

УДК: 517.91

## Исследование устойчивости автономных нелинейных динамических систем

А.Н.Катулев, А.Ю.Кузнецов

### Аннотация

Излагается новый метод выявления устойчивости, неустойчивости нелинейных автономных динамических систем без введения функции Ляпунова. Достоверность метода доказана теоретически и подтверждена результатами исследования устойчивости конкретных нелинейных автономных систем второго и пятого порядков.

### Ключевые слова

устойчивость; нелинейность; автономные динамические системы.

К настоящему времени исследование устойчивости решений нелинейных систем дифференциальных уравнений строится на основе введения и анализа свойств функции Ляпунова. Однако общего алгоритма ее построения не имеется [1, гл. II, §2], поэтому существует актуальная необходимость исследования устойчивости решений таких систем без введения функции Ляпунова и, естественно, без получения самого решения.

Цель статьи - разработка метода исследования устойчивости нелинейных автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго и более высокого порядков без применения функций Ляпунова.

### 1. Основы метода.

Метод основан на следующих утверждениях.

**Утверждение 1.** Для любой нелинейной автономной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x) \tag{1},$$

где  $x \in E^n$  - вектор фазовых координат,  $f(x)$  - нелинейная гладкая вектор - функция, удовлетворяющая условию Липшица, существует сопряженная система автономных линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\dot{p} = -\partial H(p(t), x(t)) / \partial x, \quad (2)$$

где  $p(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$  - вектор сопряженных фазовых координат,  $H(p, x) = (p^T(t), f(x))$  - функция Гамильтона. При этом, если якобиан системы (1)

$$J(x) = \partial f_j(x) / \partial x_i > 0, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

то ее решение устойчиво тогда и только тогда, когда решение сопряженной системы (2) неустойчиво.

**Доказательство.** Существование линейной однородной системы (2) для системы (1) непосредственно исходит [2, гл.IV, §4.4] из канонической гамильтоновой системы

$$\dot{p} = -\partial H(p(t), f(t)) / \partial x.$$

Утверждение об устойчивости системы (1) и неустойчивости системы (2) есть результат применения формулы Серре-Френе [3, гл.3, §50] оценки кривизн решений этих систем: их кривизны противоположны по знаку, движения по фазовым траекториям происходят в сопряженных пространствах, поэтому при сходимости решения системы (1) имеет место расходимость решения системы (2).

**Утверждение 2.** Для сопряженной к (1) линейной однородной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{p} = -\partial H(p(t), f(t)) / \partial x \quad (3)$$

с функциональной матрицей  $(-\partial f_i(x) / \partial x_k)_{i,k=1,\dots,n}$  собственные значения  $\lambda(x(t))$  представляются функциями фазовых координат  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , а ее решение  $p(t)$  устойчиво асимптотически тогда и только тогда, когда все собственные значения  $\lambda(x(t))$  отрицательно определены и не приближаются к нулю при возрастании временной координаты, неустойчиво тогда и только тогда, когда собственные значения  $\lambda(x(t))$  положительно определены и не приближаются к нулю при возрастании временной координаты.

**Доказательство.** Так как система (3) автономная линейная и однородная, то закон изменения неизвестных функций не меняется с течением времени. Это означает, что на любой момент  $t$  собственные значения представимы функциями  $\lambda(x(t))$ , зависящими от элементов функциональной матрицы  $(-\partial f_i(x) / \partial x_k)_{i,k=1,\dots,n}$ , и должны удовлетворять характеристическому уравнению

$$\left| (-\partial f_i(x) / \partial x_k)_{i,k=1,\dots,n} - \lambda(x)E \right| = 0.$$

Действительно, если решение уравнения (3) принять в виде

$$p(t) = \exp\left(\int_0^t \lambda(x(\tau)) d\tau\right),$$

то (3) преобразуется к виду

$$\lambda(x(t)) \exp\left(\int_0^t \lambda(x(\tau)) d\tau\right) = (-\partial f_i(x) / \partial x_k)_{i,k=1,\dots,n} \exp\left(\int_0^t \lambda(x(\tau)) d\tau\right),$$

откуда имеем характеристическое уравнение. Но тогда, очевидно исследование устойчивости решения системы (2), а, значит, и нелинейной системы (1), как сопряженной с (2), можно осуществлять по критерию Раусса-Гурвица или Льенара-Шипара, то есть без введения функции Ляпунова.

Отметим также, что при равенстве нулю хотя бы одного из собственных значений системы (2) (коэффициент при старшей степени векового уравнения всегда не равен нулю), фазовые траектории могут представлять собой замкнутые кривые и устойчивость будет определяться одновременно для систем (1) и (2). Утверждение 2 доказано.

