее решение задачи (3.22)

$$B_k = \frac{\hat{H}}{(\lambda_k)^6 \operatorname{ch}(\lambda_k) H_k} \quad (3.71)$$

Здесь

$$\hat{H} = \int_{-1}^1 \left[\bar{\varphi}_k^* R \begin{pmatrix} K_{06} \\ 0 \\ K_{26} \\ 0 \\ K_{46} \\ 0 \\ K_{66} \\ 0 \end{pmatrix} f_6 \right] dy$$

В силу (3.68)

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma_k \Gamma_{k-1}} \sum_{i,n=1}^k \Delta_{kn} C_n \Delta_{ki} (\Omega_{1i}, \Omega_{1k}) ,$$

где $(\Omega_{1i}, \Omega_{1k}) = \frac{1}{\operatorname{th}(\lambda_k)} \int_{-1}^1 \Omega_1^i \Omega_1^k dy =$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{th}(\lambda_i) \left\{ \left[(\hat{M}_{11})_{ik} K_{26} + (\hat{M}_{13})_{ik} K_{46} + (\hat{M}_{15})_{ik} K_{66} + (\hat{M}_{17})_{ik} \Sigma \right] K_{06} + \right. \\ &+ \left[(\hat{M}_{31})_{ik} K_{26} + (\hat{M}_{33})_{ik} K_{46} + (\hat{M}_{35})_{ik} K_{66} + (\hat{M}_{37})_{ik} \Sigma \right] K_{46} + \\ &+ \left[(\hat{M}_{51})_{ik} K_{26} + (\hat{M}_{53})_{ik} K_{46} + (\hat{M}_{55})_{ik} K_{66} + (\hat{M}_{57})_{ik} \Sigma \right] K_{66} + \\ &+ \left. \left[(\hat{M}_{71})_{ik} K_{26} + (\hat{M}_{73})_{ik} K_{46} + (\hat{M}_{75})_{ik} K_{66} + (\hat{M}_{77})_{ik} \Sigma \right] \Sigma \right\} \end{aligned}$$

В свою очередь

$$(\hat{M}_{pq})_{ik} = \sum_{T=1}^4 \left[\sum_{L=1}^4 (\hat{J}_{LT})_{ik} \left(z_L \frac{b}{a} \right)^{(p)} \bar{A}_{iL} \right] \left(z_T \frac{b}{a} \right)^{(q)} \bar{A}_{kT}, \quad p, q = 1, 3, 5, 7 ,$$

причём $(\hat{J}_{LT})_{ik} = \int_{-1}^1 \operatorname{ch} \left(\bar{\lambda}_i z_L \frac{b}{a} y \right) \operatorname{ch} \left(\bar{\lambda}_k z_T \frac{b}{a} y \right) dy$

В общем случае условия закрепления поперечных кромок (3.19), соответствующие достаточно общей трактовке физических граничных условий элементов конструкции, предлагается трактовать как разложение вектор-функции восьмого порядка по системе собственных восьмикомпонентных векторов ψ_k

$$\begin{bmatrix} K_{0i} \\ 0 \\ K_{2i} \\ 0 \\ K_{4i} \\ 0 \\ K_{6i} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0(y) \\ 0 \\ f_2(y) \\ 0 \\ f_4(y) \\ 0 \\ f_6(y) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_0\Phi_0(y) \\ 0 \\ L_2\Phi_0(y) \\ 0 \\ L_4\Phi_0(y) \\ 0 \\ L_6\Phi_0(y) \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k h^u(\lambda_k) \psi_k(y), \quad i = \overline{0,7} \quad (3.72)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ K_{1j} \\ 0 \\ K_{3j} \\ 0 \\ K_{5j} \\ 0 \\ K_{7j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f_1(y) \\ 0 \\ f_3(y) \\ 0 \\ f_5(y) \\ 0 \\ f_7(y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ L_1\Phi_0(y) \\ 0 \\ L_3\Phi_0(y) \\ 0 \\ L_5\Phi_0(y) \\ 0 \\ L_7\Phi_0(y) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k h^{u/4}(\lambda_k) \psi_k(y), \quad j = \overline{0,7}$$

Здесь существенным является выделение чётной и нечётной составляющих.

Несогласованные граничные условия характеризуются тем, что из восьми компонент $f_j(y), j = \overline{0,7}$ (3.72) известны четыре, и непосредственное осуществление процедуры (3.51) не представляется возможным.

С использованием условия расширенной ортогональности (3.51) система (3.72) может быть представлена как скалярное произведение

$$(\Omega_k \Theta(y)) = C_k, \quad (3.73)$$

$$\Theta(y) = (f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7)^*(y)$$

$$\Omega_k = (\Omega_0^k, \Omega_1^k, \dots, \Omega_7^k),$$

C_k известным образом зависят от частных интегралов $\Phi_{0i}(x, y)$, $i=1,2$ (3.22).

Процедура ортогонализации ряда векторов Ω_k позволяет построить выражение для вектор-функции $\Theta(y)$ (3.73)

Если затем к разложению (3.72) применить соотношение обобщённой ортогональности (3.51), формула для искомых констант определяется в явном виде:

$$B_k = \frac{\hat{H}}{h^u(\lambda_k)H_k}$$

Когда обобщённая функция перемещений $\Phi(x, y)$ (3.22) известна, с помощью формул связи (3.2) определяются все компоненты напряжённо-деформированного состояния проектируемых конструктивных элементов.

3.4 Краевые эффекты в уточнённой теории конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов

Цель данного раздела – анализ влияния краевых эффектов на основное НДС конструктивно-анизотропных панелей ЛА и обоснование возможности упрощения математических моделей путём сведения к решению краевых задач для разрешающего уравнения с линейным дифференциальным оператором восьмого порядка. Постановка проблемы и предлагаемый подход к её решению являются новыми разработками и представляют интерес с точки зрения практики проектирования конструктивно-анизотропных панелей с применением КМ для перспективных изделий авиационной техники.

3.4.1 Постановка краевой задачи

С математической точки зрения проблема исследования общего напряжённо-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей, трактуемых как ортотропные, сводится к решению краевой задачи в прямоугольной области для неоднородного линейного дифференциального уравнения восемнадцатого порядка в частных производных относительно искомой потенциальной функции $\Phi(x, y)$

$$L^{(18)}\Phi = q. \quad (3.74)$$

Если в рамках математической модели принимаются во внимание нормальные напряжения, связанные с изгибом рёбер жёсткости в плоскости обшивки и депланацией поперечных сечений при закручивании, разрешающее уравнение задачи представляет собой неоднородное линейное дифференциальное уравнение в частных производных относительно разрешающей функции $\Phi(x, y)$, линейный дифференциальный оператор которого содержит производные чётной степени по каждой из координат. Наибольший порядок смешанных производных – восемнадцатый, максимальный порядок производных по x или y -

двенадцатый

$$\begin{aligned}
 L^{(18)} = & \frac{K_{108}}{a^{10}b^8} \frac{\partial^{18}}{\partial x^{10}\partial y^8} + \frac{K_{810}}{a^8b^{10}} \frac{\partial^{18}}{\partial x^8\partial y^{10}} + \\
 & + \frac{K_{124}}{a^{12}b^4} \frac{\partial^{16}}{\partial x^{12}\partial y^4} + \frac{K_{106}}{a^{10}b^6} \frac{\partial^{16}}{\partial x^{10}\partial y^6} + \frac{K_{88}}{a^8b^8} \frac{\partial^{16}}{\partial x^8\partial y^8} + \frac{K_{610}}{a^6b^{10}} \frac{\partial^{16}}{\partial x^6\partial y^{10}} + \frac{K_{412}}{a^4b^{12}} \frac{\partial^{16}}{\partial x^4\partial y^{12}} + \\
 & + \frac{K_{122}}{a^{12}b^2} \frac{\partial^{14}}{\partial x^{12}\partial y^2} + \frac{K_{104}}{a^{10}b^4} \frac{\partial^{14}}{\partial x^{10}\partial y^4} + \frac{K_{86}}{a^8b^6} \frac{\partial^{14}}{\partial x^8\partial y^6} + \frac{K_{68}}{a^6b^8} \frac{\partial^{14}}{\partial x^6\partial y^8} + \frac{K_{410}}{a^4b^{10}} \frac{\partial^{14}}{\partial x^4\partial y^{10}} + \frac{K_{212}}{a^2b^{12}} \frac{\partial^{14}}{\partial x^2\partial y^{12}} + \\
 & + \frac{K_{120}}{a^{12}} \frac{\partial^{12}}{\partial x^{12}} + \frac{K_{102}}{a^{10}b^2} \frac{\partial^{12}}{\partial x^{10}\partial y^2} + \frac{K_{84}}{a^8b^4} \frac{\partial^{12}}{\partial x^8\partial y^4} + \frac{K_{66}}{a^6b^6} \frac{\partial^{12}}{\partial x^6\partial y^6} + \frac{K_{48}}{a^4b^8} \frac{\partial^{12}}{\partial x^4\partial y^8} + \frac{K_{210}}{a^2b^{10}} \frac{\partial^{12}}{\partial x^2\partial y^{10}} + \\
 & + \frac{K_{012}}{b^{12}} \frac{\partial^{12}}{\partial y^{12}} + \\
 & + \frac{K_{100}}{a^{10}} \frac{\partial^{10}}{\partial x^{10}} + \frac{K_{82}}{a^8b^2} \frac{\partial^{10}}{\partial x^8\partial y^2} + \frac{K_{64}}{a^6b^4} \frac{\partial^{10}}{\partial x^6\partial y^4} + \frac{K_{46}}{a^4b^6} \frac{\partial^{10}}{\partial x^4\partial y^6} + \frac{K_{28}}{a^2b^8} \frac{\partial^{10}}{\partial x^2\partial y^8} + \\
 & + \frac{K_{010}}{b^{10}} \frac{\partial^{10}}{\partial y^{10}} + \\
 & + \frac{K_{80}}{a^8} \frac{\partial^8}{\partial x^8} + \frac{K_{62}}{a^6b^2} \frac{\partial^8}{\partial x^6\partial y^2} + \frac{K_{44}}{a^4b^4} \frac{\partial^8}{\partial x^4\partial y^4} + \frac{K_{26}}{a^2b^6} \frac{\partial^8}{\partial x^2\partial y^6} + \\
 & + \frac{K_{08}}{b^8} \frac{\partial^8}{\partial y^8}
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

Коэффициенты (3.75) уравнения $K_{12-i,i}, i=0,2,4,6,\dots,12$ зависят от упругих и геометрических параметров конструкции.

Все слагаемые, входящие в левую часть уравнения (3.74), (3.75) и представляющие собой производные более высокого порядка, чем восьмой, соответствуют краевым эффектам при исследовании напряжённо-деформированного состояния, весьма быстро затухающим от краёв.

Линейные дифференциальные операторы связи кинематических и статических компонентов НДС с разрешающей потенциальной функцией $\Phi(x, y)$ строятся аналогично (?) и содержат постоянные коэффициенты, которые зависят от упругих свойств материала и геометрических параметров конструкции; $x = x/a$, $y = y/b$ – безразмерные координаты, отнесённые к полудлине a и к

ширине панели b , соответственно.

Линейные дифференциальные операторы связи (?) для симметричных компонентов НДС так же, как и линейный дифференциальный оператор разрешающего уравнения (3.75), содержат производные чётной степени по каждой из координат. Косо-симметричные компоненты НДС определяются нечётными производными.

Общее НДС, включая краевые эффекты и основное НДС, определяется решением краевых задач и анализируется в рамках разрешающего уравнения (3.74), (3.75).

Краевая задача общего вида в прямоугольной области представлена условиями упругой заделки

$$\begin{aligned} \text{при } x = const \quad (\gamma_1 u_0 + \delta_1 N_x) &= (\gamma_2 v_0 + \delta_2 N_{xy}) = (\gamma_3 w + \delta_3 \bar{Q}_x) = (\gamma_4 w'_x + \delta_4 M_x) = \\ &= (\gamma_5 w''_{xy} + \delta_5 C_x) = [\gamma_6 (u_4)_1 + \delta_6 B_{xy}] = 0 \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \text{при } y = const \quad (\alpha_1 u_0 + \beta_1 N_{yx}) &= (\alpha_2 v_0 + \beta_2 N_y) = (\alpha_3 w + \beta_3 \bar{Q}_y) = (\alpha_4 w'_y + \beta_4 M_y) = \\ &= (\alpha_5 w''_{xy} + \beta_5 C_y) = [\alpha_6 (u_4)_2 + \beta_6 B_{yx}] = 0 \end{aligned} \quad (3.77)$$

коэффициенты $\gamma_i, \delta_i, \alpha_i, \beta_i, i = 1, 2, \dots, 6$ меняются от 0 до 1,

$N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}, M_x, M_y, \bar{Q}_x, \bar{Q}_y, C_x, C_y, B_{xy}, B_{yx}$ - внутренние силовые факторы, причем C_x, C_y - изгибающие моменты в плоскости обшивки, B_{xy}, B_{yx} - бимоменты.

Равенства (3.76), (3.77) позволяют рассмотреть все возможные варианты закрепления граничных кромок в отношении связанных плоской задачи и задачи изгиба: защемление, скользящую заделку, шарнирное закрепление, свободный край. Граничные условия могут быть кинематическими, статическими и смешанными.

Влияние остаточных температурных напряжений, имеющих место при охлаждении после завершения процесса отверждения, а также предварительного натяжения армирующих волокон на несущую способность конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов представляется возможным оценить в том случае, когда граничные условия являются

несогласованными, а решение строится в одинарных тригонометрических рядах либо с использованием метода однородных решений.

Конкретные исследования связаны с условиями закрепления панелей в составе проектируемой конструкции.

3.4.2 Построение точного общего решения для согласованных граничных условий на части контура

Решение краевых задач в прямоугольной области для уравнения (3.74)

$$L^{(18)}\Phi = q$$

с линейным дифференциальным оператором, который содержит производные чётной степени по каждой из координат (3.75), построено в замкнутом виде в одинарных тригонометрических рядах для частного случая граничных условий по двум противоположным краям:

при $y = 0$ и $y = 1$

$$\begin{aligned} u_0[x,0] = N_y[x,0] = w[x,0] = M_y[x,0] = C_y[x,0] = B_{yx}[x,0] = 0 \\ u_0[x,1] = N_y[x,1] = w[x,1] = M_y[x,1] = C_y[x,1] = B_{yx}[x,1] = 0 \end{aligned} \quad (3.78)$$

Эти условия принято называть согласованными: в отношении изгиба они соответствуют шарниру, а в отношении плоской задачи – скользящей заделке в тангенциальном направлении, когда часть контура панели нагружена потоками касательных сил. Панель по границе, перпендикулярной оси y , нагружена потоками касательных сил N_{yx} , которые уравниваются нормальными усилиями N_x на границе и площадках, перпендикулярных оси x .

Условия на торцах произвольны и могут быть условиями упругой заделки в симметричной либо в несимметричной краевых задачах

Разрешающая функция $\Phi(x, y)$ – обобщённая функция перемещений, удовлетворяющая (3.78), (?) и затем – (3.76) или (?), раскладывается в одинарный

ряд по системе тригонометрических функций

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \Phi_n(x) \sin(n\pi y) \quad , \quad (3.79)$$

где $\Phi_n(x)$ подлежит определению.

При решении задачи общего вида в отношении краевых условий по поперечным кромкам в разложении (3.79) для $\Phi_n(x)$ следует сохранить и чётные, и нечётные функции. С точностью до двенадцати произвольных постоянных обобщённая функция перемещений

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^6 A_{nL} \operatorname{sh}(\lambda_{nL} x) + \sum_{L=1}^6 B_{nL} \operatorname{ch}(\lambda_{nL} x) + \Phi_{n\psi/n} \right] \sin(n\pi y) \quad (3.80)$$

Здесь $\Phi_{n\psi/n}$ - частный интеграл обыкновенного неоднородного линейного дифференциального уравнения двенадцатого порядка для $\Phi_n(x)$

$$\frac{K_{12}}{a^{12}} \frac{d^{12}\Phi_n}{dx^{12}} + \frac{K_{10}}{a^{10}} \frac{d^{10}\Phi_n}{dx^{10}} + \frac{K_8}{a^8} \frac{d^8\Phi_n}{dx^8} + \frac{K_6}{a^6} \frac{d^6\Phi_n}{dx^6} + \frac{K_4}{a^4} \frac{d^4\Phi_n}{dx^4} + \frac{K_2}{a^2} \frac{d^2\Phi_n}{dx^2} + K_0 \Phi_n = q_n \quad (3.81)$$

$$K_{12} = K_{120} - K_{122}\lambda_{ny}^2 + K_{124}\lambda_{ny}^4$$

$$K_{10} = K_{100} - K_{102}\lambda_{ny}^2 + K_{104}\lambda_{ny}^4 - K_{106}\lambda_{ny}^6 + K_{108}\lambda_{ny}^8$$

$$K_8 = K_{80} - K_{82}\lambda_{ny}^2 + K_{84}\lambda_{ny}^4 - K_{86}\lambda_{ny}^6 + K_{88}\lambda_{ny}^8 - K_{810}\lambda_{ny}^{10}$$

$$K_6 = -K_{62}\lambda_{ny}^2 + K_{64}\lambda_{ny}^4 - K_{66}\lambda_{ny}^6 + K_{68}\lambda_{ny}^8 - K_{610}\lambda_{ny}^{10}$$

$$K_4 = +K_{44}\lambda_{ny}^4 - K_{46}\lambda_{ny}^6 + K_{48}\lambda_{ny}^8 - K_{410}\lambda_{ny}^{10} + K_{412}\lambda_{ny}^{12}$$

$$K_2 = -K_{26}\lambda_{ny}^6 + K_{28}\lambda_{ny}^8 - K_{210}\lambda_{ny}^{10} + K_{212}\lambda_{ny}^{12}$$

$$K_0 = +K_{08}\lambda_{ny}^8 - K_{010}\lambda_{ny}^{10} + K_{012}\lambda_{ny}^{12}$$

$$\lambda_{nL} = \lambda_{ny} a z_L, \quad \lambda_{ny} = \frac{n\pi}{b},$$

z_L - корни соответствующего характеристического полинома

$$K_{12}z^{12} + K_{10}z^{10} + K_8z^8 + K_6z^6 + K_4z^4 + K_2z^2 + K_0 = 0 \quad , \quad (3.82)$$

определяемые численно с использованием стандартных программ операционной

среды MATLAB.

При решении симметричной краевой задачи в отношении краевых условий по поперечным кромкам в разложении (3.80) для $\Phi_n(x)$ следует сохранить чётные функции. С точностью до шести произвольных постоянных обобщённая функция перемещений

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^6 B_{nL} \operatorname{ch}(\lambda_{nL} x) + \Phi_{n\psi/n} \right] \sin(n\pi y) \quad (3.83)$$

Если обобщённая функция перемещений $\Phi(x, y)$ (3.80), (3.83) известна, с помощью формул связи определяются все компоненты напряжённо-деформированного состояния проектируемых конструктивных элементов.

Для окончательного определения компонентов напряженно-деформированного состояния, то есть, по существу, системы неизвестных констант B_{nL} , необходимо удовлетворить граничным условиям на торцах конструкции, например, при $x=1$ в симметричной краевой задаче. Так, в случае жесткого защемления поперечных кромок равны нулю тангенциальное и продольное перемещения, прогиб, углы поворота, а также смещение вдоль оси x , обусловленное деформацией поперечного сечения:

$$\text{при } x=1 \quad u_0(1, y) = v_0(1, y) = w(1, y) = \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial x}(1, y) = \frac{1}{a} \frac{\partial v_0}{\partial x}(1, y) = (u_4)_1(1, y) = 0 \quad (3.84)$$

Для оценки влияния краевых эффектов на прочностные характеристики конструкции исследуем напряженно-деформированное состояние эксцентрично подкрепленной панели из ПКМ с согласованными граничными условиями по продольным кромкам в рамках краевой задачи для разрешающего уравнения с дифференциальным оператором восьмого порядка. Граничные условия на торцах конструкции в случае жесткого закрепления последних соответствуют отсутствию перемещений в плоскости панели, прогиба и угла поворота:

$$\text{при } x=1 \quad u_0(1, y) = v_0(1, y) = w(1, y) = \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial x}(1, y) = 0 \quad (3.85)$$

В рамках краевой задачи (3.74), (3.75) – (3.78), то есть общего НДС, подкрепляющие рёбра работают на растяжение – сжатие, изгиб из плоскости

панели, изгиб в плоскости панели и кручение, а в рамках краевой задачи для основного НДС, рёбра работают на растяжение – сжатие, изгиб из плоскости панели и кручение. Нормальными напряжениями, вызванными изгибом набора в плоскости обшивки и депланацией поперечных сечений, пренебрегаем.

С целью оценки влияния краевых эффектов на НДС конструктивно-анизотропных панелей сопоставлены результаты численных решений двух краевых задач (3.5), (3.85) и (3.74), (3.75), (3.84), сформулированных согласно уточнённой теории (глава 4).

ГЛАВА 4 НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КОНСТРУКТИВНО-АНИЗОТРОПНЫХ ПАНЕЛЕЙ. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

В операционной среде MATLAB разработаны программы и реализован процесс компьютерной многокритериальной оптимизации с учётом технологии изготовления конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов, находящихся в условиях механического, внешнего температурного и технологического температурного воздействия.

Пакет прикладных программ для РС на языке операционной среды MATLAB разработан в соответствии с изложенными алгоритмами. Программы предназначены для исследования напряжённо-деформированного состояния и компьютерной оптимизации процесса проектирования конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов. В рамках связанных плоской задачи и задачи изгиба рассматриваются все возможные варианты закрепления граничных кромок, вытекающие из условий упругой заделки.

Разработаны быстрые процедуры для анализа подкреплённых панелей из ПКМ. Так как решение строится точными аналитическими методами, время расчёта вариантов минимально, что представляет интерес с точки зрения практики проектирования с использованием параметрического анализа. Результаты расчётов дают возможность снижения и оптимизации массовых характеристик конструкции. Постановка проблемы и предлагаемые подходы к её решению представляют интерес с точки зрения практики проектирования конструктивно-анизотропных панелей с применением КМ для перспективных изделий авиационной техники.

Представлены новые достижения в области вычислительных исследований НДС композитных авиационных конструкций.

Жесткостные характеристики панелей из углепластика, приведенные в Таблице 1, использованы в качестве исходных данных.

Таблица 1 - Характеристики жёсткости материала панелей

Модуль упругости k – ого слоя в продольном направлении	$E_1^{(k)}$	МПа	120000
Модуль упругости k – ого слоя в поперечном направлении	$E_2^{(k)}$	МПа	10000
Модуль сдвига k – ого слоя	$G_{12}^{(k)}$	МПа	6000
Коэффициенты Пуассона k – ого слоя	$\mu_{12}^{(k)}, \mu_{21}^{(k)}$	–	0,280; 0,023

На Рисунке 12 представлены результаты определения перемещений в прямоугольных панелях из углепластика с эксцентричным продольно-поперечным набором, находящихся под действием постоянной погонной поперечной нагрузки $q(x,y) = const$. Краевые условия по координате x симметричны и соответствуют защемлению. Прогибы панели зависят от соотношения сторон c .

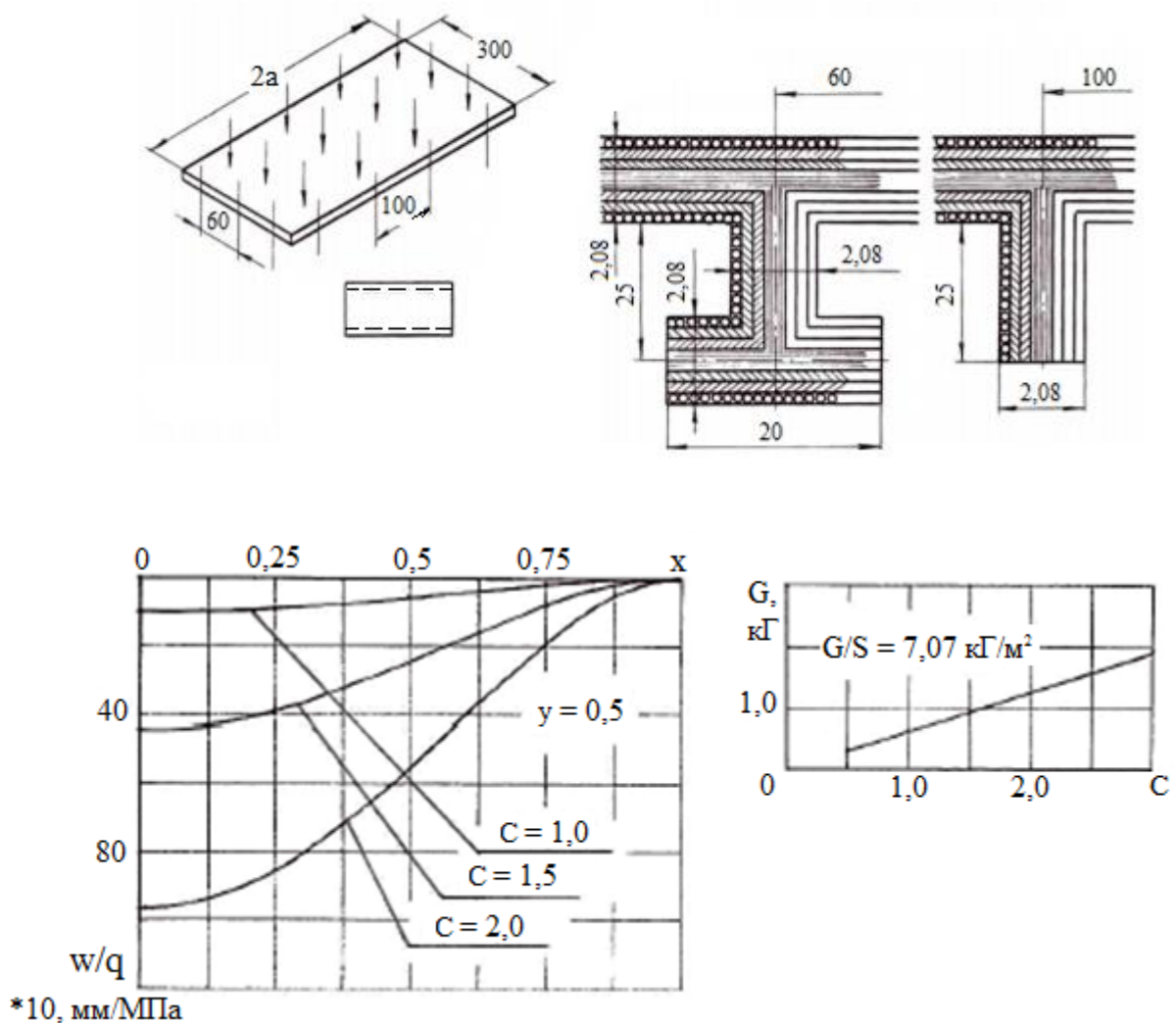


Рисунок 12 - Панель с продольно-поперечным набором, защемлённая по торцам. Зависимость прогибов и весовых характеристик от соотношения сторон панели

При изменении соотношения сторон от 2,0 до 1,0 вес панели снижается в два раза, а максимальный прогиб падает в 9,6 раза.

На Рисунке 13 представлены результаты определения перемещений в прямоугольных панелях из углепластика с эксцентричным продольно-поперечным набором, находящихся под действием постоянной погонной поперечной нагрузки $q(x,y) = const$. Краевые условия по координате x симметричны и соответствуют защемлению. Прогибы панели зависят от расстояния между стрингерами c_1 .

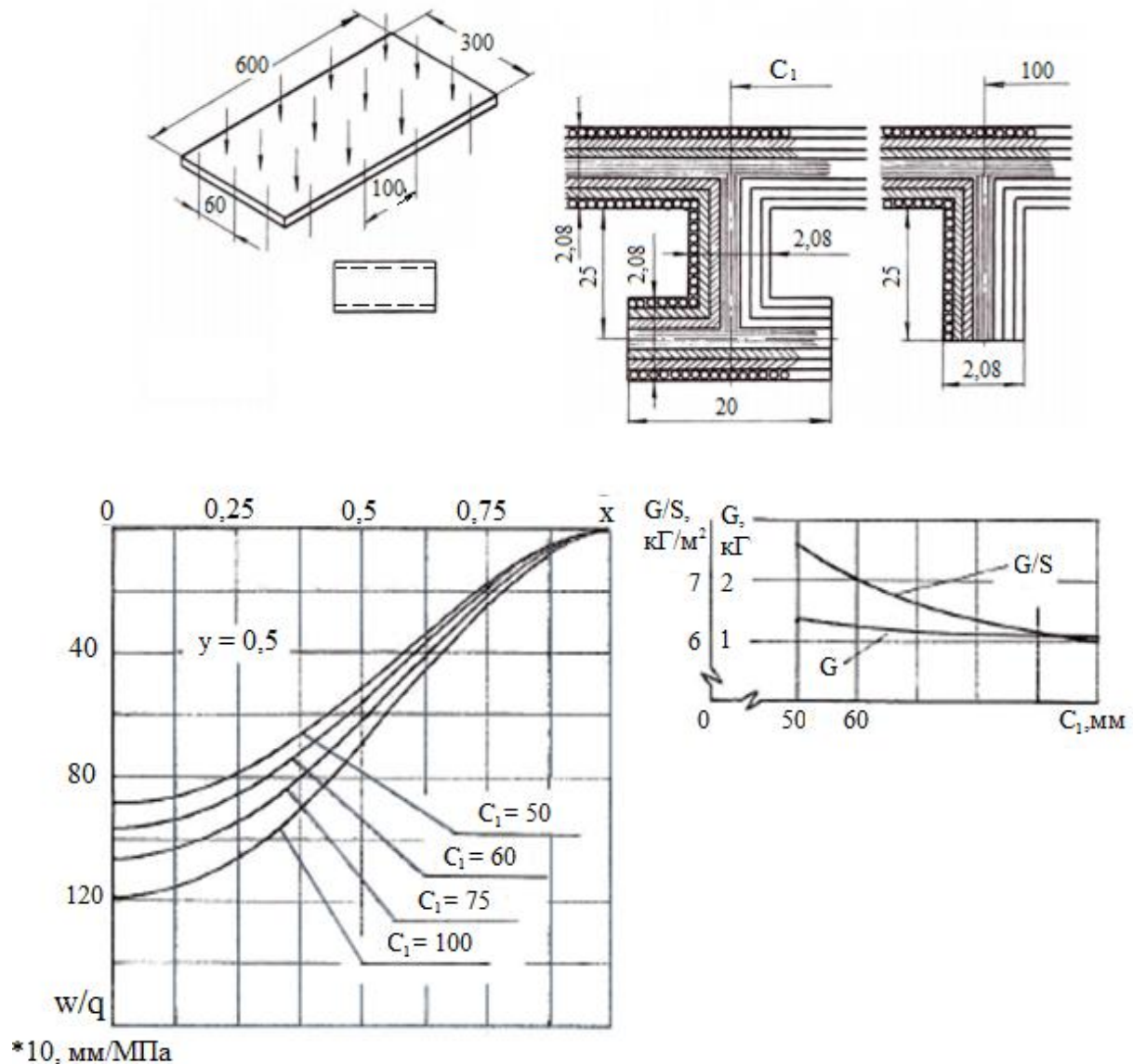


Рисунок 13 - Панель с продольно-поперечным набором, защемлённая по торцам. Зависимость прогибов и весовых характеристик от расстояния между стрингерами

При увеличении расстояния между стрингерами от 50 мм до 100 мм вес панели снижается в 1,3 раза, а максимальный прогиб возрастает в 1,4 раза.

На Рисунке 14 представлены результаты определения перемещений в прямоугольных панелях из углепластика с эксцентричным продольно-поперечным набором, находящихся под действием постоянной погонной поперечной нагрузки $q(x,y) = const$. Краевые условия по координате x симметричны и соответствуют защемлению. Прогибы панели зависят от высоты стенки стрингера c_{4x} .

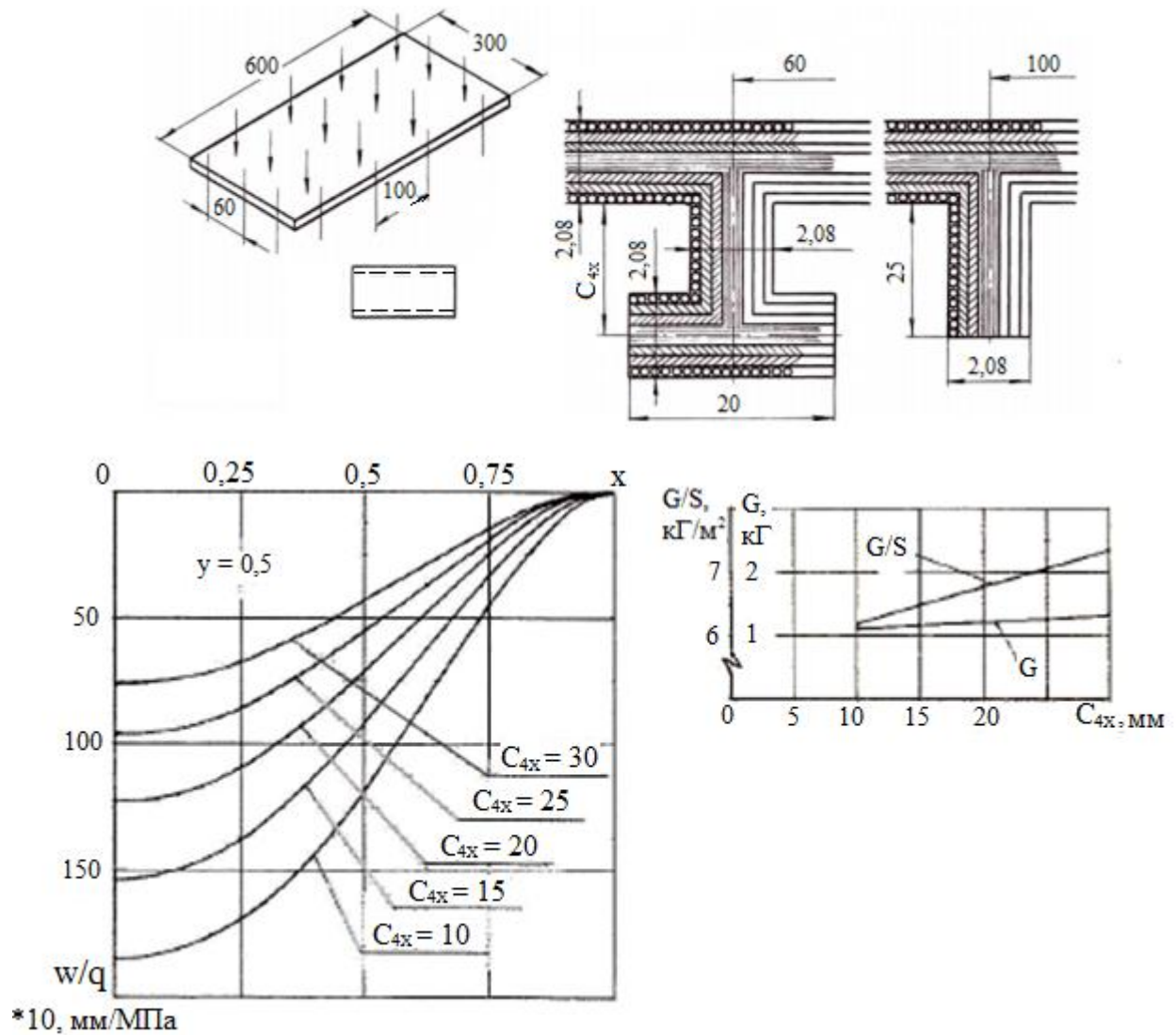


Рисунок 14 - Панель с продольно-поперечным набором, защемлённая по торцам. Зависимость прогибов и весовых характеристик от высоты стенки стрингера

При уменьшении высоты стенки профиля от 30 мм до 10 мм вес панели снижается в 1,2 раза, а максимальный прогиб возрастает в 2,5 раза.

На Рисунке 15 представлены результаты определения перемещений в прямоугольных панелях из углепластика с эксцентричным продольно-поперечным набором, находящихся под действием постоянной погонной поперечной нагрузки $q(x,y) = const$. Граничные условия по координате x несимметричны. Один из краёв $x = -1$ защемлен, на другом $x = +1$ - три комбинации граничных условий в отношении плоской задачи и в отношении изгиба: шарнир либо свободный от усилий и моментов край.

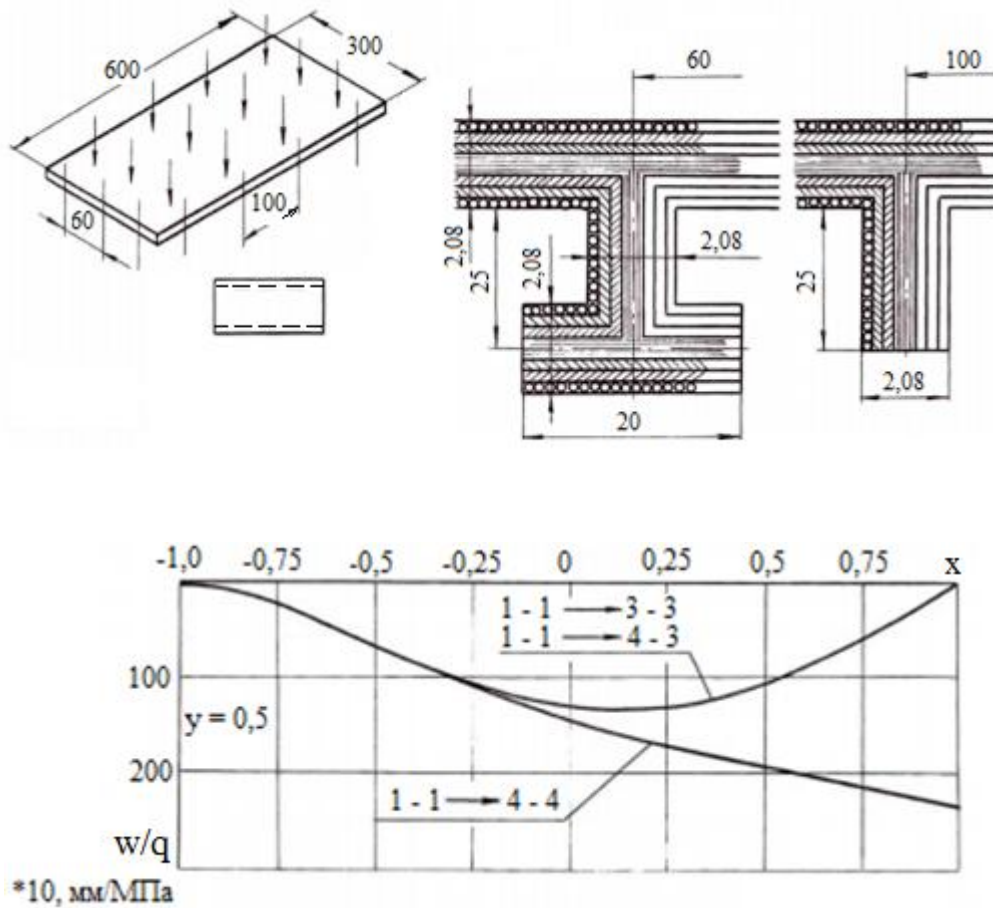


Рисунок 15 - Панель с продольно-поперечным набором.

Несимметричная краевая задача.

Зависимость прогибов от типа граничных условий на торцах

Граничные условия: плоская задача – задача изгиба;

1 – защемление, 2 – скользящая заделка, 3 – шарнир, 4 – свободный край

Максимальные прогибы в центре панели отличаются на 12 % при защемлении одного из торцов, когда другой либо шарнирно опёрт, либо свободен.

На Рисунке 16 представлены результаты определения перемещений в прямоугольных панелях из углепластика, подкреплённых в продольном направлении, находящихся под действием постоянной погонной поперечной нагрузки $q(x,y) = const$. Так же, как и на Рисунке 15, граничные условия по координате x несимметричны. Один из краёв $x = -1$ защемлен, на другом $x = +1$ - три комбинации граничных условий в отношении плоской задачи и в отношении изгиба: шарнир либо свободный от усилий и моментов край.

