УДК 519.62

Явная конечно-разностная схема решения первой смешанной задачи для параболических дифференциально-разностных уравнений

В.А. Дружинин

Рассматривается явная схема метода конечных разностей решения первой смешанной задачи для параболических дифференциально-разностных уравнений. Данный класс задач интересен тем, что воздействие на их решение в одной подобласти может приводить к эффекту в другой. В статье доказывается, что явная схема устойчива и сходится, если выполнено условие типа Лакса. Для доказательства сходимости использована теория фактор-метода. Теоретические исследования проиллюстрированы графиками решений, из которых видна специфика рассматриваемых задач.

1. Постановка задачи

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial Q = \bigcup_i \overline{M_i}$ $(i = 1, \dots, N_o)$, где M_i – $(n-1)$-мерные многообразия класса C^∞, которые являются открытыми и связными в топологии границы ∂Q. Пусть в окрестности каждой точки $g \in \partial Q \setminus \bigcup_i M_i$ область Q диффеоморфна n-мерному двугранному углу, если $n \geq 3$, и плоскому углу, если $n = 2$.

Мы будем обозначать через $W_2^k(Q)$ пространство Соболева комплекснозначных функций из $L_2(Q)$, имеющих все обобщенные производные вплоть до k-го порядка из $L_2(Q)$, с нормой

$$\|u\|_{W_2^k(Q)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq k} \int_Q |\mathcal{D}^\alpha u(x)|^2 dx \right\}^{1/2},$$

а через $\mathring{W}_2^k(Q)$ обозначим замыкание множества финитных бесконечно дифференцируемых функций $\dot{C}^\infty(Q)$ в $W_2^k(Q)$.

Введем неограниченный дифференциально-разностный оператор $A_R : L_2(Q) \to L_2(Q)$ по формуле

$$A_R u = \sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ} u_{x_j})_{x_i}$$

с плотной в $L_2(Q)$ областью определения $\mathcal{D}(A_R) = \{u \in \mathring{W}_2^1(Q) : A_R u \in L_2(Q)\}$. Здесь $R_{ijQ} = P_Q R_{ij} I_Q$,

$$R_{ij} u(x) = \sum_{h \in M} a_{ijh} u(x+h) \ (i, j = 1, \dots, n),$$

$a_{ij\theta} = a_{ji\theta}$, $M \subset \mathbb{R}^n$ – конечное множество векторов с целочисленными координатами, $I_Q : L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ – оператор продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n \backslash Q$, $P_Q : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(Q)$ – оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q, $a_{ijh} \in \mathbb{R}$.

Определение 1 *Оператор $(-A_R)$ называется сильно эллиптическим в Q, если для всех $u \in \dot{C}^\infty(Q)$*

$$-\operatorname{Re}(A_R u, u)_{L_2(Q)} = \operatorname{Re} \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^n R_{ijQ} u_{x_j} u_{x_i} dx \geq c_1 \|u\|^2_{W_2^1(Q)}, \tag{1}$$

где $c_1 > 0$ не зависит от u.

В области $Q_T = Q \times (0, T)$ с цилиндрической границей $\Gamma_T = \partial Q \times (0, T)$ рассматривается первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A_R u(x,t) = f(x,t), \tag{2}$$

где $f \in L_2(Q_T)$, с краевым условием

$$u_{|_{\Gamma_T}} = 0 \ ((x,t) \in \Gamma_T) \tag{3}$$

и с начальным условием

$$u_{|_{t=0}} = \psi(x) \ (x \in Q). \tag{4}$$

Определение 2 *Мы будем называть функцию $u \in L_2(0, T; \mathring{W}_2^1(Q))$ обобщенным решением задачи (2)-(4), если для любой функции $v \in W_2^1(Q_T) : v|_{\Gamma_T} = 0, v|_{t=T} = 0$ выполнено интегральное тождество*

$$\int\limits_{Q_T} (-u\overline{v}_t + \sum_{i,j=1}^n R_{ijQ} u_{x_j} \overline{v}_{x_i}) dx dt = \int\limits_{Q_T} f \overline{v} dx dt + \int\limits_Q \psi \overline{v}|_{t=0} dx.$$

Доказано (см. [1], [2]), что задача (2)-(4) имеет единственное обобщенное решение, если оператор $(-A_R)$ – сильно эллиптический в Q и функция $\psi(x)$ принадлежит пространству начальных данных $\mathring{W}_2^1(Q)$, поэтому в данной работе рассматриваются только такие задачи.

Сходимость разностной схемы для первой краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения доказана в §20 [3]. В [4] доказывается сходимость метода Галеркина решения задачи (2)-(4).

В [5] выведено условие устойчивости (и сходимости) явной разностной схемы фактор-метода для параболического уравнения с линейным оператором. В данной работе показывается, что в фактор-методе в качестве такого оператора может рассматриваться несамосопряженный линейный дифференциально-разностный оператор второго порядка A_R, а также что ограничение на выбор шага по t, достаточное для устойчивости (и сходимости) явной схемы решения параболической задачи, в обоих этих случаях одинаково.