**Утверждение 3.** Для локализации критических точек – точек бифуркации решения нелинейной автономной системы достаточно установить точки разрыва в фазовом пространстве собственных значений, взятых с обратным знаком, функциональной матрицы линейной сопряженной системы в зависимости от управляющих параметров исследуемой автономной системы.

**Доказательство.** Пусть задана нелинейная автономная система

$$\dot{x}_i(t) = f(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

$n$ -го порядка с гладкими правыми частями и ее якобиан

$$J(f) = \left( \frac{\partial f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,n}} > 0.$$

Составим для заданной системы сопряженную систему

$$\dot{p}_i(t) = -\sum_{j=1}^n p_j(t) \frac{\partial f_j(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

и соответствующее этой системе характеристическое уравнение

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial f_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} - \lambda & -\frac{\partial f_2(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & -\frac{\partial f_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial f_2(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & -\frac{\partial f_2(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_2} - \lambda & -\frac{\partial f_2(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ -\frac{\partial f_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & -\frac{\partial f_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_2} & -\frac{\partial f_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Видно, что функциональная матрица сопряженной системы является транспонированной и имеет обратный знак по отношению к матрице-якобиану заданной системы. Но это означает, что собственные значения матрицы сопряженной системы и матрицы-якобиана равны и противоположны по знаку, или, иначе, это означает, что если для сопряженной системы выполняется критерий Рауса-Гурвица, то решение заданной нелинейной автономной системы неустойчиво и наоборот. Поэтому для локализации критических точек решения заданной системы становится достаточным исследование собственных значений функциональной матрицы сопряженной системы. Доказательство завершено.

## 2. Применение утверждений 1 и 2 для исследования устойчивости решений нелинейных автономных динамических систем.

### 2.1. Имеется нелинейная система

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + x^3, \quad (4)$$

Проверим, является ли его решение устойчивым, для этого введем сопряженную гамильтонову систему

$$\dot{p}_1 = p_2 - 3x^2 p_2, \quad \dot{p}_2 = -p_1, \quad (5)$$

И запишем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 1 - 3x^2 = 0.$$

Корни этого уравнения могут быть различными:

- не кратными вещественными с разными знаками когда  $1 < 3x^2$ ;
- комплексно сопряженными с нулевыми вещественными частями когда  $1 > 3x^2$ ;
- кратными нулевыми когда  $1 = 3x^2$ .

Составим главные диагональные миноры Рауса-Гурвица

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0.$$

Из них однозначно не следует вывод об устойчивости или неустойчивости решения сопряженной системы, а значит – и основной нелинейной системы. Для устойчивости решения основной системы необходимо выполнение условия  $1 > 3x^2$ ; при этом будет иметь место изолированная замкнутая траектория – движение основной системы периодическое, орбиталь-

но- устойчивое, что полностью согласуется с установленными в [4, с.349] результатами.

**2.2.** Исследуем на устойчивость решение нелинейной динамической системы, описываемой системой уравнений Ван-дер-Поля

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \varepsilon(1 - ax^2)y - \beta^2 x \quad (6)$$

с малым параметром  $\varepsilon > 0$ . Для этого построим сопряженную систему

$$\dot{p}_1 = p_2(\beta^2 + 2\varepsilon axy), \quad \dot{p}_2 = -p_1 - \varepsilon(1 - ax^2)p_2,$$

составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \varepsilon(1 - ax^2)\lambda + \beta^2 + 2\varepsilon axy = 0$$

и выпишем главные диагональные миноры Гурвица

$$\Delta_0 = 1,$$

$$\Delta_1 = \varepsilon(1 - ax^2),$$

$$\Delta_2 = \varepsilon(1 - ax^2)(\beta^2 + 2\varepsilon axy),$$

сформируем условия устойчивости решения (6) с учетом требования положительности якобиана  $J = 2\varepsilon ax + \beta^2$  системы (6)

$$\varepsilon(1 - ax^2) < 0, \quad (7)$$

$$\varepsilon(1 - ax^2)(\beta^2 + 2\varepsilon axy) < 0 \Rightarrow \beta^2 + 2\varepsilon axy > 0, \quad (8)$$

при выполнении условий (7), (8) решение сопряженной системы будет устойчиво, а решение основной – неустойчиво. Такие условия полностью согласуются с условиями, полученными в [4].

Проверим, выполняется ли для (6) критерий Бендиксона, то есть является ли знакоопределенной функция

$$\frac{\partial X(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Y(x, y)}{\partial y}. \quad (9)$$

где  $X(x, y) = y$ ,  $Y(x, y) = -\beta^2 x + \varepsilon(1 - ax^2)y$  - правые части системы (6). Непосредственно устанавливается, что функция (9) имеет вид

$$\varepsilon(1 - ax^2)$$

и она определена отрицательно при  $1 < ax^2$  и положительно при  $1 > ax^2$ , то есть не является знакоопределенной. Значит, решение системы Ван-дер-Поля может иметь предельный цикл.