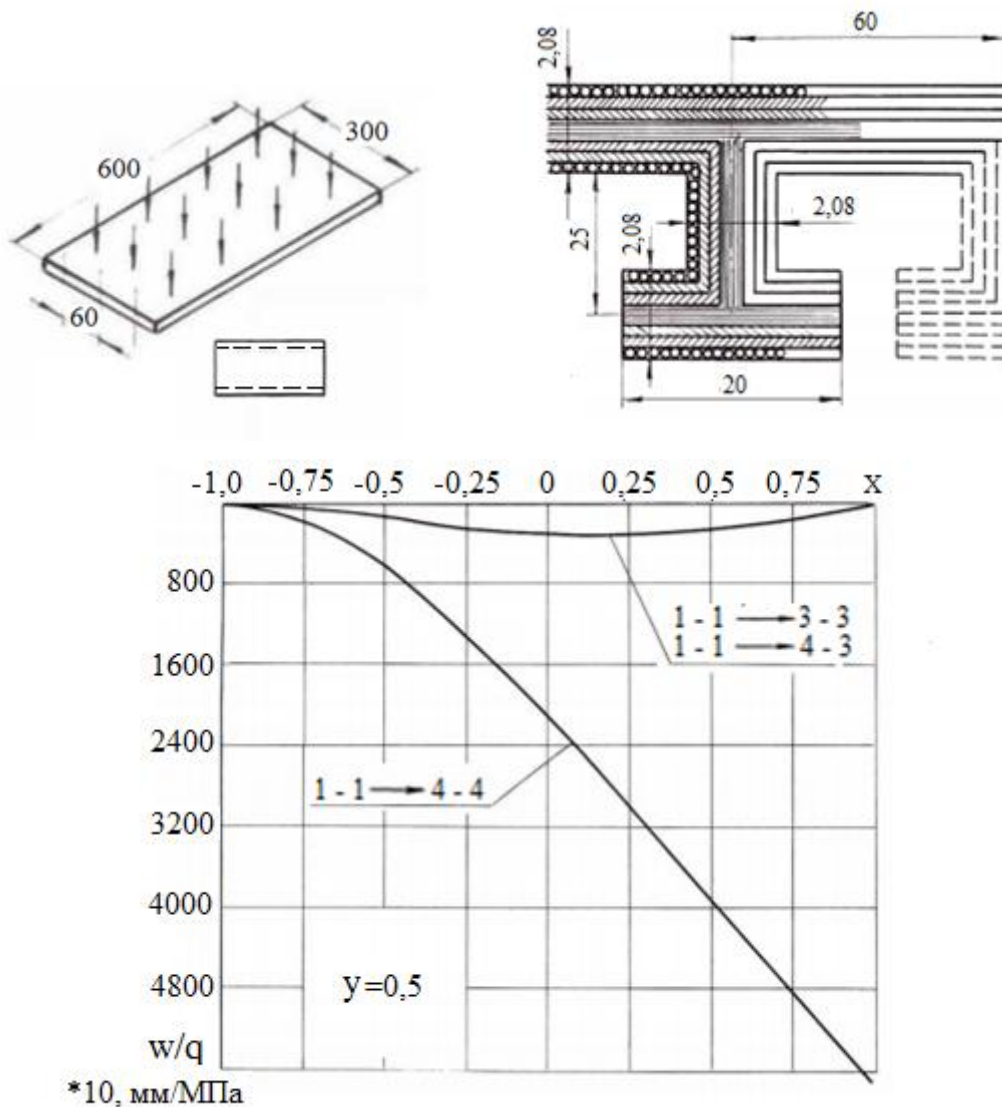


Рисунок 16 - Панель, подкреплённая в продольном направлении.
Несимметричная краевая задача.

Зависимость прогибов от типа граничных условий на торцах

Граничные условия: плоская задача – задача изгиба;

1 – защемление, 2 – скользящая заделка, 3 – шарнир, 4 – свободный край

Максимальные прогибы в центре панели отличаются в 7,4 раза.

На Рисунке 17 представлены результаты определения перемещений эксцентрично подкреплённых в продольном направлении прямоугольных панелей из углепластика, находящихся под действием постоянной погонной поперечной нагрузки $q(x,y) = const$. Краевые условия по координате x симметричны.

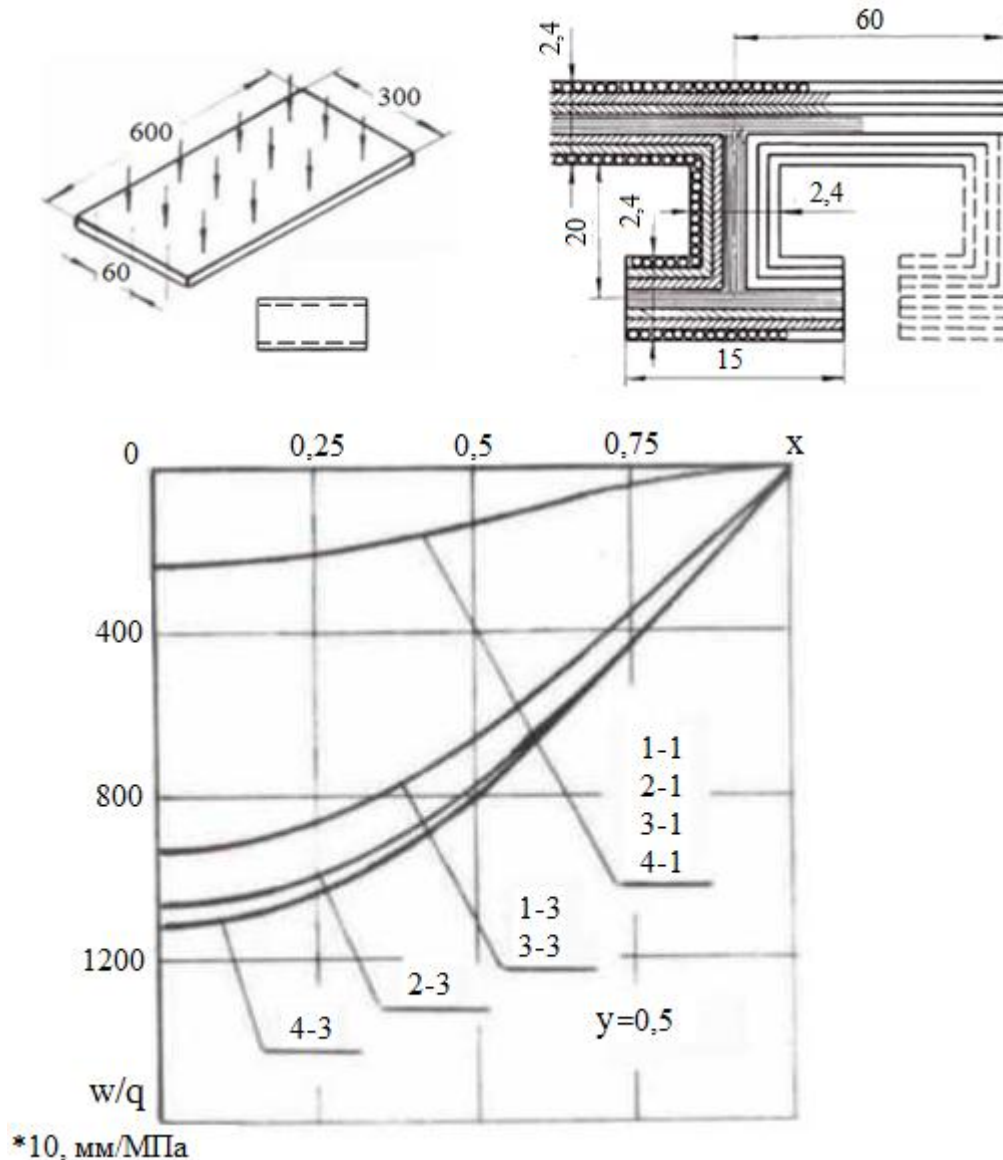


Рисунок 17 - Панель, подкреплённая в продольном направлении.
Симметричная краевая задача.

Зависимость прогибов от типа граничных условий на торцах.

Граничные условия: плоская задача – задача изгиба;

1 – защемление, 2 – скользящая заделка, 3 – шарнир, 4 – свободный край

Прогибы панели зависят от граничных условий в её плоскости, если в отношении изгиба торцевые кромки шарнирно опёрты. Когда относительно изгиба торцевые кромки защемлены, при варьировании условий закрепления в отношении плоской задачи кривые прогибов практически совпадают.

На Рисунке 18 представлены результаты определения послойных нормальных напряжений эксцентрично подкреплённых в продольном направлении прямоугольных панелей из углепластика, находящихся под действием постоянной погонной поперечной нагрузки $q(x,y) = const$. Краевые условия по координате x симметричны.

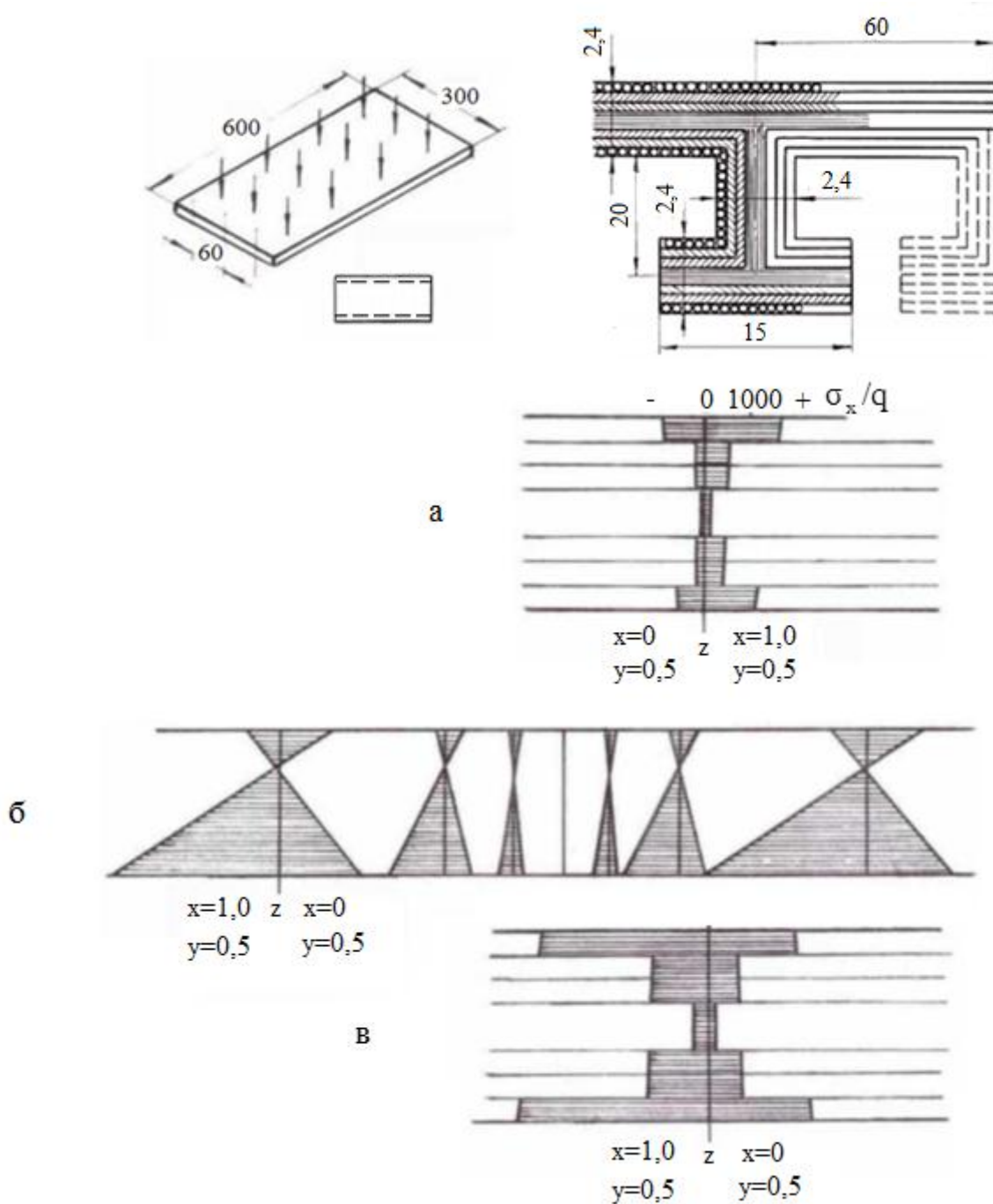


Рисунок 18 - Панель, подкреплённая в продольном направлении.

Симметричная краевая задача.

Распределение нормальных напряжений:

а – нормальные напряжения в обшивке, б – нормальные напряжения в стенке стрингера, в – нормальные напряжения в полке стрингера

На Рисунке 19 представлены результаты определения перемещений плоских прямоугольных панелей из углепластика с несимметричной структурой пакета по толщине, находящихся под действием постоянной погонной поперечной нагрузки $q(x, y) = \text{const}$. Граничные условия по продольным кромкам соответствуют скользящей заделке, поперечные края шарнирно оперты. Варьируются схемы укладки слоев пакета.

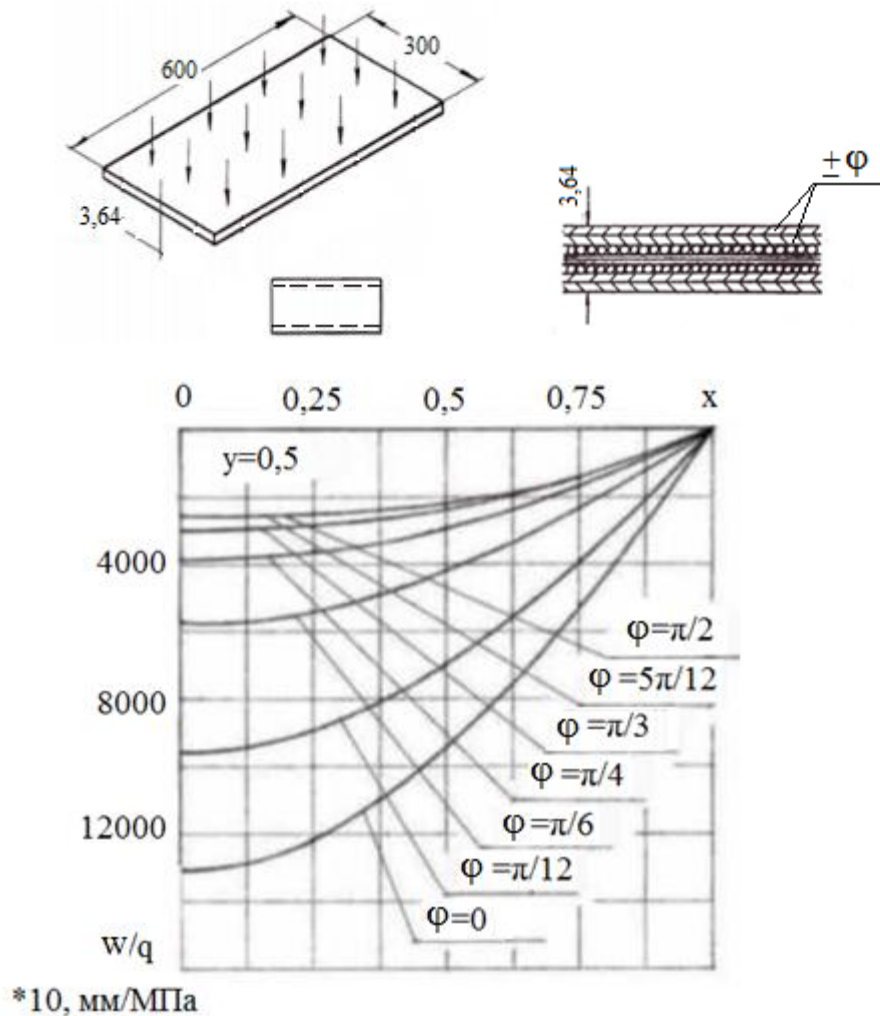


Рисунок 19 - Панель с несимметричной структурой пакета по толщине.
Зависимость прогибов от углов укладки косых слоев
при шарнирном опирании торцов

На Рисунке 20 представлены результаты определения перемещений плоских прямоугольных панелей из углепластика с несимметричной структурой пакета по толщине, находящихся под действием постоянной погонной поперечной нагрузки $q(x, y) = \text{const}$. Граничные условия по продольным кромкам соответствуют скользящей заделке, поперечные края защемлены. Варьируются схемы укладки слоев пакета.

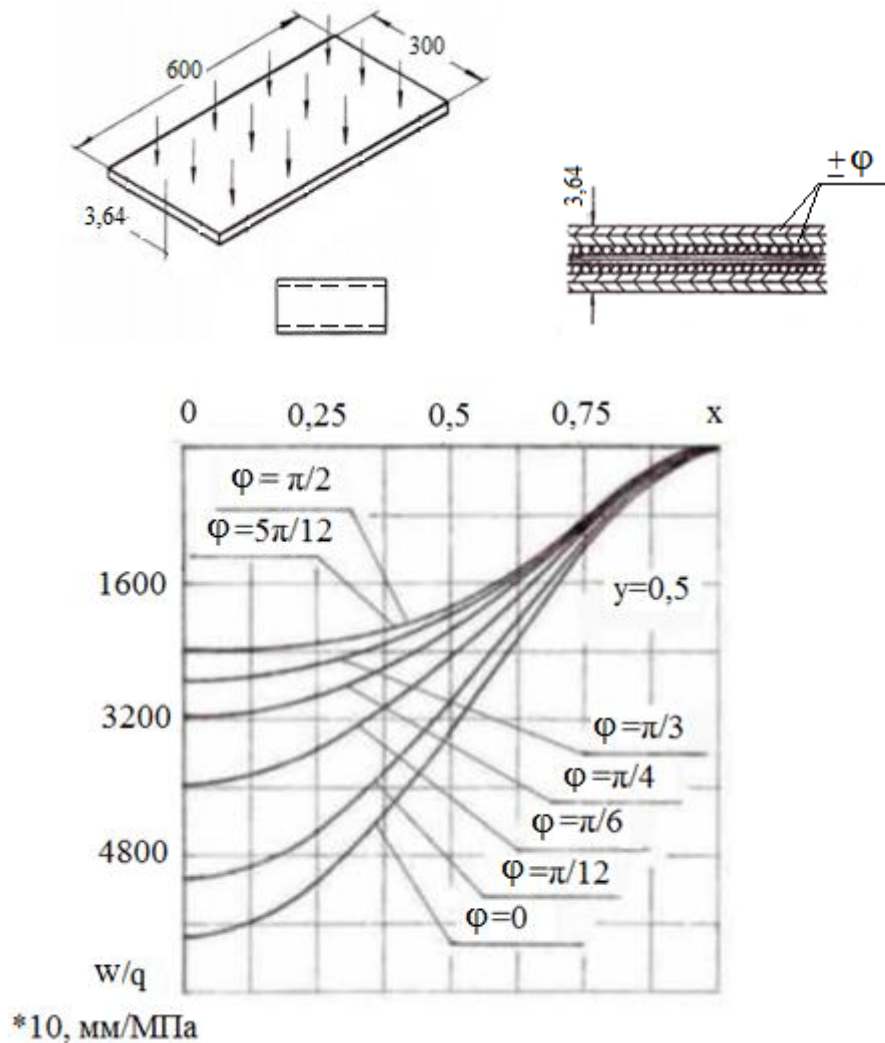


Рисунок 20 - Панель с несимметричной структурой пакета по толщине.
Зависимость прогибов от углов укладки косых слоев
при защемлении торцов

Термомеханические характеристики панелей из углепластика, приведенные в Таблице 2, использованы в качестве исходных данных при определении остаточных температурных напряжений, ΔT - разность между комнатной температурой и температурой отверждения, $\Delta T = -150$ град.

Таблица 2 - Термомеханические характеристики материала панелей

Модуль упругости k – ого слоя в продольном направлении	$E_1^{(k)}$	МПа	103500
Модуль упругости k – ого слоя в поперечном направлении	$E_2^{(k)}$	МПа	4350
Модуль сдвига k – ого слоя	$G_{12}^{(k)}$	МПа	3350
Коэффициенты Пуассона k – ого слоя	$\mu_{12}^{(k)}, \mu_{21}^{(k)}$	–	0,280; 0,023
Коэффициент температурного расширения k – ого слоя в продольном направлении	$\alpha_1^{(k)}$	град ⁻¹	$0,16 \cdot 10^{-5}$
Коэффициент температурного расширения k – ого слоя в поперечном направлении	$\alpha_2^{(k)}$	град ⁻¹	$0,34 \cdot 10^{-4}$

Таблица 2 - продолжение

Допускаемые напряжения k – ого слоя в продольном направлении на растяжение	$\bar{\sigma}_{1p}^{(k)}$	МПа	1100
Допускаемые напряжения k – ого слоя в продольном направлении на сжатие	$\bar{\sigma}_{1c}^{(k)}$	МПа	360
Допускаемые напряжения k – ого слоя в поперечном направлении на растяжение	$\bar{\sigma}_{2p}^{(k)}$	МПа	76
Допускаемые напряжения k – ого слоя в поперечном направлении на сжатие	$\bar{\sigma}_{2c}^{(k)}$	МПа	76
Допускаемые напряжения k – ого слоя на сдвиг	$\bar{\tau}_{12}^{(k)}$	МПа	28

Для оценки эквивалентных остаточных температурных напряжений, возникающих при охлаждении после завершения процесса отверждения в плоской прямоугольной панели из углепластика, использован критерий Гольденבלата-Копнова

$$\left[\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{\bar{\sigma}_{1p}^{(k)}} + \frac{1}{\bar{\sigma}_{1c}^{(k)}} \right)^2 \left(\sigma_1^{(k)} \right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{\bar{\sigma}_{2p}^{(k)}} + \frac{1}{\bar{\sigma}_{2c}^{(k)}} \right)^2 \left(\sigma_2^{(k)} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}^{(k)}}{\bar{\tau}_{12}^{(k)}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\bar{\sigma}_{1p}^{(k)}} - \frac{1}{\bar{\sigma}_{1c}^{(k)}} \right) \left(\sigma_1^{(k)} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\bar{\sigma}_{2p}^{(k)}} - \frac{1}{\bar{\sigma}_{2c}^{(k)}} \right) \left(\sigma_2^{(k)} \right) = \sigma_{экв} \leq 1$$

На Рисунке 21 представлены результаты определения остаточных температурных напряжений, возникающих при охлаждении после завершения процесса отверждения в плоской прямоугольной панели из углепластика с несимметричной структурой пакета по толщине. Контур панели шарнирно оперт в отношении изгиба, граничные условия по продольным кромкам соответствуют скользящей заделке, поперечные края свободны от усилий и моментов в отношении плоской задачи.

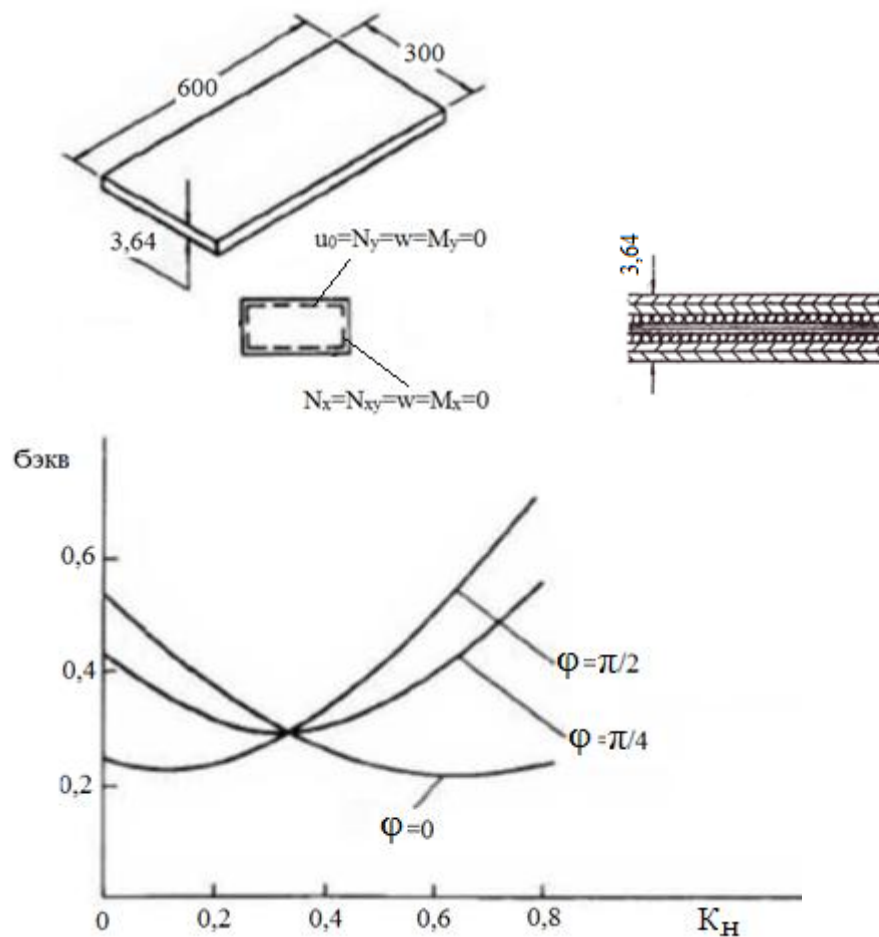


Рисунок 21 - Панель с несимметричной структурой пакета.
Зависимость эквивалентных остаточных температурных напряжений от коэффициента предварительного натяжения армирующих волокон

Оценивается влияние предварительного натяжения армирующих волокон на уровень относительных эквивалентных остаточных технологических напряжений. Оптимальный уровень предварительного натяжения соответствует 35 % от допустимой деформации слоя.

На Рисунке 22 представлены результаты определения остаточных температурных напряжений, возникающих при охлаждении после завершения процесса отверждения в плоской прямоугольной панели из углепластика с несимметричной структурой пакета по толщине. Контур панели шарнирно опёрт в отношении изгиба, граничные условия по продольным кромкам соответствуют скользящей заделке, поперечные края свободны от усилий и моментов в отношении плоской задачи.

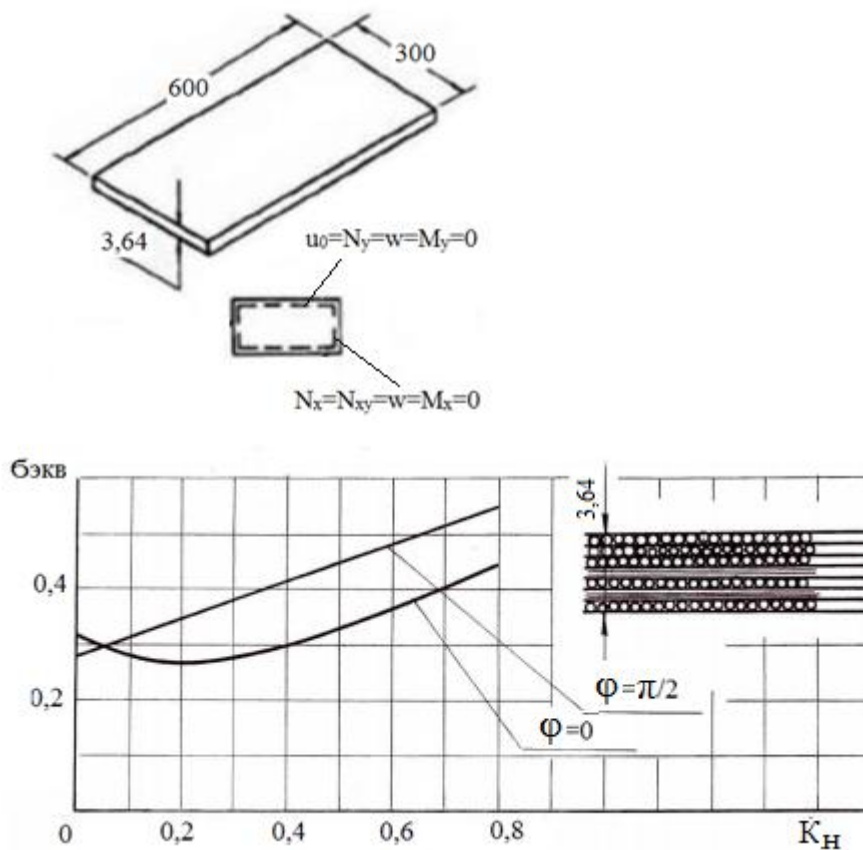


Рисунок 22 - Панель с несимметричной структурой пакета.
Зависимость эквивалентных остаточных температурных напряжений от коэффициента предварительного натяжения армирующих волокон

Оптимальный уровень предварительного натяжения соответствует 5 % от допускаемой деформации слоя. Далее, от уровня в 20 % процедура предварительного натяжения армирующих волокон для представленной несимметричной структуры пакета является неэффективной: относительные эквивалентные остаточные технологические напряжения и в продольных, и в поперечных слоях возрастают.

На Рисунке 23 представлены результаты определения перемещений эксцентрично подкреплённых в продольном направлении прямоугольных панелей из углепластика, находящихся под действием постоянной погонной поперечной нагрузки $q(x,y) = const$. Краевые условия по координате x симметричны. Жесткостные характеристики панелей приведены в Таблице 1.

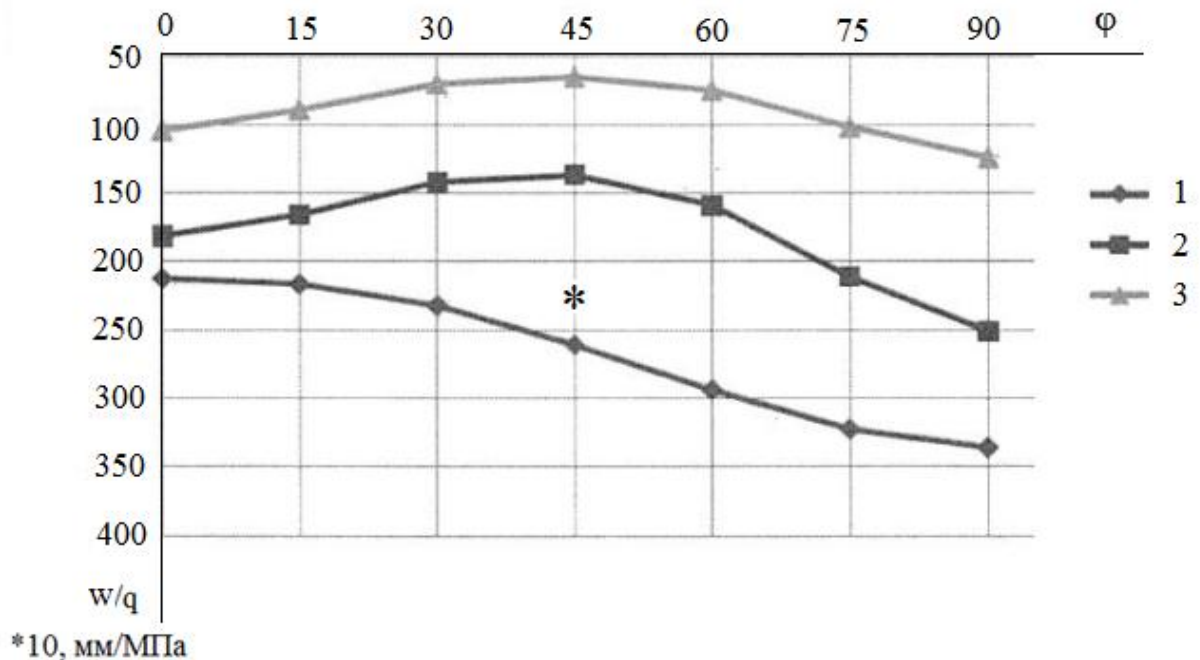
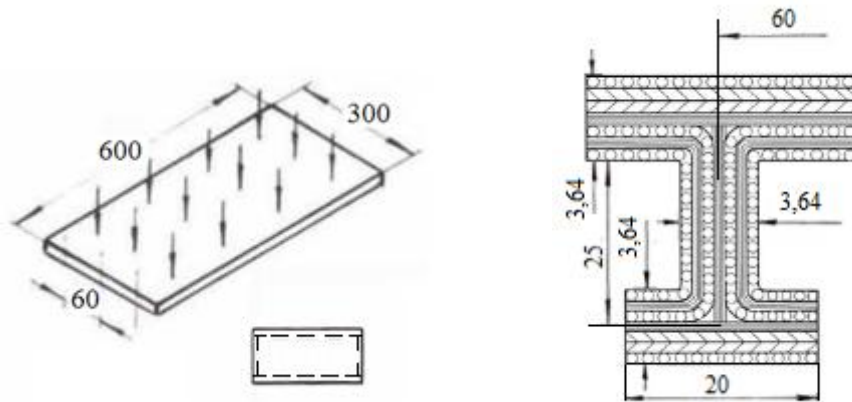


Рисунок 23 - Панель, подкреплённая в продольном направлении.

Зависимость прогибов от углов укладки косых слоев при шарнирном опирании торцов:

1 – тонкостенный стержень В.З. Власова; 2 – тонкостенный стержень с учётом жесткостей в направлении 12; 3 – интегральный учёт закручивания по Кирхгофу; * - тонкостенный стержень с учётом деформации сдвига срединной поверхности профиля

Проанализирована возможность использования для исследования прочности односторонне усиленных панелей известного в литературе приёма, заключающегося в формальном распространении гипотезы Кирхгофа на всё

тело анизотропной среды. Установлено, что результаты определения напряжённо-деформированного состояния в рамках гипотезы Кирхгофа и при решении контактной задачи совпадают с точностью до 13%, если обшивка подкреплена ортогонально расположенными рёбрами жёсткости. Значительные расхождения имеют место в конструкции с однонаправленным набором, для панелей с ярко выраженной анизотропией свойств (Рисунок 23).

В соответствии с изложенными алгоритмами разработан пакет прикладных программ для персонального компьютера (PC) на языке операционной среды MATLAB. Программы предназначены для определения и сопоставления компонентов общего НДС с краевыми эффектами и медленно меняющегося основного НДС конструктивно-анизотропных панелей ЛА с целью компьютерной оптимизации процесса проектирования. На основе сопоставления результатов численного анализа в широком диапазоне изменения геометрических и жесткостных характеристик конструктивно-анизотропных панелей обоснована возможность проектирования без учёта краевых эффектов в соответствии с теорией асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений. Показано, что заземлённые торцевые кромки существенно снижают влияние краевых эффектов на основное напряжённое состояние. Обоснована допустимость упрощения математических моделей путём их сведения к решению краевых задач для разрешающего уравнения с линейным дифференциальным оператором восьмого порядка. Установлено, что краевые эффекты существенны, если рассматривать НДС панели типа "погранслои" в зоне граничных кромок.

Выполнен параметрический анализ перемещений и напряжений плоской прямоугольной панели, изготовленной из алюминиевого сплава и эксцентрично подкреплённой продольно-поперечным набором, полки которого усилены композитными жгутами (Рисунок 24). Нормальная нагрузка $q(x,y) = const$. Варьировались жёсткость жгутов, геометрия обшивки и подкрепляющих рёбер.

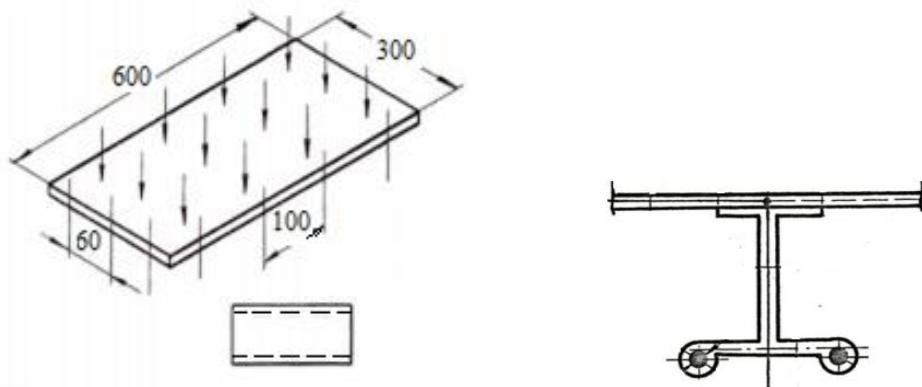


Рисунок 24 – Конструктивно-анизотропная панель, усиленная композитными жгутами

В качестве примера представлены результаты расчётов панелей с меняющейся жёсткостью армирующих жгутов из углепластика. Все слагаемые в левой части общего разрешающего уравнения, содержащие производные потенциальной функции более высокого порядка, чем восьмой, соответствуют краевым эффектам при определении НДС, быстро затухающим от границ панели. Величины коэффициентов обыкновенного дифференциального уравнения $N = 12$ при производных двенадцатого и десятого порядков $10^4 - 10^2$ по сравнению с единицей, – приведены в Таблице 3.

Таблица 3 - Коэффициенты обыкновенных дифференциальных уравнений порядка N для панелей с различной жёсткостью армирующих жгутов

$E_{ж}$	N	$\bar{K}_{12} \cdot 10^{-5}$	$\bar{K}_{10} \cdot 10^{-3}$	\bar{K}_8	$\bar{K}_6 \cdot 10^2$	$\bar{K}_4 \cdot 10^6$	$\bar{K}_2 \cdot 10^{10}$	$\bar{K}_0 \cdot 10^{15}$
0	8	—	—	1	-0,079	0,168	-0,083	0,110
	12	0,067	-0,176	1	-0,075	0,159	-0,078	0,105
18000	8	—	—	1	-0,116	0,335	-0,125	0,110
	12	0,148	-0,340	1	-0,105	0,295	-0,110	0,099
30000	8	—	—	1	-0,141	0,469	-0,153	0,110
	12	0,195	-0,437	1	-0,121	0,392	-0,128	0,095

Соответствующие пятый и шестой корни характеристических полиномов раскрывают быструю изменчивость напряжённого состояния (Таблица 4). Согласно асимптотическим аспектам решения производные высоких порядков не оказывают существенного влияния на медленно меняющееся основное напряжённое состояние панели.

Таблица 4 - Корни характеристических полиномов порядка N для панелей с различной жёсткостью армирующих жгутов

$E_{ж}$	N	λ_{11}	λ_{12}	λ_{13}	λ_{14}	λ_{15}	λ_{16}
0	8	1,427	1,891	4,917	6,403	—	—
	12	1,444	1,879	4,831	6,832	24,846	41,025
18000	8	1,097	1,604	5,934	8,122	—	—
	12	1,121	1,590	5,737	11,524 ± 2,344 i		42,097
30000	8	0,968	1,505	6,354	9,171	—	—
	12	0,995	1,491	6,107	10,520 ± 4,670 i		42,335

В Таблице 5 значения прогибов и нормальных напряжений приведены в зависимости от жёсткости армирующих жгутов из углепластика. Представляется возможным пренебречь краевыми эффектами, так как компоненты НДС различаются менее, чем на 3 %. Аналогичные результаты получены в широком диапазоне варьирования жесткостных характеристик конструктивно-анизотропных панелей.

Таблица 5 - Прогибы и нормальные напряжения для панелей с различной жёсткостью армирующих жгутов

x	(-)	0	1,0	1,0	1,0	0	Δ				
y	(-)	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5					
z	мм	—	—	—	-0,5	-0,5					
$E_{ж}$	N	w/q	N_x/q	M_x/q	σ_x/q	σ_y/q	Δw	ΔN_x	ΔM_x	$\Delta \sigma_x$	$\Delta \sigma_y$
кГ/мм ²	(-)	мм ³ /кГ	мм	мм ²	(-)	(-)	%				
0	8	33,761	-136,82	-12612	367,30	-265,15	0,18	1,36	0,02	0,35	0,23
	12	33,701	-134,98	-12609	368,59	-264,53					
18000	8	19,232	-116,57	-12241	334,38	-219,69	0,34	1,26	0,16	0,13	0,43
	12	19,167	-115,12	-12221	334,81	-218,76					
30000	8	15,789	-108,68	-11997	324,10	-203,06	0,42	1,06	0,01	0,06	0,51
	12	15,723	-107,54	-11996	323,91	-202,03					

В качестве примера представлены результаты расчётов панелей с меняющимся соотношением сторон C . Все слагаемые в левой части общего разрешающего уравнения, содержащие производные потенциальной функции более высокого порядка, чем восьмой, соответствуют краевым эффектам при определении НДС, быстро затухающим от границ панели. Величины коэффициентов обыкновенного дифференциального уравнения $N = 12$ при производных двенадцатого и десятого порядков 10^3-10^2 по сравнению с единицей, – приведены в Таблице 6.

