

Труды МАИ. 2024. № 138
Trudy MAI, 2024, no. 138

Научная статья

УДК 531.011

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=182658>

НЕСТАЦИОНАРНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ШТАМПА И МЕМБРАНЫ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Алексей Альбертович Киреенков¹, Анатолий Сергеевич Оконечников²,
Елена Сергеевна Феоктистова³✉

¹Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского,

Москва, Россия

²Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)», МАИ, Россия

¹greghome@mail.ru

²oas.mai@mail.ru

³feoktistova0206@mail.ru✉

Аннотация. Данная статья рассматривает особенности постановки контактных задач с мембраной и их решения в нестационарной постановке. Основное внимание посвящено рассмотрению осесимметричных задач, однако, алгоритм решения разрабатывался с точки зрения общих подходов, что позволяет использовать его и для решения плоских задач. Стоит отметить, что осесимметричные задачи все же будут иметь ряд отличительных особенностей по сравнению с плоскими задачами. Введены гипотезы, на основании которых базируется алгоритм решения. Представлены графики изменения во времени контактного давления и интенсивности

сосредоточенных нагрузок на краях штампа при сверхзвуковом этапе взаимодействия.

Ключевые слова: нестационарный контакт, жесткий штамп, мембрана, прогиб мембраны, область контакта, функция влияния

Финансирование: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-29-00987, <https://rscf.ru/project/23-29-00987/>

Для цитирования: Киреенков А.А., Оконечников А.С., Феоктистова Е.С. Нестационарная контактная задача для штампа и мембраны в осесимметричной постановке // Труды МАИ. 2024. № 138. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=182658>

Original article

A NONSTATIONARY CONTACT PROBLEM FOR A STAMP AND A MEMBRANE IN AN AXISYMMETRIC FORMULATION

Aleksey A. Kireenkov¹, Anatoly S. Okonechnikov², Elena Sergeevna Feoktistova³✉

¹Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, IPMech RAS, Moscow, Russia

²Moscow Aviation Institute (National Research University), MAI, Moscow, Russia

¹greghome@mail.ru

²oas.mai@mail.ru

³feoktistova0206@mail.ru✉

Abstract. This work is devoted to the development of an algorithm for solving contact problems of interaction between a rigid indenter and a membrane in an axisymmetric formulation. The problem assumes the presence of two stages of interaction at different velocity - supersonic and subsonic. The subsonic stage of contact interaction has a number of features, for the solution of which two hypotheses were introduced. According to these hypotheses, the shape of the membrane under the indenter will coincide with the shape of the indenter itself, and the membrane area outside the contact will take the form of a linear function. Note that these hypotheses are formulated in such a way that they do not apply to the supersonic stage of contact interaction. The introduction of the above hypotheses makes it possible to determine the position of the boundaries of the contact area of the indenter and the membrane at any time, if the displacement of the frontal point of the indenter is known. Further, the developed algorithm makes it possible to determine the deviations of the membrane points from the initial state, as well as the contact pressure under the indenter. It is worth noting that the expression for the contact pressure obtained in the course of solving the problem makes it possible to speak about the presence of both distributed and concentrated loads. In this case, concentrated loads will appear only if the expansion of the contact area coincides with the speed of sound. Based on the data obtained when solving the subsonic stage of interaction, we proceed to the solution at the supersonic stage. The problem statement will be similar to the subsonic stage. However, taking into account the features of the supersonic stage of contact interaction, we will assume that the deflection of the membrane at supersonic speeds of the indenter is completely determined by the shape of the indenter and the depth of its penetration. Further, taking into account the presence of the same carrier in the structure of the contact pressure and the shape of the indenter, the

pressure under the indenter is determined. It is worth noting that the obtained structure of distributed loads under the indenter at the supersonic stage of contact interaction will coincide with the results obtained for the subsonic stage. Thus, we can conclude that the structure of the distributed pressure at different speeds of contact interaction remains unchanged, however, at velocity exceeding sonic, concentrated forces will arise at the contact boundaries.

Keywords: non-stationary contact, rigid stamp, membrane, membrane deflection, contact area, influence function

Funding: The study was supported by the grant of the Russian Science Foundation No. 23-29-00987, <https://rscf.ru/project/23-29-00987>

For citation: Kireenkov A.A., Okonechnikov A.S., Feoktistova E.S. A nonstationary contact problem for a stamp and a membrane in an axisymmetric formulation. *Trudy MAI*, 2024, no. 138. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=182658>

Введение

Контактные задачи в механике твердого тела изучаются на протяжении многих лет в различной постановке. Однако, наиболее широкое распространение получили задачи в стационарной постановке. К примеру, подобного рода задачами занимались Краснюк П.П. [1], Немирович-Данченко М.М. [2], а также Пожарский Д.А. [3]. Добавляя кинематическую составляющую, необходимо учитывать не только деформацию рассматриваемого тела в конкретный момент времени, но и ее функциональную зависимость от заданного закона движения ударника. Не менее

важно учесть особенности деформации тела, взаимодействующего с ударником. Постановка задачи сильно зависит не только от характера нагружения, но и от объекта нагружения. К примеру, можно ознакомиться с трудами [4]-[6], в которых рассмотрены динамические задачи в различных постановках.