2. Фактор-метод

Введем вектор l, компоненты l_i ($i = 1, 2, \dots, n$) которого представляют собой шаги разностной сетки по координате x_i, и разобьем пространство $\mathbb{R}^n$ на элементарные параллелепипеды $\omega_{(kl)} = \{x = (x_i) : \ k_i l_i \le x_i < (k_i + 1) l_i, \ i = 1, 2, \dots, n\}$. Обозначим символом $\bar{\Omega}_{(l)}$ замкнутую область, состоящую из ячеек $\bar{\omega}_{(kl)}$, принадлежащих $\bar{Q}$, а ее границу обозначим через $\Gamma_{(l)}$, $\Omega_{(l)} = \bar{\Omega}_{(l)} - \Gamma_{(l)}$. Также через $\bar{Q}_{(l)}$ обозначим множество вершин (kl), принадлежащих $\bar{\Omega}_{(l)}$, через $S_{(l)}$ обозначим множество вершин (kl), принадлежащих $\Gamma_{(l)}$, $Q_{(l)} = \bar{Q}_{(l)} - S_{(l)}$. А через $Q^+_{(l)}$ обозначим множество вершин (kl), взятых по одной из ячеек $\omega_{(kl)}$, принадлежащих $\bar{\Omega}_{(l)}$.

Нижним индексом (l) (например, $v_{(l)}$) будем помечать сеточные функции, определенные в каждой точке (kl) некоторой сетки. Добавочный индекс h сеточной функции $v_{(l)}$ (т.е. $v_{(lh)}$) будет означать, что берется значение не в точке (kl), а в точке $(kl + h)$, $h \in M$. При этом, так как вектора сдвигов $h \in M$ – это вектора с целочисленными координатами, всегда можно выбрать шаги так, чтобы каждому сдвигу по каждой координате вектора h соответствовало целое число шагов по этой координате.

Для какой-либо абстрактной сеточной функции $v_{(l)}$ введем кусочно-постоянное восполнение $\tilde{v}(x)$ по формуле:

$$\tilde{v}(x) = v_{(l)}, \ x \in \omega_{(kl)}. \tag{5}$$

Пусть E_1 – подпространство банахова пространства E. Для любого элемента $u \in E$ множество всех элементов вида $u + x$, где $x \in E_1$, называется классом смежности $\bar{u}$ элемента u по подпространству E_1. Совокупность всех классов смежности, в которой естественным образом вводятся операции сложения и умножения на скаляр, является линейным пространством и называется фактор-пространством E/E_1 пространства E по подпространству E_1.

Фактор-пространство E/E_1 можно нормировать, положив

$$\|\bar{u}\|_{E/E_1} = \inf_{v \in \bar{u}} \|v\|. \tag{6}$$

В этой норме пространство E/E_1 является банаховым. Норма (6) называется естественной. Далее в пространстве E/E_1 рассмотрим также и другие нормы.

Соответствие $u \to \bar{u}$ является гомоморфизмом E на E/E_1, ядром которого является E_1. Этот гомоморфизм обозначим через φ_1. В естественной норме линейный оператор φ_1 имеет норму, равную 1. В дальнейшем предполагается, что при введенной в E/E_1 норме гомоморфизм E на E/E_1 непрерывен.

Для дальнейших рассуждений в качестве исходного пространства E выберем гильбертово пространство $L_2(Q)$. Восполнения $\tilde{u}(x)$ можно рассматривать как элементы фактор-пространства $L_2(Q)/\ker\varphi_{(l)}$, при этом гомоморфизм $\varphi_{(l)}$ для различных наборов l_i $(i=1,2,\ldots,n)$ преобразует $u\in L_2(Q)$ в $\tilde u\in L_2(Q)/\ker\varphi_{(l)}$:

$$\varphi_{(l)}u(x)=\frac{1}{\Delta_{(l)}}\int_{\omega_{(kl)}}v(y)dy,\ x\in\omega_{(kl)},$$

где $\Delta_{(l)}=l_1\ldots l_n$.

В силу теоремы 10.1 из [6] линейный сильно эллиптический оператор $(-A_R)$ удовлетворяет требованиям, которым должен удовлетворять оператор в постановке задачи, сформулированной в п.1 § 1 главы V [5].

Как и в гл. VI [7], введем разностные отношения, аппроксимирующие производные в любой точке $x\in\omega_{(kl)}$:

$$\tilde v_{x_i}(x)=\frac{1}{l_i}[\tilde v(x+l_i\mathbf{e}_i)-\tilde v(x)],$$
$$\tilde v_{\bar x_i}(x)=\frac{1}{l_i}[\tilde v(x)-\tilde v(x-l_i\mathbf{e}_i)],$$

где $\mathbf{e}_i$ – n-мерный i-й орт. Эти отношения можно перенести на сеточное множество, так что

$$v_{(l)x_i}=\tilde v_{x_i}(x),\ v_{(l)\bar x_i}=\tilde v_{\bar x_i}(x),\ x\in\omega_{(kl)},$$

потому что восполнения $\tilde v(x)$ являются кусочно-постоянными.