Таблица 6 - Коэффициенты обыкновенных дифференциальных уравнений порядка N при различных соотношениях сторон панели

C	N	$\bar{K}_{12} \cdot 10^{-4}$	$\bar{K}_{10} \cdot 10^{-3}$	\bar{K}_8	$\bar{K}_6 \cdot 10^3$	$\bar{K}_4 \cdot 10^6$	$\bar{K}_2 \cdot 10^{11}$	$\bar{K}_0 \cdot 10^{15}$
0,5	8	—	—	1	-0,786	0,168	-0,826	0,110
1,0	12	0,665	-0,176	1	-0,750	0,159	-0,778	0,105
1,5								

Соответствующие пятый и шестой корни характеристических полиномов раскрывают быструю изменчивость напряжённого состояния (Таблица 7). Согласно асимптотическим аспектам решения производные высоких порядков не оказывают существенного влияния на медленно меняющееся основное напряжённое состояние панели.

Таблица 7 - Корни характеристических полиномов порядка N при различных соотношениях сторон панели

C	N	λ_{11}	λ_{12}	λ_{13}	λ_{14}	λ_{15}	λ_{16}
0,5	8	0,357	0,473	1,229	1,601	—	—
	12	0,361	0,470	1,208	1,708	6,212	10,256
1,0	8	0,714	0,945	2,459	3,201	—	—
	12	0,722	0,939	2,416	3,416	12,423	20,512
1,5	8	1,070	1,418	3,688	4,802	—	—
	12	1,083	1,409	3,624	5,124	18,635	30,769

В Таблице 8 значения прогибов и нормальных напряжений приведены в зависимости от соотношения сторон панели C . Представляется возможным пренебречь краевыми эффектами, так как компоненты НДС различаются менее, чем на 3 %. Аналогичные результаты получены в широком диапазоне варьирования жесткостных характеристик конструктивно-анизотропных панелей.

Таблица 8 - Прогибы и нормальные напряжения при различных соотношениях сторон панели

x		0	1,0	1,0	1,0	0	$\Delta, \%$				
y		0,5	0,5	0,5	0,5	0,5					
$z, \text{ мм}$		—	—	—	-0,5	-0,5					
C	N	w/q	N_x/q	M_x/q	σ_x/q	σ_y/q	Δw	ΔN_x	ΔM_x	$\Delta \sigma_x$	$\Delta \sigma_y$
—	—	мм ³ /кГ	мм	мм ²	—	—	—	—	—	—	—
0,5	8	0,597	1,345	-1896,6	72,130	-6,011	—	9,79	0,04	0,20	0,81
	12	0,597	1,491	-1897,4	72,272	-6,060					
1,0	8	7,278	-20,429	-6624,5	232,57	-50,657	0,54	7,86	0,21	0,30	1,47
	12	7,239	-18,824	-6610,3	233,27	-49,914					
1,5	8	20,793	-78,816	-10571	335,50	-156,14	0,36	2,60	0,11	0,34	0,58
	12	20,719	-76,761	-10559	336,63	-155,23					

В Таблице 9 представлены результаты определения перемещений и напряжений в прямоугольных изотропных алюминиевых панелях с эксцентричным продольным набором, находящихся под действием постоянной погонной поперечной нагрузки $q(x,y) = const$ (Рисунок 25). Граничные условия по координатам x и y симметричны. Контур панелей шарнирно опёрт в отношении изгиба и свободен от усилий в отношении плоской задачи.

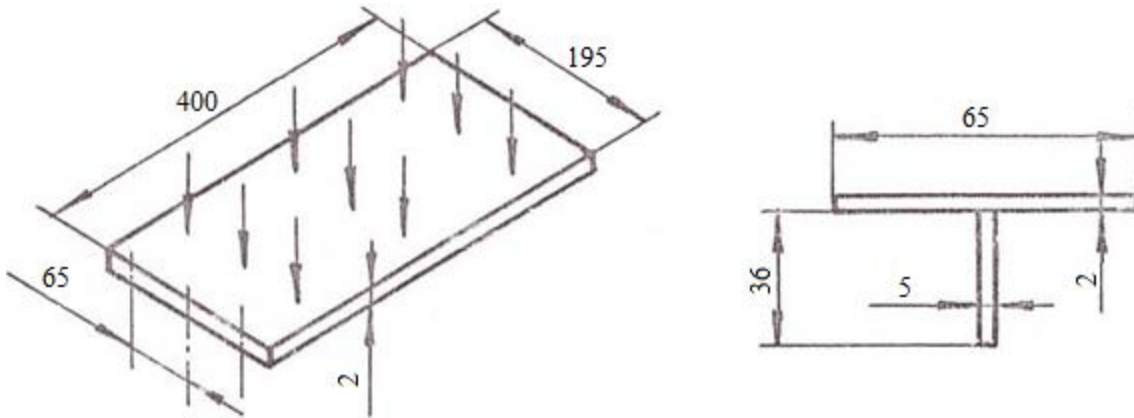


Рисунок 25 - Тестовая панель из алюминиевого сплава

Таблица 9 – Перемещения и напряжения в подкреплённых панелях из изотропного материала . Сопоставление результатов расчёта

z, мм		x = 0 y = 0			
		-	-1	37	-1
Способ построения решения		w/q•10, мм/МПа	σ_x/q	σ_x/q	σ_y/q
Метод однородных решений		57,762	-221,91	697,13	39,158
Одинарные тригоном. ряды		57,011	-221,49	689,25	35,072
Δ	%	1,300	0,189	1,130	10,435

Приведено сопоставление результатов расчёта в рамках метода однородных решений и с использованием одинарных тригонометрических рядов для согласованных граничных условий при $y = + -1$, когда панель по продольным кромкам нагружена потоками касательных сил, что соответствует скользящей заделке в тангенциальном направлении.

Влияние несогласованных граничных условий на НДС конструкции в приведённом примере находится в пределах 10%.

ГЛАВА 5 УСТОЙЧИВОСТЬ КОНСТРУКТИВНО-АНИЗОТРОПНЫХ ПАНЕЛЕЙ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ОБЩЕГО ВИДА

С целью реализации в дальнейшем процесса рационального проектирования несущих поверхностей ЛА исследуются различные аспекты проблемы расчёта конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов, которые находятся в условиях силового и температурного воздействия, приводящего к потере устойчивости.

Тонкостенные панели несущих поверхностей ЛА из высокомодульных и высокопрочных композиционных материалов усилены дискретным набором, в том числе, с целью предотвращения потери устойчивости, к которой могут привести сжимающие и сдвигающие распределённые усилия, приложенные к кромкам в плоскости обшивки. Исследование устойчивости плоских прямоугольных конструктивно–анизотропных композитных панелей является актуальным с точки зрения практики проектирования несущих поверхностей ЛА.

Рассматриваются задачи устойчивости плоской прямоугольной многослойной панели из полимерных волокнистых композиционных материалов с эксцентричным продольно-поперечным набором (Рисунок 26) и плоской прямоугольной композитной панели с несимметричной по толщине структурой пакета. Панели находятся под действием постоянных погонных сжимающих и сдвигающих усилий, приложенных к кромкам в плоскости обшивки. Граничные условия на контуре соответствуют условиям частного вида, которые являются согласованными в отношении плоской задачи и задачи изгиба и позволяют построить решение в тригонометрических рядах. Рассматриваются задачи устойчивости композитных панелей с граничными условиями общего вида, соответствующими достаточно общей трактовке физических условий закрепления панели в составе проектируемой конструкции.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОБЛЕМ УСТОЙЧИВОСТИ
КОНСТРУКТИВНО_АНИЗОТРОПНЫХ ПАНЕЛЕЙ
ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ**

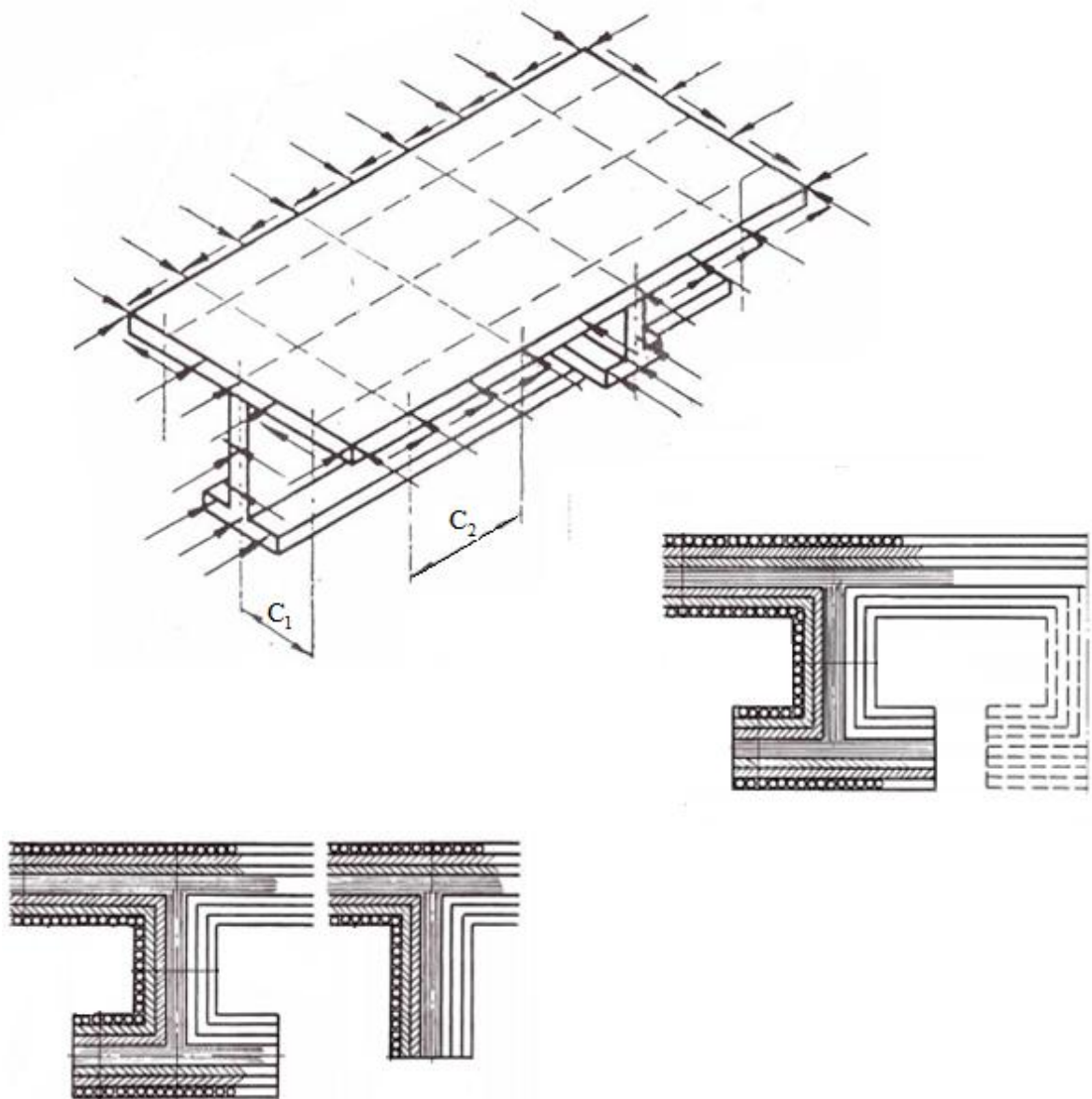


Рисунок 26 - Устойчивость конструктивно-анизотропных панелей
из композиционных материалов
под действием усилий в плоскости обшивки

Согласно традиционной схеме проектирования наиболее актуальным для практических расчётов является

- определение критических сил общей изгибной формы потери устойчивости рассматриваемой тонкостенной системы, когда число полуволн много меньше числа стрингеров,

- определение критических сил многоволнового крутильного выпучивания, связанного с изгибом обшивки в направлении нормали к поверхности между узлами пересечений и поворотом рёбер без искажения формы профиля (рисунок).

Для исследования изгибной формы потери устойчивости панели правомочной является математическая модель, построенная на основе принципов конструктивной анизотропии с «размазыванием» - осреднением жесткостей подкрепляющих элементов по обшивке. Для исследования крутильной формы потери устойчивости жесткостные характеристики стержней следует вводить дискретно с помощью аппарата обобщённых функций.

В рамках предлагаемой расчётной модели при определении напряжённо-деформированного состояния и решении задач устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов анализируются тонкостенные подкрепляющие элементы, которые находятся в условиях сложного сопротивления вследствие одностороннего контакта с обшивкой. Дальнейшее развитие теории тонкостенных упругих стержней применительно к общей контактной задаче для обшивки и ребра с уточнением модели последнего при закручивании составляет научную новизну работы.

В силу совместной работы в одностороннем контакте с обшивкой элементы набора находятся в условиях косоугольного изгиба и стеснённого кручения. Для определения НДС рёбер жёсткости применяется предложенный В.З. Власовым вариационный метод расчёта тонкостенных пространственных систем в перемещениях, дающий возможность построить теорию тонкостенных упругих стержней без введения гипотезы об отсутствии деформации сдвига срединной поверхности профиля. Перемещения и углы поворота панели и подкреплений по линиям контакта считаются равными. Деформация поперечного сечения

полагается свободной. Учитывается деформация сдвига при кручении тонкостенного стержня.

Строится упрощённый вариант математической модели, соответствующий предположению о малости нормальных напряжений, обусловленных изгибом подкреплений в плоскости панели и депланацией их поперечных сечений. Используя асимптотические свойства и пренебрегая членами, соответствующими краевым эффектам, полагаем, что стержни работают на растяжение–сжатие, изгиб из плоскости пластины и кручение.

Задача устойчивости так же, как и задача о докритическом напряжённом состоянии, является связанной, то есть не разделяется на плоскую и изгиб пластины. Постановка задачи устойчивости и подходы к её решению с учётом неравномерности докритического напряжённого состояния и технологии изготовления панелей в рамках разрешающего дифференциального уравнения восьмого порядка являются новыми и представляют интерес с точки зрения практики проектирования композитных панелей для перспективных изделий авиационной техники.

5.1 Изгибная форма потери устойчивости. Постановка задачи.

Разрешающие уравнения

Задача устойчивости так же, как и задача о докритическом напряжённом состоянии, не разделяется на плоскую и изгиб пластины.

Решение задачи устойчивости осуществляется с использованием общего дифференциального уравнения устойчивости восьмого порядка, построенного на основе дифференциального уравнения равновесия с учётом приведённой нагрузки от действия нормальных $-N_x, N_y$ и тангенциальных $-N_{xy}, N_{yx}$ усилий вида

$$\sum_{i=0,1,2,\dots}^8 K_{8-i,i} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^{8-i} \partial y^i} = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (N_{xy} + N_{yx}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (5.1)$$

Прогиб $w(x,y)$ связан с потенциальной функцией $\Phi(x,y)$ соотношением

$$w = \left(R_{40} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + R_{31} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + R_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + R_{13} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + R_{04} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \Phi \quad (5.2)$$

Коэффициенты R_{ij} , $i=4,3,\dots,0$, $j=0,1,\dots,4$ в формулах связи (5.2) и K_{ij} , $i=8,7,\dots,0$, $j=0,1,\dots,8$ в разрешающем уравнении (5.1) – постоянные величины, зависящие от упругих свойств материала и геометрических параметров конструкции.

Если структура композитной панели ортотропна, задача устойчивости сводится к исследованию дифференциального уравнения, в левой части которого содержатся чётные производные $\Phi(x,y)$ по каждой из координат, а нечётные

производные в правой части связаны со сдвигом, то есть

$$\begin{aligned} & \frac{K_{80}}{a^8} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^8} + \frac{K_{62}}{a^6 b^2} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{K_{44}}{a^4 b^4} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^4 \partial y^4} + \frac{K_{26}}{a^2 b^6} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{K_{08}}{b^8} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial y^8} = \\ & = \left[\begin{aligned} & \frac{N_x R_{40}}{a^6} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^6} + \frac{(N_{xy} + N_{yx}) R_{40}}{a^5 b} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^5 \partial y} + \\ & + \frac{(N_x R_{22} + N_y R_{40})}{a^4 b^2} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{(N_{xy} + N_{yx}) R_{22}}{a^3 b^3} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^3 \partial y^3} + \\ & + \frac{(N_x R_{04} + N_y R_{22})}{a^2 b^4} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{(N_{xy} + N_{yx}) R_{04}}{a b^5} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x \partial y^5} + \\ & + \frac{N_y R_{04}}{b^6} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^6} \end{aligned} \right], \quad (5.3) \end{aligned}$$

$x = x/a$, $y = y/b$ – безразмерные координаты, a , b – длина и ширина панели, соответственно.

Все компоненты напряжённого состояния и внутренние силовые факторы – усилия в плоскости обшивки могут быть выражены через потенциальную функцию $\Phi(x, y)$

$$\left. \begin{aligned} N_x &= L_{Nx} \Phi - N_x^T - N_x^H, & N_y &= L_{Ny} \Phi - N_y^T - N_y^H \\ N_{xy} &= L_{Nxy} \Phi - N_{xy}^T - N_{xy}^H, & N_{yx} &= L_{Nyx} \Phi - N_{yx}^T - N_{yx}^H \end{aligned} \right\}, \quad (5.4)$$

где, например, линейный дифференциальный оператор для ортотропной структуры

$$L_{Nx} = P_{60}^x \frac{\partial^6}{\partial x^6} + P_{42}^x \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + P_{24}^x \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} + P_{06}^x \frac{\partial^6}{\partial y^6},$$

$N_x^T, N_y^T, N_{xy}^T, N_{yx}^T$ – температурные усилия и моменты,

$N_x^H, N_y^H, N_{xy}^H, N_{yx}^H$ – усилия и моменты от предварительного натяжения

волокон композита.

Коэффициенты P_{ij}^x , $i = 6, 4, 2, 0$, $j = 0, 2, 4, 6$ так же, как и коэффициенты в

формулах связи (5.2), определяются геометрией и упругими характеристиками материала конструкции.

Задача устойчивости конструктивно-анизотропной композитной панели является нелинейной согласно уравнению (5.3) и формулам связи (5.4). Ограничиваясь в дальнейшем приближённым решением, для определения критических сил применим метод линеаризации.

С целью исследования характера распределения нормальных и сдвигающих усилий, вызванных внешней нагрузкой, рассматривается напряжённо-деформированное состояние конструкции при продольном изгибе, то есть докритическое основное напряжённое состояние, которое согласно предложенной расчётной схеме является сложным, так как не разделяется на плоскую задачу и изгиб пластины. Далее задача устойчивости, из решения которой может быть найдено дополнительное по отношению к исходному деформированию искривление поверхности приведения, формулируется как задача о собственных значениях. Критическая нагрузка для общего случая закрепления границ определяется из условия нетривиальности решения системы однородных линейных алгебраических уравнений, полученной при выполнении условий на контуре.

5.2 Крутильная форма потери устойчивости.

Вариационная формулировка задачи. Разрешающие уравнения

Исследуется совместная потеря устойчивости композитной обшивки с рёбрами жёсткости, при которой в направлении нормали к поверхности обшивка изгибается между узлами пересечений, элементы набора поворачиваются без искажения формы профиля (Рисунок 27).

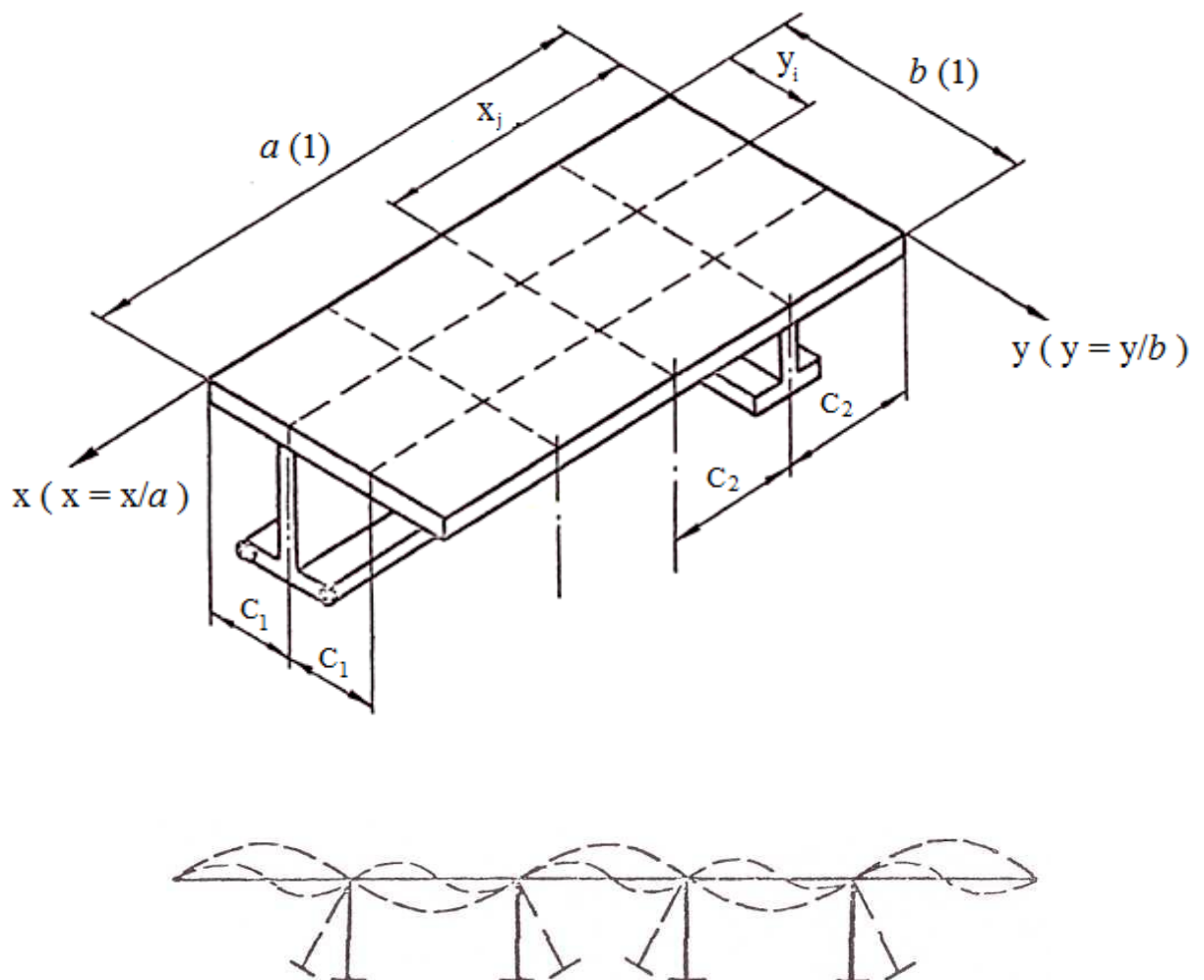


Рисунок 27 - Плоская прямоугольная панель, эксцентрично усиленная ортогонально расположенными рёбрами жёсткости
Многоволновая крутильная форма потери устойчивости

В рамках уточнённой математической модели жесткостные характеристики панели, связанные с изгибом и закручиванием стержней, вводятся дискретно с применением аппарата обобщённых функций.

Вариационный принцип Лагранжа используется для вывода уравнения изогнутой поверхности, соответствующего многоволновому крутильному выпучиванию панели. В выражении потенциальной энергии внутренних сил с помощью δ - функций вводятся жёсткости стержней, определяющие нормальные и касательные напряжения, причём нормальными напряжениями, обусловленными изгибом в плоскости обшивки и закручиванием, пренебрегаем. Полная потенциальная энергия панели представлена:

$$\mathcal{E} = \iint_{F_{xy}} f \left[x, y; u_{0x}, u_{0y}; v_{0x}, v_{0y}; w, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}; (u_4)_1, (u_4)_2 \right] dx dy \quad (5.5)$$

или

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= U - A = \\
&= \frac{1}{2} \iint_{F_{xy}} \left\{ \left[A_{11} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + A_{22} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + A_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + 2A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + 2A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right] - \right. \\
&\quad - 2 \left\{ B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \right. \\
&\quad \left. + B_{12} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + B_{16} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \right. \\
&\quad \left. \left. + B_{26} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \right\} + \right. \\
&\quad \left. + \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \right. \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \delta(y - y_i) \left[\hat{A}_{11}^x \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 - 2\hat{B}_{11}^x \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \hat{D}_{11}^x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \hat{D}_{\rho,66}^x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2\hat{D}_{\rho\omega\rho,66}^x \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (u_4)_1 + \hat{D}_{\rho\omega,66}^x [(u_4)_1]^2 \right] + \\
&\quad + \sum_{j=1}^M \delta(x - x_j) \left[\hat{A}_{22}^y \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 - 2\hat{B}_{22}^y \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \hat{D}_{22}^y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \hat{D}_{\rho,66}^y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2\hat{D}_{\rho\omega\rho,66}^y \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (u_4)_2 + \hat{D}_{\rho\omega,66}^y [(u_4)_2]^2 \right] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \left[\left(A_{11}^T + A_{12}^T + A_{16}^T \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} + \left(A_{21}^T + A_{22}^T + A_{26}^T \right) \frac{\partial v_0}{\partial y} + \left(A_{61}^T + A_{62}^T + A_{66}^T \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right] + \\
& + 2 \left[\left(B_{11}^T + B_{12}^T + B_{16}^T \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(B_{21}^T + B_{22}^T + B_{26}^T \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \left(B_{61}^T + B_{62}^T + B_{66}^T \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \\
& + \sum_{i=1}^N \delta(y - y_i) \left(-2 \hat{A}_{11}^{Tx} \frac{\partial u_0}{\partial x} + 2 \hat{B}_{11}^{Tx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \\
& + \sum_{j=1}^M \delta(x - x_j) \left(-2 \hat{A}_{22}^{Ty} \frac{\partial v_0}{\partial y} + 2 \hat{B}_{22}^{Ty} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \\
& - 2 \left[\left(A_{11}^H + A_{12}^H + A_{16}^H \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} + \left(A_{21}^H + A_{22}^H + A_{26}^H \right) \frac{\partial v_0}{\partial y} + \left(A_{61}^H + A_{62}^H + A_{66}^H \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right] + \\
& + 2 \left[\left(B_{11}^H + B_{12}^H + B_{16}^H \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(B_{21}^H + B_{22}^H + B_{26}^H \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \left(B_{61}^H + B_{62}^H + B_{66}^H \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \\
& + \sum_{i=1}^N \delta(y - y_i) \left(-2 \hat{A}_{11}^{Hx} \frac{\partial u_0}{\partial x} + 2 \hat{B}_{11}^{Hx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \\
& + \sum_{j=1}^M \delta(x - x_j) \left(-2 \hat{A}_{22}^{Hy} \frac{\partial v_0}{\partial y} + 2 \hat{B}_{22}^{Hy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \\
& \left. \begin{aligned} & - 2 \hat{q} w \end{aligned} \right\} dx dy
\end{aligned} \tag{5.6}$$

M, N - число поперечных и продольных рёбер, соответственно,

x_j, y_i - координаты расположения поперечных и продольных рёбер, соответственно (рисунок 27),

Индекс « ^ » при определении жёсткостных характеристик набора означает введение сосредоточенных стержней в узлах пересечений – осреднённые

жёсткости стрингеров умножаются на расстояние между стрингерами c_1 , аналогично с точностью до расстояния c_2 вычисляются жёсткости поперечных рёбер:

$$\hat{A}_{11}^x = A_{11}^x c_1, \dots, \hat{D}_{\rho\omega,66}^x = D_{\rho\omega,66}^x c_1$$

$$\hat{A}_{11}^y = A_{11}^y c_2, \dots, \hat{D}_{\rho\omega,66}^y = D_{\rho\omega,66}^y c_2$$

Символом \hat{q} обозначена интенсивность приведенной поперечной нагрузки на панель в деформированном состоянии.

5.3 Устойчивость панели с согласованными граничными условиями на контуре при сжатии

5.3.1 Общая изгибная форма потери устойчивости панели

Рассмотрим определение критических сил общей изгибной формы потери устойчивости плоской прямоугольной несимметрично подкреплённой композитной панели ортотропной структуры. Граничные условия соответствуют шарнирному опиранию в отношении изгиба и скользящей заделке в тангенциальном направлении в отношении плоской задачи, когда края панели нагружены потоками касательных сил. По двум противоположным сторонам распределены равномерно нормальные сжимающие усилия интенсивности P .

В первом приближении, пренебрегая переменностью докритического напряжённого состояния, положим, что до потери устойчивости

$$N_x = -P, \quad N_{xy} = N_{yx} = N_y = 0 \quad (5.7)$$

Тогда уравнение изогнутой поверхности имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{K_{80}}{a^8} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^8} + \frac{K_{62}}{a^6 b^2} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{K_{44}}{a^4 b^4} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^4 \partial y^4} + \frac{K_{26}}{a^2 b^6} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{K_{08}}{b^8} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial y^8} + \\ & + P \left[\frac{R_{40}}{a^6} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^6} + \frac{R_{22}}{a^4 b^2} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{R_{04}}{a^2 b^4} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^2 \partial y^4} \right] = 0 \quad , \end{aligned} \quad (5.8)$$

где $x = x/a$, $y = y/b$ – относительные координаты; a , b – длина и ширина панели, соответственно.

Интеграл уравнения (5.8), удовлетворяющий краевым условиям

$$\begin{aligned} \text{при } y=0 \text{ и } y=1 \quad & u_0[x,0] = N_y[x,0] = w[x,0] = M_y[x,0] = 0 \\ & u_0[x,1] = N_y[x,1] = w[x,1] = M_y[x,1] = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \text{ и } x=1 \quad & v_0[0,y] = N_x[0,y] = w[0,y] = M_x[0,y] = 0 \\ & v_0[1,y] = N_x[1,y] = w[1,y] = M_x[1,y] = 0 \quad , \end{aligned} \quad (5.10)$$

представим двойным тригонометрическим рядом

$$\Phi(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \sin(m\pi x) \sin(n\pi y) , \quad (5.11)$$

где m и n – параметры волнообразования.

Равенство

$$P = \frac{\pi^2}{b^2} \frac{K_{80} \left(\frac{m}{c}\right)^8 + K_{62} \left(\frac{m}{c}\right)^6 n^2 + K_{44} \left(\frac{m}{c}\right)^4 n^4 + K_{26} \left(\frac{m}{c}\right)^2 n^6 + K_{08} n^8}{\left[R_{40} \left(\frac{m}{c}\right)^4 + R_{22} \left(\frac{m}{c}\right)^2 n^2 + R_{04} n^4 \right] \left(\frac{m}{c}\right)^2} , \quad (5.12)$$

где $c = a/b$, при $m = 1, 2, 3, \dots$ и $n = 1, 2, 3, \dots$ даст спектр значений параметра P , при котором становится возможным деформирование поверхности приведения вида (5.11).

Для определения критического значения нагрузки $P_{кр}$ выражение (5.12) необходимо минимизировать по параметрам волнообразования, то есть решить экстремальную задачу.

Считая в дальнейшем число полуволн n в направлении стороны b фиксированным и полагая, таким образом, усилие P функцией одной переменной $\lambda = m/c$, приравниваем нулю её производную $\partial P / \partial \lambda = 0$.

Если соотношение сторон c удовлетворяет условию $c = m' / \lambda$, где m' - целое число, а λ – наименьший положительный действительный корень алгебраического уравнения двенадцатого порядка

$$\begin{aligned} & (K_{80} R_{40}) \lambda^{12} + (2K_{80} R_{22}) \lambda^{10} n^2 + (-K_{44} R_{40} + K_{62} R_{22} + 3K_{80} R_{04}) \lambda^8 n^4 + \\ & + (-2K_{26} R_{40} + 2K_{62} R_{04}) \lambda^6 n^6 + (-3K_{08} R_{40} - K_{26} R_{22} + K_{44} R_{04}) \lambda^4 n^8 + \\ & + (-2K_{08} R_{22}) \lambda^2 n^{10} + (-K_{08} R_{04}) n^{12} = 0 \quad , \end{aligned} \quad (5.13)$$

в выражении (5.12) следует положить $m = m'$, и полученное значение критической силы будет наименьшим из всех, определяемых по этой формуле.

Традиционный подход к построению функции $\Phi(x,y)$ в виде разложения её в двойные ряды по системе тригонометрических функций (5.11) позволяет исследовать критические параметры панелей с граничными условиями частного

вида, которые соответствуют шарнирному опиранию в отношении изгиба, а в отношении плоской задачи – заземлению в тангенциальном направлении при нагружении контура потоками касательных сил.

Если краевые условия отличны от условий (5.9), представляется возможным оценить влияние технологии изготовления на несущую способность конструктивно-анизотропной композитной панели: остаточных температурных напряжений, имеющих место при охлаждении после завершения процесса отверждения, и предварительного натяжения армирующих волокон. Решение строится в одинарных тригонометрических рядах или методом однородных решений, либо принимается во внимание докритическое напряжённое состояние конструкции.

5.3.2 Многоволновая крутильная форма потери устойчивости панели

Рассматривается задача многоволновой крутильной, например, в направлении оси y формы потери устойчивости плоской прямоугольной панели из композиционных материалов, эксцентрично подкреплённой ортогонально расположенными рёбрами жёсткости (Рисунок 27). Деформация конструкции осуществляется сжимающими усилиями интенсивности P , равномерно распределёнными вдоль торцов. Края панели закреплены в соответствии с граничными условиями частного вида, согласованными по плоской задаче и задаче изгиба.

Дискретно расположенными считаются продольные стержни, жесткости поперечного набора «размазываются» по обшивке.

Метод разделения переменных используется для введения жесткостных характеристик панели.

Искривлённую поверхность панели с граничными условиями (5.9)

представим

$$\left. \begin{aligned} u_0(x, y) &= u_0(x) \sin(n\pi y) \\ v_0(x, y) &= v_0(x) \cos(n\pi y) \\ w(x, y) &= w(x) \sin(n\pi y) \\ (u_4)_1(x, y) &= (u_4)_1(x) \cos(n\pi y) \\ (u_4)_2(x, y) &= (u_4)_2(x) \cos(n\pi y) \end{aligned} \right\}, \quad (5.14)$$

где n – фиксированное вдоль y число полуволн, $x = x/a$, $y = y/b$ – относительные координаты; a , b – длина и ширина панели, соответственно.

С учётом (5.14) выражение полной потенциальной энергии системы (5.5), (5.6)

$$\mathfrak{E} = \int_l f \left[x; u_0, u_{0x}; v_0, v_{0x}; w, w_x, w_{xx}; (u_4)_1(x), (u_4)_2(x) \right] dx \quad (5.15)$$

является функционалом, зависящим от одной переменной x , где жесткости стрингеров вводятся дискретно с помощью аппарата обобщённых функций $\delta(y - y_i)$.

$$\begin{aligned} A_{11}^x &= A_{11}^x \left[\frac{2c_1}{b} \sum_{i=1}^N \sin^2(n\pi y_i) \right] & D_{\rho,66}^x &= D_{\rho,66}^x \left[\frac{2c_1}{b} \sum_{i=1}^N \cos^2(n\pi y_i) \right] \\ B_{11}^x &= B_{11}^x \left[\frac{2c_1}{b} \sum_{i=1}^N \sin^2(n\pi y_i) \right] & D_{\rho_\omega\rho,66}^x &= D_{\rho_\omega\rho,66}^x \left[\frac{2c_1}{b} \sum_{i=1}^N \cos^2(n\pi y_i) \right] \\ D_{11}^x &= D_{11}^x \left[\frac{2c_1}{b} \sum_{i=1}^N \sin^2(n\pi y_i) \right] & D_{\rho_\omega,66}^x &= D_{\rho_\omega,66}^x \left[\frac{2c_1}{b} \sum_{i=1}^N \cos^2(n\pi y_i) \right] \end{aligned}, \quad (5.16)$$

$y_i = y_i/b$ – относительные координаты; b – ширина панели.

Реализация принципа минимума данного функционала позволяет построить систему трёх уравнений равновесия подкреплённой панели, которые являются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Далее полученная система с помощью операторного метода сводится к одному разрешающему обыкновенному дифференциальному уравнению относительно потенциальной

функции $\Phi(x)$.

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{K}_{80}}{a^8} \frac{d^8 \Phi}{dx^8} - \frac{\hat{K}_{62}}{a^6} \lambda_{ny}^2 \frac{d^6 \Phi}{dx^6} + \frac{\hat{K}_{44}}{a^4} \lambda_{ny}^4 \frac{d^4 \Phi}{dx^4} - \frac{\hat{K}_{26}}{a^2} \lambda_{ny}^6 \frac{d^2 \Phi}{dx^2} + \hat{K}_{08} \lambda_{ny}^8 \Phi = \\ & = \left[\frac{N_x \hat{R}_{40}}{a^6} \frac{d^6 \Phi}{dx^6} - \frac{(N_x \hat{R}_{22} + N_y \hat{R}_{40})}{a^4} \lambda_{ny}^2 \frac{d^4 \Phi}{dx^4} + \frac{(N_x \hat{R}_{04} + N_y \hat{R}_{22})}{a^2} \lambda_{ny}^4 \frac{d^2 \Phi}{dx^2} + N_y \hat{R}_{04} \lambda_{ny}^6 \Phi \right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

Решение разрешающего уравнения с учётом приведённой нагрузки для задачи устойчивости многоволновой формы, удовлетворяющее граничным условиям (5.10) при $x = 0$ и $x = 1$, в предположении (5.7), что до потери устойчивости

$$N_x = -P, \quad N_{xy} = N_{yx} = N_y = 0$$

представим тригонометрическим рядом

$$\Phi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin(m\pi x), \quad (5.18)$$

где m – число полуволн в направлении оси x .

Формула для усилий P с точностью до коэффициентов K_{ij} и R_{ij} совпадает с формулой (5.12)

$$P = \frac{\pi^2}{b^2} \frac{\hat{K}_{80} \left(\frac{m}{c}\right)^8 + \hat{K}_{62} \left(\frac{m}{c}\right)^6 n^2 + \hat{K}_{44} \left(\frac{m}{c}\right)^4 n^4 + \hat{K}_{26} \left(\frac{m}{c}\right)^2 n^6 + \hat{K}_{08} n^8}{\left[\hat{R}_{40} \left(\frac{m}{c}\right)^4 + \hat{R}_{22} \left(\frac{m}{c}\right)^2 n^2 + \hat{R}_{04} n^4 \right] \left(\frac{m}{c}\right)^2} \quad (5.19)$$

Здесь коэффициенты \hat{K}_{ij} , $i, j = 0, 2, 4, 6, 8$ и \hat{R}_{ij} , $i, j = 0, 2, 4$ определяются через обобщённые жесткостные характеристики, когда осреднение жесткостей элементов продольного набора по обшивке заменяется дискретным вводом

$$\frac{1}{c_1} \rightarrow \begin{cases} \frac{2}{b} \sum_{i=1}^N \sin^2(n\pi y_i) \\ \frac{2}{b} \sum_{i=1}^N \cos^2(n\pi y_i) \end{cases} \rightarrow \hat{K}_{ij}, \hat{R}_{ij},$$

c_1 – расстояние между стрингерами, y_i – координата у дискретно расположенного

стрингера (Рисунок 27).

При рассмотрении процесса потери устойчивости системы, связанного с изгибом обшивки между неподвижными в смысле поступательных перемещений узлами пересечений с последующим «заваливанием» элементов набора следует положить число полуволн $n = k(N + 1)$, $k = 1, 2, \dots, N$; N - число стрингеров.

Процедура минимизации усилия P (5.19) по параметру волнообразования m аналогична нахождению минимума функции (5.12).

5.4 Докритическое напряжённо-деформированное состояние конструктивно-анизотропных композитных панелей при сжатии

Поставлена задача исследования неравномерности распределения внутренних силовых факторов, вызванных внешней сжимающей нагрузкой, по координатам конструктивно-анизотропных панелей на примере ряда панелей из углепластика.

Рассматривается определение докритического напряжённого состояния плоской прямоугольной несимметрично подкреплённой композитной панели ортотропной структуры. По двум противоположным сторонам распределены равномерно нормальные сжимающие усилия интенсивности P . Граничные условия соответствуют скользящей заделке в тангенциальном направлении в отношении плоской задачи, когда продольные края панели нагружены потоками касательных сил, и шарнирному опиранию в отношении изгиба.

Для исследования характера распределения нормальных усилий N_x по координатам x и y определяется напряжённо-деформированное состояние конструктивно-анизотропной панели при сжатии. В целях сопоставления результатов по критическим параметрам, полученных без учёта и с учётом неравномерности исходного напряжённого состояния, в том случае, когда внешняя сжимающая нагрузка приложена к кромкам в продольном направлении, не принимается во внимание изменение кососимметричных внутренних силовых факторов N_{xy} , N_{yx} , а также поперечного усилия N_y .