Условия (7) и (8) является необходимым и достаточным для существования функции Ляпунова, производная которой  $\dot{E}(x, y) = \varepsilon y f(x, y) < 0$  [5, гл.2, §12], т.е. полученные условия устойчивости решения (6) охватывают накладываемые в [5, гл.2, §12] условия на прираще-

ние функции Ляпунова.

**2.3.** Выясним – устойчиво ли решение нелинейной системы

$$\dot{x} = -ay + x^3, \quad \dot{y} = bx + y^3, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Составим для этого сопряженную систему

$$\dot{p}_1 = -3x^2 p_1 - bp_2, \quad \dot{p}_2 = ap_1 - 3y^2 p_2.$$

выпишем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + (3x^2 + 3y^2)\lambda + ab = 0.$$

и запишем главные диагональные миноры Гурвица

$$\Delta_0 = 1,$$

$$\Delta_1 = 3x^2 + 3y^2,$$

$$\Delta_2 = ab(3x^2 + 3y^2).$$

Из последних следует, что решение сопряженной системы будет всегда устойчиво, а решение основной – неустойчиво.

При этом отметим, что якобианы основной и сопряженной систем записываются соответственно в виде

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} 3x^2 & -a \\ b & 3y^2 \end{vmatrix} = ab + 9x^2 y^2,$$

$$J^*(p_1, p_2) = \begin{vmatrix} -3x^2 & -b \\ a & -3y^2 \end{vmatrix} = ab + 9x^2 y^2.$$

Из результатов вычисления якобианов следует, что имеют место особые точки положений равновесия решений систем в фазовых пространствах  $E^2$  и  $E^{2*}$  соответственно, в которых траектории движения могут быть найдены в виде целых функций.

### 3. Применение утверждения 3.

Применим утверждение 3 для выявления критических точек решения системы нелинейных аэродинамических уравнений [6, гл.12]

$$\dot{x}_1 = \sum_j F_1^j C_j + \sum_{j=1}^5 F_1^j x_j, \quad \dot{x}_i = \sum_j F_i^j C_j + \sum_{j=1}^5 F_i^j x_j + F_i^{km} x_k x_m, \quad k \neq m \neq i, i = 2..3,$$

$$\dot{x}_i = \sum_j F_i^j C_j + \sum_{j=1}^5 F_i^j x_j, \quad i = 4..5, \quad (10)$$

где  $F_i^j = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ .

Построим для (10) сопряженную систему

$$\begin{aligned}
\dot{p}_1 &= p_1 F_1^1 + p_2 (F_2^{31} + x_3 F_2^1) + p_3 (F_3^{12} x_2 + F_3^1) + p_4 F_4^1 + p_5 F_5^1, \\
\dot{p}_2 &= p_1 F_1^2 + p_2 F_2^2 + p_3 (F_3^{12} x_1 + F_3^2) + p_4 F_4^2 + p_5 F_5^2, \\
\dot{p}_3 &= p_1 F_1^3 + p_2 (F_2^{31} x_1 + F_2^3) + p_3 F_3^3 + p_4 F_4^3 + p_5 F_5^3, \\
\dot{p}_4 &= p_1 F_1^4 + p_2 F_2^4 + p_3 F_3^4 + p_4 F_4^4 + p_5 F_5^4, \\
\dot{p}_5 &= p_1 F_1^5 + p_2 F_2^5 + p_3 F_3^5 + p_4 F_4^5 + p_5 F_5^5.
\end{aligned} \tag{11}$$

Для анализа устойчивости системы (10) необходимо исследовать зависимости собственного значения  $\lambda$  от управляющих параметров  $F_i^k$ ,  $i, k=1, \dots, 5$  характеристической матрицы

$$\begin{pmatrix} F_1^1 - \lambda & F_2^{31} + x_3 F_2^1 & F_3^{12} x_2 + F_3^1 & F_4^1 & F_5^1 \\ F_1^2 & F_2^2 - \lambda & F_3^{12} x_1 + F_3^2 & F_4^2 & F_5^2 \\ F_1^3 & F_2^{31} x_1 + F_2^3 & F_3^3 - \lambda & F_4^3 & F_5^3 \\ F_1^4 & F_2^4 & F_3^4 & F_4^4 - \lambda & F_5^4 \\ F_1^5 & F_2^5 & F_3^5 & F_4^5 & F_5^5 - \lambda \end{pmatrix} = 0, \tag{12}$$

Полученные зависимости собственного значения от каждого из управляющих параметров при фиксации всех других поставим в соответствие зависимости производной Р потенциальной функции для (10) от тех же параметров.