В пространстве $L_2(Q)/\ker\varphi_{(l)}$ введем норму

$$\|\tilde v(x)\|_{L_2(Q)/\ker\varphi_{(l)}}\equiv\left(\int\limits_{\Omega_{(l)}}\tilde v^2(x)dx\right)^{1/2}=\left(\Delta_{(l)}\sum_{Q^+_{(l)}}|v_{(l)}|^2\right)^{1/2}.$$

Далее для удобства будем оперировать нормами

$$\|v_{(l)}\|=\|\tilde v(x)\|_{L_2(Q)/\ker\varphi_{(l)}},$$

$$\|v_{(l)x_i}\|\equiv\left(\Delta_{(l)}\sum_{Q^+_{(l)}}|v_{(l)x_i}|^2\right)^{1/2}=\|\tilde v_{x_i}(x)\|_{L_2(Q)/\ker\varphi_{(l)}},$$

$$\|v_{(l)x}\|=\left(\sum_{i=1}^n\|v_{(l)x_i}\|^2\right)^{1/2}$$

над сеточными функциями $v_{(l)}$.

3. Разностная схема

Рассечем цилиндр $Q_T=Q\times(0,T)$ плоскостями $t=q\tau$, $q=0,1,\ldots,N$, $\tau=T/N$.

Аналогично разделу 1 введем оператор $\breve{I}_{Q^+_{(l)}}$ продолжения нулем функции, определенной на $Q^+_{(l)}$, на всю сетку $\{(k_i l_i): \ k_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \ i = 1, 2, \ldots, n\}$, и оператор $\breve{P}_{Q^+_{(l)}}$ сужения функции, определенной на всей сетке, обратно на $Q^+_{(l)}$.

Введем оператор $\breve{R}_{ijQ^+_{(l)}} = \breve{P}_{Q^+_{(l)}} \breve{R}_{ij} \breve{I}_{Q^+_{(l)}}$, где

$$\breve{R}_{ij} v_{(l)} = \sum_{h \in M} a_{ijh} v_{(l)h} \ (i, j = 1, \ldots, n)$$

для $v_{(l)}$, определенной на всей сетке.

Наконец, введем на $Q_{(l)}$ операторы

$$\breve{A}_R v_{(l)} = \sum_{i,j=1}^{n} (\breve{R}_{ijQ^+_{(l)}} v_{(l)x_j})_{\bar{x}_i}$$

для $v_{(l)}$, определенной на $Q^+_{(l)}$, и $\tilde{A}_R \tilde{v} = \breve{A}_R v_{(l)}$, где $\tilde{v}$ есть восполнение на Q сеточной функции $v_{(l)}$, определенной на $Q^+_{(l)}$ и продолженной нулем на все сеточное множество.

Явная разностная схема для решения первой смешанной задачи для параболического дифференциально-разностного уравнения записывается в виде

$$u_{(l)t}(q) - \breve{A}_R u_{(l)}(q) = f_{(l)}(q), \ u_{(l)} \in Q_{(l)} \tag{7}$$

с краевыми и начальными условиями

$$u_{(l)}(q)_{|_{S_{(l)}}} = 0, \ q = 0, 1, 2, \ldots, N, \tag{8}$$

$$u_{(l)}(0) = \psi_{(l)}. \tag{9}$$

Однозначная разрешимость явной схемы очевидна.

Введем некоторые вспомогательные обозначения. Обозначим через G аддитивную абелеву группу, порожденную множеством M, а через Q_r открытые связные компоненты множества $Q \setminus \left(\bigcup_{h \in G} (\partial Q + h) \right)$.

Определение 3 *Множества Q_r мы будем называть подобластями, а совокупность $\mathcal{R}$ всевозможных подобластей Q_r — разбиением множества Q.*

Разбиение $\mathcal{R}$ естественным образом распадается на непересекающиеся классы: будем считать, что подобласти Q_{r_1}, $Q_{r_2} \in \mathcal{R}$ принадлежат одному классу, если существует $h \in G$ такое, что $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$. Отсюда, в частности, следует, что подобласти одного класса имеют одинаковую форму. Обозначим подобласти Q_r через Q_{sm}, где s — номер класса ($s = 1, 2, \ldots$), а m — порядковый номер подобласти в s-ом классе. В силу ограниченности области Q каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sm} и $N(s) \leq ([diam Q] + 1)^n$.