Когда внешние поверхностные силы отсутствуют, разрешающее уравнение (5.3) становится однородным

$$\frac{K_{80}}{a^8} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^8} + \frac{K_{62}}{a^6 b^2} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{K_{44}}{a^4 b^4} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^4 \partial y^4} + \frac{K_{26}}{a^2 b^6} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{K_{08}}{b^8} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial y^8} = 0 \quad (5.20)$$

Граничные условия панели, «шарнирно опёртой» по продольным кромкам и сжатой по поперечным кромкам, соответствуют равенствам

$$\begin{aligned} \text{при } y=0 \text{ и } y=1 \quad u_0[x,0] = N_y[x,0] = w[x,0] = M_y[x,0] = 0 \\ u_0[x,1] = N_y[x,1] = w[x,1] = M_y[x,1] = 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \text{при } x=-1 \text{ и } x=1 \quad v_0[-1,y] = w[-1,y] = M_x[-1,y] = 0, \quad N_x[-1,y] = -P \\ v_0[+1,y] = w[+1,y] = M_x[+1,y] = 0, \quad N_x[+1,y] = -P \end{aligned} \quad (5.22)$$

Интеграл уравнения (5.20), удовлетворяющий краевым условиям (5.21), строится в одинарных тригонометрических рядах

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1,3,5}^{\infty} \Phi_i(x) \sin(i\pi y), \quad (5.23)$$

где $\Phi_i(x)$ подлежит определению.

Так как краевая задача симметрична в отношении координаты x , в решении для $\Phi_i(x)$ остаются лишь чётные функции, и с точностью до четырёх произвольных постоянных обобщённая функция перемещений $\Phi(x, y)$

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1,3,5}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 B_{iL} \operatorname{ch}(\lambda_{iL} x) \right] \sin(i\pi y) \quad (5.24)$$

Здесь $\lambda_{iL} = z_L \lambda_{iy} a$, $\lambda_{iy} = \frac{i\pi}{b}$, z_L - корни соответствующего характеристического полинома, которые находятся численно с использованием встроенных функций операционной среды MATLAB.

В одинарные тригонометрические ряды с точностью до констант B_{iL} (5.24) раскладываются компоненты вектора перемещений, деформации и кривизны поверхности приведения, углы поворота, внутренние силовые факторы. В одинарные тригонометрические ряды раскладываются также внутренние силовые факторы, связанные с температурой и натяжением. При этом симметричные компоненты НДС зависят только от чётных функций по координате x , кососимметричные компоненты – от нечётных функций. Линейные дифференциальные операторы связи кинематических и статических компонентов НДС с разрешающей потенциальной функцией $\Phi(x, y)$ приведены в главе 2.

Для окончательного определения компонентов НДС, то есть, по существу,

системы неизвестных констант B_{iL} ($i = 1, 3, 5, \dots, L = 1, 2, 3, 4$) необходимо удовлетворить граничным условиям на торцах конструкции при $x = +1$.

Закон распределения продольных усилий N_x , соответствующих докритическому напряжённому состоянию сжатой вдоль оси x подкреплённой композитной панели, имеет вид :

$$N_x = P \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ \left[\sum_{L=1}^4 (N_x)_{iL} \operatorname{ch}(\lambda_{iL}x) \right] - \frac{(N_x^T)_i}{P} - \frac{(N_x^H)_i}{P} \right\} \sin(i\pi y) , \quad (5.25)$$

$(N_x)_{iL}$ - коэффициенты разложения в одинарные тригонометрические ряды нормальных усилий N_x , известные после определения констант B_{iL} .

$(N_x^T)_i, (N_x^H)_i$ - коэффициенты разложения в одинарные тригонометрические ряды температурных усилий N_x^T и усилий предварительного натяжения N_x^H .

Аналогично (5.25) исследуется изменимость поперечных усилий N_y и усилий сдвига N_{xy}, N_{yx} .

Таким образом, если рассматриваются краевые условия (5.22), представляется возможным оценить влияние технологии изготовления на несущую способность конструктивно-анизотропной композитной панели: остаточных температурных напряжений, имеющих место при охлаждении после завершения процесса отверждения, и предварительного натяжения армирующих волокон.

5.5 Устойчивость панели

с согласованными граничными условиями на контуре при сжатии с учётом неравномерности докритического напряжённого состояния

Линейная задача устойчивости формулируется далее как задачи о собственных значениях.

Общее дифференциальное уравнение изогнутой поверхности (5.3), (5.8) определяющее смежное по отношению к исходному докритическому равновесное состояние конструкции, с учётом формул связи (5.2) и закона изменения нормальных усилий (5.25) имеет вид :

$$\begin{aligned} & \frac{K_{80}}{a^8} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^8} + \frac{K_{62}}{a^6 b^2} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{K_{44}}{a^4 b^4} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^4 \partial y^4} + \frac{K_{26}}{a^2 b^6} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{K_{08}}{b^8} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial y^8} = \\ & = P \left\{ \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\left[\sum_{L=1}^4 (N_x)_{iL} \operatorname{ch}(\lambda_{iL} x) \right] - \frac{(N_x^T)_i}{P} - \frac{(N_x^H)_i}{P} \right] \sin(i\pi y) \right\} \times \\ & \times \left[\frac{R_{40}}{a^6} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^6} + \frac{R_{22}}{a^4 b^2} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{R_{04}}{a^2 b^4} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^2 \partial y^4} \right] \end{aligned} \quad (5.26)$$

Здесь усилия N_x (5.25) фигурируют в качестве переменных коэффициентов.

Интеграл уравнения (5.26), отличный от нуля и удовлетворяющий однородным краевым условиям

$$\begin{aligned} \text{при } y=0 \text{ и } y=1 \quad & u_0[x,0] = N_y[x,0] = w[x,0] = M_y[x,0] = 0 \\ & u_0[x,1] = N_y[x,1] = w[x,1] = M_y[x,1] = 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} \text{при } x=-1 \text{ и } x=1 \quad & v_0[-1,y] = N_x[-1,y] = w[-1,y] = M_x[-1,y] = 0 \\ & v_0[+1,y] = N_x[+1,y] = w[+1,y] = M_x[+1,y] = 0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

может быть аппроксимирован двойным тригонометрическим рядом

$$\Phi(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \sin\left[\frac{m\pi}{2}(x+1)\right] \sin(n\pi y)$$

Однако, решить задачу в замкнутой форме не представляется возможным, так как метод приводит к бесконечной системе линейных алгебраических

уравнений.

В качестве приближённого решения рассматривается одночленная аппроксимация

$$\Phi(x, y) = f_{mn} \sin \left[\frac{m\pi}{2}(x+1) \right] \sin(n\pi y) \quad , \quad (5.29)$$

где m и n - параметры волнообразования.

После проведения процедуры ортогонализации уравнения (5.26) с учётом решения в форме (5.29) строится формула для критических усилий

$$P = P^* \left\{ \frac{\pi}{\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(-\frac{2}{i} - \frac{1}{2n-i} + \frac{1}{2n+i} \right) \left\{ \left[\sum_{L=1}^4 (N_x)_{iL} \frac{\left[(m\pi)^2 - \lambda_{iL}^2 \right] sh(\lambda_{iL})}{\left[(m\pi)^2 + \lambda_{iL}^2 \right] \lambda_{iL}} \right] - \frac{(N_x^T)_i}{P} - \frac{(N_x^H)_i}{P} \right\}} \right\} \quad , \quad (5.30)$$

где символом «*» обозначено критическое усилие, рассчитываемое без учёта неравномерности основного докритического напряжённого состояния

$$P^* = \frac{\pi^2}{b^2} \frac{K_{80} \left(\frac{m}{c} \right)^8 + K_{62} \left(\frac{m}{c} \right)^6 n^2 + K_{44} \left(\frac{m}{c} \right)^4 n^4 + K_{26} \left(\frac{m}{c} \right)^2 n^6 + K_{08} n^8}{\left[R_{40} \left(\frac{m}{c} \right)^4 + R_{22} \left(\frac{m}{c} \right)^2 n^2 + R_{04} n^4 \right] \left(\frac{m}{c} \right)^2}$$

для общей изгибной формы потери устойчивости и для крутильной формы потери устойчивости, если коэффициенты \hat{K}_{ij} , $i, j = 0, 2, 4, 6, 8$ и \hat{R}_{ij} , $i, j = 0, 2, 4$ определяются через обобщённые жесткостные характеристики, когда осреднение жесткостей элементов продольного набора по обшивке заменяется дискретным вводом :

$$\frac{1}{c_1} \rightarrow \begin{cases} \frac{2}{b} \sum_{i=1}^N \sin^2(n\pi y_i) \\ \frac{2}{b} \sum_{i=1}^N \cos^2(n\pi y_i) \end{cases} \rightarrow \hat{K}_{ij}, \hat{R}_{ij}$$

В выражении (5.30) отношение сторон панели $c = 2a/b$, a , b – полудлина и

ширина панели, соответственно.

Таким образом, представляется возможным оценить влияние технологии изготовления на несущую способность конструктивно-анизотропной композитной панели: остаточных температурных напряжений, имеющих место при охлаждении после завершения процесса отверждения, и предварительного натяжения армирующих волокон. Решение строится в рамках одночленной аппроксимации тригонометрическими функциями, принимается во внимание докритическое напряжённое состояние конструкции. Определение критических усилий осуществляется методом последовательных приближений. В качестве исходного приближения принимается критическая нагрузка P с символом «*», найденная без учёта переменности докритического напряжённого состояния.

5.6 Устойчивость панели с согласованными граничными условиями закрепления двух противоположных кромок при сжатии

Рассмотрим определение критических сил общей изгибной формы потери устойчивости плоской прямоугольной несимметрично подкреплённой композитной панели ортотропной структуры. По двум противоположным сторонам распределены равномерно нормальные сжимающие усилия интенсивности P . Граничные условия на ненагруженных кромках соответствуют скользящей заделке в тангенциальном направлении в отношении плоской задачи, когда продольные края панели нагружены потоками касательных сил, и шарнирному опиранию в отношении изгиба. Нагруженные кромки закреплены произвольно или свободны.

С математической точки зрения проблема исследования бифуркации равновесных форм конструктивно-анизотропных панелей, трактуемых как ортотропные, сводится к решению краевой задачи и задачи на собственные значения в прямоугольной области для линейного дифференциального уравнения восьмого порядка в частных производных относительно искомой потенциальной функции $\Phi(x,y)$

$$\frac{K_{80}}{a^8} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^8} + \frac{K_{62}}{a^6 b^2} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{K_{44}}{a^4 b^4} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^4 \partial y^4} + \frac{K_{26}}{a^2 b^6} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{K_{08}}{b^8} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial y^8} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \frac{N_x R_{40}}{a^6} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^6} + \frac{(N_{xy} + N_{yx}) R_{40}}{a^5 b} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^5 \partial y} + \\ + \frac{(N_x R_{22} + N_y R_{40})}{a^4 b^2} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{(N_{xy} + N_{yx}) R_{22}}{a^3 b^3} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^3 \partial y^3} + \\ + \frac{(N_x R_{04} + N_y R_{22})}{a^2 b^4} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{(N_{xy} + N_{yx}) R_{04}}{a b^5} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x \partial y^5} + \\ + \frac{N_y R_{04}}{b^6} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^6} \end{array} \right],$$

Линейный дифференциальный оператор левой части уравнения содержит

производные чётной степени по каждой из координат.

В рамках приближения $N_x = -P$, $N_{xy} = N_{yx} = N_y = 0$

$$\frac{K_{80}}{a^8} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^8} + \frac{K_{62}}{a^6 b^2} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{K_{44}}{a^4 b^4} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^4 \partial y^4} + \frac{K_{26}}{a^2 b^6} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{K_{08}}{b^8} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial y^8} +$$

$$+ P \left[\frac{R_{40}}{a^6} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^6} + \frac{R_{22}}{a^4 b^2} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{R_{04}}{a^2 b^4} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^2 \partial y^4} \right] = 0$$

Решение задачи устойчивости далее строится с использованием результатов, представленных в разделе 3.2.

Линейные дифференциальные операторы связи кинематических и статических компонентов НДС с разрешающей потенциальной функцией $\Phi(x, y)$

$$\left. \begin{array}{l} u_0 = L_{u_0} \Phi \\ v_0 = L_{v_0} \Phi \\ w = L_w \Phi \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} N_x = L_{N_x} \Phi - N_x^T - N_x^H \\ N_{xy} = L_{N_{xy}} \Phi - N_{xy}^T - N_{xy}^H \\ \bar{Q}_x = L_{\bar{Q}_x} \Phi \\ M_x = L_{M_x} \Phi - M_x^T - M_x^H \\ H_{xy} = L_{H_{xy}} \Phi - H_{xy}^T - H_{xy}^H \end{array} \right\}$$

ИМЕЮТ ВИД

$$L_{u_0} = \frac{R_{50}}{a^5} \frac{\partial^5}{\partial x^5} + \frac{R_{32}}{a^3 b^2} \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2} + \frac{R_{14}}{a b^4} \frac{\partial^5}{\partial x \partial y^4}$$

$$L_{v_0} = \frac{S_{41}}{a^4 b} \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial y} + \frac{S_{23}}{a^2 b^3} \frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} + \frac{S_{05}}{b^5} \frac{\partial^5}{\partial y^5},$$

$$L_w = \frac{R_{40}}{a^4} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{R_{22}}{a^2 b^2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{R_{04}}{b^4} \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

$$\begin{aligned}
L_{N_x} &= \frac{P_{60}^x}{a^6} \frac{\partial^6}{\partial x^6} + \frac{P_{42}^x}{a^4 b^2} \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{P_{24}^x}{a^2 b^4} \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{P_{06}^x}{b^6} \frac{\partial^6}{\partial y^6} \\
L_{N_{xy}} &= \frac{Q_{51}^x}{a^5 b} \frac{\partial^6}{\partial x^5 \partial y} + \frac{Q_{33}^x}{a^3 b^3} \frac{\partial^6}{\partial x^3 \partial y^3} + \frac{Q_{15}^x}{a b^5} \frac{\partial^6}{\partial x \partial y^5} \\
L_{\bar{Q}_x} &= \frac{T_{70}^x}{a^7} \frac{\partial^7}{\partial x^7} + \frac{T_{52}^x}{a^5 b^2} \frac{\partial^7}{\partial x^5 \partial y^2} + \frac{T_{34}^x}{a^3 b^4} \frac{\partial^7}{\partial x^3 \partial y^4} + \frac{T_{16}^x}{a b^6} \frac{\partial^7}{\partial x \partial y^6} \quad , \\
L_{M_x} &= \frac{R_{60}^x}{a^6} \frac{\partial^6}{\partial x^6} + \frac{R_{42}^x}{a^4 b^2} \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{R_{24}^x}{a^2 b^4} \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{R_{06}^x}{b^6} \frac{\partial^6}{\partial y^6} \\
L_{H_{xy}} &= \frac{S_{51}^x}{a^5 b} \frac{\partial^6}{\partial x^5 \partial y} + \frac{S_{33}^x}{a^3 b^3} \frac{\partial^6}{\partial x^3 \partial y^3} + \frac{S_{15}^x}{a b^5} \frac{\partial^6}{\partial x \partial y^5}
\end{aligned}$$

$L_{N_y}, L_{N_{yx}}, L_{\bar{Q}_y}, L_{M_y}, L_{H_{yx}}$ строятся аналогично $L_{N_x}, L_{N_{xy}}, L_{\bar{Q}_x}, L_{M_x}, L_{H_{xy}}$ с заменой коэффициентов с индексом «x» на коэффициенты с индексом «y»; дифференциальные операторы $L_{N_y}, L_{N_{yx}}, L_{M_y}, L_{H_{yx}}$ - шестого порядка, дифференциальный оператор $L_{\bar{Q}_y}$ - седьмого порядка;

$N_x^T, N_y^T, N_{xy}^T, N_{yx}^T, M_x^T, M_y^T, H_{xy}^T, H_{yx}^T$ – температурные усилия и моменты, $N_x^H, N_y^H, N_{xy}^H, N_{yx}^H, M_x^H, M_y^H, H_{xy}^H, H_{yx}^H$ – усилия и моменты от натяжения.

Коэффициенты $K_{8-i,b}, i=0,2,4,6,8$ в разрешающем уравнении и коэффициенты $R_{4-i,b}, i=0,2,4, R_{5-i,b}, i=0,2,4, S_{5-i,b}, i=1,3,5$ и т.д. в формулах связи – постоянные величины, которые зависят от упругих свойств материала и геометрических параметров конструкции; $x = x/a, y = y/b$ – безразмерные координаты, отнесённые к полудлине a и к ширине панели b , соответственно.

Линейные дифференциальные операторы связи для симметричных компонентов НДС так же, как и линейный дифференциальный оператор разрешающего уравнения, содержат производные чётной степени по каждой из координат. Косо-симметричные компоненты НДС определяются нечётными производными.

Краевая задача общего вида в прямоугольной области представлена условиями упругой заделки

при $x = const$ $(\gamma_1 u_0 + \delta_1 N_x) = (\gamma_2 v_0 + \delta_2 N_{xy}) = (\gamma_3 w + \delta_3 \bar{Q}_x) = (\gamma_4 w'_x + \delta_4 M_x) = 0$

при $y = const$ $(\alpha_1 u_0 + \beta_1 N_{yx}) = (\alpha_2 v_0 + \beta_2 N_y) = (\alpha_3 w + \beta_3 \bar{Q}_y) = (\alpha_4 w'_y + \beta_4 M_y) = 0,$

коэффициенты $\gamma_i, \delta_i, \alpha_i, \beta_i, i = 1, 2, 3, 4$ меняются от 0 до 1.

Условия упругой заделки позволяют рассмотреть все возможные варианты закрепления граничных кромок в отношении связанных плоской задачи и задачи изгиба: защемление, скользящую заделку, шарнирное закрепление, свободный край.

Влияние остаточных температурных напряжений, имеющих место при охлаждении после завершения процесса отверждения, а также предварительного натяжения армирующих волокон на несущую способность конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов представляется возможным оценить в том случае, когда граничные условия являются несогласованными, а решение строится в одинарных тригонометрических рядах либо с использованием метода однородных решений. Необходимо учесть переменность докритического напряжённого состояния.

Конкретные исследования связаны с условиями закрепления панелей в составе проектируемой конструкции.

Решение краевых задач в прямоугольной области для уравнения

$$L^{(8)}\Phi = \hat{q}, \quad \hat{q} - \text{приведенная нагрузка}$$

с линейным дифференциальным оператором, который содержит производные четной степени по каждой из координат

$$L^{(8)} = \frac{K_{80}}{a^8} \frac{\partial^8}{\partial x^8} + \frac{K_{62}}{a^6 b^2} \frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{K_{44}}{a^4 b^4} \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + \frac{K_{26}}{a^2 b^6} \frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{K_{08}}{b^8} \frac{\partial^8}{\partial y^8}$$

построено в замкнутом виде в одинарных тригонометрических рядах для частного случая граничных условий по двум противоположным кромкам:

$$\text{при } y = 0 \quad u_0[x, 0] = N_y[x, 0] = w[x, 0] = M_y[x, 0] = 0$$

$$\text{при } y = 1 \quad u_0[x, 1] = N_y[x, 1] = w[x, 1] = M_y[x, 1] = 0$$

Эти условия принято называть согласованными: они соответствуют шарниру в

отношении изгиба, а в отношении плоской задачи – скользящей заделке в тангенциальном направлении, когда часть контура панели нагружена потоками касательных сил. Панель по границе, перпендикулярной оси y , нагружена потоками касательных сил N_{yx} , которые уравниваются нормальными усилиями N_x на границе и площадках, перпендикулярных оси x .

Условия на торцах произвольны и могут быть условиями упругой заделки типа

$$\left. \begin{aligned} x = \pm 1 &\rightarrow (\gamma_1 u_0 + \delta_1 N_x) = (\gamma_2 v_0 + \delta_2 N_{xy}) = (\gamma_3 w + \delta_3 \bar{Q}_x) = (\gamma_4 w'_x + \delta_4 M_x) = 0 \\ x = -1 &\rightarrow (\varepsilon_1 u_0 + \xi_1 N_x) = (\varepsilon_2 v_0 + \xi_2 N_{xy}) = (\varepsilon_3 w + \xi_3 \bar{Q}_x) = (\varepsilon_4 w'_x + \xi_4 M_x) = 0 \\ x = 1 &\rightarrow (\gamma_1 u_0 + \delta_1 N_x) = (\gamma_2 v_0 + \delta_2 N_{xy}) = (\gamma_3 w + \delta_3 \bar{Q}_x) = (\gamma_4 w'_x + \delta_4 M_x) = 0 \end{aligned} \right\}$$

в симметричной либо в несимметричной краевых задачах, соответственно; коэффициенты γ_i , δ_i , ε_i , ξ_i , $i=1,2,3,4$ меняются от 0 до 1.

Разрешающая функция $\Phi(x, y)$ – обобщённая функция перемещений, удовлетворяющая уравнению устойчивости и условиям на торцах панели, раскладывается в одинарный ряд по системе тригонометрических функций

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x) \sin(n\pi y) \quad , \quad (5.31)$$

где $\Phi_n(x)$ подлежит определению.

Процедура ортогонализации общего уравнения устойчивости с учётом решения в форме одинарного тригонометрического ряда (5.31) позволяет построить обыкновенное дифференциальное уравнение восьмого порядка для функции $\Phi_n(x)$

$$\begin{aligned} K_{80} \frac{1}{a^8} \frac{d^8 \Phi_n}{dx^8} + \left(-K_{62} + \frac{R_{40}}{\lambda_{ny}^2} P \right) \lambda_{ny}^2 \frac{1}{a^6} \frac{d^6 \Phi_n}{dx^6} + \left(K_{44} - \frac{R_{22}}{\lambda_{ny}^2} P \right) \lambda_{ny}^4 \frac{1}{a^4} \frac{d^4 \Phi_n}{dx^4} + \\ + \left(-K_{26} + \frac{R_{04}}{\lambda_{ny}^2} P \right) \lambda_{ny}^6 \frac{1}{a^2} \frac{d^2 \Phi_n}{dx^2} + K_{08} \lambda_{ny}^8 \Phi_n = 0 \end{aligned} \quad (5.32)$$

При решении задачи общего вида в отношении краевых условий по

поперечным кромкам в разложении (5.31) для $\Phi_n(x)$ следует сохранить и чётные, и нечётные функции. С точностью до восьми произвольных постоянных обобщённая функция перемещений

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 A_{nL} sh(\lambda_{nL} x) + \sum_{L=1}^4 B_{nL} ch(\lambda_{nL} x) \right] \sin(n\pi y) \quad , \quad (5.33)$$

$$\lambda_{nL} = z_L \lambda_{ny} a \quad \lambda_{ny} = \frac{n\pi}{b} ,$$

λ_{nL} - корни соответствующего характеристического полинома, определяемые численно с использованием стандартных программ.

Если краевая задача симметрична в отношении координаты x , в решении для $\Phi_n(x)$ остаются лишь чётные функции, и с точностью до четырёх произвольных постоянных обобщённая функция перемещений $\Phi(x, y)$

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 B_{nL} ch(\lambda_{nL} x) \right] \sin(n\pi y) \quad (5.34)$$

Здесь $\lambda_{nL} = z_L \lambda_{ny} a$, $\lambda_{ny} = \frac{n\pi}{b}$, λ_{nL} - корни соответствующего характеристического полинома

$$\begin{aligned} \lambda_n^8 + \left(-K_{62} + \frac{R_{40}}{\lambda_{ny}^2} P \right) (\lambda_{ny} a)^2 \lambda_n^6 + \left(K_{44} - \frac{R_{22}}{\lambda_{ny}^2} P \right) (\lambda_{ny} a)^4 \lambda_n^4 + \\ + \left(-K_{26} + \frac{R_{04}}{\lambda_{ny}^2} P \right) (\lambda_{ny} a)^6 \lambda_n^2 + K_{08} (\lambda_{ny} a)^8 = 0 \quad , \end{aligned} \quad (5.35)$$

которые находятся численно с использованием встроенных функций операционной среды MATLAB.

В одинарные тригонометрические ряды с точностью до констант B_{nL} (5.34) раскладываются компоненты вектора перемещений, деформации и кривизны поверхности приведения, углы поворота, внутренние силовые факторы. В одинарные тригонометрические ряды раскладываются также внутренние силовые факторы, связанные с температурой и натяжением. При этом симметричные компоненты НДС зависят только от чётных функций по координате x , косо-

симметричные компоненты – от нечётных функций. Линейные дифференциальные операторы связи кинематических и статических компонентов НДС с разрешающей потенциальной функцией $\Phi(x, y)$ приведены в главе 2.

Прогиб панели $w(x, y)$, продольное $u_0(x, y)$ и тангенциальное $v_0(x, y)$ смещения вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 u_{nL} B_{nL} \operatorname{sh}(\lambda_{nL} x) \right] \sin(n\pi y) \\ v_0(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 v_{nL} B_{nL} \operatorname{ch}(\lambda_{nL} x) \right] \cos(n\pi y) \quad , \\ w(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 w_{nL} B_{nL} \operatorname{ch}(\lambda_{nL} x) \right] \sin(n\pi y) \end{aligned} \quad (5.36)$$

где

$$\begin{aligned} u_{nL} &= R_{05} \left(\frac{\lambda_{nL}}{a} \right)^5 - R_{32} \left(\frac{\lambda_{nL}}{a} \right)^3 \lambda_{ny}^2 + R_{14} \left(\frac{\lambda_{nL}}{a} \right) \lambda_{ny}^4 \\ v_{nL} &= S_{41} \left(\frac{\lambda_{nL}}{a} \right)^4 \lambda_{ny} - S_{23} \left(\frac{\lambda_{nL}}{a} \right)^2 \lambda_{ny}^3 + S_{05} \lambda_{ny}^5 \\ w_{nL} &= R_{40} \left(\frac{\lambda_{nL}}{a} \right)^4 - R_{22} \left(\frac{\lambda_{nL}}{a} \right)^2 \lambda_{ny}^2 + R_{04} \lambda_{ny}^4 \end{aligned}$$

Для определения системы неизвестных констант B_{nL} ($n = 1, 3, 5, \dots, L = 1, 2, 3, 4$) необходимо удовлетворить граничным условиям на торцах конструкции при $x = +1$. Например, если поперечные кромки панели жёстко защемлены,

$$\text{при } x=1 \quad u_0(1, y) = v_0(1, y) = w(1, y) = \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial x}(1, y) = 0 \quad (5.37)$$

Граничные условия (5.37) с учётом разложений в одинарные тригонометрические ряды компонентов вектора перемещений (5.36) представляют собой систему четырёх линейных алгебраических уравнений относительно постоянных B_{nL}

$$\sum_{L=1}^4 C_{kL}^n B_{nL} = 0, \quad k = \overline{1,4}$$

$$C_{1L}^n = u_{nL} sh(\lambda_{nL}) \quad (5.38)$$

$$C_{2L}^n = v_{nL} ch(\lambda_{nL})$$

$$C_{3L}^n = w_{nL} ch(\lambda_{nL}) \quad C_{4L}^n = w_{nL} \left(\frac{\lambda_{nL}}{a} \right) sh(\lambda_{nL})$$

Для возможности появления выпучивания необходимо, чтобы решение системы (5.38) было бы нетривиальным, что обеспечивается условием равенства нулю её детерминанта $\det [C_{kL}^n] = 0$.

Наименьший по величине действительный положительный корень последнего уравнения является значением критической нагрузки $P_{кр}$.

Изложенный алгоритм определения критического усилия общей потери устойчивости конструктивно-анизотропной композитной панели с согласованными граничными условиями по двум противоположным кромкам при сжатии в продольном направлении может быть реализован в операционной среде MATLAB в рамках итерационного процесса. Блок-схема соответствующего метода последовательных приближений представлена на Рисунке 28

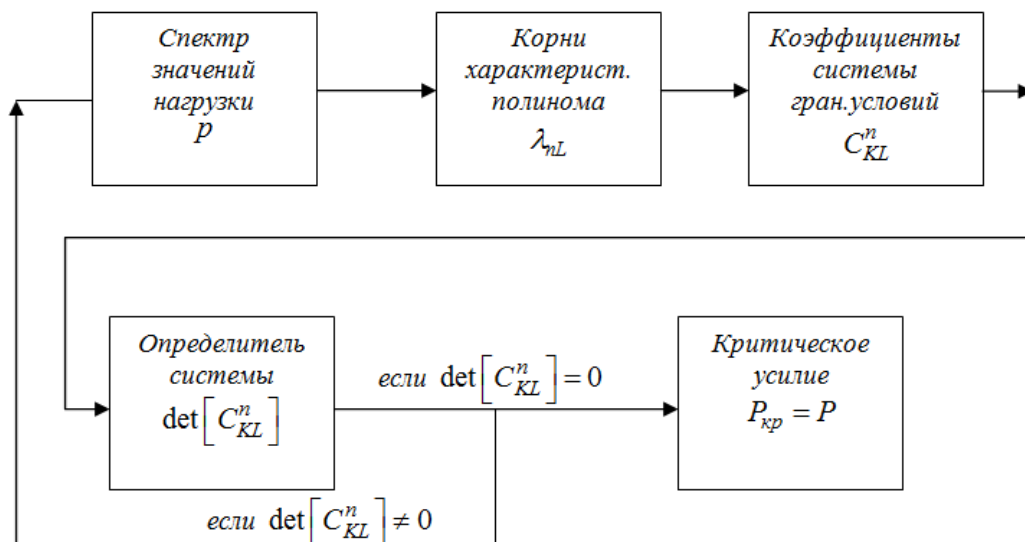


Рисунок 28 - Блок-схема метода последовательных приближений для определения критических сил при сжатии панели в продольном направлении. Краевая задача общего вида на двух противоположных сторонах контура

5.7 Метод однородных решений в задачах устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов с граничными условиями общего вида

Рассматривается класс точных аналитических решений краевых задач устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов, соответствующих общей трактовке физических граничных условий элементов конструкции.

Проблема определения критических усилий конструктивно-анизотропных композитных панелей сведена к решению краевой задачи и задачи на собственные значения для уравнения восьмого порядка в частных производных в прямоугольной области. Данное решение построено в рамках итерационного процесса методом однородных решений для произвольных несогласованных граничных условий на контуре. Рассматриваются все возможные варианты закрепления граничных кромок в отношении связанных плоской задачи и задачи изгиба.

Применяется схема решения краевых задач для конечных областей, предложенная профессором С.А. Лурье в качестве подхода к исследованию бигармонической проблемы теории упругости. Используются алгоритмы, представленные в разделе 3.3 для исследования напряжённо-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов.

Особенность метода однородных решений для бигармонического уравнения состоит в сведении задачи к разложению двух вещественных функций с одной системой констант, которые, не являясь ортогональными, подчиняются условию обобщённой ортогональности. При реализации метода однородных решений возникает ряд трудностей, связанных с построением условий расширенной ортогональности, с определением достаточных условий разложимости граничных функций. Исследование поставленных вопросов применительно к оператору восьмого порядка предлагается осуществить с использованием теорем теории линейных дифференциальных операторов.

Изложен алгоритм нового метода, позволяющего представить решение в виде разложения по неортогональной системе обобщённых собственных функций с коэффициентами, определяемыми явно.

Рассматриваются задачи общей потери устойчивости плоской прямоугольной многослойной панели, изготовленной из полимерных волокнистых композиционных материалов, с эксцентричным продольно-поперечным набором и плоской прямоугольной композитной панели с несимметричной по толщине структурой пакета (Рисунок 1). Панели находятся под действием распределённой сжимающей нагрузки P в стационарном температурном поле с уровнем температуры ΔT . Условия закрепления контура предполагаются достаточно общими. Пренебрегая переменностью докритического напряжённого состояния, положим, что до потери устойчивости $N_x = -P$, $N_{xy} = N_{yx} = N_y = 0$.

С математической точки зрения проблема исследования устойчивости конструктивно-анизотропных панелей, трактуемых как ортотропные, сводится к решению краевой задачи в прямоугольной области для неоднородного линейного дифференциального уравнения восьмого порядка в частных производных относительно искомой потенциальной функции $\Phi(x, y)$. Линейный дифференциальный оператор уравнения содержит производные чётной степени по каждой из координат

$$L^{(8)}\Phi = \hat{q}, \quad \hat{q} = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (5.39)$$

$$L^{(8)} = \frac{K_{80}}{a^8} \frac{\partial^8}{\partial x^8} + \frac{K_{62}}{a^6 b^2} \frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{K_{44}}{a^4 b^4} \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + \frac{K_{26}}{a^2 b^6} \frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{K_{08}}{b^8} \frac{\partial^8}{\partial y^8}$$

или

$$\frac{K_{80}}{a^8} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^8} + \frac{K_{62}}{a^6 b^2} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{K_{44}}{a^4 b^4} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^4 \partial y^4} + \frac{K_{26}}{a^2 b^6} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{K_{08}}{b^8} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial y^8} +$$

$$+ P \left[\frac{R_{40}}{a^6} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^6} + \frac{R_{22}}{a^4 b^2} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{R_{04}}{a^2 b^4} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^2 \partial y^4} \right] = 0$$

Линейные дифференциальные операторы связи для симметричных

компонентов НДС так же, как и линейный дифференциальный оператор разрешающего уравнения, содержат производные чётной степени по каждой из координат. Косо-симметричные компоненты НДС определяются нечётными производными (разделы 3.2, 5.6).

Краевая задача общего вида в прямоугольной области представлена условиями упругой заделки, которые позволяют рассмотреть все возможные варианты закрепления граничных кромок в отношении связанных плоской задачи и задачи изгиба: защемление, скользящую заделку, шарнирное закрепление, свободный край

$$\text{при } x = \pm 1 \quad (\gamma_1 u_0 + \delta_1 N_x) = (\gamma_2 v_0 + \delta_2 N_{xy}) = (\gamma_3 w + \delta_3 \bar{Q}_x) = (\gamma_4 w'_x + \delta_4 M_x) = 0, \quad (5.40)$$

$$\text{при } y = \pm 1 \quad (\alpha_1 u_0 + \beta_1 N_{yx}) = (\alpha_2 v_0 + \beta_2 N_y) = (\alpha_3 w + \beta_3 \bar{Q}_y) = (\alpha_4 w'_y + \beta_4 M_y) = 0, \quad (5.41)$$

коэффициенты $\gamma_i, \delta_i, \alpha_i, \beta_i, i = 1, 2, 3, 4$ меняются от 0 до 1.

Краевые условия могут быть кинематическими, статическими и смешанными:

$$\text{при } x = \text{const} \quad L_i^{(j)} \Phi = \xi_i(y) \quad (5.42)$$

$$\text{при } y = \text{const} \quad M_i^{(j)} \Phi = \chi_i(x), \quad i = \overline{1, 4}, \quad j = \overline{4, 7} \quad (5.43)$$

Здесь $L_i^{(j)} \Phi, M_i^{(j)} \Phi$ - дифференциальные граничные операторы, $\xi_i(y), \chi_i(x)$ - известные граничные функции.

Задача считается симметричной относительно центральных координат. В качестве примера рассматривается вариант граничных условий на контуре, которые соответствуют свободным кромкам в отношении плоской задачи и шарнирному опиранию в смысле изгиба

$$\text{при } y = \pm 1 \quad N_y(x, \pm 1) = N_{yx}(x, \pm 1) = w(x, \pm 1) = M_y(x, \pm 1) = 0 \quad (5.44)$$

$$\text{при } x = \pm 1 \quad N_x(\pm 1, y) = N_{xy}(\pm 1, y) = w(\pm 1, y) = M_x(\pm 1, y) = 0 \quad (5.45)$$

Конкретные исследования связаны с условиями закрепления панелей в составе проектируемой конструкции. Вид граничных условий диктуется характером закрепления реальных конструктивных элементов.

Рассматриваются центрально симметричные задачи устойчивости с несогласованными условиями на контуре панелей, что представляет интерес с точки зрения расчётов на прочность и практики проектирования. Для исследования устойчивости используются модификации метода однородных решений, позволяющие представить искомые функции $\Phi(x, y)$ в виде разложения в ряды по неортогональной системе обобщённых собственных функций с коэффициентами, определяемыми явно.

Регулярная составляющая общего интеграла строится в форме разложения по однородным функциям $\Phi_k(x)$

$$\Phi(x, y) = \Phi_{01}(x, y) + \Phi_{02}(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \Phi_k(y) \operatorname{ch}(\lambda_k x) \quad (5.46)$$

Частные решения $\Phi_{01}(x, y)$ и $\Phi_{02}(x, y)$ позволяют сформулировать однородную краевую задачу для собственных функций $\Phi_k(x)$ по координатам x и y .

$\Phi_{02}(x, y)$ – решение однородного уравнения (5.39), удовлетворяющее неоднородным граничным условиям по продольным кромкам $y = \pm 1$.

$\Phi_{01}(x, y)$ – решение однородного уравнения (5.39), удовлетворяющее неоднородным граничным условиям по поперечным кромкам $x = \pm 1$.

Частное решение $\Phi_{02}(x, y)$ позволяют сформулировать однородную краевую задачу для собственных функций $\Phi_k(y)$ по координате y

$$\hat{L}^{(8)} \Phi_k = 0 \quad (5.47)$$

$$\text{при } y = \pm 1 \quad \hat{M}_i^{(j)} \Phi_k = 0, \quad i = \overline{1, 4}, \quad j = \overline{4, 7}, \quad (5.48)$$

где $\hat{L}^{(8)}$ – обыкновенный линейный дифференциальный оператор, соответствующий уравнению (5.39),

$\hat{M}_i^{(j)}$ – обыкновенные линейные дифференциальные операторы, отвечающие условиям (5.44) при $y = \pm 1$.

Регулярная составляющая общего интеграла, построенная в форме

разложения по однородным функциям $\Phi_k(y)$

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \Phi_k(y) \operatorname{ch}(\lambda_k x) , \quad (5.49)$$

соответствует решению однородного уравнения (5.39), удовлетворяет однородным граничным условиям при $y = \pm 1$ и содержит произвол для выполнения краевых условий на торцах при $x = \pm 1$

Собственные функции $\Phi_k(y)$ удовлетворяют обыкновенному однородному дифференциальному уравнению восьмого порядка

$$\begin{aligned} K_{08} \frac{d^8 \Phi_k}{dy^8} + K_{26} \left(\lambda_k \frac{b}{a} \right)^2 \frac{d^6 \Phi_k}{dy^6} + \\ + \left[K_{44} + R_{04} \frac{P}{\left(\lambda_k \frac{b}{a} \right)^2} b^2 \right] \left(\lambda_k \frac{b}{a} \right)^4 \frac{d^4 \Phi_k}{dy^4} + \\ + \left[K_{62} + R_{22} \frac{P}{\left(\lambda_k \frac{b}{a} \right)^2} b^2 \right] \left(\lambda_k \frac{b}{a} \right)^6 \frac{d^2 \Phi_k}{dy^2} + \\ + \left[K_{80} + R_{40} \frac{P}{\left(\lambda_k \frac{b}{a} \right)^2} b^2 \right] \left(\lambda_k \frac{b}{a} \right)^8 \Phi_k = 0 \end{aligned} \quad (5.50)$$

и однородным граничным условиям при $y = \pm 1$.

Собственные функции $\Phi_k(y)$ строятся в виде

$$\Phi_k(y) = \sum_{L=1}^4 B_{kL} \operatorname{ch} \left(\lambda_k z_L \frac{b}{a} y \right) , \quad (5.51)$$

где z_L - корни характеристического полинома

$$K_{08} z^8 + K_{26} z^6 + \hat{K}_{44} z^4 + \hat{K}_{62} z^2 + \hat{K}_{80} = 0 \quad (5.52)$$

Здесь $\hat{K}_{44} = K_{44} + R_{04} \hat{P} b^2$
 $\hat{K}_{62} = K_{62} + R_{22} \hat{P} b^2$
 $\hat{K}_{80} = K_{80} + R_{40} \hat{P} b^2$, $\hat{P} = \frac{P}{\left(\lambda_k \frac{b}{a}\right)^2}$ - параметр нагрузки.

Корни характеристического полинома зависят от параметра нагрузки.