Вычисления зависимостей выполним на ПЭВМ с использованием системы Maple. На основе анализа всех пар зависимостей выявим бифуркационное множество для системы (10) и множество ее устойчивых стационарных точек.

Результаты вычислений представлены на рисунках 1-54. На рисунках слева представлены зависимости производной потенциальной функции от управляющих параметров, а на рисунках справа - зависимости собственного значения  $\lambda$  от тех же управляющих параметров.

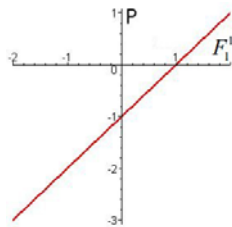


Рис.1. Зависимость  $P$  от  $F_1^1$ ,  
 $P(F_1^1) = 0$  при  $F_1^1 = 1$

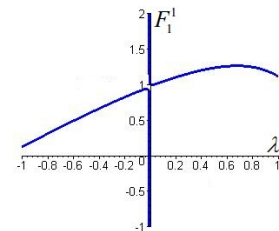


Рис.2. Зависимость  $\lambda$  от  $F_1^1$ ,  
при  $F_1^1 = 1$   $\lambda(F_1^1)$  имеет разрыв II рода и скачкообразно меняет знак

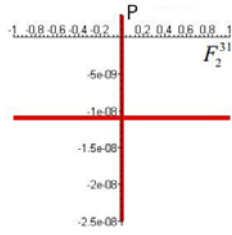


Рис.3. Зависимость  $P$  от  $F_2^{31}$ ,  
 $P(F_2^{31}) = 0$  при  $F_2^{31} = 0$

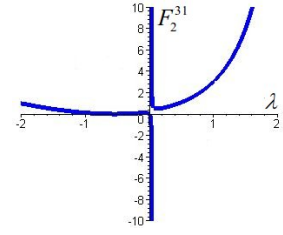


Рис.4. Зависимость  $\lambda$  от  $F_2^{31}$ ,  
 при  $F_2^{31} = 0$   $\lambda(F_2^{31}) > 0$  и имеет  
 разрыв II рода

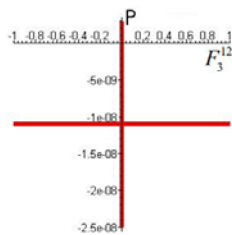


Рис.5. Зависимость  $P$  от  $F_3^{12}$ ,  
 $P(F_3^{12}) = 0$  при  $F_3^{12} = 0$

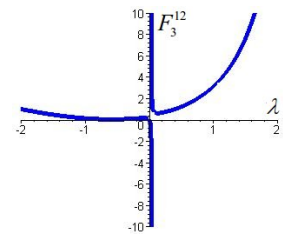


Рис.6. Зависимость  $\lambda$  от  $F_3^{12}$ ,  
 при  $F_3^{12} = 0$   $\lambda(F_3^{12}) > 0$  и имеет  
 разрыв II рода

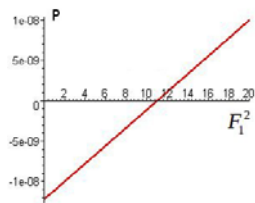


Рис.7. Зависимость  $P$  от  $F_1^2$ ,  
 $P(F_1^2) = 0$  при  $F_1^2 = 11$

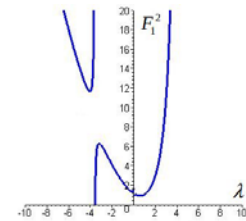


Рис.8. Зависимость  $\lambda$  от  $F_1^2$ ,  
 при  $F_1^2 = 11$   $\lambda(F_1^2) > 0$  и  
 имеет складку

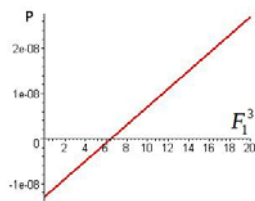


Рис.9. Зависимость  $P$  от  $F_1^3$ ,  
 $P(F_1^3) = 0$  при  $F_1^3 = 6.3$

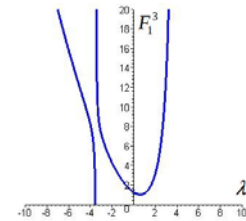


Рис.10. Зависимость  $\lambda$  от  $F_1^3$ ,  
 при  $F_1^3 = 6.3$   $\lambda(F_1^3) > 0$