Аналогичным образом введем разбиение замыкания $\bar{\Omega}_{(l)}$ на подмножества $\bar{\Omega}_{(l)sm}$, каждое из которых состоит из набора элементарных ячеек $\bar{\omega}_{(kl)sm}$, а также разбиение множества $\bar{Q}^{+}_{(l)}$ на подмножества $\bar{Q}^{+}_{(l)sm}$ $(s = 1, 2, \ldots\ , m = 1, 2, \ldots, N(s))$.

Введем матрицы $R_{ijs} = \|r^{ijs}_{pm}\|^{N(s)}_{p,m=1}$ порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами

$$r^{ijs}_{pm} = \begin{cases} a_{ijh}, & h = h_{sm} - h_{sp} \in M, \\ 0, & h_{sm} - h_{sp} \notin M, \end{cases}$$

а также блочные матрицы

$$R_s = \|R_{ijs}\|^{n}_{i,j=1} \tag{10}$$

порядка $n \cdot N(s) \times n \cdot N(s)$.

Лемма 1 *Соотношение*

$$\nu \sum_{Q^+_l} \sum_{i=1}^{n} \left(\xi^{(i)}_{(l)}\right)^2 \le \sum_{Q^+_l} \sum_{i,j=1}^{n} \breve{R}_{ijQ^+_l} \xi^{(j)}_{(l)} \xi^{(i)}_{(l)} \le \mu \sum_{Q^+_l} \sum_{i=1}^{n} \left(\xi^{(i)}_{(l)}\right)^2, \tag{11}$$

где $\nu > 0$, $\mu > 0$, выполняется тогда и только тогда, когда

$$\nu \Pi^T \Pi \le \Pi^T R_s \Pi \le \mu \Pi^T \Pi, \tag{12}$$

где $\Pi \in \mathbb{R}^{n \cdot N(s)}$, $s = 1, 2, \ldots\ $, и выполнено условие $\xi^{(i)}_{(l)|_{S_{(l)}}} = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство:

Пусть $\xi^{(i)}_{(l)|_{S_{(l)}}} = 0$, $i = 1, \ldots, n$, и выполнено условие (12).

Обозначим через $\xi^{(i)}_{(l)sm}$ сеточные функции, определенные на подмножествах $\bar{Q}^{+}_{(l)sm}$ $(s = 1, 2, \ldots, m = 1, 2, \ldots, N(s), i = 1, \ldots, n)$. Так как замыкания $\bar{\Omega}_{(l)s1}, \ldots, \bar{\Omega}_{(l)sN(s)}$ имеют одинаковую форму, для каждой ячейки $\bar{\omega}_{(kl)sm}$ найдутся ячейки $\bar{\omega}_{(kl)sp}$ такие, что $\bar{\omega}_{(kl)sp} = \bar{\omega}_{(kl)sm} + h$, $h \in G$, и для $\xi^{(i)}_{(l)sm}$ с $\arg \xi^{(i)}_{(l)sm} \in \bar{Q}^{+}_{(l)sm}$ найдутся $\xi^{(i)}_{(l)sp}$ с $\arg \xi^{(i)}_{(l)sp} \in\ \bar{Q}^{+}_{(l)sp}$ такие, что $\arg \xi^{(i)}_{(l)sm} - \arg \xi^{(i)}_{(l)sp} \in G$ $(p, m = 1, \ldots, N(s),\ i = 1, \ldots, n)$, поэтому

$$\sum_{Q^+_{(l)}} \sum_{i,j=1}^{n} \breve{R}_{ijQ^+_{(l)}} \xi^{(j)}_{(l)} \xi^{(i)}_{(l)} = \sum_{s} \sum_{p,m=1}^{N(s)} \sum_{Q^+_{(l)sm}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij\left(\arg \xi^{(j)}_{(l)sp} - \arg \xi^{(i)}_{(l)sm}\right)} \xi^{(j)}_{(l)sp} \xi^{(i)}_{(l)sm}. \tag{13}$$

Для $\xi^{(i)}_{sm}$ с $\arg \xi^{(i)}_{sm} \in \bar{\Omega}_{(l)sm}$ введем обозначения $\Xi^{(i)}_s = \left(\xi^{(i)}_{s1}, \ldots, \xi^{(i)}_{sN(s)}\right)^T$ и $\Xi_s = \left(\Xi^{(1)^T}_s, \ldots, \Xi^{(n)^T}_s\right)^T$ $(s = 1, 2, \ldots\ ,\ m = 1, 2, \ldots, N(s),\ i = 1, \ldots, n)$. В силу условия (12), которому удовлетворяют матрицы R_s, справедливо

$$\nu \Xi^T_s \Xi_s \le \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{p,m=1}^{N(s)} a_{ij\left(\arg \xi^{(j)}_{sp} - \arg \xi^{(i)}_{sm}\right)} \xi^{(j)}_{sp} \xi^{(i)}_{sm} = \Xi^T_s R_s \Xi_s \le \mu \Xi^T_s \Xi_s, \tag{14}$$

поэтому условие (11) выполнено.

Лемма доказана.