Константы B_{kL} (5.51), определяющие однородные функции $\Phi_k(y)$, являются нетривиальным решением системы четырёх однородных линейных алгебраических уравнений при удовлетворении собственных функций граничным условиям (5.48)

$$\sum_{L=1}^4 C_{rL}^k B_{kL} = 0, \quad r = 1, 2, 3, 4 \quad (5.53)$$

Нетривиальность решения системы (5.53) обеспечивается равенством нулю её детерминанта, что позволяет представить трансцендентное уравнение относительно собственных параметров задачи λ_k

$$\sum_{L=1}^4 X_L th\left(\lambda_k z_L \frac{b}{a}\right) = 0 \quad (5.54)$$

В общем случае при различных граничных условиях по продольным кромкам $y = \pm 1$ собственные числа λ_k являются корнями трансцендентного уравнения типа

$$\begin{aligned} \sum_{L=1}^4 X_L th\left(\lambda_k z_L \frac{b}{a}\right) = 0 & \qquad \sum_{L=1}^4 X_L cth\left(\lambda_k z_L \frac{b}{a}\right) = 0 \\ \sum_{L=1}^3 \sum_{m=1}^3 X_{Lm} th\left(\lambda_k z_L \frac{b}{a}\right) th\left(\lambda_k z_m \frac{b}{a}\right) = 0 & \quad , \end{aligned} \quad (5.55)$$

представляющего собой условие нетривиальности решения системы линейных алгебраических уравнений при удовлетворении однородным граничным условиям по продольным кромкам, где X_L , X_{lm} – коэффициенты, зависящие от вида граничных операторов (5.43), z_L – корни характеристического полинома восьмой степени, λ_k – собственные числа однородной задачи.

Трансцендентные уравнения общего вида решаются численно с помощью стандартных программ операционной среды MATLAB, существуют определённые трудности при нахождении начальных значений корней. Для решения данного вопроса построен алгоритм асимптотики собственных значений на основе аппарата теории линейных дифференциальных операторов.

Система однородных функций $\{\Phi_k(y)\}$ не образует ортогонального семейства. Для выполнения краевых условий на торцах $x = \pm 1$ необходимо воспользоваться свойствами однородных функций, аналогичными свойствам, указанным П.Ф. Папковичем – условием обобщённой ортогональности собственных функций. Воспользуемся условием биортогональности собственных функций прямой и соответствующей сопряжённой задач. Собственная функция сопряжённой задачи строится в рамках аппарата теории линейных дифференциальных операторов.

В пространстве восьмикомпонентных векторов ψ_k краевая задача по координате y для собственной функции

$$\Phi_k(y) = \sum_{L=1}^4 B_{kL} \operatorname{ch}\left(\lambda_k z_L \frac{b}{a} y\right) \quad (5.56)$$

формулируется следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } y = \pm 1 \\ \psi'_k = \lambda_k R \psi_k \\ M(\psi_k) = 0 \end{array} \right\}, \quad (5.57)$$

$$\text{где } \psi_k = (\psi_0^k, \psi_1^k, \dots, \psi_7^k)^* = \left(\Phi_k, \frac{1}{\lambda_k} \frac{d\Phi_k}{dy}, \dots, \frac{1}{\lambda_k^7} \frac{d^7\Phi_k}{dy^7} \right)^*, \quad (5.58)$$

индекс «*» здесь и ниже означает операцию транспонирования,

R – весовая квадратная матрица (3.41).

В соответствии с теоремами теории линейных дифференциальных операторов оператор, представляющий собственную вектор-функцию сопряжённой задачи φ_k , является сопряжённым к дифференциальному оператору, представляющему собственную вектор-функцию прямой задачи ψ_k (3.40).

Обыкновенное дифференциальное уравнение восьмого порядка относительно собственной функции сопряжённой задачи $F_k(y)$ и уравнение, содержащее собственную функцию прямой задачи $\Phi_k(y)$ (3.30), являются самосопряжёнными.

Для сопряжённой функции

$$F_k(y) = \sum_{L=1}^4 A_{kL} \operatorname{sh} \left(\bar{\lambda}_k z_L \frac{b}{a} y \right) \quad (5.59)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } y = \pm 1 \\ \varphi'_k = -\bar{\lambda}_k R^* \varphi_k \\ N(\varphi_k) = 0 \end{array} \right\}, \quad (5.60)$$

$$\text{где } \varphi_k = (\varphi_0^k, \varphi_1^k, \dots, \varphi_7^k)^* = \left(F_k, \frac{1}{\bar{\lambda}_k} \frac{dF_k}{dy}, \dots, \frac{1}{\bar{\lambda}_k^7} \frac{d^7 F_k}{dy^7} \right)^* \quad (5.61)$$

Сопряжённые краевые условия по продольным кромкам при $y = \pm 1$ определяются равенством

$$\left(\psi_k^* \bar{\varphi}_k \right) \Big|_{y=\pm 1} = 0 \quad (5.62)$$

Однородные граничные условия для векторов φ_k и $\bar{\varphi}_k$ совпадают.

Условие обобщённой ортогональности, которому подчиняются однородные функции прямой (3.38), (3.40) и сопряжённой (3.44), (3.46) задач в векторном пространстве, содержит весовую матрицу R (3.41)

$$\int_{-1}^1 (\bar{\varphi}_k^* R \psi_i) dy = \begin{cases} 0, & \lambda_k \neq \bar{\lambda}_i \\ H_i, & \lambda_k = \bar{\lambda}_i \end{cases}, \quad (5.63)$$

где H_i – норма обобщённых собственных функций, вычисляется по формуле (3.52).

В результате удовлетворения краевых условий по поперечным кромкам при $x = \pm 1$ следует построить замыкающее уравнение задачи на собственные значения для определения критических усилий. Рассматривается подход, который предполагает переход к задаче Коши в пространстве вектор-функций.

В общем случае условия закрепления поперечных кромок, соответствующие

достаточно общей трактовке физических граничных условий элементов конструкции, предлагается трактовать как разложение вектор-функции восьмого порядка по системе собственных восьмикомпонентных векторов ψ_k

$$\left[\begin{array}{c} K_{0i} \\ 0 \\ K_{2i} \\ 0 \\ K_{4i} \\ 0 \\ K_{6i} \\ 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} f_0(y) \\ 0 \\ f_2(y) \\ 0 \\ f_4(y) \\ 0 \\ f_6(y) \\ 0 \end{array} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} B_k h^{\nu}(\lambda_k) \psi_k(y), \quad \left[\begin{array}{c} 0 \\ K_{1j} \\ 0 \\ K_{3j} \\ 0 \\ K_{5j} \\ 0 \\ K_{7j} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ f_1(y) \\ 0 \\ f_3(y) \\ 0 \\ f_5(y) \\ 0 \\ f_7(y) \end{array} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} B_k h^{h/\nu}(\lambda_k) \psi_k(y), \quad (5.64)$$

$$i = \overline{0,7} \qquad j = \overline{0,7}$$

Здесь существенным является выделение чётной и нечётной составляющих. Температурные составляющие и операторы от предварительного натяжения волокон композита не учтены.

Несогласованные граничные условия характеризуются тем, из восьми компонент $f_j(y)$, $j = \overline{0,7}$ (5.64) известны четыре, и непосредственное осуществление процедуры (5.63) не представляется возможным.

С использованием условия расширенной ортогональности (5.63) система граничных условий (5.64) может быть представлена как скалярное произведение

$$(\Omega_k \Theta(y)) = 0, \quad (5.65)$$

$$\Theta(y) = (f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7)^*(y)$$

$$\Omega_k = (\Omega_0^k, \Omega_1^k, \dots, \Omega_7^k)$$

Процедура ортогонализации ряда векторов Ω_k , изложенная в разделе 3.2, позволяет построить выражение для вектор-функции $\Theta(y)$ (5.65).

Раскладывая вектор-функцию $\Theta(y)$ по вектору $\psi_k(y)$

$$(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7)^*(y) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \psi_k(y), \quad k = \overline{1,8}, \quad (5.66)$$

построим бесконечную систему однородных линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных A_i :

$$\sum_{k=1}^i C_{ki} A_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \infty \quad (5.67)$$

Для возможности выпучивания необходимо существование нетривиальных решений системы (5.67) при её усечении, что обеспечивается условием равенства нулю детерминанта

$$\det [C_{ki}] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.68)$$

Представляется возможным ограничиться небольшим числом членов ряда в формуле (5.68), так как в методе однородных решений потенциальная функция $\Phi(x, y)$ раскладывается в ряд по системе собственных функций $\{\Phi_k(y)\}$, которые для $\Phi(x, y)$ строятся естественным образом.

Определение критических усилий общей потери устойчивости произвольным образом закреплённой по контуру конструктивно-анизотропной панели из композиционных материалов при сжатии сводится к решению системы трёх совместных алгебраических уравнений относительно корней полинома восьмого порядка z_L , собственных значений λ_k , параметра нагрузки

$$\hat{P} = \frac{P}{\left(\lambda_k \frac{b}{a}\right)^2} \quad (5.52):$$

$$\left. \begin{aligned} K_{08}z^8 + K_{26}z^6 + \hat{K}_{44}z^4 + \hat{K}_{62}z^2 + \hat{K}_{80} &= 0 \\ \sum_{L=1}^4 X_L th\left(\lambda_k z_L \frac{b}{a}\right) &= 0 \\ \det [C_{ki}] &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (5.69)$$

Предложенный алгоритм может быть реализован в операционной среде

MATLAB в рамках итерационного процесса. Блок-схема соответствующего метода последовательных приближений представлена на Рисунке 29.

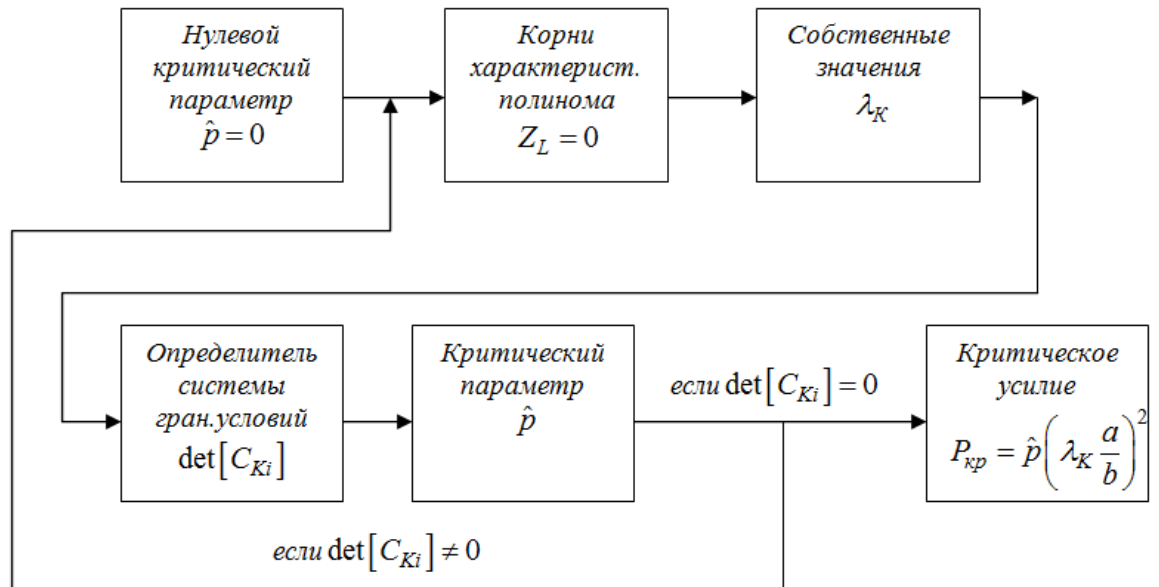


Рисунок 29 - Блок-схема метода последовательных приближений для определения критических сил при сжатии панели в продольном направлении.

Краевая задача общего вида на контуре

ГЛАВА 6 УСТОЙЧИВОСТЬ КОНСТРУКТИВНО-АНИЗОТРОПНЫХ ПАНЕЛЕЙ. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

В операционной среде MATLAB разработаны программы и реализован процесс компьютерной многокритериальной оптимизации с учётом технологии изготовления конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов, находящихся в условиях механического, внешнего температурного и технологического температурного воздействия.

Пакет прикладных программ для РС на языке операционной среды MATLAB разработан в соответствии с изложенными алгоритмами. Программы предназначены для определения докритического напряжённого состояния, исследования задач устойчивости и компьютерной оптимизации процесса проектирования конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов. В рамках связанных плоской задачи и задачи изгиба рассматриваются все возможные варианты закрепления граничных кромок, вытекающие из условий упругой заделки.

Разработаны быстрые процедуры для анализа устойчивости подкреплённых панелей из ПКМ. Так как решение строится точными аналитическими методами, время расчёта вариантов минимально, что представляет интерес с точки зрения практики проектирования с использованием параметрического анализа. Результаты расчётов на устойчивость дают возможность снижения и оптимизации массовых характеристик конструкции. Постановка проблемы и предлагаемые подходы к её решению представляют интерес с точки зрения практики проектирования конструктивно-анизотропных панелей с применением КМ для перспективных изделий авиационной техники.

Представлены новые достижения в области вычислительных исследований устойчивости композитных авиационных конструкций.

Жесткостные характеристики панелей из углепластика, приведенные в Таблице 10, использованы в качестве исходных данных.

Таблица 10 - Характеристики жёсткости материала панелей

Модуль упругости k – ого слоя в продольном направлении	$E_1^{(k)}$	МПа	120000
Модуль упругости k – ого слоя в поперечном направлении	$E_2^{(k)}$	МПа	10000
Модуль сдвига k – ого слоя	$G_{12}^{(k)}$	МПа	6000
Коэффициенты Пуассона k – ого слоя	$\mu_{12}^{(k)}, \mu_{21}^{(k)}$	–	0,280; 0,023

На Рисунке 30 представлены эпюры нормальных сил N_x эксцентрично подкреплённых прямоугольных панелей из углепластика, находящихся под действием постоянной погонной сжимающей нагрузки, при продольном изгибе в зависимости от отношения сторон панели.

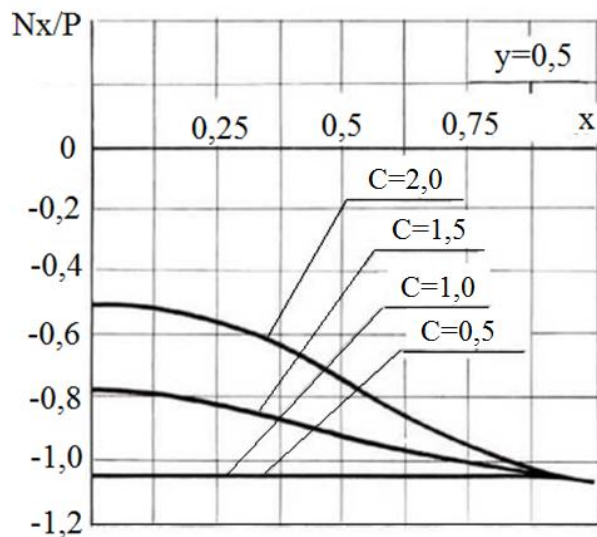
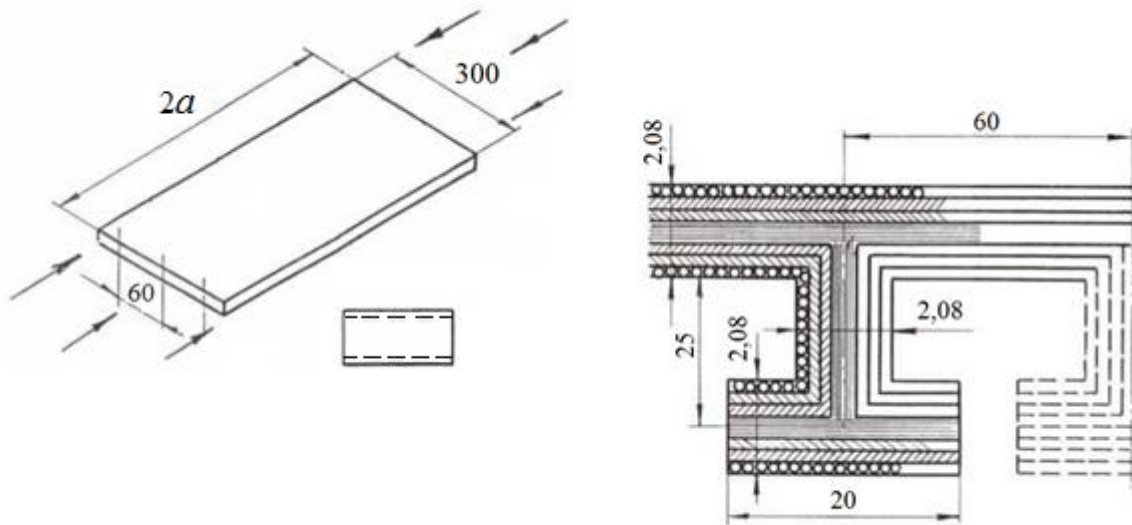


Рисунок 30 - Стрингерная панель, сжатая в продольном направлении.
Зависимость нормальных усилий от отношения сторон панели
при продольном изгибе

Чем короче панель обшивки, тем ближе докритическое напряжённое состояние к однородному. Если отношение сторон панели $c < 1,0$, внутренние нормальные усилия распределены по длине панели практически равномерно.

На Рисунке 31 представлены эпюры нормальных сил N_x эксцентрично подкреплённых прямоугольных панелей из углепластика, находящихся под действием постоянной погонной сжимающей нагрузки, при продольном изгибе в зависимости от расстояния между стрингерами.

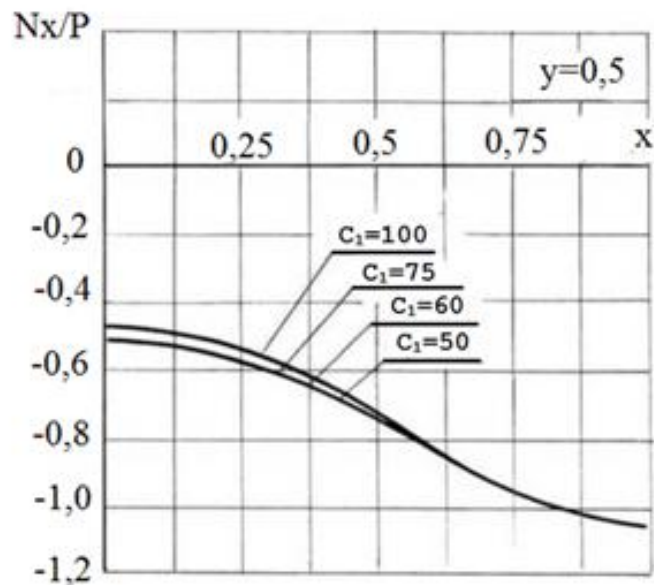
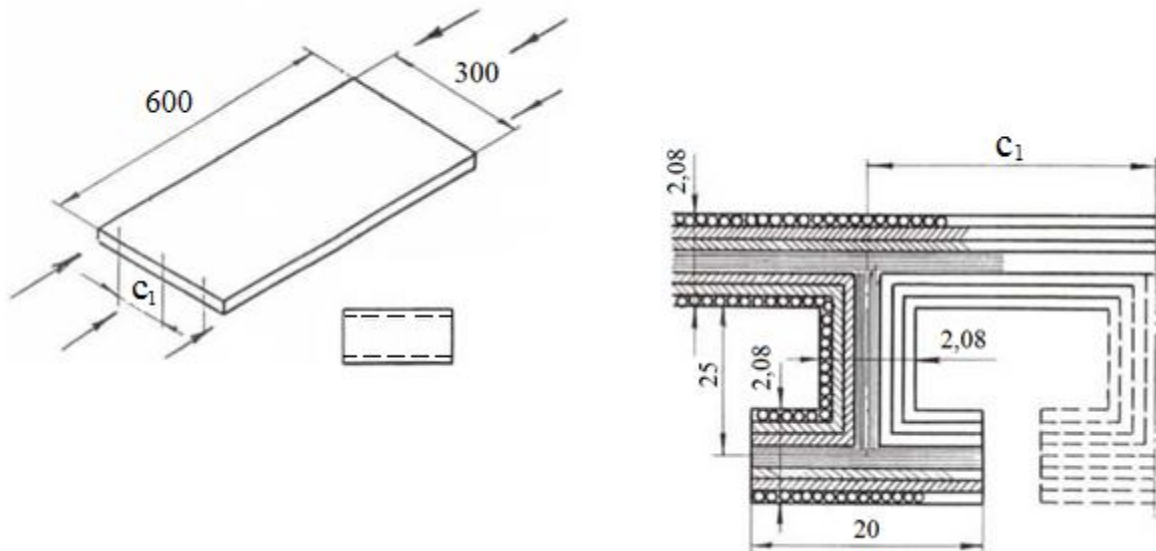


Рисунок 31 - Стрингерная панель, сжатая в продольном направлении. Зависимость нормальных усилий от расстояния между стрингерами при продольном изгибе

Чем выше жёсткость стрингера, тем ближе докритическое напряжённое состояние к однородному. Если отношение сторон панели $s = 2,0$, распределение нормальных усилий по длине панели при продольном изгибе практически не зависит от расстояния между стрингерами.

На Рисунке 32 представлены результаты определения критических параметров эксцентрично подкреплённых в продольном направлении прямоугольных панелей из углепластика, находящихся под действием постоянной погонной сжимающей нагрузки, в зависимости от отношения сторон панели; n – число полуволн в направлении координаты y , m – число полуволн в направлении координаты x .

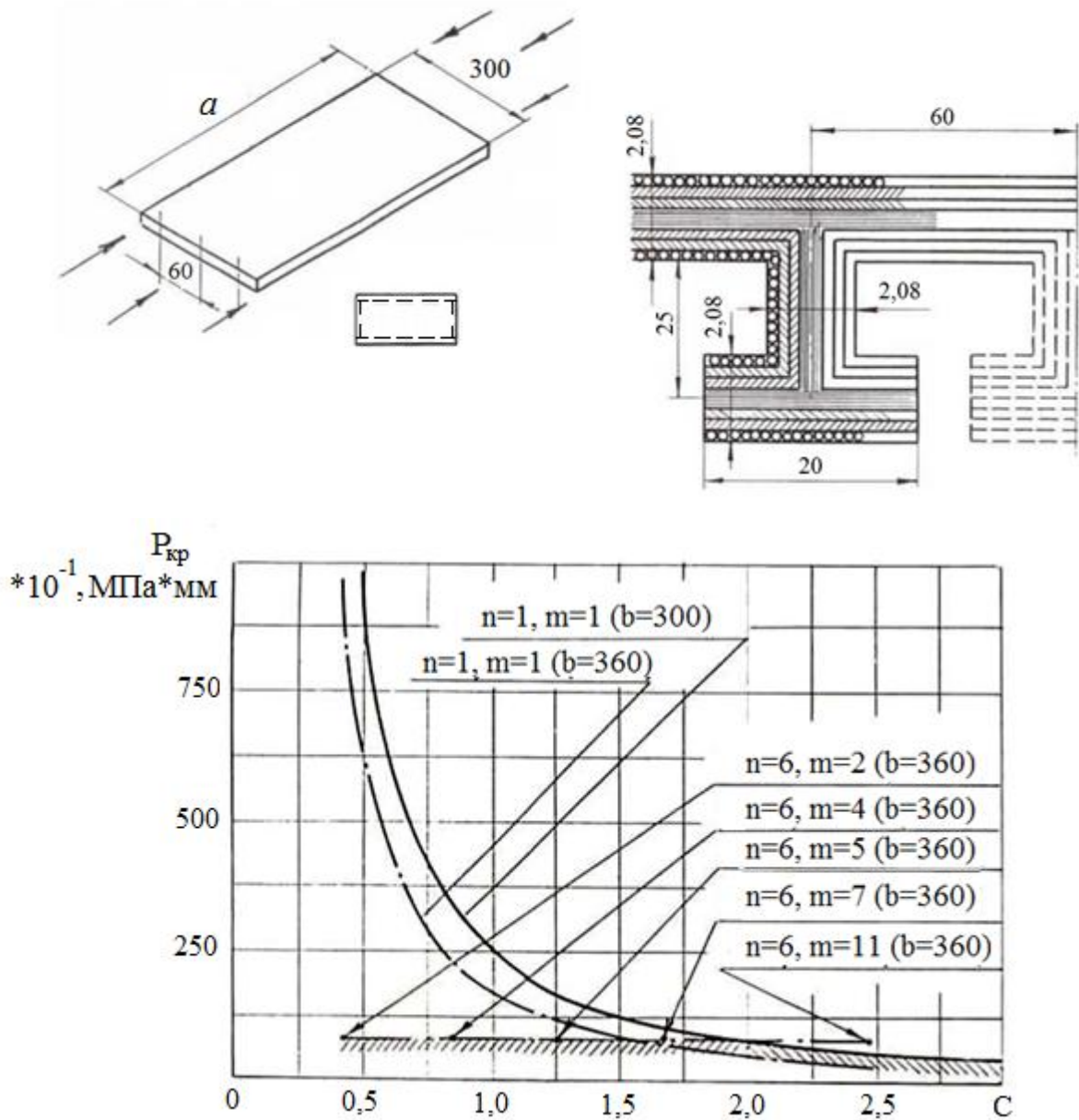


Рисунок 32 - Стрингерная панель, сжатая в продольном направлении. Зависимость критических усилий изгибной формы потери устойчивости и крутильной формы потери устойчивости от отношения сторон панели

Для коротких панелей при отношении сторон $c < 2,0$ характерно многоволновое

крутильное выпучивание $n = 6, m = 2, 4, 5, 7, 11$. При отношении сторон $c = 2,0$ панель равноустойчива. При $c > 2,0$ панели теряют устойчивость по общей изгибной форме $n = 1, m = 1$.

На Рисунке 33 представлены результаты определения критических параметров эксцентрично подкреплённых в продольном направлении прямоугольных панелей из углепластика, находящихся под действием постоянной погонной сжимающей нагрузки, в зависимости от расстояния между стрингерами; n – число полуволов в направлении координаты y , m – число полуволов в направлении координаты x .

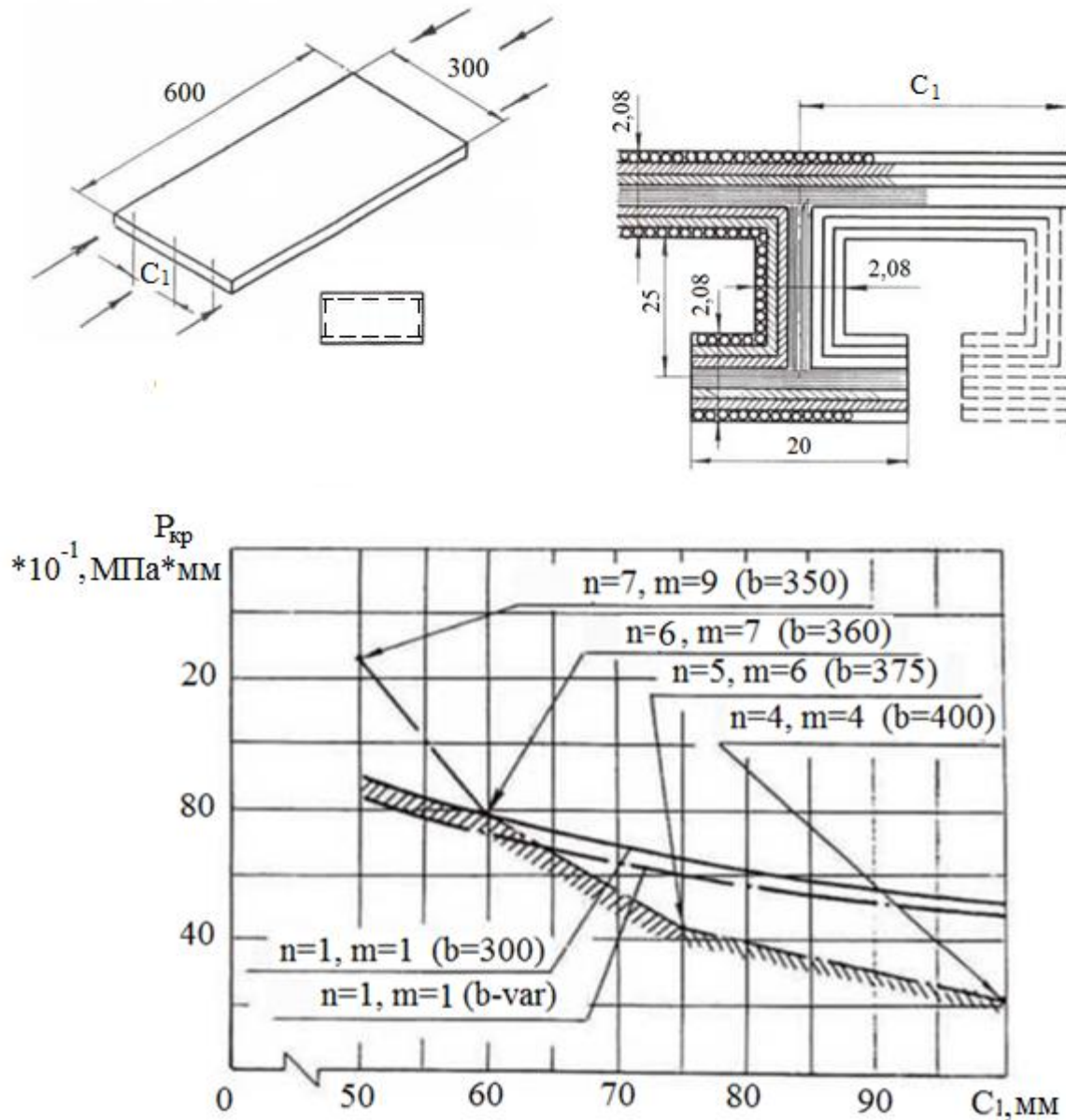


Рисунок 33 - Стрингерная панель, сжатая в продольном направлении. Зависимость критических усилий изгибной формы потери устойчивости и крутильной формы потери устойчивости от расстояния между стрингерами
 — конструктивная анизотропия; - - - - дискретные рёбра

Чем меньше расстояние между стрингерами $c_1 < 60$ mm, тем выше вероятность

общей изгибной формы потери устойчивости $n = 1, m = 1$. Если $c_1 = 60$ mm, панель равноустойчива. При $c_1 > 60$ mm для панели характерно многоволновое крутильное выпучивание $n = 4, 5, 6, m = 4, 6, 7$.

При фиксированном расстоянии между стрингерами высота стенки профиля выбирается таким образом, чтобы сжатая в продольном направлении панель не теряла устойчивости по различным формам при заданном уровне внешнего нагружения.

На Рисунке 34 представлены результаты определения критических параметров эксцентрично подкреплённых в продольном направлении прямоугольных панелей из углепластика, находящихся под действием постоянной погонной сжимающей нагрузки, в зависимости от высоты стенки стрингера; n – число полуволн в направлении координаты y , m – число полуволн в направлении координаты x .

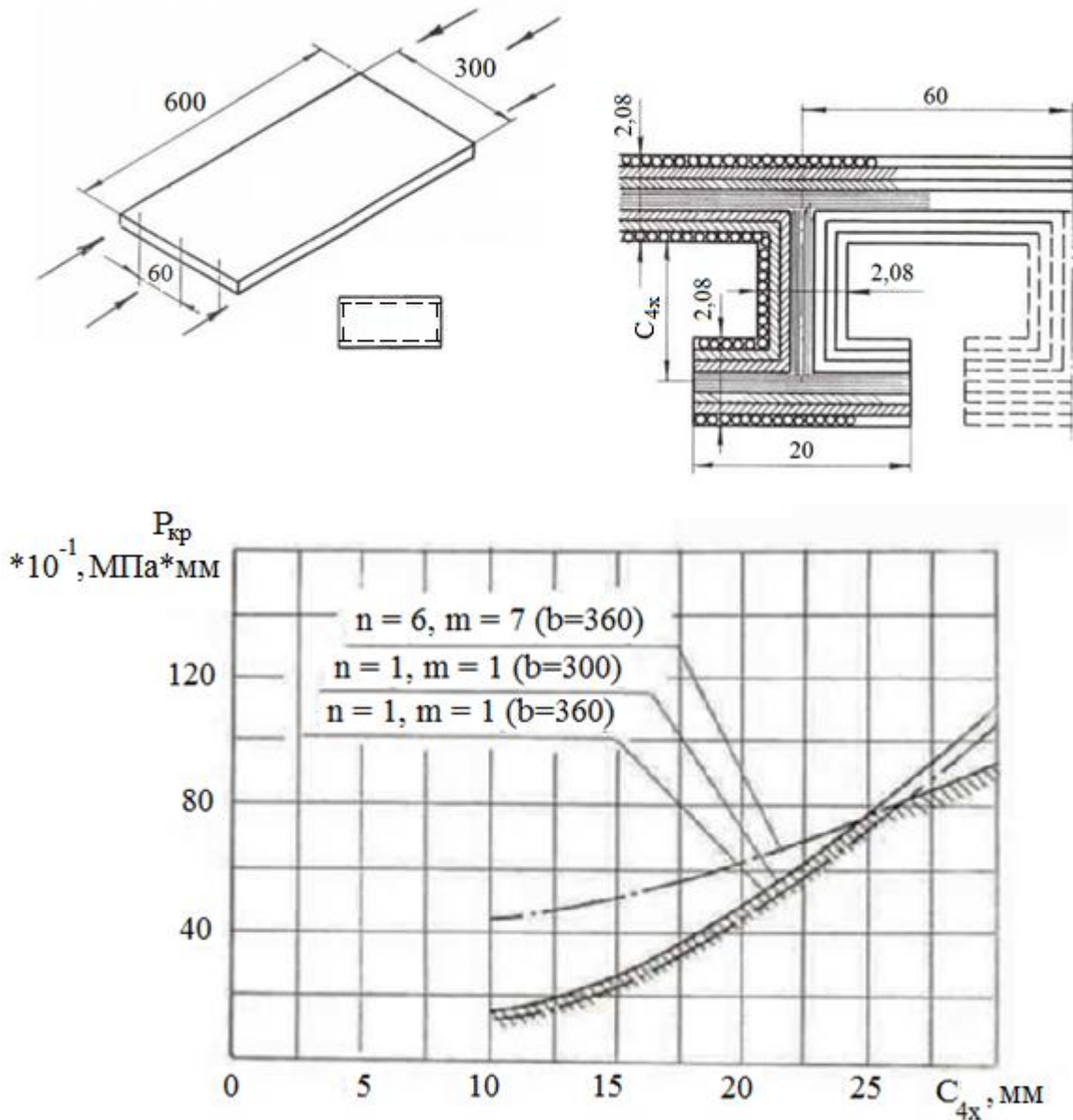


Рисунок 34 - Стрингерная панель, сжатая в продольном направлении. Зависимость критических усилий изгибной формы потери устойчивости и крутильной формы потери устойчивости от высоты стенки стрингера
 ————— конструктивная анизотропия; - - - - - дискретные рёбра

Чем ниже изгибная жёсткость стрингера, если высота стенки стрингера $c_{4x} < 25$ mm, тем выше вероятность общей изгибной формы потери устойчивости $n = 1, m$

= 1. Если $c_{4x} = 25$ mm, панель равноустойчива. При высоте стенки стрингера $c_{4x} > 25$ mm для панели характерно многоволновое крутильное выпучивание $n = 6$, $m = 7$.

На Рисунке 35 представлены результаты определения критических параметров эксцентрично подкреплённых в продольном и поперечном направлениях прямоугольных панелей из углепластика, находящихся под действием постоянной погонной сжимающей нагрузки, в зависимости от отношения сторон панели; n – число полуволн в направлении координаты y , m – число полуволн в направлении координаты x .

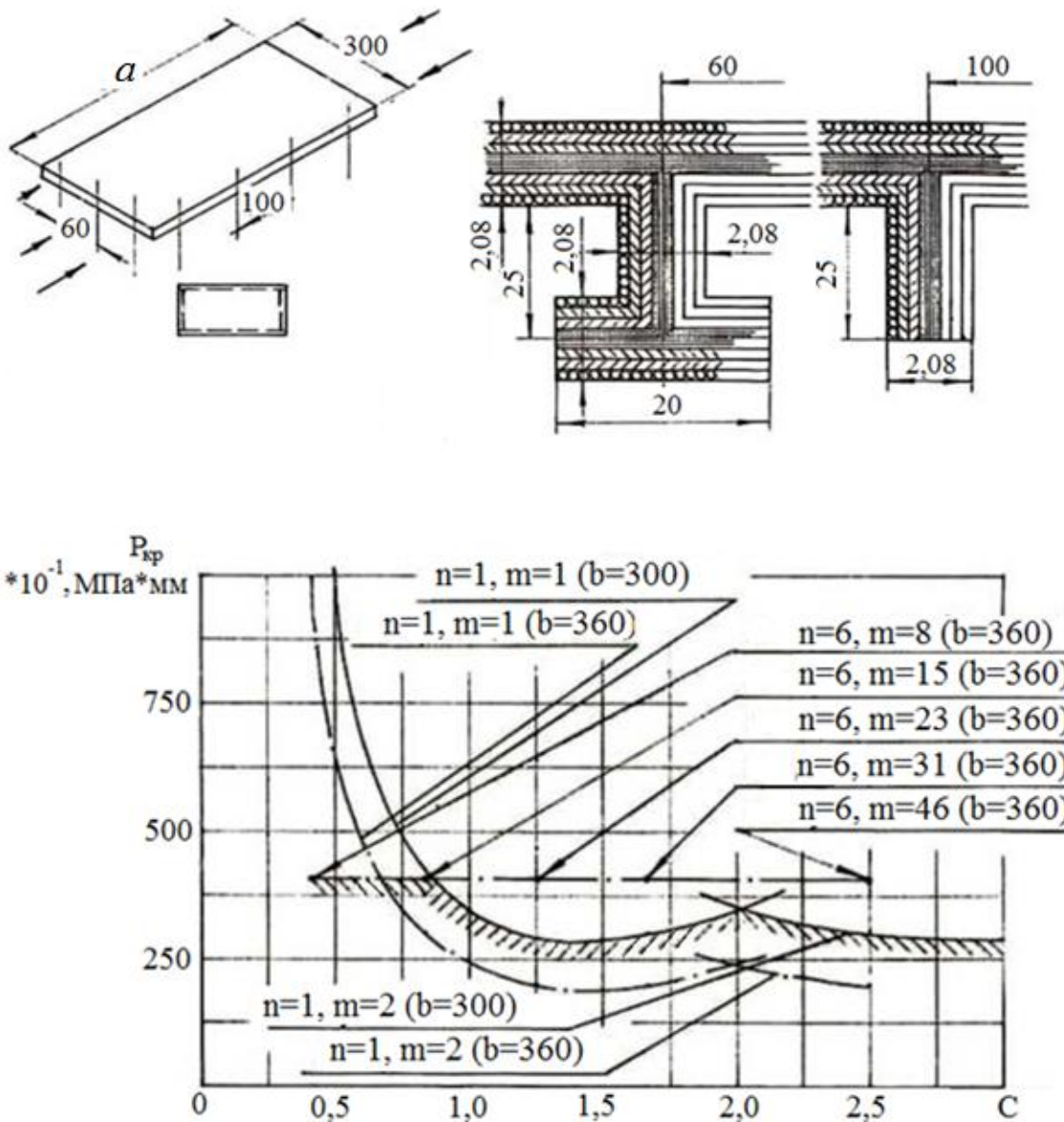


Рисунок 35 - Панель с продольно-поперечным набором, сжатая в продольном направлении. Зависимость критических усилий изгибной формы потери устойчивости и крутильной формы потери устойчивости от отношения сторон панели
 — конструктивная анизотропия; - - - - дискретные рёбра

Для коротких панелей при отношении сторон $c < 0,75$ характерно многоволновое

крутильное выпучивание $n = 6$, $m = 8$. При отношении сторон $c = 0,75$ панель равноустойчива. Панели с $0,75 < c < 2,0$ теряют устойчивость по общей изгибной форме $n = 1$, $m = 1$, при $c > 2,0$ по общей изгибной форме $n = 1$, $m = 2$.

**ГЛАВА 7 ВЕРИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ.
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ
И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
КОНСТРУКТИВНО-АНИЗОТРОПНЫХ ПАНЕЛЕЙ**

**7.1 Сопоставление результатов с данными зарубежного эксперимента
по деформированию конструктивно-анизотропных панелей
из изотропных материалов**

С целью оценки правомочности полученных теоретических зависимостей выполнено сопоставление результатов расчёта с данными зарубежного эксперимента по деформированию стальных стрингерных панелей. Экспериментальная модель панели находилась под действием постоянной погонной поперечной нагрузки $q(x,y) = const$. Симметричные краевые условия на контуре соответствовали шарнирному опиранию (Рисунок 36).

Результаты натурального эксперимента и расчётные данные на основе уточнённой теории практически совпадают (Таблица 11).