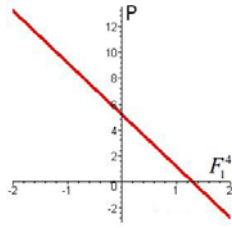


Рис.11. Зависимость  $P$  от  $F_1^4$ ,  
 $P(F_1^4) = 0$  при  $F_1^4 = 1.4$

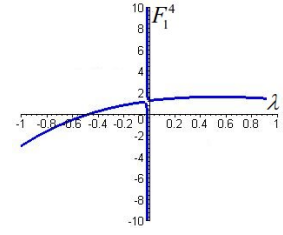


Рис.12. Зависимость  $\lambda$  от  $F_1^4$ ,  
 при  $F_1^4 = 1.4$   $\lambda(F_1^4)$  имеет разрыв  
 II рода и скачкообразно меняет знак

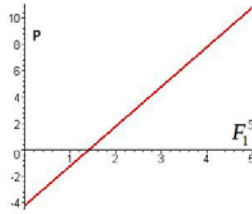


Рис.13. Зависимость  $P$  от  $F_1^5$ ,  
 $P(F_1^5) = 0$  при  $F_1^5 = 1.5$

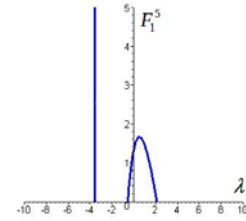


Рис.14. Зависимость  $\lambda$  от  $F_1^5$ ,  
 при  $F_1^5 = 1.5$   $\lambda(F_1^5)$  скачкообразно  
 меняет знак

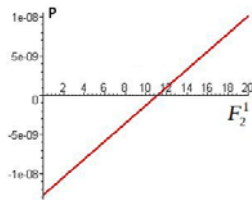


Рис.15. Зависимость  $P$  от  $F_2^1$ ,  
 $P(F_2^1) = 0$  при  $F_2^1 = 1.5$

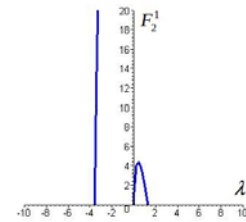


Рис.16. Зависимость  $\lambda$  от  $F_2^1$ ,  
 при  $F_2^1 = 1.5$   $\lambda(F_2^1) < 0$

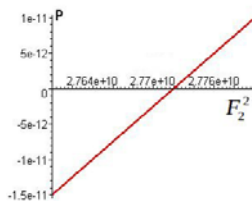


Рис.17. Зависимость  $P$  от  $F_2^2$ ,  
 $P(F_2^2) = 0$  при  $F_2^2 = 2.77e+10$

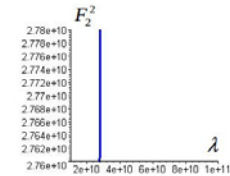


Рис.18. Зависимость  $\lambda$  от  $F_2^2$ ,  
 при  $F_2^2 = 2.77e+10$   $\lambda(F_2^2) > 0$

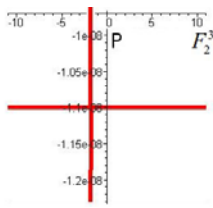


Рис.19. Зависимость  $P$  от  $F_2^3$ ,  
 $P(F_2^3) = 0$  при  $F_2^3 = -1.8$

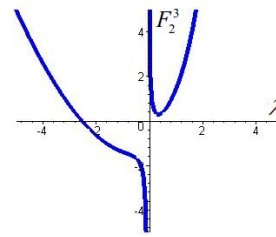


Рис.20. Зависимость  $\lambda$  от  $F_2^3$ ,  
 при  $F_2^3 = -1.8$   $\lambda(F_2^3) > 0$

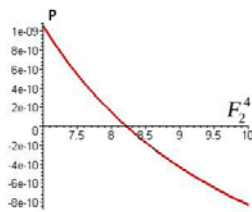


Рис.21. Зависимость  $P$  от  $F_2^4$ ,  
 $P(F_2^4) = 0$  при  $F_2^4 = 1.5$

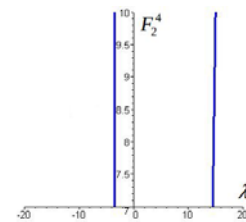


Рис.22. Зависимость  $\lambda$  от  $F_2^4$ ,  
 при  $F_2^4 = 1.5$   $\lambda(F_2^4) > 0$

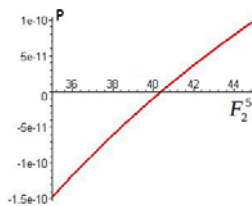


Рис.23. Зависимость  $P$  от  $F_2^5$ ,  
 $P(F_2^5) = 0$  при  $F_2^5 = 4.5$

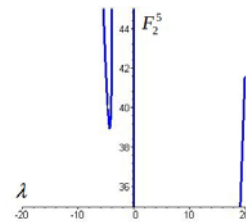


Рис.24. Зависимость  $\lambda$  от  $F_2^5$ ,  
 при  $F_2^5 = 4.5$   $\lambda(F_2^5) > 0$