Из выполнения условия (12) согласно теоремам 1,2 § 10 [3] следует, что оператор $(-A_R)$ является сильно эллиптическим.

4. Устойчивость

Докажем достаточное условие устойчивости схемы (7)-(9). Для простоты докажем его для случая $l_1 = \ldots = l_n = l$.

Теорема 1 *Для устойчивости фактор-метода (7)-(9) достаточно выполнения условий (12),*

$$\tau < \frac{l^2}{2n\mu}. \tag{15}$$

Доказательство:

Пусть $d \in C(0,a)$, $g \in C(0,a)$, $a \in \mathbb{N}$. Справедлива формула

$$\sum_{k=0}^{a-1}(d(k+1) - d(k))g(k) = -\sum_{k=1}^{a} d(k)(g(k) - g(k-1)) + d(a)g(a) - d(0)g(0), \tag{16}$$

аналогичная формуле "суммирования по частям"из § 2 гл.VI [7]. Несложно показать, что для целого числа $0 \le b \le a$ имеет место формула

$$\sum_{k=0}^{a-b-1}(d(k+1) - d(k))g(b+k) = -\sum_{k=1}^{a-b} d(k)(g(b+k) - g(b+k-1)) + d(a-b)g(a) - d(0)g(b), \tag{17}$$

совпадающая с (16) при $b = 0$.

Пусть $\eta_{(l)}(q)$ – произвольная сеточная функция на $\bar{Q}_{(l)}$, равная нулю на $S_{(l)}$. Домножим (7) на $2\tau l^n \eta_{(l)}(q+1)$, просуммируем по $Q_{(l)}$ и аналогично (17) получим

$$2\tau l^n \sum_{Q_{(l)}}(u_{(l)t}(q) - \breve{A}_R u_{(l)}(q))\eta_{(l)}(q+1) = 2\tau l^n \sum_{Q^+_{(l)}}(u_{(l)t}(q)\eta_{(l)}(q+1) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n}(\breve{R}_{ijQ^+_{(l)}} u_{(l)x_j}(q))\eta_{(l)x_i}(q+1)) = 2\tau l^n \sum_{Q^+_{(l)}} f_{(l)}(q)\eta_{(l)}(q+1). \tag{18}$$

Если в формуле (18) выбрать $\eta_{(l)}(q+1) = u_{(l)}(q+1)$ и преобразовать первое слагаемое, то эта формула приобретет вид

$$\|u_{(l)}(q+1)\|^2 - \|u_{(l)}(q)\|^2 + \|\delta u_{(l)}(q)\|^2 +$$

$$+ 2\tau l^n \sum_{Q^+_{(l)}} \sum_{i,j=1}^{n}(\breve{R}_{ijQ^+_{(l)}} u_{(l)x_j}(q))u_{(l)x_i}(q+1) = 2\tau l^n \sum_{Q^+_{(l)}} f_{(l)}(q)u_{(l)}(q+1), \tag{19}$$

где $\delta u_{(l)}(q) = u_{(l)}(q+1) - u_{(l)}(q)$.

Для доказательства устойчивости воспользуемся соотношением (11). Но применить его можно только если в (19) u и u_{x_i} при $h_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ будут аппроксимироваться разностным отношением в момент $(q + 1)$. Чтобы этого достичь, прибавим и отнимем $2\lambda\tau l^n \sum_{Q^+_{(l)}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij\theta} u_{(l)x_j}(q+1) u_{(l)x_i}(q+1)$, где $\lambda > 0$ – малое число.

Для каждого $m = 1, \ldots, N(s)$ в (13) выберем

$$\xi^{(i)}_{(l)sp} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} u_{(l)x_i sp}(q), & p \neq m, \\ \sqrt{\lambda} u_{(l)x_i sp}(q+1), & p = m, \end{cases} \tag{20}$$

где $i = 1, \ldots, n$. Благодаря (11) оценим

$$l^n \sum_{Q^+_{(l)}} \sum_{i,j=1}^n [(\breve{R}_{ijQ^+_{(l)}} - a_{ij\theta}E) u_{(l)x_j}(q) + \lambda a_{ij\theta} u_{(l)x_j}(q+1)] u_{(l)x_i}(q+1) \geq \lambda\nu \|u_{(l)x}(q+1)\|^2. \tag{21}$$

Кроме того, применим (11) и получим оценку

$$l^n \sum_{Q^+_{(l)}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij\theta} u_{(l)x_j}(q+1) u_{(l)x_i}(q+1) \leq \mu \|u_{(l)x}(q+1)\|^2. \tag{22}$$

Применив (21) и (22) к (19), получим неравенство

$$\|u_{(l)}(q+1)\|^2 - \|u_{(l)}(q)\|^2 + \|\delta u_{(l)}(q)\|^2 + 2\lambda(\nu - \mu)\tau \|u_{(l)x}(q+1)\|^2 + \\ + 2\tau l^n \sum_{Q^+_{(l)}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij\theta} u_{(l)x_j}(q) u_{(l)x_i}(q+1) \leq 2\tau l^n \sum_{Q^+_{(l)}} f_{(l)}(q) u_{(l)}(q+1). \tag{23}$$