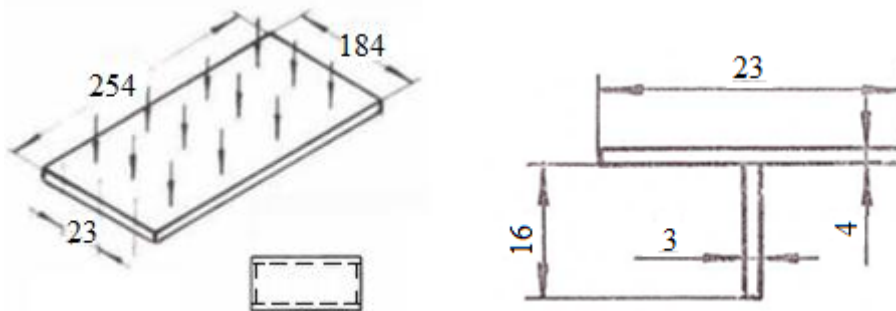


Рисунок 36 – Экспериментальная панель

Таблица 11 – Сопоставление результатов по прогибам панели

Модель		Мольнар ¹		Уточнённая теория	Интегральн. учёт закр.
		Эксперим.	Расчёт		
q	МПа	0,5			
W_{max}	мм	0,60	0,85	0,62	0,21

¹ Мольнар Ш. Диссертация ... к. ф.-м. н.: 01.02.04 / Л. – 1983. – 114 с.

7.2 Экспериментальные исследования устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов

С целью оценки правомочности полученных теоретических зависимостей проведены серии испытаний экспериментальных моделей углепластиковых стрингерных панелей на равномерное сжатие в продольном направлении до потери устойчивости. Схема нагружения и поперечное сечение панели приведены на Рисунке 37. В процессе испытаний на равномерное сжатие панель закреплялась в приспособлении, обеспечивающем шарнирное опирание граничных кромок (Рисунок 38).

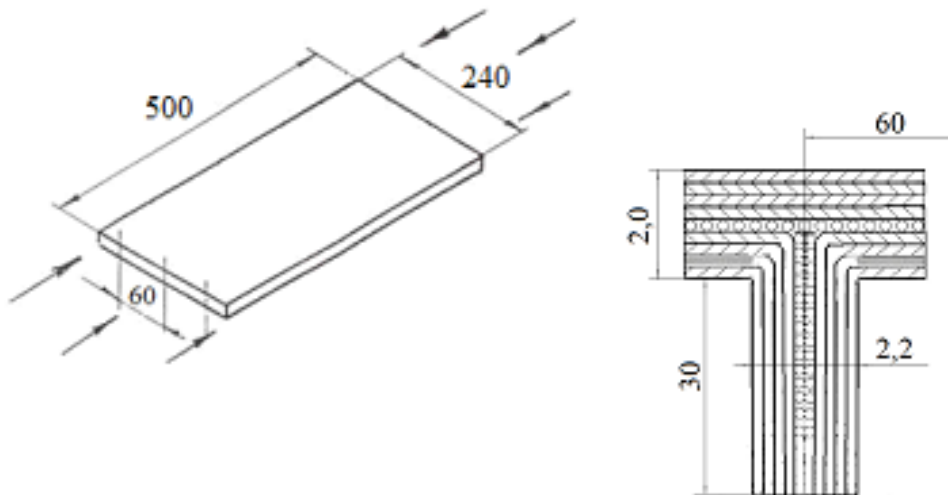
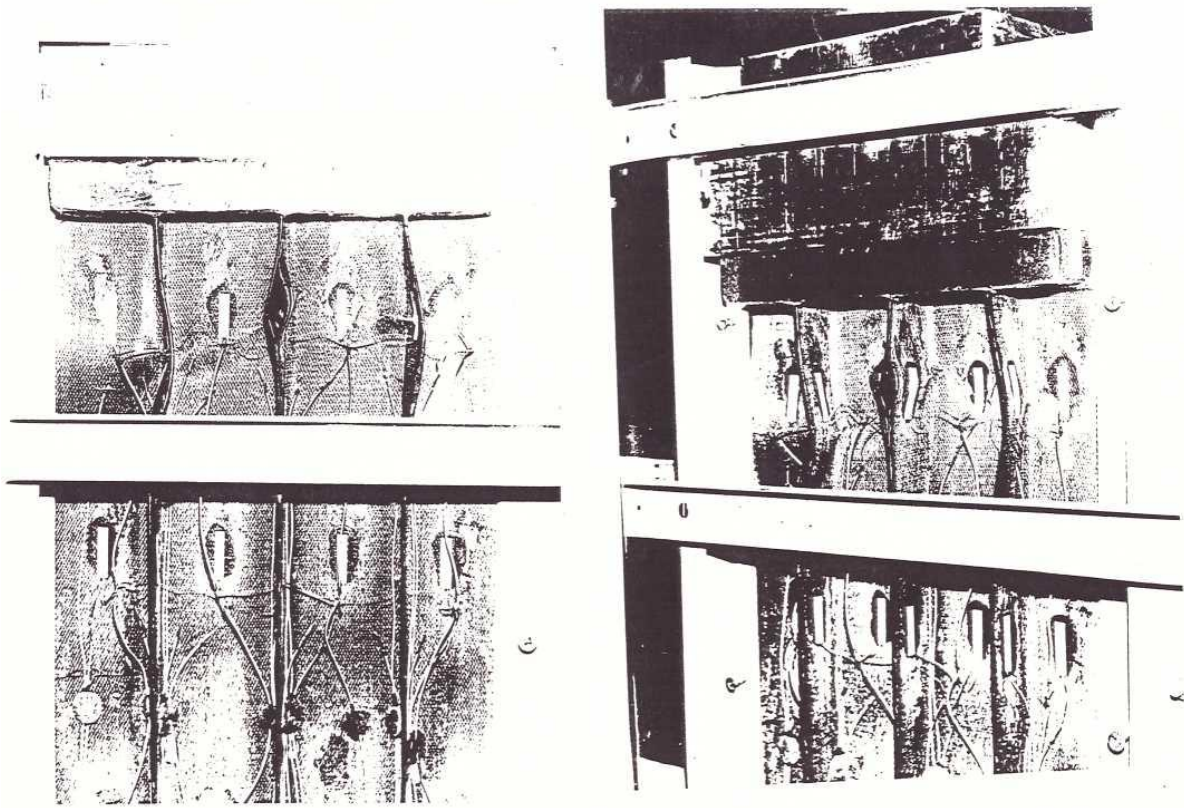


Рисунок 37 – Схема нагружения, профиль экспериментальной панели
со стеночным стрингером

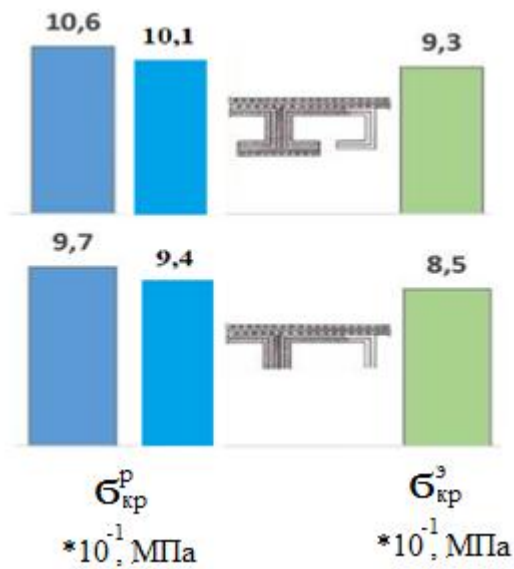
Форма потери устойчивости экспериментальных панелей - крутильная, заключающаяся в выпучивании обшивки по направлению нормали к поверхности между узлами пересечений обшивки и стрингеров с последующим поворотом элементов набора (Рисунок 38).

Результаты натурных экспериментов и расчётные данные совпадают качественно по формам потери устойчивости и количественно с точностью до 12–13 %, если не рассматривать переменное докритическое напряжённое состояние. Учёт неравномерности основного напряжённого состояния приводит к увеличению точности до 8–10 %.

ИСПЫТАНИЯ ПАНЕЛЕЙ ИЗ КМ НА ПРОДОЛЬНОЕ СЖАТИЕ



а



б

Рисунок 38 - Стрингерная панель из КМ, сжатая в продольном направлении:
 а – экспериментальные образцы, испытания на сжатие до потери устойчивости;
 б – сопоставление расчётных и экспериментальных критических напряжений

7.3 Экспериментальные исследования устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из изотропных материалов, усиленных КМ-жгутами

Проведены серии испытаний экспериментальных моделей подкреплённых панелей из изотропного материала на равномерное сжатие в продольном направлении до потери устойчивости. Полки стрингеров усилены жгутами из углепластика.

Образцы изготовлены из дюралюминиевого сплава. Панели эксцентрично подкреплены на заклёпках составными стержнями, состоящими из швеллеров и элементов жёсткости, вырезанных из уголка и армированных жгутами из углеволокна, пропитанными эпоксидным связующим. Металлические оболочки элементов жёсткости совместно со жгутами из КМ обжаты до полимеризации (отверждения) для обеспечения совместной работы металла и композита. Схема нагружения, профиль экспериментальной панели, поперечное сечение панели для расчётной модели приведены на Рисунке 39. В процессе испытаний на равномерное сжатие панель закреплялась в приспособлении, обеспечивающем шарнирное опирание граничных кромок (Рисунок 40).

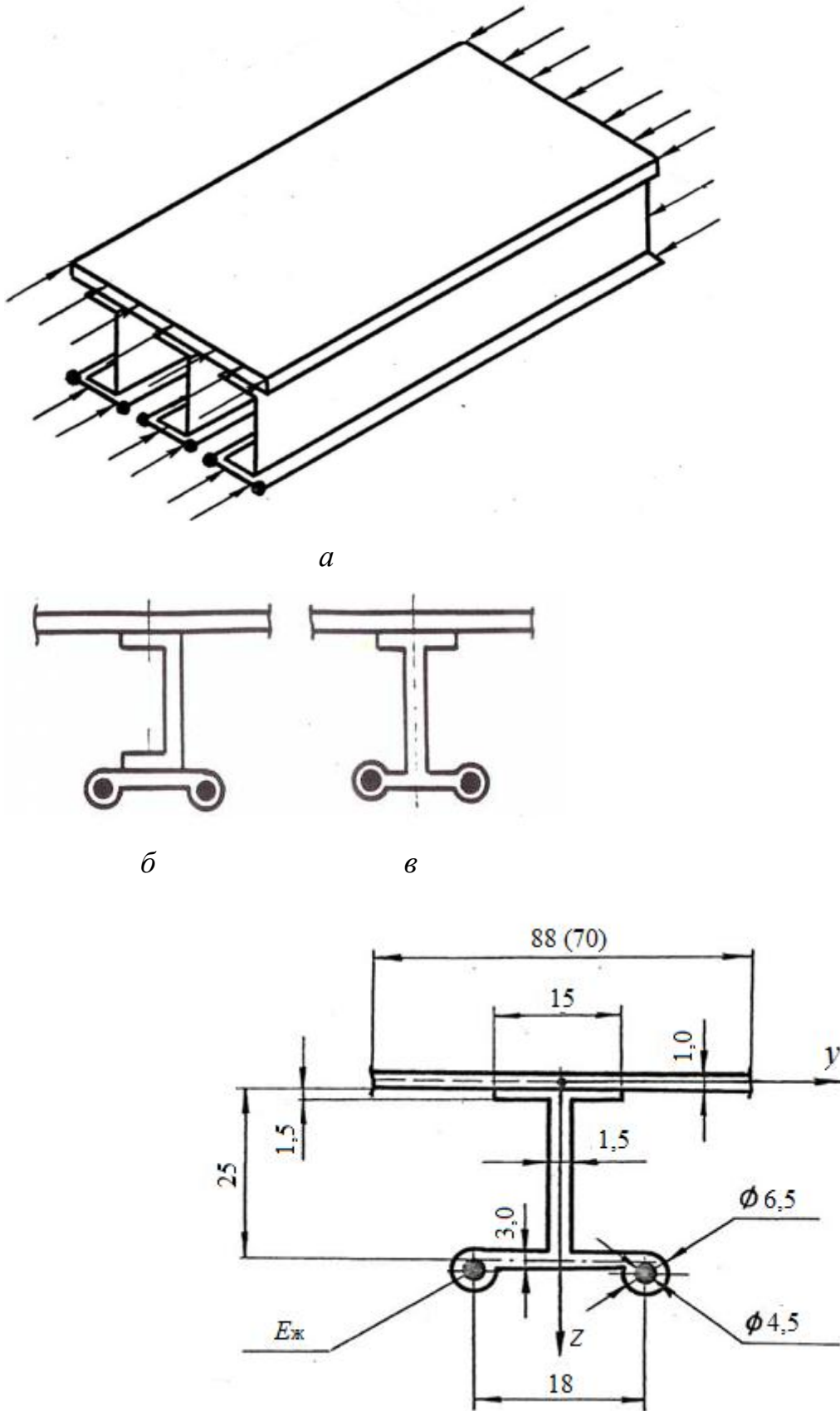


Рисунок 39 – (а) Схема нагружения, (б) профиль экспериментальной панели, (в) поперечное сечение панели для расчётной модели

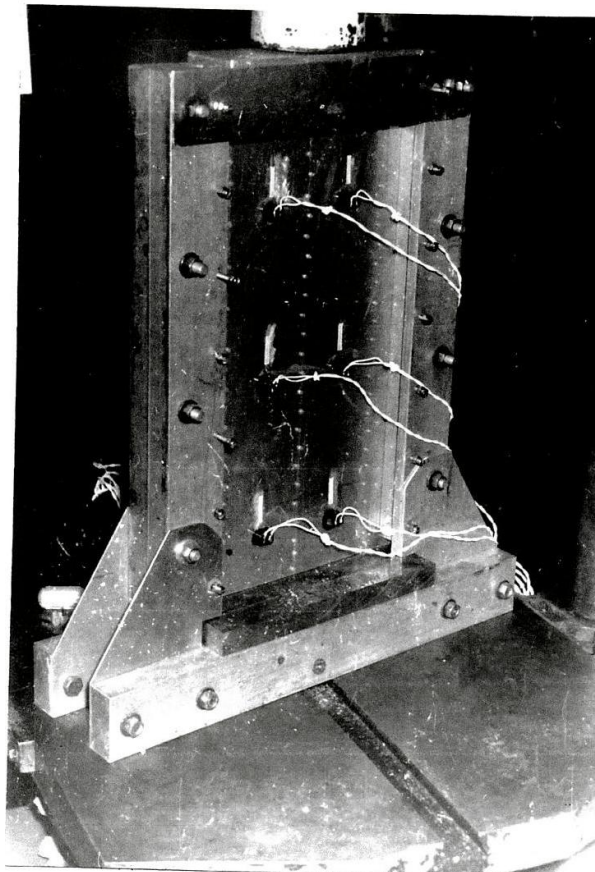
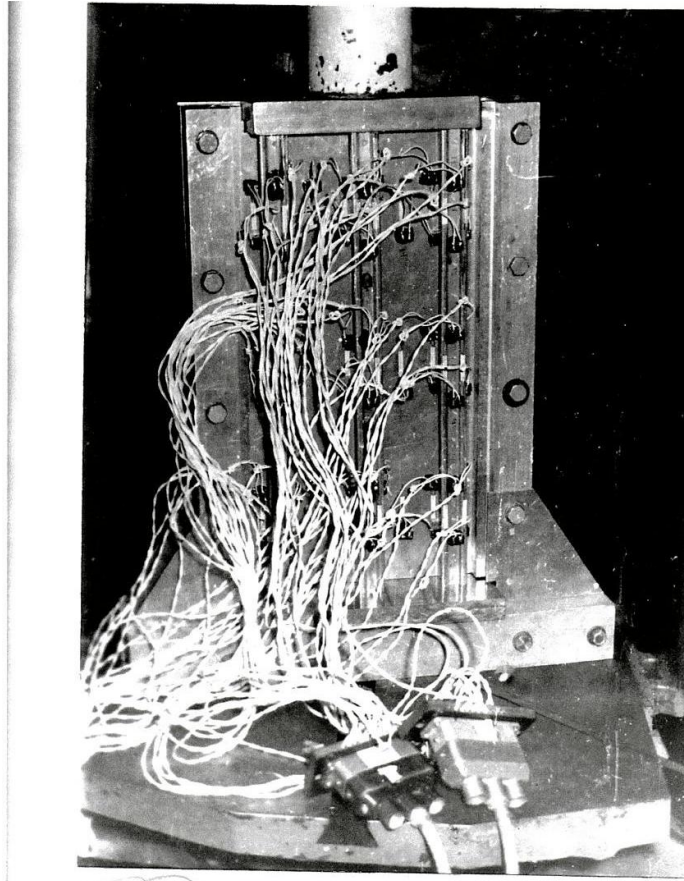


Рисунок 40 - Приспособление для испытаний панелей на равномерное сжатие в продольном направлении

Форма потери устойчивости экспериментальных панелей - крутильная, заключающаяся в выпучивании обшивки по направлению нормали к поверхности между узлами пересечений обшивки и стрингеров с последующим поворотом элементов набора (Рисунок 41).

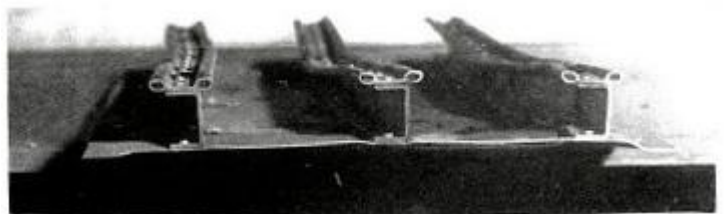
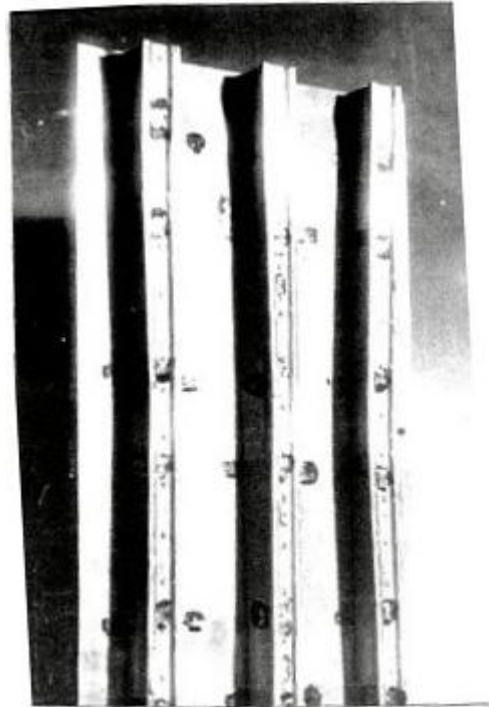
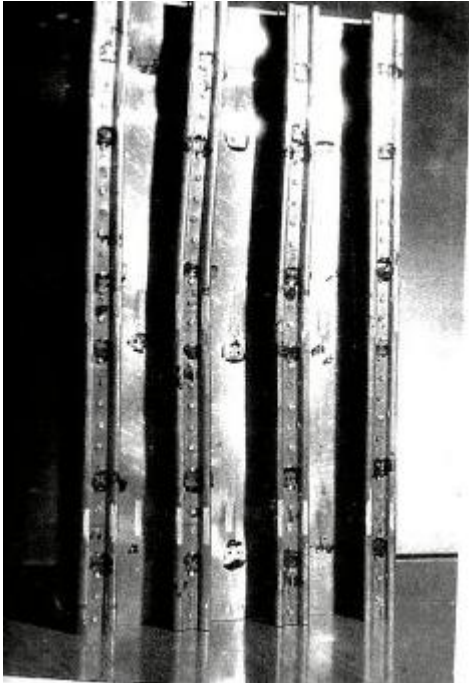


Рисунок 41 - Экспериментальные образцы панелей из дюралюминиевого сплава, усиленных углепластиковыми жгутами, после потери устойчивости

С помощью программы, разработанной в операционной среде MATLAB, найдены погонные усилия, соответствующие многоволновой форме бифуркации прямоугольных панелей с односторонними дискретно расположенными рёбрами жёсткости. Результаты расчётов сведены в Таблицу 12 и сопоставлены с данными эксперимента. Величины критических сил общего изгибного выпучивания, определяемые в рамках конструктивно-анизотропной схемы и по балочной теории, в Таблице 12 не приведены.

Таблица 12 – Сопоставление результатов расчёта с экспериментальными данными

Число стрингеров	$P_{кр. \text{экспер.}} \cdot 10^{-1}$, МПа	$P_{кр. \text{расчетн.}} \cdot 10^{-1}$, МПа	Δ , %
3	50,0	40,5	19
4	70,8	84,9	20

Результаты натуральных экспериментов и расчётные данные совпадают качественно по формам потери устойчивости и количественно с точностью до 19–20 %, если не рассматривать переменное докритическое напряжённое состояние. Поперечное сечение стрингера экспериментальных панелей несимметрично, при численной реализации несимметрия не принималась во внимание. Проведённые испытания подтвердили теоретические предположения о наличии у коротких образцов крутильной формы бифуркации, выявить которую не представляется возможным по балочной теории.

7.4 Экспериментальные исследования устойчивости конструктивно-анизотропных панелей кессона из изотропных материалов, усиленных КМ-жгутами

Испытания экспериментальных панелей кессона на изгиб проведены с целью определения форм потери устойчивости и соответствующих критических усилий подкреплённых панелей из изотропного материала, полки стрингеров усилены жгутами из углепластика. Сжимающие нагрузки равномерно распределены по торцам.

Образцы изготовлены из дюралюминиевого сплава. Модель кессона показана на Рисунке 42, состоит из двух панелей и каркаса – двух силовых лонжеронов типа швеллер и трёх поперечных нервюр. На внешней поверхности верхней сжатой обшивки внецентренно расположен продольный стрингерный набор, армированный жгутами из углеволокон на эпоксидном связующем с обжатием металла и жгутов до отверждения композита. Профиль экспериментальной панели и поперечное сечение панели для расчётной модели изображены на Рисунке 39. Нижняя панель, работающая на растяжение, выполнена из гладкого листа (Рисунок 42).

Установка для испытаний кессона на изгиб до потери устойчивости верхней сжатой панели приведена на Рисунке 43.

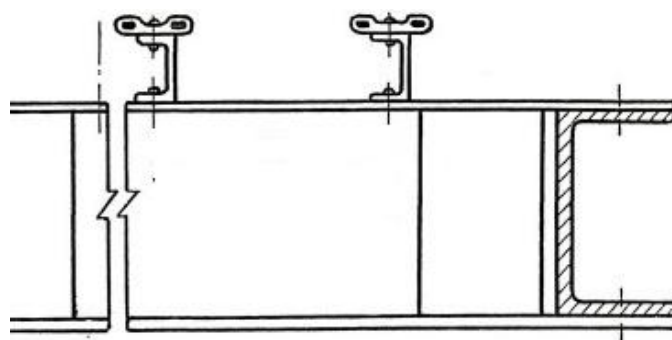
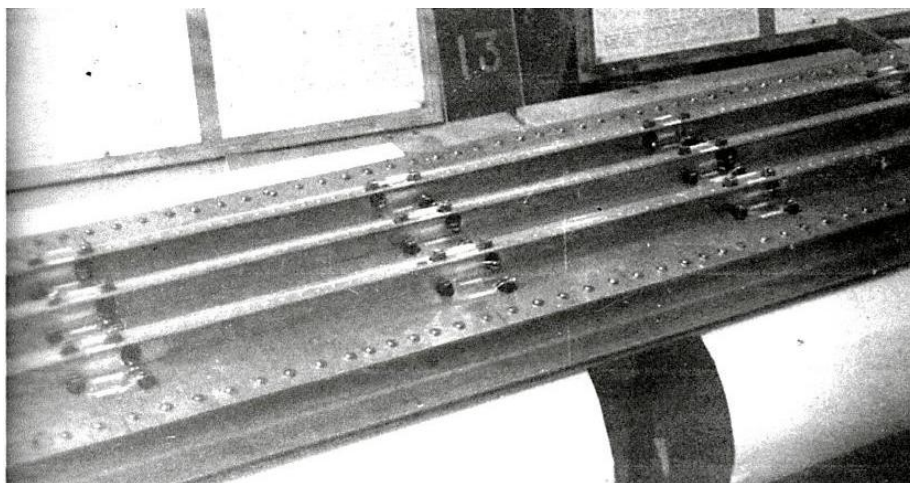


Рисунок 42 - Экспериментальная модель кессона из дюралюминиевого сплава, усиленного углепластиковыми жгутами

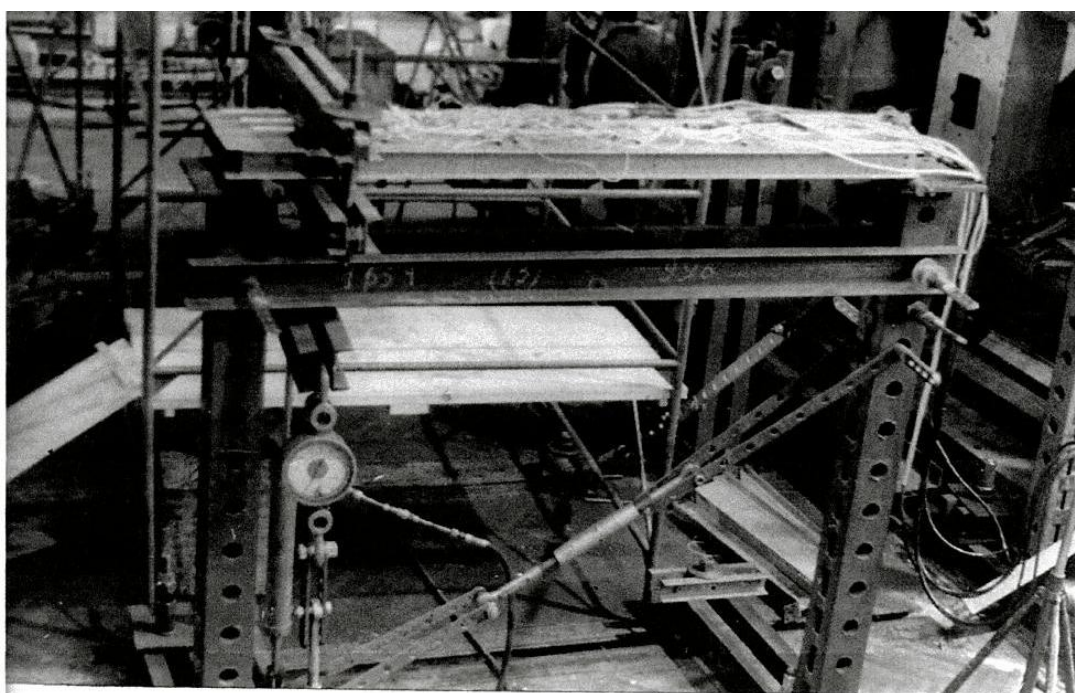


Рисунок 43 - Установка для испытаний кессона на изгиб

Форма потери устойчивости экспериментальных панелей - изгибная.

С помощью программы, разработанной в операционной среде MATLAB, найдены погонные усилия, соответствующие изгибной форме бифуркации прямоугольных панелей с односторонними рёбрами жёсткости конструктивно-анизотропной модели.

Результаты натурального эксперимента и расчётные данные совпадают качественно по форме потери устойчивости и количественно с точностью до 22,8 %, если не рассматривать переменное докритическое напряжённое состояние. Поперечное сечение стрингера экспериментальных панелей несимметрично, при численной реализации несимметрия не принималась во внимание. Для панелей большой длины характерна общая изгибная форма потери устойчивости. Балочная теория расчёта неприемлема для длинных образцов с односторонним жесткостным набором, так как значения критических сил значительно – до 60% - занижаются, что приводит к неоправданному увеличению веса проектируемых конструкций.

Выполнена экспериментальная верификация математических моделей устойчивости и разработанных подходов к решению задач с учётом неравномерности докритического напряжённого состояния и технологии изготовления панелей в рамках разрешающего дифференциального уравнения восьмого порядка, построенного с уточнением расчётной схемы подкрепляющего ребра при закручивании.

С целью оценки правомочности полученных теоретических зависимостей проведены серии испытаний экспериментальных моделей эксцентрично подкреплённых композитных панелей и конструктивно-анизотропных панелей из изотропных материалов, усиленных композитными жгутами, на равномерное сжатие до потери устойчивости. Результаты экспериментов и расчётные данные совпадают качественно по формам бифуркации и количественно с точностью до 8–23 %. Приближённый расчёт панели как балки даёт значительно заниженные результаты по критическим усилиям изгибной формы потери устойчивости в

отношении длинных панелей. Выявить крутильную форму потери устойчивости, характерную для коротких образцов, по балочной теории не представляется возможным.

Так как решение строится точными аналитическими методами, время расчёта варианта минимально, что представляет интерес с точки зрения практики проектирования конструкций с использованием параметрического анализа. Результаты расчётов дают возможность снижения и оптимизации массовых характеристик конструкции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработаны методы анализа статической прочности и устойчивости конструктивно-анизотропных панелей летательных аппаратов (ЛА) из композиционных материалов на основе уточнённой теории с учётом технологии изготовления.

Основные новые научные результаты, полученные в диссертационной работе, состоят в следующем:

1. Предложена новая обобщённая универсальная математическая модель для исследования на основе уточнённой теории статической прочности и устойчивости конструктивно-анизотропных панелей ЛА, находящихся в условиях силового и температурного воздействия, с учётом технологии изготовления.
2. Рассмотрены плоские прямоугольные панели с обшивкой постоянной толщины:
 - эксцентрично подкреплённые стержнями двух направлений, расположенными параллельно сторонам опорного профиля, изготовленные из полимерных волокнистых композиционных материалов;
 - гладкие, без подкреплений, из высокомодульных композиционных материалов, обладающие анизотропией вследствие несимметрии свойств структуры многослойного пакета по толщине;
 - эксцентрично подкреплённые стержнями двух направлений, расположенными параллельно сторонам опорного профиля, изготовленные из изотропных материалов;
 - эксцентрично подкреплённые стержнями двух направлений, расположенными параллельно сторонам опорного профиля, изготовленные из изотропных материалов с усилением набора композитными жгутами.

3. Новая расчётная модель основана на принципах конструктивной анизотропии и дальнейшем развитии теории тонкостенных упругих стержней В.З. Власова в рамках общей контактной задачи.
4. Приняты во внимание технологические факторы, имеющие место при изготовлении конструкций из композиционных материалов. Перспективным направлением исследований является проектирование композитных конструкций с учётом технологии изготовления, когда технологический процесс принимается во внимание на этапе разработки изделия.
5. Построено уравнение равновесия восемнадцатого порядка с характеристическим полиномом двенадцатого порядка, и сформулированы естественные граничные условия для исследования общего напряжённого состояния с краевыми эффектами типа «погранслоя».
6. Доказана правомочность значительного упрощения математической модели при определении основного напряжённого состояния путём сведения её к краевой задаче для уравнения с дифференциальным оператором восьмого порядка в соответствии с теорией асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений.
7. Решение уравнений равновесия двенадцатого и восьмого порядков построено в одинарных тригонометрических рядах, для которых продемонстрирована достаточно быстрая сходимость. На основании проведённого анализа компонентов напряжённо-деформированного состояния с учётом и без учёта краевых эффектов, установлено, что краевыми эффектами можно пренебречь в широком диапазоне жесткостей рассматриваемой тонкостенной пространственной системы, при этом погрешность не превышает 3%.
8. Исследовано влияние крутильной жёсткости рёбер на характеристики деформирования панели из углепластика с

продольным набором. Учёт деформации сдвига в рамках теории тонкостенных упругих стержней приводит к снижению прогибов в среднем на 17% по сравнению с «чистым» кручением.

9. Исследовано влияние крутильной жёсткости рёбер на прочностные характеристики алюминиевой панели с продольно-поперечным набором в виде двутавра, армированного жгутами из композиционных материалов. Учёт деформации сдвига в рамках теории тонкостенных упругих стержней приводит к снижению прогибов и нормальных напряжений в поперечном направлении в среднем на 27%, продольных нормальных напряжений – в среднем на 8% по сравнению с «чистым» кручением.
10. Проанализирована возможность использования для исследования прочности односторонне усиленных панелей известного в литературе приёма, заключающегося в формальном распространении гипотезы Кирхгофа на всё тело анизотропной среды. Установлено, что результаты определения напряжённо-деформированного состояния в рамках гипотезы Кирхгофа и при решении контактной задачи совпадают с точностью до 13%, если обшивка подкреплена ортогонально расположенными рёбрами жёсткости. Значительные расхождения имеют место в конструкции с однонаправленным набором, для панелей с ярко выраженной анизотропией свойств.
11. Известные способы решения различных краевых бигармонических задач распространены на интегрирование дифференциального уравнения восьмого порядка в частных производных и применены к расчёту широкого класса конструктивно-анизотропных панелей, в частности – с эксцентричным продольно-поперечным набором, с реальными типами опираний и закреплений смежных сторон контура. Используются модификации метода однородных решений.

Получены конкретные результаты, позволяющие оценить влияние краевых условий на прочностные характеристики конструкции.

12. В рамках дифференциального уравнения деформированной поверхности восьмого порядка решён ряд практически важных задач о бифуркации равновесных форм прямоугольных панелей с односторонними подкреплениями по двум взаимно-перпендикулярным направлениям. По традиционной схеме, используемой при проектировании, найдены критические усилия, соответствующие общей потере устойчивости панели, а также соответствующие совместному выпучиванию листа с рёбрами, связанному с изгибом обшивки между узлами пересечений с последующим поворотом стрингеров без искажения формы профиля. Применяются принцип «размазывания» жесткостей элементов набора и дискретный учёт последних с помощью аппарата обобщённых функций. На конкретных примерах при построении решения в двойных тригонометрических рядах выявлены условия появления той или иной формы бифуркации.
13. Разработан метод определения критических усилий конструктивно-анизотропных панелей с учётом переменности исходного докритического напряжённого состояния, которое является сложным, так как не разделяется на плоскую задачу и изгиб пластины. Показано, чем короче обшивка, и чем выше жёсткость стрингеров, тем ближе основное напряжённое состояние к однородному, когда нормальные силы распределены по длине практически равномерно.
14. Построены алгоритмы исследования задач устойчивости эксцентрично подкреплённых панелей в одинарных тригонометрических рядах, а также с использованием метода однородных решений при произвольных условиях на контуре.

Предложенные алгоритмы могут быть реализованы в операционной среде MATLAB согласно методу последовательных приближений.

15. С целью оценки правомочности полученных теоретических зависимостей проведены серии испытаний экспериментальных моделей подкреплённых композитных панелей на равномерное сжатие до потери устойчивости. Результаты экспериментов и расчётные данные совпадают качественно по формам бифуркации и количественно с точностью до 8 – 13 %, тогда как приближённый расчёт панели как балки даёт значительно заниженные результаты по изгибной форме потери устойчивости в отношении длинных панелей. Выявить крутильную форму потери устойчивости, характерную для коротких образцов, по балочной теории не представляется возможным.
16. Предложенные решения оценены по сравнению с известными решениями. Сопоставление максимальных прогибов, полученных расчётным путём, с данными зарубежного эксперимента подтверждает достоверность результатов в отношении задач прочности.
17. Для определения компонентов напряжённо-деформированного состояния и критических параметров конструктивно-анизотропных панелей на основе уточнённой теории с учётом технологии изготовления составлен комплекс программ в операционной среде MATLAB, который может быть использован в дальнейшем в системе автоматизированного проектирования при решении задачи проектирования изделия под заданную стоимость. Разработаны быстрые процедуры для анализа эксцентрично подкреплённых панелей из композиционных и изотропных материалов. Представлены новые достижения в области вычислительных исследований напряжённо-деформированного состояния и устойчивости композитных авиационных конструкций.

18. На основании выполненных исследований решена научная проблема, имеющая важное хозяйственное значение, изложены новые научно обоснованные технические и технологические решения, внедрение которых вносит значительный вклад в развитие авиационной промышленности.

Перспективы дальнейшей разработки темы

Решение новой задачи проектирования – проектирование под заданную стоимость – возможно при объединении моделей высокой точности с современными компьютерными технологиями, подтверждении достоверности полученных результатов, снижении объёма экспериментальных исследований.

Комплексные решения сформулированных проблем и задач возможно эффективно использовать на различных этапах проектирования панелей несущих поверхностей ЛА из композиционных материалов при выборе конструктивных вариантов. При исследовании целевых функций на условный экстремум в строгой математической постановке решения задач статики и устойчивости, построенные в рамках уточнённой теории, логично вводить в качестве строгих ограничений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азиков Н.С., Алипов А.Е., Косарев В.А. Проектирование подкрепленных композитных панелей // *Авиационная промышленность*. – 2013. - №3. – С. 35-39.
2. Азиков Н.С., Белоусов П.С. Несущая способность композитной панели сетчатой структуры кессона крыла ЛА // *Мех. композиц. матер. и конструкций*. – 2003. - Т. 9. - № 1. - С. 109-122.
3. Алехин В.В., Уржумцев Ю.С. Оптимизация слоистых систем // *Якутск: ЯФ Изд-во СО РАН*. – 2002. – 178 с.
4. Алибаев С.Г., Галиев М.Д., Матросов А.В. Трехмерные модели неоднородных пластин, плит и оболочек // *Актуальные проблемы механики оболочек*. – 2000. - С. 14.
5. Альтенбах Х. Основные направления теории многослойных тонкостенных конструкций. Обзор // *Мех. композиц. матер.* – 1998. - Т. 34. - №3. - С. 333-348.
6. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины // *Новосибирск: Наука*. – 2001. – 288 с.
7. Андриенко В.М., Белоус В.А. Оптимальное проектирование композитных панелей кессона крыла по условиям прочности и устойчивости // *Тр. ЦАГИ*. – 2001. – №2642. – С. 151-158.
8. Андронов В.А., Андропова В.А. Устойчивость композитных пластин и оболочек при неравномерном нагреве // *Череповец: Череповец. Гос. Ун-т*. – 1999.- 25 с.
9. Андронов В.А. Термоупругая задача устойчивости композитных континуально-дискретных пластин и оболочек // *Мех. композиц. матер. и конструкций*. – 1999. - Т. 5. – №3. - С. 3-27.
10. Аннин Б.Д., Колпаков А.Г. Задачи проектирования слоистых пластин с заданными жесткостями. Учет прочности // *Динам. сплош. среды*. – 2001. - № 119. - С. 14-16.

11. Аристамбекова А.В. Численное исследование напряженно-деформированного состояния изгиба многослойной прямоугольной пластинки при свободном опирании двух противоположных краев // Вестн. Нижегород. Ун-та им. Н.И. Лобачевского. – 2011. - С. 1355-1356.
12. Ахмедов А.Б. Качественный алгоритм теорий пластин из композиционных материалов // Пробл. мех. – 2011. - С. 81-84.
13. Бабич И.Ю., Иванова Н.И. О расчетных моделях в задачах устойчивости стержней, пластин и оболочек из композитных материалов // Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та. – 2006. - № 1. - С. 40-46.
14. Бабышкин Д.В., Сафронов В.С., Туркин И.К. Учет остаточных напряжений, возникающих в процессе изготовления неоднородной композитной пластины при исследовании устойчивости // Матер. 4-го Междунар. симп. «Динам. и технол. проб. мех. конструкций и сплош. сред», 16-20 февр. 1998 г. – Ярополец, 1998. - С. 28-29.
15. Белубекян М.В. Неустойчивость двухслойной пластинки при действии изгибающего момента // Изв. АН Армении. Мех. -- 2001. - Т. 54. - № 1. - С. 26-31.
16. Бойцов Б.В., Гавва Л.М., Ендогур А.И., Фирсанов В.В. Напряженно-деформированное состояние и устойчивость конструктивно-анизотропных панелей летательных аппаратов из композиционных материалов с учетом технологии изготовления // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. – 2018. - №4. – С. 20-27.
Версия: Boitsov B.V., Gavva L.M., Endogur A.I., Firsanov V.V. Stress-Strain State and Buckling Problem of Structurally-Anisotropic Aircraft Panels Made of Composite Materials in view of Production Technology // Russian Aeronautics. – 2018. – V. 61. - № 4. – PP. 524-532.
17. Бойцов Б.В., Гавва Л.М. Параметрический анализ напряженно-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов. Математическая модель // Качество и жизнь. – 2017. – № 2 (14). - С. 84-89.