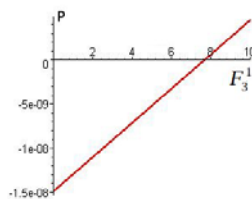


Рис.25. Зависимость  $P$  от  $F_3^1$ ,  
 $P(F_3^1) = 0$  при  $F_3^1 = 7.9$

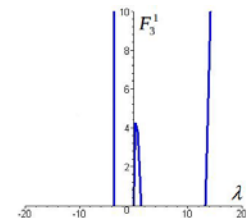


Рис.26. Зависимость  $\lambda$  от  $F_3^1$ ,  
 при  $F_3^1 = 7.9$   $\lambda(F_3^1) > 0$

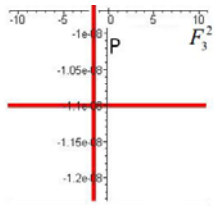


Рис.27. Зависимость  $P$  от  $F_3^2$ ,  
 $P(F_3^2) = 0$  при  $F_3^2 = 1.1$

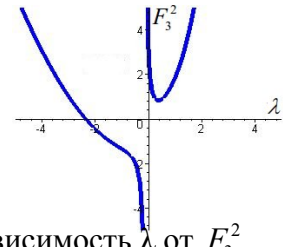


Рис.28 Зависимость  $\lambda$  от  $F_3^2$ ,  
 при  $F_3^2 = 1.1 \lambda(F_3^2) < 0$

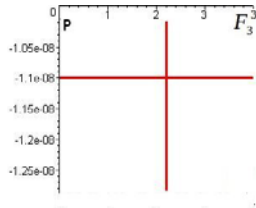


Рис.29. Зависимость  $P$  от  $F_3^3$ ,  
 $P(F_3^3) = 0$  при  $F_3^3 = 2.1$

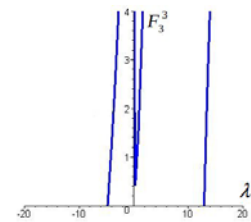


Рис.30. Зависимость  $\lambda$  от  $F_3^3$ ,  
 при  $F_3^3 = 2.1 \lambda(F_3^3) > 0$

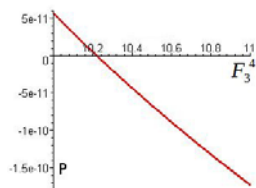


Рис.31. Зависимость  $P$  от  $F_3^4$ ,  
 $P(F_3^4) = 0$  при  $F_3^4 = 10.2$

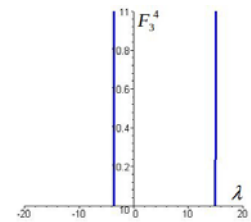


Рис.32. Зависимость  $\lambda$  от  $F_3^4$ ,  
 при  $F_3^4 = 10.2 \lambda(F_3^4) > 0$

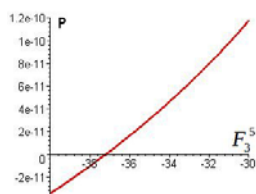


Рис.33. Зависимость  $P$  от  $F_3^5$ ,  
 $P(F_3^5) = 0$  при  $F_3^5 = -37.5$

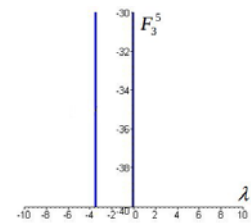


Рис.34. Зависимость  $\lambda$  от  $F_3^5$ ,  
 при  $F_3^5 = -37.5 \lambda(F_3^5) < 0$

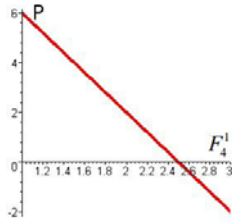


Рис.35. Зависимость  $P$  от  $F_4^1$ ,  
 $P(F_4^1) = 0$  при  $F_4^1 = 2.5$

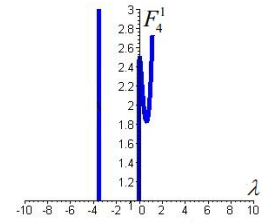


Рис.36. Зависимость  $\lambda$  от  $F_4^1$ ,  
 при  $F_4^1 = 2.5$   $\lambda(F_4^1) > 0$  и имеет  
 негладкую складку

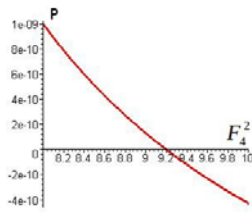


Рис.37. Зависимость  $P$  от  $F_4^2$ ,  
 $P(F_4^2) = 0$  при  $F_4^2 = 9.2$

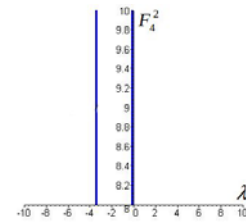


Рис.38. Зависимость  $\lambda$  от  $F_4^2$ ,  
 при  $F_4^2 = 9.2$   $\lambda(F_4^2) < 0$