Преобразуем это неравенство аналогично тому как это сделано в п. 9.3 гл. VI [7]. Получим

$$\|u_{(l)}(q+1)\|^2 - \|u_{(l)}(q)\|^2 + (1 - 2\frac{n\mu\tau}{l^2}) \|\delta u_{(l)}(q)\|^2 + \nu\tau \|u_{(l)x}(q)\|^2 + \\ + (\nu + 2\lambda(\nu - \mu))\tau \|u_{(l)x}(q+1)\|^2 \leq 2\tau \|f_{(l)}(q)\| \|u_{(l)}(q+1)\|. \tag{24}$$

Просуммировав данное неравенство по $q = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ и выполнив преобразования, получим в результате

$$\|u_{(l)}(m)\|^2 + \nu\tau \sum_{q=0}^m \|u_{(l)x}(q)\|^2 + (1 - 2\frac{n\mu\tau}{l^2}) \sum_{q=0}^{m-1} \|\delta u_{(l)}(q)\|^2 \leq \|u_{(l)}(0)\|^2 + \tau (\sum_{q=0}^m \|f_{(l)}(q)\|)^2. \tag{25}$$

Эта оценка достигается, таким образом, при условии $0 < 1 - 2\frac{n\mu\tau}{l^2} < 1$.

Если рассматривается однородное уравнение (2), то из (24) следует

$$\|u_{(l)}(q+1)\| = \|(I + \tau \breve{A}_R) u_{(l)}(q)\| \leq \|u_{(l)}(q)\|, \tag{26}$$

т.е.

$$\|I+\tau\breve{A}_R\|\leq 1. \tag{27}$$

Это означает, что выполнено условие теоремы 2.1 из гл. V [5] и фактор-метод устойчив.

Теорема доказана.

Предположим, что

$$a_{ijh}=\begin{cases}1, & i=j, h=\theta\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

где $i,j=1,2,\ldots,n$. В этом случае условие (15) является более сильным, чем условие устойчивости явной схемы решения первой смешанной задачи для уравнения, в котором

$$a_{ijh}=\begin{cases}1, & i=j, h=\theta,\\ 0, & i\neq j \text{ или } h\neq\theta,\end{cases}$$

т.е. уравнения теплопроводности, сформулированное, например, в § 1 гл.V [8].

5. Сходимость

Близость решения $u_{(l)}(q)$, $q=0,1,\ldots,N$, задачи (7)-(9) к решению задачи (2)-(4) при использовании фактор-метода характеризуется сходимостью. Будем говорить, что приближенные решения $\tilde{u}^N(q\tau,x)$, принадлежащие $L_2(Q)/\ker\varphi_{(l)}$, сходятся к функции $u(t,x)$, если

$$\max_{q=0,1,\ldots,N}\|\varphi_{(l)}u(q\tau,x)-\tilde{u}^N(q\tau,x)\|_{L_2(Q)/\ker\varphi_{(l)}}\to 0,\ N\to\infty. \tag{28}$$

Теорема 2 *Восполнения $\tilde{u}^N(q\tau,x)$ в Q решений $u_{(l)}(q)$ системы уравнений (7)-(9) сходятся к обобщенному решению задачи (2)-(4) при любых $\psi\in\mathcal{D}(A_R)$ и $f\in L_2(Q_T)$, если оператор $(-A_R)$ является сильно эллиптическим в Q, а фактор-метод устойчив.*

Доказательство:

Из

$$\int\limits_{\Omega_{(l)}}\varphi_{(l)}vdx=l^n\sum_{\omega_{(kl)}\in\bar{\Omega}_{(l)}}\Big(\frac{1}{l^n}\int\limits_{\omega_{(kl)}}vdx\Big)^2\leq\sum_{\omega_{(kl)}\in\bar{\Omega}_{(l)}}\int\limits_{\omega_{(kl)}}v^2dx=\int\limits_{\Omega_{(l)}}v^2dx$$

следует, что выполнено условие

$$\|\varphi_{(l)}u\|_{L_2(Q)/\ker\varphi_{(l)}}\leq c\|u\|_{L_2(Q)}, \tag{29}$$

где $u\in L_2(Q)$, $c>0$.

В примере 3.10 из гл. IX [9] показано, что для любого $u_0\in\mathcal{D}(A_R)$ выполнено условие

$$\lim_{N\to\infty}\|\varphi_{(l)}A_Ru_0-\tilde{A}_R\varphi_{(l)}u_0\|_{L_2(Q)/\ker\varphi_{(l)}}=0. \tag{30}$$

В силу теоремы 10.1 из [6], теоремы 3 из ([1]) и теоремы 2.10 из гл. I [5] задача Коши (2)-(4) для однородного параболического уравнения с линейным сильно эллиптическим в Q оператором $(-A_R)$ равномерно корректна.