18. Бойцов Б.В., Гавва Л.М. Параметрический анализ напряженно-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов. Решение краевых задач // Качество и жизнь. – 2017. – № 3 (15). - С. 19-24.
19. Бойцов Б.В., Гавва Л.М., Пугачев Ю.Н. Напряженно-деформированное состояние конструктивно-анизотропных панелей из композитных материалов, находящихся в условиях силового и технологического температурного воздействия // Все материалы. Энциклопедический справочник. – 2018. - № 7. – С. 16-23.
20. Бохоева Л.А., Балданов А.Б., Чермошенцева А.С. Разработка оптимальной конструкции многослойной консоли крыла беспилотного летательного аппарата с экспериментальным подтверждением // Вестник МАИ. – 2020. - № 1. – С. 65-75.
21. Бохоева Л.А., Курохтин В.Ю., Чермошенцева А.С., Перевалов А.В. Моделирование и технология изготовления конструкций авиационной техники из композиционных материалов // Вестник ВСГУТУ. – 2013. - № 2(41). – С. 12-18.
22. Бутенко Ю.И. Вариационно-асимптотические методы построения неклассических моделей расчета однослойных и многослойных стержней и пластин // Диссертация на соискание уч. степени д. ф-м. н. – 2003. – 402 с.
23. Бутенко Ю.И. Краевые эффекты в двухслойных и трехслойных полосах и пластинах // Казань: Изд-во КГУ. – 2008. – 152 с.
24. Буянов И.А., Ростовцев М.Ю., Шелофаст В.В. Валидация системы инженерного анализа композиционных конструкций на примере расчета собственных частот антисимметричных ламинатных пластин // Изв. ВУЗов. Авиационная техника. – 2016. - № 4. – С. 149-154.
25. Васильев В.В. Композитные материалы в аэрокосмической технике // Все материалы. Энциклопедический справочник. – 2012. - № 7. – С. 2-7.
26. Виноградов Ю.И., Клюев Ю.И. Устойчивость и динамика осесимметричных конструкций из композиционных материалов с

- начальными напряжениями // Мех. композиц. матер. и конструкций. – 1998. - Т. 4. - С. 45-55.
27. Вохмянин И.Т. Исследование критериев оптимизации слоистых неоднородных оболочек и пластин // 9 Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, 22-28 авг. 2006 г. - Нижний Новгород. - 2006. - С. 63.
28. Гавва Л.М. Параметрический анализ в операционной среде MATLAB напряжённно-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов с учетом технологии изготовления // Труды МАИ. – 2017. - № 93. – С. 27.
29. Гавва Л.М. Экспериментальные исследования устойчивости конструктивно-анизотропных панелей с применением композиционных материалов для верификации уточнённых математических моделей // Конструкции из композиционных материалов. – 2021. - № 1. – С. 10-15.
30. Гавва Л.М., Лурье С.А. Метод расчета напряженно-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов с учетом технологии изготовления и граничных условий общего вида // Полет. Общероссийский научно-технический журнал. – 2018. - № 7. – С. 14-23.
31. Гавва Л.М., Фирсанов В.В. Математические модели и методы расчета напряженно-деформированного состояния панелей летательных аппаратов из композиционных материалов с учетом технологии изготовления // Известия РАН. МТТ. – 2020. - № 3. - С. 122-133.
Версия: Gavva L.M., Firsanov V.V. Mathematical Models and Methods for Calculating the Stress-Strain State of Aircraft Panels from Composite Materials Taking into Account the Production Technology // Mechanics of Solids (Springer). – 2020. - № 3. - PP. 603-612.
32. Гайнутдинова Т.Ю., Мирхазов Р.Р. Программный комплекс автоматизированного проектировочного расчета тонкостенных

- конструкций из композиционных материалов // Изв. ВУЗов. Авиационная техника. – 2011. - № 4. – С. 7-11.
33. Гандель М.В. Прочность, устойчивость и колебания слоистых элементов конструкций // Матер. 4-го Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред», Ярополец, 16-20 февр. 1998. - 1998. - С. 31.
34. Гнуни В.Ц., Элоян А.В. Оптимальный выбор расположения опор в задаче изгиба прямоугольной пластинки из композиционного материала // Изв. АН Армении. Мех. – 2002. - Т. 55. - № 2. - С. 8-13.
35. Голован В.И., Гулевский И.В., Захаренкова А.Ю., Куликов С.В., Стрижиус В.Е., Филичкина Л.П., Щербань К.С. Методика ресурсных испытаний натурного кессона крыла из ПКМ // Прочность летательных аппаратов (усталостная прочность и ресурс авиационных конструкций). – 2013. - С. 144-154.
36. Голушко С.К. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения // Диссертация на соискание уч. степени д. ф-м. н. – 2005. – 400 с.
37. Голушко С.К., Идимешев С.В., Шапеев В.П. Разработка и применение метода коллокаций и наименьших невязок к решению задач механики анизотропных слоистых пластин // Вычисл. технол. – 2014. - С. 24-36.
38. Голушко С.К., Немировский Ю.В. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения // М.: Физматлит. – 2008. – 430 с.
39. Горбацевич Г. Н., Рогачева Н.А. Моделирование напряженно-деформированного состояния пластины конечной толщины из волокнистого композита при симметричной нагрузке // Матер. технол. инструм. – 2002. - Т. 7. - № 3. - С. 12-15.
40. Горбачев В.И. Инженерная теория деформирования неоднородных пластин из композиционных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т. 22. - С. 585-601.

41. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. Метод асимптотического расщепления пространственной теории слоистых пластин // Физ. мезомех. – 2004. - Т. 7. - № S1 - 1. - С. 31-34.
42. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. Метод асимптотического расщепления в задачах продольно-поперечного изгиба анизотропных слоистых плит // Мех. композит. матер. и конструкций. – 2007. - Т. 13. - № 4. - С. 548-580.
43. Григолюк Э.И., Коган Е.А. Анализ основных направлений развития и расчетных моделей анизотропных слоистых оболочек // Механика оболочек и пластин в XXI веке. - 1999. - С. 3-30.
44. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Пути развития теории упругих многослойных пластин и оболочек // Вестн. ТГТУ. – 2005. - Т. 11. - № 2. - С. 439-448.
45. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Решение задач и анализ напряженно-деформированного состояния анизотропных неоднородных оболочек // Прикл. мех. -1997. - Т. 33. - № 11. - С. 3-37.
46. Гришин В.И., Дзюба А.С., Дударьков Ю.И. Прочность и устойчивость элементов и соединений авиационных конструкций из композитов // М.: Физматлит. - 2013. – 272 с.
47. Гришин В.И., Митрофанов О.В., Бондаренко Д.А. Проблемы обеспечения прочности при проектировании несущих панелей и кессона крыла из композитных материалов // Тр. ЦАГИ. – 1999. - Т. 1. - № 2640. - С. 793-797.
48. Грищенко С.В. Расчет и проектирование изделий конструкции самолёта из слоистых композитов с учётом межслоевых эффектов // Труды МАИ. – 2015. - № 84.
49. Грищенко С.В. Феноменологическая методика подбора рациональных параметров укладки слоев при проектировании панелей авиационных конструкций из слоистых полимерных композиционных материалов // Конструкции из композитных материалов. – 2019. - № 4. – С. 45-49.

50. Демчук О.Н. Расчет слоистых анизотропных оболочек и пластин на основе сдвиговой теории итерационного типа // Пробл. прочн. – 1998. - № 1. - С. 100-106.
51. Джанхотов С.О. Экспериментальное исследование деформирования и несущей способности при сжатии тонкостенных панелей из композиционных материалов // Прочность, колебания и ресурс авиационных конструкций и сооружений. – 2009. – Вып. 2683. - С. 115-120.
52. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Юрин Ю.В. Вариационные уравнения асимптотической теории многослойных тонких пластин // Вестн. МГТУ. Сер. Естеств. науки. – 2015. - С. 67-87.
53. Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных пластин // Мех. композиц. матер. и конструкций. – 2014. - Т. 20. - С. 259-282.
54. Дубовиков Е.А., Пеньков Е.А. Проектирование кессона композитного крыла с заданными упругими характеристиками // Тр. ЦАГИ. – 2011. - № 2698. - С. 106-111.
55. Дударьков Ю.И., Левченко Е.А., Лимонин М.В. Некоторые особенности оценки несущей способности стрингерных панелей из ПКМ // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т. 25. - № 2. - С. 192-206.
56. Дударьков Ю.И., Левченко Е.А., Лимонин М.В., Шевченко А.В. Расчетно-экспериментальный анализ несущей способности стрингерных панелей из ПКМ // Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций. Труды Третьей международной конференции, посвященной 80-летию ИМАШ РАН. – 2018. – С. 40-42.
57. Дудченко А.А. Расчет напряженно-деформированного состояния элементов авиационных ракетных и машиностроительных конструкций из композиционных материалов // М.: Фед. инф. система. – 2013. - С. 232.
58. Дудченко А.А., Шумова Н.П. Строительная механика плоских подкрепленных композитных панелей // М.: Изд-во МАИ. - 2006. – 88 с.

59. Еремеев В.В. Устойчивость упругих плит с предварительно напряженными слоями // Автореферат диссертации на соискание уч. степени к. ф-м. н. – 2016. – 22 с.
60. Еремин В.Ю., Чернышова С.М. Прочность ортотропного композиционного пакета // Техн. воздуш. флота. – 2009. - Т. 83. –№3. - С. 15-23.
61. Ершова А.Ю., Мартиросов М.И. Действие подвижных нагрузок на пластины и оболочки // Новые материалы и технологии. – 2006. – С. 90.
62. Заманов А.Д. Влияние структурных искривлений на распределение напряжений в жестко защемленной пластине из композитного материала при ее вынужденном колебании // Мех. композит. матер. – 2002. - Т. 38. - № 1. - С. 59-68.
63. Замула Г.Н., Иерусалимский К.М. Устойчивость подкрепленных анизотропных цилиндрических конструкций // Учен. зап. ЦАГИ. – 1997. - Т. 28. - № 1. - С. 157-169.
64. Замула Г.Н., Фомин В.П., Джанхотов С.О. Расчётно - экспериментальное исследование критической прочности подкрепленных композитных панелей // Прочность, колебания и ресурс авиационных конструкций и сооружений. – 2009. – Вып. 2683. - С. 26-37.
65. Захаров Д.Д. Тензор Грина и граничные интегральные уравнения для тонких упругих слоисто-несимметричных анизотропных пластин // Прикл. мат. и мех. -1997. - Т. 61. – № 3. - С. 499-509.
66. Захаров Д.Д. Неклассические модели механики тонких композиционных пакетов // Вестн. МИИТа. – 2000. - № 3. - С. 117-122.
67. Зорин В.А. Опыт применения композиционных материалов в изделиях авиационной и ракетно-космической техники (Обзор) // Конструкции из композитных материалов. – 2011. - № 4. – С. 44-59.
68. Зинченков М.Ч., Кондаков И.О., Шаныгин А.Н. Новый подход к созданию легких и надежных силовых композитных авиаконструкций // Вестник МГТУ ГА. – 2016. - Т. 19. - № 6. – С. 127-136.

69. Карпов Я.С. Оптимизация структуры композиционного материала панелей летательных аппаратов при ограничениях по прочности, устойчивости и прогибу // Пробл. прочн. – 2004. – № 6. – С. 33-47.
70. Карпов Я.С., Ставиченко В.Г. Определение температурных прогибов закрепленных слоистых пластин // Авиац.- косм. техн. и технол. – 2005. - №6. - С. 33-41, 105-106.
71. Киласония Д.Н., Беридзе Н.М. Алгоритмы построения матриц жесткостей конечных элементов для тонкостенных конструкций летательных аппаратов из композитов // Пробл. мех. – 2005. - № 1. - С. 74-81.
72. Киласония Д.Н., Беридзе Н.М. Общая схема определения напряженно-деформированного состояния конструкции крыла самолета из композиционных материалов // Пробл. прикл. мех. – 2004. - № 4. - С. 90-93.
73. Киреев В.А., Осипян Е.Э. Предельные нагрузки цилиндрических и плоских композитных панелей при продольном сжатии // Прочность, колебания и ресурс авиационных конструкций и сооружений. – 2009. - С. 102-108.
74. Коваленко М.Д., Попов С.Н., Стрельников А.А., Цыбин Н.Н., Татаринов В.Н. Подкрепленные пластины. Точные решения // Мех. композиц. матер. и конструкций. – 2006. - Т. 12. - № 2. - С. 189-199.
75. Колпаков А.А. Проектирование пластин с заданными жесткостями из минимального числа слоев и материалов // Инж. - физ. ж. – 2006. - Т. 79. - № 5. - С. 165-174.
76. Колпаков А.Г. Задача проектирования слоистых пластин с заданными характеристиками // Прикл. мех. и техн. физ. – 2003. - Т. 44. - № 2. - С. 166-175.
77. Колпаков А.Г. Проектирование слоистых пластин с заданными жесткостями // Докл. РАН. – 2001. - Т. 376. - № 6. - С. 763-767.
78. Комаров В.А., Черняев А.В. Сравнительный анализ различных подходов к проектированию структур тонкостенных элементов из композиционных

- материалов // Вестник Самарского ГАУ. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2009. – Т. 1. – Вып. 17. – С. 171-179.
79. Копытько О. Об одной задаче изгиба слоистых стенок пластин несимметричного строения // Теор. основы буд. – 1999. - С. 109-117.
80. Куликов Г.М., Мамонтов А.А. Трехмерный термоупругий анализ слоистых анизотропных пластин // Вестн. ТГТУ. – 2013. - Т. 19. - С. 853-863.
81. Куршин Л.М., Матвеев К.А., Моховнев Д.В., Пустовой Н.В. Устойчивость тонких анизотропных пластин при температурно-силовом нагружении // Механика технических систем. – 2008. - С. 35-56.
82. Кусяков А.Ш. Алгоритм проектирования подкрепленных композитных пластин // Вестник Пермского Университета. Математика. Информатика. – 2013. – № 4.– С. 34-38.
83. Кусяков А.Ш. Проектирование тонких пластин, работающих на устойчивость и прочность // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы. - 2013. - № 45. - С. 30-38.
84. Кутьинов В.Ф., Чедрик В.В. Расчётно-экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния композиционного кессона // Тр. ЦАГИ. - 2002. - № 2658. - С. 9-14.
85. Лавро Н.А., Винник В.А., Гежа С.А. Перспективы применения полимерных композиционных материалов в отечественной гидроавиации // Сборник докладов 3 научной конференции «Гидроавиасалон - 2000», 6-10 сент. 2000 г. – Москва, 2000. - С. 255-230.
86. Лурье С.А., Введенский А.Р., Криволицкая И.И., Тучкова Н.П. Применение концепции обобщенных упругих оснований к прикладным задачам элементов конструкций из неоднородных композиционных материалов // Технол. Сер. Конструкции из композиц. матер. -1998. - № 1-2. - С. 3-15.
87. Мартиросов М.И. Математическое моделирование на основе метода конечных элементов деформирования и разрушения панелей из полимерных композиционных материалов // Материалы 21 Международного симпозиума «Динамические и технологические

- проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, 16-29 февр. 2015 г. – Вятичи. - 2015. - Т. 1. - С. 133-134.
88. Мартиросов М.И., Ершова А.Ю. Деформирование и разрушение элементов авиационных конструкций из полимерных композитов с углеродным наполнителем // 26 Международная конференция «Математическое и компьютерное моделирование в механике деформируемых сред и конструкций», 28–30 сентября 2015 г. - Санкт-Петербург. - 2015. - С. 216-217.
89. Марчук А.В. Обобщение дискретно- и непрерывно-структурных подходов к построению математической модели расчета слоистых плит и массивов // Мех. композит. матер. - 1996. - Т. 32. - № 3. - С. 377-387.
90. Матвеев А.Д. Дополнительные условия для перемещений изгибаемых композитных пластин и балок // Вестн. Краснояр. гос. ун-та. Физ. - мат. н. - 2005. - № 1. - С. 211-216.
91. Митрофанов О.В. К вопросу об определении редуцированных коэффициентов тонких панелей несимметричной структуры из композитных материалов при сжатии // Актуальные проблемы современной науки. – 2017. - № 2. – С. 182-185.
92. Митрофанов О.В. Оценка некоторых мероприятий снижения веса композитного крыла и оптимальное армирование подкрепленных панелей при ограничениях по устойчивости // Техн. воздуш. флота. - 1998. - Т. 72. - № 1. - С. 36-40.
93. Митрофанов О.В. Прикладное проектирование подкрепленных композитных панелей. // Техн. воздуш. Флота. – 1997. - Т. 70. - № 1. - С. 24-28.
94. Митрофанов О.В. Прикладное проектирование стенок нервюр и лонжеронов из композитных материалов // Техн. воздуш. флота. -2000. - Т. 74. – № 3-4. - С.27-32.

95. Митрофанов О.В. Проектирование несущих панелей сетчатой структуры из композитных материалов // Техн. воздуш. флота. – 2004. - Т. 78. - № 2. - С. 34-37.
96. Митрофанов О.В., Кайков К.В. Прикладные задачи проектирования композитных подкрепленных панелей при ограничениях по устойчивости и несущей способности // М.: Издательство «Спутник +». - 2017. – 64 с.
97. Митрофанов О.В., Огнянова Т.С. Проектирование несущих панелей крыла из композитных материалов самолета средней грузоподъемности при ограничениях по остаточной прочности при сжатии и сдвиге // Естественные и технические науки. – 2013. - № 6. – С. 195-199.
98. Митрофанов О.В., Стреляев Д.В. Оптимальное армирование композитных подкрепленных панелей крыла воздушно-космического самолета «Шаттл» // Науч. вестн. МГТУ ГА. -1999. - № 13. - С. 31-34.
99. Митрофанов О.В., Стреляев Д.В. Прикладное проектирование композитных подкрепленных панелей минимального веса при сжатии // Эксплуат. прочн. и надежн. авиац. конструкций. - 1997. - С. 75-77.
100. Митрофанов О.В., Стреляев Д.В. Проектирование композитных конструкций с переменными жесткостными параметрами // Науч. вестн. МГТУ ГА. -1998. - № 1. - С. 45-48.
101. Михайловский К.В., Барановский С.В. Методика проектирования крыла из полимерных композиционных материалов на основе параметрического моделирования // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2018. - № 5. – С. 75-84.
102. Мовисян Л. А., Нерсисян Г.Г. Об устойчивости многослойной пластинки // Изв. АН Армении. Мех. – 2001. - Т. 54. - № 1. - С. 42-47.
103. Моисеенко М.О., Песцов Д.Н., Попов О.Н., Трепутнева Т.А. Обзор работ по расчету пластин и оболочек с малыми начальными несовершенствами формы срединной поверхности // Депозит. № 501-В2011. – 2011. – 28 с.

104. Нгуен Хонг Фонг., Бюрюков В.И. Исследования по оптимизации конструктивно-силовой схемы самолета с прямым крылом из композиционных материалов // Тр. МФТИ. – 2014. - Т. 6. – С. 133-141, 198.
105. Немировский Ю.В. Гибридное проектирование упругих и пластических слоистых плит // 9 Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, 22-28 авг. 2006 г. - Нижний Новгород. - 2006. - С. 158.
106. Немировский Ю.В., Горынин Г.Л. Метод жесткостных функций в задачах расчета многослойных стержней и плит // Вестн. Нижегород. Ун-та им. Н.И. Лобачевского. – 2011. - С. 1654-1656.
107. Немировский Ю.В., Янковский А.П. О границах применимости некоторых теорий расчета изгибаемых армированных пластин // Науч. вестн. НГТУ. – 2004. – № 3. - С. 91-113.
108. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Проектирование прямоугольных и полигональных поперечно изгибаемых пластин с равнонапряженной арматурой // Мех. композиц. матер. и конструкций. - 1998. - Т. 4. - № 4. - С. 21-41.
109. Немировский Ю.В., Янковский А.П. К вопросу о корректности задачи равнонапряженного армирования поперечно изгибаемых кирхгофовских пластин // Математические проблемы механики неоднородных структур. – 2000. - С. 198-204.
110. Образцов И.Ф., Сироткин О.С., Литвинов В.Б. Интегральные конструкции из композиционных материалов и перспективы их применения // Конструкции из композиц. матер. - 2000. - № 2. - С. 78-84, 84.
111. Осяев О.Г., Татурин Ю.А., Костин А.М., Жуков А.В. Многоуровневая модель анализа прочности конструкций из полимерных композитов при многофакторном нагружении // Вестн. ДГТУ. - 2011. – Т. 11. - С.613-620.
112. Первушин Ю.С., Соловьев П.В. Особенности деформированного поведения и напряженного состояния пластин из несбалансированных слоистых композиционных материалов // Вестн. СГАУ. – 2012. - С. 153-160.

113. Пискунов В.Г., Рассказов А.А. Сдвиговая теория второго приближения для многослойных пологих оболочек и пластин // Мех. композит. матер. - 1998. - Т. 34. – № 3. - С. 363-370.
114. Полилов, А.Н. Экспериментальная механика композитов // М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. - 2015. – 375 с.
115. Поляков В.А., Шлица Р.П., Хитров В.В., Жигун В.И. Особенности изгиба трехслойной панели несимметричной структуры при локальных нагрузках // Мех. композит. матер. - 1999. - Т. 35. - № 6 - С. 717-742.
116. Попов Б.Г., Баслык К.П., Кварацхелия И.Н. Четырехугольный девятиузловой суперэлемент для решения задач статики, динамики, и устойчивости многослойных пластин // Вестн. МГТУ. Сер. Машиностр. - 2002. - № 4. - С. 30-44,125.
117. Попов Ю.И., Стрелец Д.Ю., Солошенко В.Н. Параметрический анализ композитных панелей кессона крыла пассажирского магистрального самолета // Авиационная промышленность. – 2017. - № 4. – С. 4-10.
118. Рогачева Н.Н. Теория слоистых электроупругих пластин произвольного строения по толщине // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. - 2001. - № 3. - С. 190.
119. Родионов Г.Л., Сидоренко А.С., Станкевич А.И. Многокритериальная оптимизация цилиндрической оболочки из слоистого композиционного материала // Матер. 4-го Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред», 16-20 февр. 2000 г. – Ярополец. - 2000. - С. 44.
120. Родионов Г.Л., Сидоренко А.С., Станкевич А.И. Многокритериальная оптимизация цилиндрической панели из слоистого композиционного материала при динамическом нагружении // Науч. вестн. МГТУ ГА. - 1998. - № 6. - С. 66-71.
121. Рябов В.М., Паршина Л.В., Ярцев Б.А. Методы решения задач прочности, устойчивости и затухающих колебаний слоистых анизотропных пластин из полимерных композиционных материалов // Международная научная

- конференция по механике «4 Поляховские чтения», 7-10 февр. 2006 г. – Санкт-Петербург. - 2006. - С. 210, 549-557.
122. Савин С.Ю., Ивлев И.А. Анализ устойчивости ортотропных прямоугольных пластин с использованием коэффициента формы // Вестник МГСУ. – 2017. – № 11 (110). – С. 1333-1341.
123. Самсоненко Г.И. Термоупругий изгиб анизотропных пластин из разносопротивляющихся материалов // Автореферат диссертации на соискание учён. степени к. т н. – 2012. – 16 с.
124. Сибиряков А.В. Прикладная теория расчета композиционных пластин на действие импульсной нагрузки // Матер. 8 Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред», 11-15 февр. 2002 г., Ярополец. – 2002. - С. 36-38.
125. Сипетов В.С., Грицук Ю.В. Применение вариационно-разностного метода к задачам изгиба многослойных композиционных конструкций // Стр-во и реконструкция в соврем. условиях: Тез. докл. междунар. науч.-техн. конф. 26-30 мая 1997 г. – Рубцовск. - 1997. - С. 44-45.
126. Скворцов Ю.В., Глушков С.В., Хромов А.И. Моделирование композитных элементов конструкций и анализ их разрушения в САЕ-системах MSC.Patran – Nastran и ANSYS // Самара: Электрон. учеб. Пособие. - 2012. – С. 427.
127. Смердов А.А. Возможности повышения местной устойчивости подкрепленных и интегральных композиционных конструкций // Конструкции из композиционных материалов. – 2011. - № 4. – С. 70-78.
128. Соколкин Ю.В., Макарова Е. Ю. Стохастические модели механики композитов в задачах проектирования элементов конструкций аэрокосмической техники. // Мех. композит. матер. - 2002. - Т. 38. - № 5. - С. 591-606.
129. Солошенко В.Н., Попов Ю.И. Концептуальное проектирование конструкции кессона крыла из композиционных материалов

среднемагистрального самолета // Вестник Московского Авиационного Института. – 2013. - № 3. – С. 16-30.

130. Таирова Л.П., Шапкина В.М. Исследование особенностей деформирования углепластиковых перекрестно армированных пластин при изменении температуры средствами тензометрии // Вестн. МГТУ. Сер. Приборостр. – 2011. - № 51. - С. 61-68.
131. Тетерс Г. Многокритериальная оптимизация прямоугольных композитных пластинок, подверженных продольным термическим напряжениям и теряющих устойчивость при касательном нагружении // Мех. композит. матер. - 2007. - Т. 43. - № 1. - С. 85-91.
132. Туктаров С.А., Чедрик В.В. Некоторые аспекты моделирования композиционного кессона большого удлинения анизотропной балкой // Учен. зап. ЦАГИ. – 2015. - Т. 46. - С. 70-84.
133. Туркин И.К., Клименко Б.М. Теоретические и экспериментальные аспекты проектирования многослойных тонкостенных конструкций летательных аппаратов с учетом комплексного термосилового нагружения // М: Изд-во МАИ. - 2013. – 172 с.
134. Тютюнников Н.П. Построение матрицы жесткости отсека со слоистыми анизотропными панелями // Тез. докл. 2 Медунар. симп. «Динам. и технол. пробл. мех. конструкций и сплош. сред», Москва. - 1996. – С. 107-108.
135. Уразбахтин Ф.А., Харинова Ю.Ю., Болонкин В.А. Предельные состояния в процессе отверждения волокнистых стеклопластиков // Изв. ВУЗов. Авиационная техника. – 2015. - № 3. – С. 79-15.
136. Федечев А.Ф., Жигалин А.Г., Загузов И.С., Головинский В.Н. Математическая модель термоупругого состояния зеркала телескопа // Математическое моделирование и краевые задачи. – 2005. - С. 284-287.
137. Фирсанов В.В., Гавва Л.М. Анализ краевых эффектов и основного напряжённо-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей летательных аппаратов с применением композиционных

- материалов по уточнённой теории // Конструкции из композиционных материалов. – 2021. - № 1. – С. 3-9.
138. Фирсанов В.В., Гавва Л.М. Исследование в операционной среде MATLAB крутильной формы потери устойчивости конструктивно-анизотропных панелей // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2017. - № 2. – С. 226-237.
139. Фирсанов В.В., Гавва Л.М. Исследование изгибной формы потери устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов в операционной среде MATLAB // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2017. - № 4. – С. 66-76.
140. Фирсанов В.В., Гавва Л.М. Исследование устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов с учетом докритического напряженного состояния // Конструкции из композиционных материалов. – 2019. - № 4 (156). – С. 17-24.
141. Фирсанов В.В., Гавва Л.М. Параметрический анализ докритического напряжённо-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т. 25. – № 2. – С. 145-153.
142. Фирсов В.А., Гюнал И.Ш., Селин И.С. Уточненная модель механики деформирования слоистых композитных стержней // Изв. ВУЗов. Авиационная техника. – 2009. - № 3. – С. 24-27.
143. Фомин В.П. Поперечный изгиб слоистых пластинок // Тр. ЦАГИ. - 2004. - № 2664. - С. 122-135.
144. Фомин В.П., Устойчивость слоистой пластинки. Анализ теорий поперечного сдвига третьего порядка // Тр. ЦАГИ. - 2002. - №2658. - С. 173-185.
145. Фомин Г.Е., Шайда А.Н., Байкин В.Д. Проектирование адаптивных к действию градиентов температур размерностабильных силовых конструкций летательных аппаратов // Обз. инф. Пробл. безопас. полетов. -2001. - № 10. - С. 28-33.

146. Халиулин В.И., Батраков В.В. Анализ применения инновационных методов для производства интегральных конструкций из композитов // Изв. ВУЗов. Авиационная техника. – 2016. - №.3. – С. 129-133.
147. Чедрик В.В. Оптимизация силовых конструкций из композиционных материалов // Тр. ЦАГИ. - 2004. - № 2664. - С. 188-198.
148. Чедрик В.В. Практические методы оптимального проектирования конструкций из слоистых композиционных материалов // Мех. композиц. матер. и конструкций. - 2005. Т. 11. - № 2. - С. 184-198.
149. Чедрик В.В. Решение задачи многодисциплинарной оптимизации и силовых конструкций на основе многоуровневого подхода. // Вестн. Нижегород Ун-та им. Н.И. Лобачевского. – 2011. - С. 1847-1849.
150. Чедрик В.В., Туктаров С.А. Метод глобально-локального расчета и оптимизации авиационных конструкций из композиционных материалов // 11 Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, 20-24 авг. 2015 г. – Казань. - 2015. - С. 298.
151. Чернов В.М. Расчет формы несимметричных пластин из слоистых композиционных материалов // Технол. Сер. Конструкции из композиц. матер. - 1996. - № 2. - С. 3-8.
152. Чернышев С.Л. Новый этап применения композиционных материалов в авиационной технике // Проблемы машиностроения и автоматизации. . – 2013. - № 1. – С. 3-10.
153. Черняев А.В. Дискретная оптимизация элементов авиационных конструкций из композиционных материалов // 10 Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, 24-30 авг. 2011 г. – Нижний Новгород. - 2011. - С. 207.
154. Чехов В.Н., Шаповалова А.И. О некоторых расчетных схемах в задаче устойчивости слоистых композитных материалов // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела. – 2006. - С. 154-156.
155. Шалдырван В.А. Некоторые результаты и проблемы трехмерной теории пластин (обзор) // Прикл. мех. - 2007. - Т. 43. - №2. - С. 45-69.

156. Шалдырван В.А., Сорока В. А. Расчет и проектирование однонаправленно-армированных пластин // Мех. композиц. матер. и конструкций . - 2001. - Т. 7. - № 2. - С. 251-265.
157. Шаныгин А.Н. Особенности проектирования композитных конструкций ЛА // Труды ЦАГИ. – 2011. - № 2698. – С. 63-69.
158. Шатаев П.А. Расчет композитных конструкций в проектировочной постановке // Пробл. нелинейн. анал. в инж. системах. – 2013. - Т. 19. - С. 54-77.
159. Якубовский Ю.Е., Коновалова О.Н. Моделирование изгиба составных пластин при различных краевых условиях // Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте. – 1999. - С. 140-141.
160. Япичи А. Потеря устойчивости при термическом нагружении пластин из гибридного перекрестного армированного слоистого композита с наклонной трещиной // Мех. композит. матер. - 2005. - Т. 41. - № 2. - С. 193-202.
161. Adali S., Lene F., Duvaut G., Chiaruttini V. Optimization of laminated composite subject to uncertain buckling loads // Compos. Struct. - 2003. - Vol.62. - № 3-4. – PP. 261-269.
162. Almeida S., Frascino M., Hansen J.S. Buckling of composite plates with local damage and thermal residual stresses // AIAA Journal. – 2002. - Vol. 40. - PP. 340-345.
163. Attia O., El-Zafrany A. A high-order element for nonlinear vibration analysis of composite layered plates and shells // Int. J. Mech. Sci. -1999. - Vol. 41. – PP. 461-486.
164. Bai R., Bao S., Lei Z., Liu D., Yan C. Experimental study on compressive behavior of I-stiffened CFRP panel using fringe projection profilometry // Ocean Engineering 160. -2018. - PP. 382-388.
165. Baker D.J. Evaluation of thin Kevlar-epoxy fabric panels subjected to shear loading // J. Aircraft. – 2000. - Vol. 37. - № 1. - PP. 138-143.

166. Baucke A., Mittelestedt C. Closed-form analysis of the buckling loads of composite laminates under uniaxial compressive load explicitly accounting for bending-twisting-coupling // *Composite Structures*. - 2015. - № 128. - PP. 437-454.
167. Boitsov B.V., Gavva L.M., Pugachev Yu.N. The Stress-Strain State of Structurally Anisotropic Panels from Composite Materials under force and process temperature exposure // *Polymer Science. Series D*. – 2019. – Vol. 12. - № 1. – PP. 85-90.
168. Boutin C, Viverge K. Generalized plate model for highly contrasted laminates // *Eur. J. Mech. A*. – 2016. - Vol. 55. - PP. 149-166.
169. Bruno D., Greco F. An analysis of delamination buckling and growth in layered plates // *Int. J. Solid and Struct.* – 2000. - Vol. 37. - № 43. - PP. 6239-6276.
170. Candiotti S., Mantari J.L. Evaluation of the best new cross-ply laminated plate theories through the Axiomatic/Asymptotic Approach // *Journal of Applied and Computational Mechanics*. - 2015. - № 4(4). - PP. 331-351.
171. Candiotti S., Mantari J.L., Yarasca J., Petrolo M., Carrera E. An axiomatic/asymptotic evaluation of best theories for isotropic metallic and functionally graded plates employing non-polynomic function // *Aerospace Science and technology*. - 2017. – Vol. 68. - PP. 179-192.
172. Carrera E. Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells // *Appl. Math. Rev.* – 2003. - Vol. 56. - № 3. – PP. 287-308.
173. Carrera E. Single- vs multilayer plate modeling on the basis of Reissner's mixed theorem // *AIAA Journal*. – 2000. - Vol. 38. - № 2. - PP. 342-352.
174. Carrere E. Developments, ideas, and evaluations based upon Reissner's Mixed Variational Theorem in the modelling of multilayered plates and shells // *Appl. Mech. Rev.* – 2001. - Vol. 54. - № 4. - PP. 301-329.
175. Carrero E. Evaluation of layerwise mixed theories for laminated plate analysis // *AIAA Journal*. – 1998. - Vol. 36. - № 5. - PP. 830-839.

176. Carrera E., Cinefra M., Lamberti A., Zenkour A.M. Axiomatic/asymptotic evaluation of refined plate models for thermo-mechanical analysis // *Journal of Thermal Stresses*. - 2015. – Vol. 38. - № 6. - PP. 165-187.
177. Carrera E., Demasi L. Two benchmarks to assess two-dimensional theories of sandwich, composite plates // *AIAA Journal*. – 2003. - Vol. 41. - № 7. - PP. 1356-1362.
178. Cerracchio P., Gherlone M., Tessler A. Real-time displacement monitoring of a composite stiffened panel subjected to mechanical and thermal loads // *Meccanica*. – 2015. - Vol. 50. - PP. 2487-2496.
179. Castro S.G.P., Donadon M.V. Assembly of semi-analytical models to address linear buckling and vibration of stiffened composite panels with debonding defect // *Composite Structures*. – 2017. – Vol. 160. - PP. 232-247.
180. Castro S.G.P., Donadon M.V., Guimaraes T.A.M. ES-PIM applied to buckling of variable angle tow laminates // *Composite Structures*. – 2019. – Vol. 209. - PP. 67-78.
181. Cater C., Xiao X. Multiscale investigation of free edge effects in laminated composites // *Proceedings of the American Society for Composites – 29th Technical Conference, ASC 2014, 16th US-Japan Conference on Composite Materials, ASTM-D30 Meeting*. – 2014.
182. Cetkovic M. Thermal buckling of laminated composite plates using layerwise displacement model // *Composite Structures*. – 2016. – Vol. 142. - PP. 238-253.
183. Cetkovic M. Thermo-mechanical bending of laminated composite and sandwich plates using layerwise displacement model // *Compos. Struct.* – 2015. - Vol. 125. - PP. 388-399.
184. Cetkovic M., Gyorgy I. Thermo-elastic stability of angle-ply laminates-application of layerwise finite elements // *Structural Integrity and Life*. - 2016. – Vol. 16. - № 1. - PP. 43-48.
185. Chau-Dinh T., Truong-Duc T., Nguyen-Trung K., Nguyen-Van H. A node-based MITC3 element for analyses of laminated composite plates using the

- higher-order shear deformation theory // Lecture Notes in Mechanical Engineering. – 2018. - Part F3. - PP. 409-429.
186. Chen Chun-Sheng, Lin Chih-Yung, Chen Rean-Der. Thermally induced buckling of functionally graded hybrid composite plates // Int. J. Mech. Sci. – 2011. - Vol. 53. – PP. 51-58.
187. Chen Hong-Ji, Tsai Stephen W. Analysis and optimum design of composite grid structures // J. Compos. Mater. - 1996. – Vol. 30. - № 4. - PP. 503-534.
188. Chen Rong-geng, Han Qiu. Теория сдвиговой деформации высокого порядка с учетом поперечных нормальных напряжений и уточненный метод конечных элементов // Dalian shuichan xueyuan xuebao. – 2000. - Vol.15. - № 2. - PP. 125-131.
189. Chen X., Wang X., Qiu Z., Li X., Shi Q. A novel reliability-based two-level optimization method for composite laminated structures // Composite Structures. – 2018. – Vol. 192. - PP. 336-346.
190. Chen Xiao, Dai Shiliang, Xu Ke. Qinghua daxue xuebao. Ziran kexue ban. – 2001. – Vol. 41. - № 2. - PP. 77-79, 83.
191. Cheng Zhen-Qiang, Kennedy D., Williams F.W. Effect of interfacial imperfection on buckling and bending behavior of composite laminates // AIAA Journal. – 1996. - Vol. 34. - № 12. -PP. 2590-2595.
192. Cheng Zhen-Qiang, Kitipornchai S. Exact eigenvalue correspondences between laminated plate theories via membrane vibration // Int. J. Solid and Struct. – 2000. - Vol. 37. - № 16. - PP. 2253-2264.
193. Cho Maenghyo, Oh Jinho. Higher order zig-zag plate theory under thermos-electric-mechanical loads combined // Composites. B N 1. – 2003. - Vol. 34. - № 1. - PP. 67-82.
194. Cinefra M, Carrera E., Lamberti A., Petrolo M. Best theory diagrams for multilayered plates considering multifield analysis // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2017. – Vol. 28. - № 16. - PP. 2184-2205.

195. Daghia F., de Miranda S., Ubertini F., Viola E. A hybrid stress approach for laminated composite within the First – order Shear Deformation Theory // *Int. J. Solid and Struct.* - 2008. - Vol. 45. - № 6. - PP. 1766-1787.
196. Dallot J, Sab K. Limit analysis of multi – layered plates // *J. Mech and Phys. Solids.* – 2008. - Vol. 56. - № 2. - PP. 561-580.
197. Dano M.L., Hyer M.W. Thermally-induced deformation behavior of unsymmetric laminates // *Int. J. Solid and Struct.* - 1998. - Vol. 35. - № 17. - PP. 2101-2120.
198. Deb N.S.K. An alternative numerical solution of $90^\circ/0^\circ/90^\circ$ cross-ply laminated composite plate displacement potential approach // *Mechanics of Advanced Materials and Structures.* – 2017. – Vol. 24. - № 8. - PP. 674-684.
199. Deb N.S.K. Effects of fiber orientation and material isotropy on the analytical elastic solution of a stiffened orthotropic panel subjected to a combined loading // *Advances in Materials Science and Engineering.* – 2013. - 710143.
200. Degenhardt R., Kling A., Klein H., Hillger W., Goetting Ch., Zimmermann R., Rohwer K., Gleiter A. Experiments on Buckling and Postbuckling of Thin-Walled CFRP Structures using Advanced Measurement Systems // *International Journal of Structural Stability and Dynamics.* – 2007. – Vol. 7. - №2.
201. Degenhardt R., Tessmer J. Advances in Computational Stability Analysis of Composite Aerospace Structures // 23rd CADFEM User's Meeting, International Congress on FEM Technology with ANSYS CFX & ICEM CFD Conference. – 2005.
202. Duan Jicheng. Приближенный расчет на изгиб и колебания слоистых пластин // *Wuhan keji daxue xuebao.* – 2002. - Vol. 24. - № 12. - PP. 58-60.
203. Duan Jicheng. Расчет напряжений при изгибе слоистых пластин // *Huazhong keji daxue xuebao. Ziran kexue ban.* – 2002. - Vol. 30. - № 12. - PP. 111-113.
204. Edwards D.A., Williams F.W., Kennedy D. Cost optimization of stiffened panels using VICONOPT // *AIAA Journal.* – 1998. - Vol. 36. - № 2. - PP. 267-272.