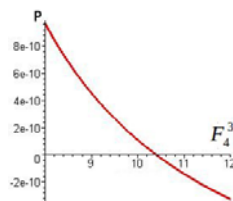


Рис.39. Зависимость  $P$  от  $F_4^3$ ,  
 $P(F_4^3) = 0$  при  $F_4^3 = 10.5$

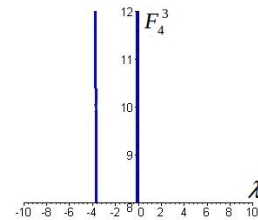


Рис.40. Зависимость  $\lambda$  от  $F_4^3$ ,  
 при  $F_4^3 = 10.5$   $\lambda(F_4^3) < 0$

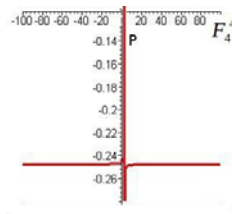


Рис.41. Зависимость  $P$  от  $F_4^4$ ,  
 $P(F_4^4) = 0$  при  $F_4^4 = 0$

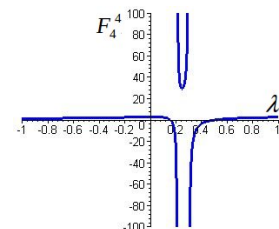


Рис.42. Зависимость  $\lambda$  от  $F_4^4$ ,  
 при  $F_4^4 = 0$   $\lambda(F_4^4) > 0$  и терпит разрыв  
 II рода

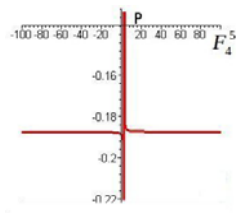


Рис.43. Зависимость  $P$  от  $F_4^5$ ,  
 $P(F_4^5) = 0$  при  $F_4^5 = 0$

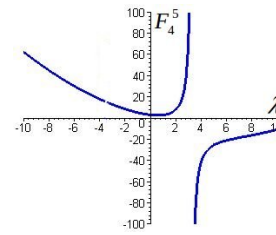


Рис.44. Зависимость  $\lambda$  от  $F_4^5$ ,  
 при  $F_4^5 = 1.5 \lambda(F_4^5)$  терпит II рода

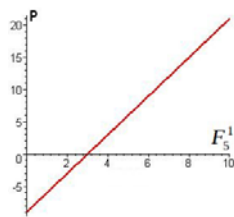


Рис.45. Зависимость  $P$  от  $F_5^1$ ,  
 $P(F_5^1) = 0$  при  $F_5^1 = 3$

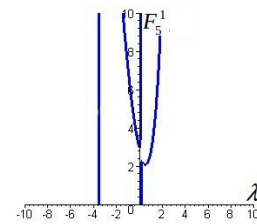


Рис.46. Зависимость  $\lambda$  от  $F_5^1$ ,  
 при  $F_5^1 = 3 \lambda(F_5^1)$  имеет  
 не гладкую складку

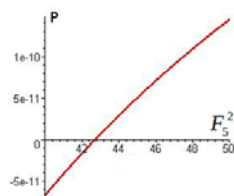


Рис.47. Зависимость  $P$  от  $F_5^2$ ,  
 $P(F_5^2) = 0$  при  $F_5^2 = 42.5$

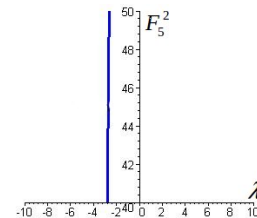


Рис.48. Зависимость  $\lambda$  от  $F_5^2$ ,  
 при  $F_5^2 = 42.5 \lambda(F_5^2) < 0$

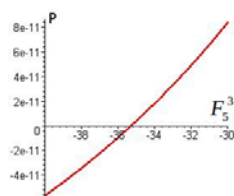


Рис.49. Зависимость  $P$  от  $F_5^3$ ,  
 $P(F_5^3) = 0$  при  $F_5^3 = -35.2$

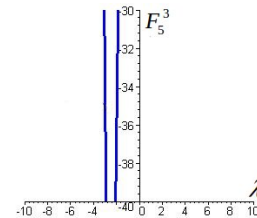


Рис.50. Зависимость  $\lambda$  от  $F_5^3$ ,  
 при  $F_5^3 = -35.2 \lambda(F_5^3) > 0$