Таким образом, по теореме 2.6 из главы V [5] восполнения $\tilde{u}^N(q\tau, x)$ в Q решений $u_{(l)}(q)$ системы уравнений (7)-(9) сходятся к обобщенному решению задачи (2)-(4) при любом $\psi \in \mathcal{D}(A_R)$ и функции $f \in L_2(Q_T)$.

Теорема доказана.

6. Пример

В области $Q = (0, 4/3) \times (0, 4/3)$ рассмотрим однородную задачу (2)-(4) с начальной функцией (см. рис. 1)

$$\psi(x_1, x_2) = e^{-100(x_1-x_2)^2} \sin(3\pi x_1) \sin(3\pi x_2)$$

и с оператором

$$A_R u = R_{11Q} u_{x_1x_1}(x_1, x_2) + R_{22Q} u_{x_2x_2}(x_1, x_2),$$

где $R_{iiQ} = P_Q R_{ii} I_Q$,

$$R_{ii} u(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) + \alpha u(x_1 + 1, x_2 + 1) + \beta u(x_1 - 1, x_2 - 1), \ i = 1, 2.$$

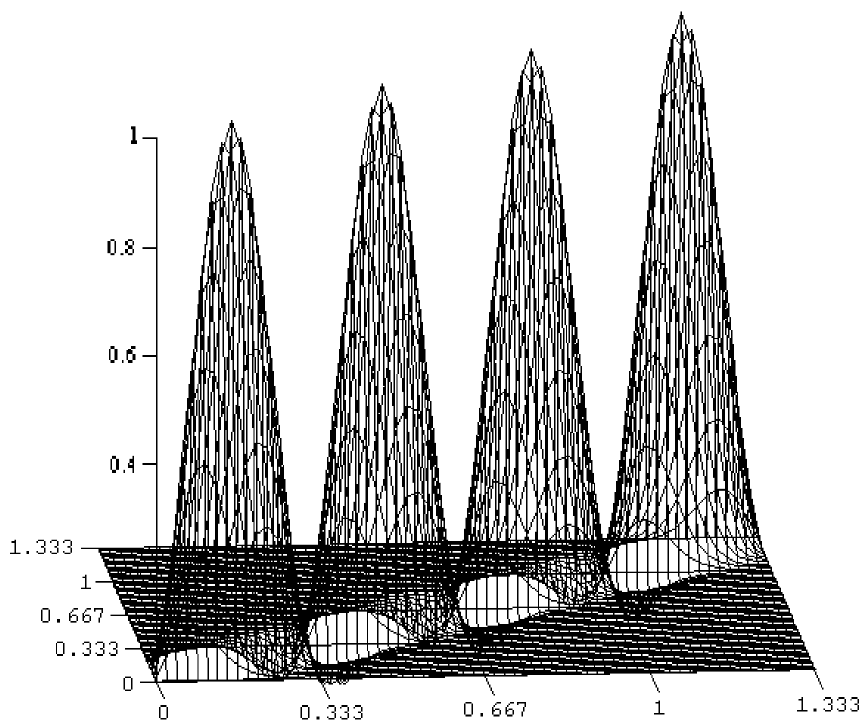

рис. 1

Разбиение $\mathcal{R}$ области Q состоит из двух классов подобластей: 1) $Q_{11} = (0, 1/3) \times (0, 1/3)$, $Q_{12} = (1, 4/3) \times (1, 4/3)$ и 2) $Q_{21} = Q \backslash (\overline{Q}_{11} \cup \overline{Q}_{12})$.

Матрицы R_s $(s = 1, 2)$, определенные по формуле (10), имеют вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta & 1 \end{pmatrix}, \ R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица R_2 положительно определена, ее спектр включает кратное собственное значение $\lambda_1 = 1$.

Матрица R_1 положительно определена, если положительны ее собственные значения $\lambda_{21} = 1 + \sqrt{\alpha\beta}$ и $\lambda_{22} = 1 - \sqrt{\alpha\beta}$.

Выберем $\alpha = 1,28$ и $\beta = 0,32$; тогда условие (12) выполняется с $\mu = \lambda_{21} = 1,8$ и $\nu = \lambda_{22} = 0,2$.

Выберем $l = 0,021$; тогда согласно теореме 1 для устойчивости разностной схемы (7)-(9) должно выполняться условие $\tau < 6,125 \cdot 10^{-5}$.

На рис. 2 представлен график решения в момент $t = 6,624 \cdot 10^{-3}$ с шагом $\tau = 4,8 \cdot 10^{-5}$, удовлетворяющим условию (15) теоремы 1. Явная схема устойчива, и это подтверждает теоретические результаты, полученные выше.