205. Ehsani A., Rezaeepazhand J. Stacking sequence optimization of laminated composite grid plates for maximum buckling load using genetic algorithm // International Journal of Mechanical Sciences. – 2016. – Vol. 119. - PP. 97-106.
206. Ehsani A., Rezaeepazhand J. Vibration and stability o laminated composite orthogrid plates // Journal of Reinforced Plastics and Composites. – 2016. – Vol. 35. - № 3 - PP. 1051-1061.
207. Elseifi M A., Gurdal Z., Nikolaidis E. Convex/probabilistic models of uncertainties in geometric imperfections of stiffened composite panel // AIAA Journal. – 1999. - Vol. 37. - № 4. - PP. 468-474.
208. Emmanuel N.P., Dharmaraja C., Sathya S.A., Vasudevan D. Optimization of laminated composite plates subjected to nonuniform thermal loads // Polymers and Polymer Composites. - 2019.
209. Endogur A.I., Gavva L.M. Statics and Buckling Problems of Aircraft Structurally-Anisotropic Composite Panels with the influence of Production Technology // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering in Aeronautics (MEA2017). – 2018. – 012009.
210. Falzon B.G., Stevens K., Davies G.O. Postbuckling behavior of a blade-stiffened composite panel loaded in uniaxial compression // Compos. A. - 2000. - Vol. 31. - № 5. - PP. 459-468.
211. Fan Yeli, Lin Fangyong. An analytical solution of rectangular laminated plates by higher-order theory // Appl. Math. and Mech. Engl. Ed. – 1998. - Vol. 19. – № 8. - PP.793-806.
212. Fares M.E., Youssif Y.G., Elshoraky A.E. Non – linear design and control optimization of composite laminated plates with buckling and postbuckling objectives // Int. J. Non-Linear Mech. - 2006. - Vol. 41. – № 6-7. - PP. 807-824.
213. Fiedler L., Lacarbonara W., Vestroni F. A generalized higher – order theory for multi- layered, shear-deformable composite plates // Acta mech. - 2010. - Vol. 209. - № 1-2. - PP. 85-98.
214. Firsanov V.V., Gavva L.M., Korochkov A.N. Buckling Problem Statement and Approaches to Buckling Problem Investigation of Structurally-Anisotropic

- Aircraft Panels Made from Composite Materials // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2020. - 714(1). - 012007.
215. Gangadhara P.B. Free vibration and buckling response of hat-stiffened composite panels under general loading // Int. J. Mech. Sci. - 2008. - Vol. 50. - № 8. - PP. 1326-1333.
216. Gavva L.M. New Model and Analytical Review of Approaches to Buckling Problem Investigation of Structurally-Anisotropic Aircraft Panels Made from Composite Materials // Lecture Notes in Electrical Engineering. – 2020. – 622. - PP. 163-175.
217. Gong S.W., Lam K.Y. Transient response of stiffened composite plates subjected to low velocity impact // Compos. B 5. – 1999. – Vol. 30. - PP. 473-484.
218. Grediac M. A procedure for designing laminated plates with required stiffness properties. Application to thin quasi-isotropic quasi-homogeneous uncoupled laminates // J. Compos. Mater. - 1999. – Vol. 33. - № 20. - PP.1939-1956.
219. Grediac M. On the design of some particular orthotropic plates with non-standard ply orientations // J. Compos. Mater. - 1996. - Vol. 34. - № 19. - PP. 1665-1693.
220. Gruttmann F., Wagner W. Shear correction factors for layered plates and shells // Computational Mechanics. – 2017. – Vol. 59. - № 1. - PP. 129-146.
221. Guo Mei-Wen, Harik I.E., Ren Wei-Xin. Buckling behavior of stiffened laminated plates // Int. J. Solid and Struct. - 2002. - Vol. 39. - № 11. - PP. 3039-3055.
222. He Lu-wu, Li Le. Расчет напряжений в композитных слоистых пластинах // Lanzhou daxue xuebao. Ziran kexue ban. - 2002. - Vol. 38. - № 1. - PP. 36-43.
223. He Lu-wu, Li Le. Теория высокого порядка для композитных слоистых пластин // Lanzhou daxue xuebao. Ziran kexue ban. – 2001. – Vol. 37. - № 3. - PP.26-33.

224. Henderson J.L., Gurdal Z., Loos A.C. Combined structural and manufacturing optimization of stiffened composite panels // *J. Aircraft.* – 1999. - Vol. 36. - № 1. - PP. 246-254.
225. Ho-Huu V., Do-Thi T.D., Dang-Trung H., Vo-Duy T., Nguyen-Thoi T. Optimization of laminated composite plates for maximizing buckling load using improved differential evolution and smoothed finite element method // *Composite Structures.* – 2016. – Vol. 146. - PP. 132-147
226. Hu WeiPing, Zhang Xing, Meng QingChun. Energy approach to a linearization contact problem of simply supported cross – ply laminated composite plate // *Int. J. Solids and Struct.* - 2002. - Vol. 39. - № 23. - PP. 5851-5863.
227. Huang C.S. Corner stress singularities in a high-order plate theory // *Comput and Struct.* - 2004. - Vol. 82. - № 20-21. - PP. 1657-1669.
228. Huang Liang, Sheikh A.H., Ng. Ching-Tai, Griffith M.C. An efficient finite element model for buckling analysis of grid stiffened laminated composite plates // *Compos. Struct.* – 2015. - Vol. 122. - PP. 41-50.
229. Huang Yan, Liao Ying, Qiu Zhong-sheng. Решение задачи изгиба анизотропной тонкой пластины под произвольной нагрузкой // *Guofang keji daxue xuebao.* - 2002. - Vol. 24. - № 1. - PP. 30-33.
230. Hug N.M.L., Afsar A.M. A mathematical model for the analysis of elastic field in a stiffened cantilever of laminated composite // *Advances in Mechanical Engineering.* -2012. - 170704.
231. Jalali S.J., Taheri F. An analytical solution for cross-ply laminates under cylindrical bending based on through-the-thickness inextensibility. Part I Static loading // *Int. J. Solids and Struct.* -1998. - Vol. 35. – № 14. - PP. 1559-1574.
232. Jalali S.J., Taheri F. An analytical solution for cross-ply laminates under cylindrical bending based on through-the-thickness inextensibility. Part II Vibrations // *Int. J. Solids and Struct.* -1998. - Vol. 35. – № 14. - PP. 1575-1587.
233. Javed S., Viswanathan K.K., Aziz Z.A., Karthik K., lee J.H. Vibration of antisymmetric angle-ply laminated plates under higher order shear theory // *Steel and Composite Structures.* – 2016. – Vol. 22. - № 6. - PP. 1281-1299.

234. Jegley D.C. Behavior of compression-loaded composite panels with stringer terminations and impact damage // *J. Aircraft.* – 1998. - Vol. 35. - № 6. - PP. 942-948.
235. Jiang J., Chen N., Geng Y., Shao H., Lin F. Advanced grid structure-reinforced composites // *Porous Lightweight Composites Reinforced with Fibrous Structures.* – 2017. - PP. 129-155.
236. Joshan Y.S., Grover N., Singh B.N. A new non-polynomial four variable shear deformation theory in axiomatic formulation for hydro-thermo-mechanical analysis of laminated composite plates // *Composite Structures.* – 2017. – Vol. 182. - PP. 685-693.
237. Joshan Y.S., Grover N., Singh B.N. Assessment of non-polynomial shear deformation theories for thermo-mechanical analysis of laminated composite plates // *Steel and Composite Structures.* – 2018. – Vol. 27. - № 6. - PP. 761-775.
238. Kabir H.R.H. On free vibration response and mode shape of arbitrarily laminated rectangular plates // *Compos. Struct.* - 2004. - № 1. - PP. 13-27.
239. Kam T.Y., Sher H.F., Chao T.N., Chang R.R. Predictions of deflection and first-ply failure load of thin laminated composite plates via the finite element approach // *Int. J. Solids and Struct.* - 1996. - Vol. 33. - № 3. - PP. 375-398.
240. Kant T., Shiyekar S.M. An assessment of a higher order theory for composite laminates subjected to thermal gradient // *Compos. Struct.* – 2013. - Vol. 96. - PP. 698-707.
241. Kapuria S., Kumari P. Boundary layer effects in Levy-type rectangular piezoelectric composite plates using a coupled efficient layerwise theory // *Eur. J. Mech. A.* – 2012. - Vol. 36. - PP. 122-140.
242. Kato Yoko, Kameyama, Hu Ning, Fukunaga Hisao. Оптимальное проектирование композитного крыла с учетом выпучивания подкрепленной панели // *Nihon kikai ronbunshu. A.* – 2004. - Vol. 70. - № 691. - PP. 479-486.

243. Katori Hiroaki. Конечноэлементный расчет слоистых пьезоэлектрических пластин // *Nihon kikai gakkai ronbunshu. A.* – 2002. - Vol. 68. - № 666. - PP. 189-193.
244. Kazemi M. A new semi-analytical solution for buckling analysis of laminated plates under biaxial compression // *Arch. Appl. Mech.* – 2015. - Vol. 85. - PP. 1667-1677.
245. Kazemi M., Verchery G. A Methodology for Optimal Design of Composite Laminates Using Polar Formalism // *Journal of Mechanics.* – 2016. – Vol. 32. - № 3. - PP. 255-266.
246. Kazemi M., Verchery G. Design of composite laminated plates for maximum buckling load with stiffness and elastic modulus constraints // *Composite Structures.* – 2016. – Vol. - 148. - PP. 27-38.
247. Kefal A., Tessler A., Oterkus E. An enhanced inverse finite element method for displacement and stress monitoring of multilayered composite and sandwich structures // *Composite Structures.* -2017. – Vol. 179. - PP. 514-540.
248. Kettaf F.Z., Benguediab M., Tounsi A. Analytical study of buckling of hybrid multilayer plates // *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering.* – 2015. – Vol. – 59. - № 4. - PP. 164-168.
249. Khdeir A.A. On the thermal response of antisymmetric angle-ply laminated plates // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* - 1997. – Vol. 64. - № 1. - PP. 229-233.
250. Kim Tae-Uk, Sin Hyo-Chol. Optimal design of composite laminated plates with the discreteness in ply angles and uncertainty in material properties considered // *Compos. and Struct.* - 2001. - Vol. 79. - № 29-30. - PP. 2501-2509.
251. Kirubakaran R., Lokesharun D., Rajkumar S., Anand R. Aircraft Wing Weight Optimization by Composite Material Structure Design Configuration // *IOSP Journal of Mechanical and Civil Engineering.* – 2017. – Vol. 14. – Issue 6. - Ver. 2. – PP. 71-80.
252. Kobayashi Harutoshi. A survey of books and monographs on plates // *Mem. Fac. Eng.* – 1997. - Vol. 38. - PP. 73-98.

253. Kolpakov A.A., Kolpakov A.G. Solution of the laminated plate design problem: new problems and algorithms // *Comput. and Struct.* - 2005. - Vol. 83. - № 12-13. - PP. 964-975.
254. Kolpakov A.A. Design of a laminated plate possessing the required stiffness's using the minimum number of materials and layers // *J. Elast.* - 2007. - Vol. 86. - № 3. - PP. 245-261.
255. Kolpakov A.G. General solution of the problem of design of laminated plates possessing the given stiffness's // *Int. J. Solids and Struct.* - 2001. - Vol. 38. - № 34-35. - PP. 6015-6025.
256. Konieczny S., Langier S., Mes R. Dynamics and stability of multilayered composite plates // *Stud. geotechn. et mech.* - 2001. - № 1-2. - PP. 59-67.
257. Koo Kyo-Nam. Vibration and analysis of composite plates using finite element with layerwise in-plane displacements // *Comput. and Struct.* - 2002. - Vol. 80. - № 16-17. - PP. 1393-1398.
258. Kulkarni P., Dhoble A.S., Padole P. A Review of Research and Resent Trends in Analysis of Composite Plates // 2018. –<https://doi.org/10.1007/s12046-018-0867-1>
259. Kumar S., Kumar R., Mandal S. Behavior of FRP composite panel subjected to In-plane loading // *International Journal of Civil Engineering and Technology.* – 2018. – Vol. 9. - № 6. - PP. 1324-1332.
260. Kumar S., Kumar R., Mandal S., Rahul A.K. The prediction of buckling load of laminated composite hat-stiffened panels under compressive loading by using of neural networks // *Open Civil Engineering Journal.* – 2018. – Vol. -12. - № 1. - PP. 468-480.
261. Kumar S., Kumar R., Mandal S., Ranjan A. Numerical studies on thin wall laminated composite panels under compressive loading // *International Journal of Civil Engineering and Technology.* – 2018. – Vol. – 9. - № 6. - PP. 586-594.
262. Lam –Phat T., Nguyen-Hoai S., Ho-Huu V., Nguyen Q., Nguyen-Thoi T. An artificial neural network-based optimization of stiffened composite plate using a

- new adjusted differential evolution algorithm // Lecture Notes in Mechanical Engineering. - Part F3. -2018. - PP. 229-242.
263. Le-Anh L., Nguyen-Thoi T, Ho-Huu V, Dang-Trung H, Bui-Xuan T. Static and frequency optimization of folded laminated composite plates using an adjusted Differential Evolution algorithm and a smoothed triangular plate element // Compos. Struct. – 2015. - Vol. 127. - PP. 382-394.
264. Li D., Xiang J. Optimization of Composite Wing Structure for a Flying Wing Aircraft Subject to Multi Constants // 54th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structure, Structural Dynamics and Materials Conference, 2013. – Boston. - 2013. – PP. 1-11.
265. Li Jing-Jing, Cheng Chang-Jun. Differential quadrature method for bending problem of plates with transverse shear affects // J. Shanghai Univ. - 2003. - Vo. 7. - № 3 - PP. 228-233.
266. Li Y.B., Zhang P., Wu S.Q., Fei Q. G. Structural-acoustic coupling analysis of a composite stiffened panel in a thermal environment // Journal of vibration Engineering. – 2015. - Vol. 28. - PP. 531-540.
267. Liew K.M., Pan Z.Z., Zhang I.W. An overview of layerwise theories for composite laminates and structures: Development, numerical implementation and application // Composite Structures. – 2019. – Vol. 216. - PP. 240-259.
268. Liew K., Xiang Y., Kitipornchai S. Navier's solution for laminated plate buckling with prebuckling in plane deformation // Int. J. Solids and Struct. - 1996. - Vol. 33. - № 13. - PP. 1921-1937.
269. Lindgaard E., Lund E., Rasmussen K. Nonlinear buckling optimization of composite structures considering «worst» shape imperfections // Int. J. Solids and Struct. – 2010. - Vol. 47. - PP. 3186-3202.
270. Liu S., Soldatos K.P. Further assessment of a generalized plate model: stress analysis of angle-ply laminates // Int. J. Solids and Struct. - 2003. - Vol. 40. - № 16. - PP. 4125-4133.

271. Lopatin A.V., Morozov E.V., Shanov A.V. Buckling of uniaxially compressed anisogrid lattice plate with clamped edges // *Composite Structures*. - 2016. – Vol. 157. - PP. 187-196.
272. Loredo A. , Castel A. A multilayer anisotropic plate model with warping functions for the study of vibrations reformulated from Woodcock's work // *J. Sound and Vibr.* – 2013. - Vol. 332. - PP. 102-125.
273. Lu P. A Stroh-type formalism for anisotropic thin plates with bending-extension coupling // *Arch. Appl. Mech.* – 2004. - Vol. 73. - № 9-10. - PP. 690-710.
274. Makeev A., Armanios E.A., Hooke D. Influence of curing stresses on extension-twist coupling in laminated composite strips // *AIAA Journal*. – 1998. - Vol. 36. - № 9. - PP. 1717-1720.
275. Maksimenko V.N. Updating of optimum designing method of flat composite panels // *Proceeding KORUS 2003. The 7th Korea-Russia International Symposium. Science and Technology*. – 2003. – Vol. 1. – PP. 382-385.
276. Manne P.M., Tsai S.W. Design optimization of composite plates. Part 1. Design criteria for strength, stiffness, and manufacturing complexity of composite laminates // *J. Compos. Mater.* - 1998. - Vol. 32. – № 6. - PP.544-571.
277. Matsunaga Hiroyuki. Thermal buckling of cross-ply laminated composite and sandwich plates according to a global higher -order deformation theory // *Compos. Struct.* - 2005. - Vol. 68. - № 4. - PP.439-454.
278. Mikhasev G. I., Altenbach H. Introduction // *Advanced Structured Materials*. - 2019. – Vol. 106. - PP. 1-28.
279. Mittelstedt C., Becker W. Three-dimensional closed-form analysis of the stress field at rectangular corners of layered plates // *Arch. Appl. Mech.* – 2003. - Vol. 73. - № 1-2. - PP. 63-74.
280. Mittelstedt C., Schroder K.U. Local postbuckling of hat-stringer stiffened composite laminated plates under transverse compression // *Compos. Struct.* – 2010. - Vol. 92. - PP. 2830-2844.
281. Moh Jau-Sung, Hwu Chyanbin. Optimization for buckling of composite sandwich plates // *AIAA Journal*. – 1997. - Vol. 35. - № 5. - PP. 863-868.

282. Motygin O.V., Nazarov S.A. Justification of the Kirchhoff hypotheses and error estimation for two-dimensional models of anisotropic and inhomogeneous plates, including laminated plates. // *IMA J. Appl.* - 2000. - Vol. 65. - № 1. - PP. 1-28.
283. Naik N.S., Sayyad A.S. An accurate computational model for thermal analysis of laminated composite and sandwich plates. // *Journal of Thermal Stresses.* – 2019. – Vol. 42 - № 5. - PP. 559-579.
284. Nath S.K.D., Afsar A.M. Analysis of the effect of fiber orientation on the elastic field in a stiffened orthotropic panel under uniform tension using displacement potential approach // *Mech. Adv. Mater. and Struct.* – 2009. – Vol. 16. – PP. 300-307.
285. Nath Y., Shukla K.K. Post-buckling of angle-ply laminated plates under thermal loading // *Commun. Nonlinear Sci. and Numer. Simul.* - 2001. - Vol. 6. - № 1. - PP. 1-16.
286. Nguyen T.N., Thai C.H., Nguyen-Xuan H. On the general framework of high order shear deformation theories for laminated composite plate structures: A novel unified approach // *International Journal of Mechanical Sciences.* – 2016. – Vol. 110. - PP. 242-255.
287. Nikbakt S., Kamarian S., Shakeri M. A review on optimization of composite structures. part I: Laminated composites // *Composite Structures.* – 2018. – Vol. 195. - PP. 158-185.
288. Ni Qing- Qing, Kataoka Shoichi. Shear buckling analysis on laminated composite plates with out-of-plane shear deformation // *Nihonikai gakkai ronbunshu. A 618.* – 1998. - Vol. 64. – PP. 522-528.
289. Noda Naotake, Kimura Shinya. Термическая деформация пьезотермоупругих композитных пластин: антисимметрично слоистые косоармированные композитные материалы // *Nihonikai gakkai ronbunshu. A 634.* – 1999. - Vol. 65. – PP. 204-210.
290. Ootao Yoshihiro, Kawamura Ryuusuke, Tanigawa Yoshinobu, Imamura Ryuutarou. Optimization of material composition of non-homogeneous plate for

thermal stress relaxation making use of neural network: Analysis taking into account the relative heat transfer at boundary surfaces when subjected to unsteady heat supply // *Nihon kikai gakkai ronbunshu. A* 623. – 1998. - Vol. 64. – PP. 1866-1874.

291. Ootao Yoshihiro, Tanigawa Yoshinobu. Three-dimensional transient thermal stresses of a cross-ply laminated rectangular plate due to partial heating // *Nihon kikai gakkai ronbunshu. A* 623. – 1998. - Vol. 64. – PP. 1857-1865.
292. Pagani A., Valvano S., Carrera E. Analysis of laminated composites and sandwich structures by variable-kinematic MITC9 plate elements // *Journal of Sandwich Structures and Materials*. – 2018. – Vol. 20. - № 1. - PP. 4-41.
293. Panasenko G. Boundary conditions for the high order homogenized equation: laminated rods, plates and composites // *C. r. Mer.* - 2009. - Vol. 337. – № 1. - PP. 8-14.
294. Pandey R., Shukla K.K., Jain A. Thermoelastic stability analysis of laminated composite plates: an analytical approach // *Commun. Nonlinear Sci. and Numer. Simul.* - 2009. - Vol. 14. - № 4. - PP. 1679-1699.
295. Park C.H. Simultaneous optimization of composite structure considering mechanical performance and manufacturing cost // *Composite Structure*. – 2004. – Vol. 65. – PP. 117-127.
296. Park Jin Woo, Kim Yong Hyup. Predictor-corrector procedure for displacements, stresses and their sensitivity coefficients in composite panels // *J. Compos. Mater.* - 1999. - Vol. 33. - № 13. - PP. 1222-1243.
297. Park Oung, Haftka R.T., Sakar B.V., Starnes J.H., Nagendra S. Analytical-experimental correlation for a stiffened composite panel loader in axial compression // *J. Aircraft*. – 2001. - Vol. 38. - № 2. - PP. 379-387.
298. Pedersen N. Topology optimization of laminated plates with pre-stress // *Comput. and Struct.* -2002. - Vol. 80. - № 7-8. - PP. 559-570.
299. Peng B., Goodsell J., Pipes R.B., Pipes R.B., Yu W. Generalized Free-Edge Stress Analysis Using Mechanics of Structure Genome // *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*. -2016. – Vol. 83. - № 10.

300. Peng B., Goodsell J., Pipes R.B., Pipes R.B., Yu W. Generalized Free-Edge Stress Analysis Using Mechanics of Structure Genome // Proceedings of the American Society for Composite – 31st Technical Conference, ASC. - 2016.
301. Petrolo M., Cinefra M., Lamberti A., Carrera E. Evaluation of mixed theories for laminated plates through the axiomatic/asymptotic method // Composites Part B: Engineering. - 2015. – Vol. 76. - PP. 260-272.
302. Petrolo M. Lamberti A. Axiomatic/asymptotic analysis of refined layer-wise theories for composite and sandwich plates // Mech. Adv. Mater. and Struct. – 2016. - Vol. 23. – PP. 28-42.
303. Petrolo M., Lamberti A., Miglioretti F. Best theory diagram for metallic and laminated composite plates // Mechanics of Advanced Materials and Structures. - 2016. – Vol. 23. - № 9. - PP. 1114-1131.
304. Qi Yunqian, Knight N.F. A refined first-order shear-deformation theory and its justification by plane-strain bending problem of laminated plates // Int. J. Solids and Struct. - 1996. - Vol. 33. - № 1. - PP. 49-64.
305. Ragb O., Matbuly M.S. Buckling analysis of composite plates using moving least squares differential quadrature method // International Journal of Computational Methods in Engineering Science and Mechanics. – 2017. – Vol. 18. - № 6. - PP. 292-301.
306. Raghuram P. V., Krishna M.A.V. A high precision coupled bending-extension triangular finite elements for laminated plates // Compos. and Struct. – 1999. - Vol. 72. - № 6. - PP. 763-777.
307. Ramaswamy S., Rajadurai J.S., Moshi A.A.M. Comparative analysis on classical laminated plate theory and higher order lamination plate theory for cross-ply FRP composite structures // Journal of Computational and Theoretical Nanoscience. -2017. – Vol. 14. - № 11. - PP. 5444-5449.
308. Reddy K.J. Flexure of laminated composite plates. New refined lamination-dependent shear deformation models // J. Indian Inst. Sci. -1995. - Vol. 75. - № 2. - PP. 209-211.

309. Robbins D.H., Reddy J.N. Variable kinematic modelling of laminated composite plates // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* - 1996. - Vol. 39. - № 13. - PP. 2283-2317.
310. Rohwer K, Rolfes R. Calculating 3D stresses in layered composite plates and shells // *Мех. композит. матер.* -1998. - Vol. 34. - № 4. - PP. 491-500.
311. Rolfes R., Tacke S., Zimmermann R. Development and experimental verification of FE-model for stringer-stiffened fibre composite panels under combined thermal and mechanical loading conditions // *Proc. Eur. Conf. Spacecraft Struct., Mater. and Mech. Test.*, 4-6 Nov. 1999. – Braunschweig. - 1999. - PP. 109-115.
312. Rouse M., Assadi M. Evolutional of scaling approach for stiffened composite flat panels loaded in compression // *J. Aircraft.* -2001. - Vol. 38. - № 5. - PP. 950-955.
313. Sanchez M.L., De Almeida S.F.M., Carrillo J. Evaluation of the effect of thermal residual stress on buckling and post-buckling of composite plates with lateral reinforcement // *Revista Latinoamericana de Metalurgia y Materiales.* – 2017. – Vol. 37. - № 1. - PP. 45-49.
314. Santos C., Plaisted T., Arbelaez D., Nemat-Nasser S. Modeling and testing of temperature behavior and resistive heating in a multi-functional composite // *Proc. SPIE.* - 2004. - Vol. 5387. – PP. 24-26.
315. Sato Masaki, Fukunaga Hisao, Sekine Hideki. Simplified evaluation of fundamental natural frequencies or compressive buckling loads for symmetrically laminated plates with bending-twisting coupling // *Nihon kikai gakkai ronbunshu. A.* 605. – 1997. - Vol. 63. - PP. 110-116.
316. Sayyad A.S., Ghugal Y.M., Mhaske B.A. A four-variable plate theory for thermoelastic bending analysis of laminated composite plates // *Journal of Thermal Stresses.* -2015. – Vol. 38. - № 8. - PP. 904-925.
317. Sce K.Y., Chen Ronggeng, Cheung Y.K. Finite element model with continuous transverse shear stress for composite laminates in cylindrical bending // *Finite Elem. Anal. and Des.* -1998. - Vol. 31. - № 2. - PP. 153-164.

318. Setoodeh A.R., Karami G. A solution for the vibration and buckling of composite laminates with elastically restrained edges // *Compos. Struct.* - 2003. - Vol. 60. - № 3. - PP. 245-253.
319. Shahravi M., Fallahzade S., Mokhtari M. An analytical approach to thermoelastic bending of simply supported advanced ribbed composite plates // *Mechanics of Advanced Composite Structures.* – 2018. – Vol. 5. - № 2. - PP. 173-186.
320. Shen Hui-Shen. Postbuckling of shear deformable laminated plates with piezoelectric actuators under complex loading conditions // *Int. J. Solid and Struct.* - 2001. –Vol. 44-45. - PP. 7703-7721.
321. Shu Xiao-Ping, Soldatos K.P. Cylindrical bending of angle-ply laminates subjected to different sets of edge boundary conditions // *Int. J. Solid and Struct.* - 2000. - Vol. 37. - № 1. - PP. 4289-4307.
322. Shukla K.K., Nath Y. Analytical solution for buckling and post-buckling of angle-ply laminated plates under thermo-mechanical loading // *Int. J. Non-Linear Mech.* - 2001. - Vol. 36. - № 7. - PP. 1097-1108.
323. Shukla K.K., Nath Y. Buckling of laminated composite rectangular plates under transient thermal loading // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* - 2002. - Vol. 69. - № 5. - PP. 684-692.
324. Simion F.P., Decolon C., Alecu A., Bayer M. Plaque multicouche orthotrope en sollicitations de flexion // *Sci. Bull. D N 1-2.* – 1999. - Vol. 61. - PP. 59-68.
325. Singha M.K., Ramachandra L.S., Bandyopadhyay J.N. Optimum design of laminated composite plates for maximum thermal buckling loads // *J. Compos. Mater.* – 2000. – Vol. 34. - № 23. – PP. 1982-1997.
326. Soldatos K.P., Watson P. Accurate stress analysis of laminated plates combining a two-dimensional theory with exact three-dimensional solution for simply supported edges // *Math. and Mech. Solids.* – 1997. - Vol. 2. – № 4. - PP. 459-489.
327. Sutyryn V.G., Holdes D.H. On asymptotically correct linear laminated plate theory // *Int. J. Solid and Struct.* - 1996. - Vol. 33. - № 25. - PP. 3649-3671.

328. Tabakov P., Verijenko V., Verijenko B. Refined theory for the analysis of laminated orthotropic structures // *Compos. Struct.* - 2003. - Vol. 62. - № 3-4. - PP. 435-441.
329. Tarn Jiann-Quo, Wang Yi-Bin, Wang Yung-Ming. Three-dimensional asymptotic finite element method for anisotropic inhomogeneous and laminated plates // *Int. J. Solid and Struct.* - 1996. - Vol. 33. - № 13. - PP. 1939-1960.
330. Tenek L.T. Postbuckling of thermally stressed composite plates // *AIAA Journal.* - 2001. - Vol. 39. - № 3. - PP. 546-548.
331. Thankam V.S., Singh G., Rao G.V., Rath A.K. Thermal post-buckling behavior of laminated plates using a shear-flexible element based on coupled-displacement field // *Compos. Struct.* - 2003. - Vol. 59. - № 3. - PP. 351-359.
332. Thai H.T., Kim S.E. A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells // *Composite Structures.* -2015. – Vol. 128. - PP. 70.
333. Thomson R.S., Scott M.L. Testing and analysis of thin stiffened composite panel // 2-nd Pacif. Int. Conf. Aerospace Sci. and Technol. and 6-th Austral. Aeronaut. Conf. (PICAST – AAC), 20-23 March 1995. – Melbourne. - 1995. - Vol. 2. – PP. 655-662.
334. Tran L.V., Kim S.E. Static and free vibration analyses of multilayered plates by a higher-order shear and normal deformation theory and isogeometric analysis // *Thin-Walled Structures.* - 2018. – Vol. 130. - PP. 622-640.
335. Tran L.V., Thai C.H., Le H.T., Lee J., Nguyen-Xuan H. Isogeometric analysis of laminated composite plates based on a four-variable refined plate theory // *Engineering Analysis with Boundary Elements.* - 2014. – Vol. 47. - № 1. - PP. 68-81.
336. Tran L.V., Wahab M.A., Kim S.E. An isogeometric finite element approach for thermal bending and buckling analyses of laminated composite plates // *Composite Structures.* - 2017. – Vol. 179. - PP. 35-39.

337. Tsai T.C., Chen C.S., Fung C. P., Chang Y. C. Thermally Induced Vibration and Stability of Initially Stressed Hybrid Composite Plates // *Mechanics of Composite Materials*. - 2014. – Vol. 50. - № 5. - PP. 579-592.
338. Tseng Yi-Ping, Jiang Yu-Ching. Stress analysis of bimodulus laminates using hybrid stress plate elements // *Int. J. Solids and Struct.* - 1998. - Vol. 35. - № 17. - PP. 2025-2038.
339. Tuttle M., Singhatanadgid P., Hinds G. Buckling of composite panels subjected to biaxial loading // *Exp. Mech.* - 1999. - Vol. 39. - № 3. - PP. 191-201.
340. Ugrimov S.V. Generalized theory of multilayer plates // *Int. J. Solids and Struct.* - 2002. -Vol. 39. - № 4. - PP. 819-839.
341. Ungbyfkorn V., Singhatanagdid P. Similitude invariants and scaling laws for buckling experiments on anti-symmetrically laminated plates subjected to biaxial loading // *Compos. Struct.* - 2003. - Vol. 59. - № 4. - PP. 455-465.
342. Vasiliev V., Morozov E.V. *Advanced mechanics of composite materials* // UK: Oxford. – 2007.
343. Vescovini R., Dozio L. Exact refined buckling solutions for laminated plates under uniaxial and biaxial loads // *Compos. Struct.* – 2015. - Vol. 127. - PP. 356-368.
344. Vosoughi A.R., Darabi A., Anjabin N., Topal U. A mixed finite element and improved genetic algorithm method for maximizing buckling load of stiffened laminated plates // *Aerospace and Technology*. - 2017. – Vol. 70. - PP. 378-387.
345. Voyiadjis G.Z., Kattan P.I. *Mechanics of Composite Materials with MATLAB* // Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. – 2005. – 336 pp.
346. Vuksanovic D., Cetrovic M. Analytical solution for multilayer plates using general layerwise plate theory // *Facta Univ. Archit. and Civ. Eng.* - 2005. - Vol. 3. - № 2. - PP. 121-136.
347. Walker M. The effect of stiffeners on the optimal ply orientation and buckling load of rectangular laminated plates // *Comput. and Struct.* - 2002. - Vol. 80. - № 27-30. - PP. 2229-2239.

348. Wang G.D., Wang J., Hossain S.K.M., Chen H. Research on design rules for composite laminate // *Science and Engineering of Composite Materials*. - 2015. – Vol. 22. - № 3. - PP. 315-323.
349. Wicks N., Hutchinson J.W. Optimal truss plates // *Int. J. Solid and Struct.* - 2001. - Vol. 38. - № 30-31. - PP. 5165-5183.
350. Wu Zhen, Chen Wanji. A quadrilateral element based on refined global-local higher-order theory for coupling bending and extension thermo-elastic multilayered plates // *Int. J. Solids and Struct.* – 2007. - Vol. 44. – № 10. - PP. 3187-3217.
351. Xu Y., Tong Y., Liu M., Suman B. A new effective smeared stiffener method for global buckling analysis of grid stiffened // *Composite Structures*. - 2016. – Vol. 158. - PP. 83-91.
352. Yarasca J., Mantari J.L., Petrolo M., Carrera E. Best Theory Diagrams for cross-ply composite plates using polynomial, trigonometric and exponential thickness expansions // *Composite Structures*. - 2017. – Vol. 161. - PP. 362-383.
353. Yarasca J., Mantari J.L., Petrolo M., Carrera E. Multiobjective Best Theory Diagrams cross-ply composite plates employing polynomial, zig-zag, trigonometric and exponential thickness expansions // *Composite Structures*. - 2017. – Vol. 176. - C.860-876.
354. Yeter E., Erklig A., Bulut M.. Hybridization effects on the buckling behavior of laminated composite plates // *Compos. Struct.* – 2014. - Vol. 118. - PP. 19-27.
355. Yin W. L. General solutions of anisotropic laminated plates // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 2003. - Vol. 70. - № 4. - PP. 496-504.
356. York C.B., de Almeida S.F.M. On Extension Shearing Bending Twisting coupled laminates // *Composite Structures*. - 2017. – Vol. 164. - PP. 10-22.
357. Yshii L.N., Lucena N.E., Monteiro F.A.C., Santana R.C. Accuracy of the buckling predictions of anisotropic plates // *Journal of Engineering Mechanics*. - 2018. – Vol. 144. - № 8.

358. Zakharov D.D. Boundary integral equations for thin asymmetric anisotropic laminates with corner points and corner forces // *C. r. Acad. Sci. Ser. 2. Fasc. B* 6. – 1999. - Vol. 327. - PP. 567-572.
359. Zarei A., Khosravifard A. A meshfree method for static and buckling analysis of shear deformable composite laminates considering continuity of interlaminar transverse shearing stresses // *Composite Structures*. – 2019. - PP. 206-218.
360. Zenkour A.M., Fares M.E. Bending, buckling and free vibration of non-homogeneous composite laminated cylindrical shells using a refined first-order theory // *Compos. A* 3. – 2001. - Vol. 32. - PP. 237-247.
361. Zhang Chengzong. General analytic solutions for the static response of general ply composite rectangular plate using first-order shear deformation theory // *Chuanbo lixue*. -1999. - Vol. 3. – № 2. - PP. 31-43.
362. Zhao W., Xie Z., Wang X., Li X., Hao J. Buckling behavior of stiffened composite panels with variable thickness skin under compression // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. - 2019.
363. Zhen W., Li T. C0-type global-local higher-order theory including transverse normal thermal strain for laminated composite plates under thermal loading // *Composite Structures*. - 2013. – Vol. 101. - PP. 157-167.
364. Zou Guiping. Гамильтонова система и симплектические геометрические алгоритмы для сдвигового деформирования косоармированных слоистых пластин. // *Yingyong lixue xuebao*. - 1999. - Vol. 16. - № 1. - PP. 149-153, XI.

ПРИЛОЖЕНИЕ.

АКТЫ ВНЕДРЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

«УТВЕРЖДАЮ»

Первый заместитель управляющего
директора – директор ОКБ СухогоМ.Ю. Стрелец
2021

АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы Гавва Любови Михайловны на тему: «Методы анализа статической прочности и устойчивости конструктивно-анизотропных панелей летательных аппаратов из композиционных материалов на основе уточненной теории с учетом технологии изготовления»

Мы, нижеподписавшиеся заместитель директора ОКБ Сухого – директор по проектированию Савельевских Е.П., заместитель директора по проектированию Стрелец Д.Ю., главный конструктор по прочности – начальник НИО-6 Шкода А.В. составили настоящий акт о том, что результаты диссертационной работы Гавва Любови Михайловны на тему: «Методы анализа статической прочности и устойчивости конструктивно-анизотропных панелей летательных аппаратов из композиционных материалов на основе уточненной теории с учетом технологии изготовления» внедрены в ОКБ Сухого и использованы в исследовательских работах по перспективным направлениям развития самолетостроения.

Материалы, вошедшие в диссертацию Гавва Л.М., а именно:

- математическое моделирование типовой панели планера из композиционных материалов в рамках уточненной теории;
- методы математического моделирования, методология и результаты прочностного расчета;
- методы математического моделирования, методология и результаты расчета на устойчивость

были использованы при проведении работ по анализу поведения композиционной панели крыла самолета Су-57 и перспективного БЛА.

Внедрение результатов работы Гавва Л.М. позволяет повысить эффективность опытно-конструкторских работ путем введения дополнительных факторов при проектировании, повышения точности моделирования, применения уточненных ограничений по прочности и устойчивости в различных алгоритмах оптимизации. В результате сокращаются сроки проведения работ, и повышается обоснованность принимаемых технических решений.

Заместитель директора ОКБ Сухого –
директор по проектированию



Е.П. Савельевских

Заместитель директора
по проектированию



Д.Ю. Стрелец

Главный конструктор по прочности –
начальник НИО-6



А.В. Шкода

«УТВЕРЖДАЮ»



Проректор по учебной работе

Козорез Д.А.

2021 г.

АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы Гавва Любови Михайловны на тему:
 «Методы анализа статической прочности и устойчивости
 конструктивно-анизотропных панелей летательных аппаратов
 из композиционных материалов
 на основе уточнённой теории с учётом технологии изготовления»

в учебный процесс федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» МАИ(НИУ)

Настоящим актом подтверждается **использование результатов исследований**, полученных и изложенных в диссертации научного сотрудника кафедры 101 «Проектирование и сертификация авиационной техники» Московского авиационного института (национального исследовательского университета) Гавва Любови Михайловны «Методы анализа статической прочности и устойчивости конструктивно-анизотропных панелей летательных аппаратов из композиционных материалов на основе уточнённой теории с учётом технологии изготовления», представленной на соискание учёной степени доктора технических наук по специальности 05.07.03 – «Прочность и тепловые режимы летательных аппаратов», **при реализации основных образовательных программ высшего образования:**

- магистратуры по направлению подготовки 24.04.04 - Авиастроение, профиль подготовки – Проектирование агрегатов из полимерных композиционных материалов.

Результаты диссертационной работы имеют научное и практическое значение, используются в учебном процессе при руководстве диссертациями магистрантов.

Директор Дирекции Института № 1
 «Авиационная техника»,
 д. т. н., доцент

О.С. Долгов

Зам. заведующего кафедрой 101
 «Проектирование и сертификация авиационной техники»
 по учебной работе

Д.С. Шавёлкин.

«УТВЕРЖДАЮ»



Проректор по учебной работе

Козорез Д.А.

09 _____ 2021 г.

АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы Гавва Любови Михайловны на тему:
«Методы анализа статической прочности и устойчивости конструктивно-анизотропных панелей летательных аппаратов из композиционных материалов на основе уточнённой теории с учётом технологии изготовления»

в учебный процесс федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» МАИ(НИУ)

Настоящим актом подтверждается **использование результатов исследований**, полученных и изложенных в диссертации доцента кафедры 914 «Проектирование сложных технических систем» Московского авиационного института (национального исследовательского университета) Гавва Любови Михайловны «Методы анализа статической прочности и устойчивости конструктивно-анизотропных панелей летательных аппаратов из композиционных материалов на основе уточнённой теории с учётом технологии изготовления», представленной на соискание учёной степени доктора технических наук по специальности 05.07.03 – «Прочность и тепловые режимы летательных аппаратов», **при реализации основных образовательных программ высшего образования:**

- бакалавриата по направлению подготовки 15.03.03 - Прикладная механика, профиль подготовки – Динамика, прочность машин и конструкций.

Результаты диссертационной работы имеют научное и практическое значение, применяются при реализации учебной программы дисциплины «Основы прочности конструкций». Результаты исследований используются в учебном процессе в курсе лекций «Основы прочности конструкций», при руководстве курсовыми проектами.

Директор Дирекции Института № 9
«Общеинженерной подготовки»,
д.ф.-м.н., профессор

Л.Н. Рабинский

Д. т. н., профессор кафедры № 914
«Проектирование сложных технических систем»

В.В. Фирсанов

Д. т. н., профессор кафедры № 914
«Проектирование сложных технических систем»

Л.И. Миронова