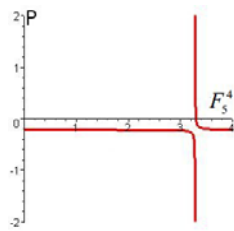


Рис.51. Зависимость  $P$  от  $F_5^4$ ,  
 $P(F_5^4) = 0$  при  $F_5^4 = 3.4$

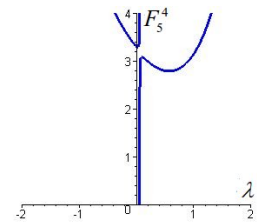


Рис.52. Зависимость  $\lambda$  от  $F_5^4$ ,  
 при  $F_5^4 = 3.4$   $\lambda(F_5^4) > 0$  и имеет  
 разрыв II рода

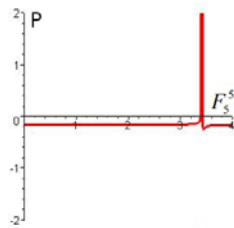


Рис.53. Зависимость  $P$  от  $F_5^5$ ,  
 $P(F_5^5) = 0$  при  $F_5^5 = 3.5$

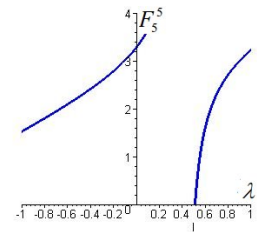


Рис.54. Зависимость  $\lambda$  от  $F_5^5$ ,  
 при  $F_5^5 = 3.5$   $\lambda(F_5^5)$  меняет знак

Из полученных зависимостей непосредственно следует, что

- бифуркационное множество системы (10) состоит из 11 критических точек (рис. 1, 3, 5, 7, 11, 13, 35, 41, 43, 45, 51) и этим точкам соответствуют точки разрыва собственного значения матрицы сопряженной системы (11) (рис. 2, 4, 6, 8, 12, 14, 36, 42, 44, 46, 52);
- исследуемая нелинейная аэродинамическая система (10) имеет 13 устойчивых стационарных состояний и в этих состояниях производные потенциальной функции равны нулю (рис. 3, 5, 7, 9, 17, 21, 23, 25, 29, 31, 35, 51, 53) а собственное значение матрицы сопряженной системы (11) – положительно определенные функции (рис. 4, 6, 8, 10, 18, 22, 24, 26, 30, 32, 36, 52, 54) в окрестности значения параметра  $F_i^k$ ,  $i, k = 1, \dots, 5$ , в котором производная потенциальной функции обращается в ноль;
- в точках бифуркаций вещественные части собственных значений либо скачкообразно меняют знак (рис. 2, 12, 14, 46), и тогда при малых изменениях управляющих параметров основная система переходит в устойчивое, или неустойчивое положение; либо отрицательно определены (рис. 16, 20, 28, 34, 38, 40, 48, 50), и тогда решение сопряженной системы (11) является устойчивым, а решение основной системы (10) – неустойчивым; либо собственные

значения определены положительно, и тогда решение основной системы устойчиво в рассматриваемой точке (рис. 4, 6, 8, 12, 36, 52), а точка является аттрактором. Из зависимостей (рис. 2, 4, 6, 12, 42, 44, 52) следует также, что если вещественные части собственных значений в критической точке не существуют либо принимают нулевые значения то система находится в колебательном режиме и малое изменение управляющего параметра переводит систему в устойчивый или неустойчивый режимы.

#### **4. Заключение.**

Разработанный метод применим для исследования устойчивости различных нелинейных автономных систем второго, третьего и высших порядков, описываемых автономными системами и нелинейными дифференциальными уравнениями, и для таких систем он, в отличие от известных методов, основанных на анализе функций Ляпунова, не требует введения функции Ляпунова, не требует приведения исследуемой системы к градиентной форме или ее линеаризации и построения фазового портрета для выявления свойств устойчивости системы.

#### **Библиографический список**

1. В.М. Матросов. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
2. В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
3. И.С. Сокольников. Тензорный анализ. М.: Наука, 1971.
4. Н.Н. Моисеев. «Математические задачи системного анализа», М: Наука, 1982г.
5. В.И. Арнольд. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1975.
6. Р. Гилмор. Прикладная теория катастроф, М.: Мир, 1984.

## **Сведения об авторах**

Катулев Александр Николаевич, Тверской государственный университет, кафедра математического моделирования, Профессор кафедры математического моделирования, доктор технических наук, профессор, Заслуженный деятель науки РФ, электронная почта: katulev@mail.ru

Кузнецов Андрей Юрьевич, ФГУП НИИ ИТ, инженер, аспирант Тверского государственного университета, электронная почта: a-slash2003@ya.ru

**Рекомендовано к публикации программным комитетом XVI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова.**