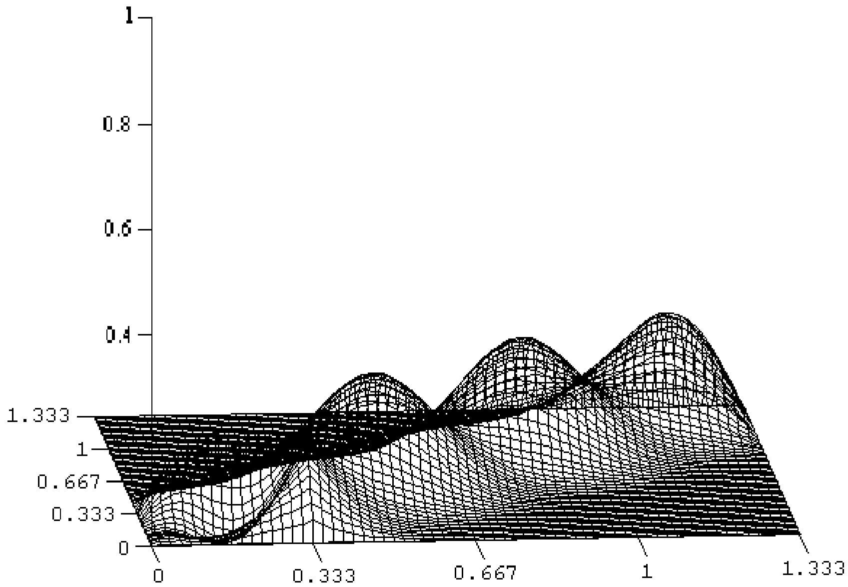

рис. 2

Специфика дифференциально-разностных уравнений проявляется в данном примере в том, что максимумы начальной функции $\psi(x_1, x_2)$ в подобластях Q_{11} и Q_{12} убывают быстрее, чем максимумы в подобласти Q_{21} (см. рис. 1,2), что обусловлено нелокальностью задачи (2)-(4).

На рис. 3 представлен график решения в момент $t = 6,624 \cdot 10^{-3}$ при $l = 0,021$ и $\tau = 7,2 \cdot 10^{-5}$, не удовлетворяющих условию (15).

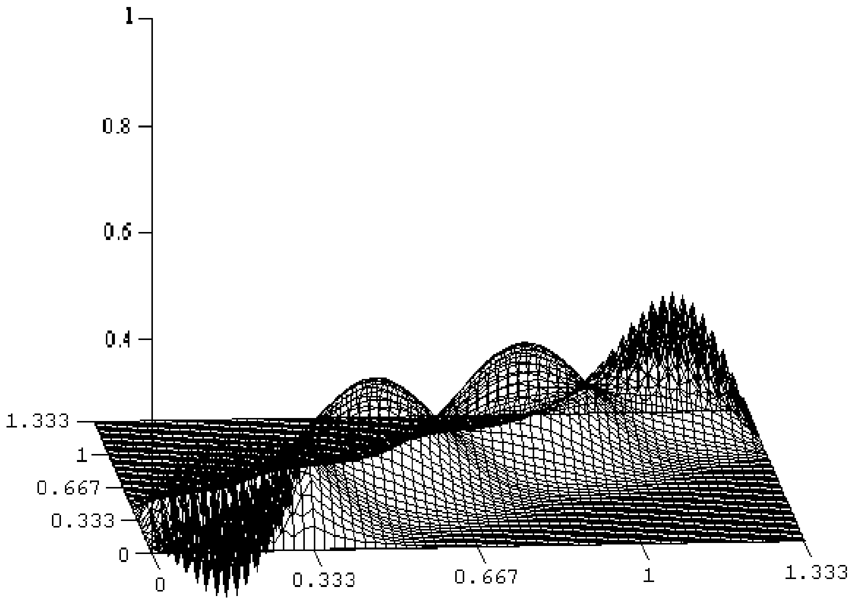

рис. 3

Как видно, в этом случае явная схема неустойчива.

Список литературы

1. Скубачевский А.Л., Шамин Р.В. Первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения. // Математические заметки. – 1999, | 1. - с.145-153.

2. Шамин Р.В. О пространствах начальных данных для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. // Математический сборник. – 2003, | 9. - с.141-156.

3. Каменский Г.А., Скубачевский А.Л. Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. – М.: МАИ, 1992. – 192 с.

4. Шамин Р.В., Дружинин В.А. О моделировании нелинейных эволюционных функционально-дифференциальных уравнений. // Нелинейные граничные задачи. — 2006, | 16. - с.226-232.

5. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.

6. Skubachevskii A.L. Elliptic functional differential equations and applications. – Basel-Boston-Berlin: Birkhauser, 1997. – 476 с.

7. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1983. - 412 с.

8. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. – М.: Наука, 1973. – 416 с.

9. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 728 с.

Сведения об авторе

Дружинин Владимир Андреевич, аспирант кафедры дифференциальных уравнений Московского авиационного института (государственного технического университета);

E-mail: dwlad@yandex.ru

Тел.: 8916-245-8314