Данная работа рассматривает нестационарную контактную задачу о взаимодействии выпуклого штампа с мембраной в осесимметричной постановке. Для данного вида задач выделяют следующие этапы взаимодействия: сверхзвуковой и дозвуковой. Каждый этап обладает рядом особенностей, а также допускает возможность вводить гипотезы для его описания. В силу особенностей осесимметричной задачи в данной статье будет исследоваться процесс при координате $r \in [0; \infty)$.

Постановка задачи

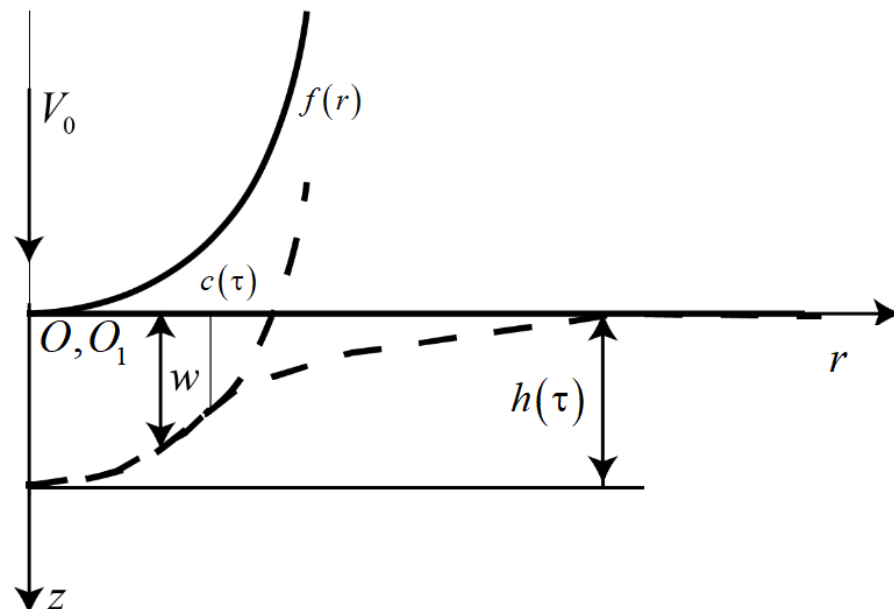


Рис. 1. Постановка задачи

Введем систему координат Orz , связанную с недеформируемым состоянием мембраны, и O_1r_1z связанную с лобовой точкой штампа O_1 и направленную по нормали к плоскости мембраны. $f(r)$ – функция, описывающая форму штампа в системе координат O_1r_1z , при этом $f(0)=0$. Лобовая точка штампа O_1 движется перпендикулярно мембране по закону $h(t)$ со скоростью $\frac{dh(t)}{dt}$. При взаимодействии со штампом мембрана выходит из состояния покоя. Для осесимметричной задачи уравнение колебаний мембраны будет зависеть только от координаты $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Oxy – система координат на плоскости) и времени t . Перемещение точек мембраны, отличное от плоскости, обозначим функцией $w(r, t)$. Если зафиксировать координату r , то функция $w = w(r, t)$ будет описывать закон движения точек штампа. Таким образом, скорость и ускорение штампа будут определяться частными производными $\frac{\partial w}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ соответственно. Если зафиксировать значение t , то функция $w = w(r, t)$ будет описывать распределение прогибом мембраны в указанный момент времени t .

Учитывая выше изложенное, можно представить уравнения поперечных колебаний мембраны в плоскости Orz следующим образом:

$$\rho \frac{\partial^2 w(r, t)}{\partial t^2} = T \Delta w(r, t) + p(r, t), \quad (1)$$

где $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)$ – оператор Лапласа.

где ρ – плотность материала мембраны, T – натяжение мембраны, p – давление на мембрану.

Далее, введем систему безразмерных величин (штрихом обозначены размерные параметры):

$$r = \frac{r'}{L}, \quad \tau = \frac{ct}{L}, \quad p = \frac{p'L}{T}, \quad (2)$$

где L – некоторый линейный характерный размер, τ – безразмерное время, $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ – скорость распространения колебаний в мембране. Таким образом, уравнение колебаний мембраны в безразмерном виде будет выглядеть согласно формуле:

$$\begin{aligned} \tilde{L}w(r, \tau) &= p(r, \tau), \\ \tilde{L}w(r, \tau) &= \ddot{w}(r, \tau) - \left(w''(r, \tau) + \frac{1}{r} w'(r, \tau) \right) \end{aligned} \quad (3)$$

где \tilde{L} – дифференциальный оператор. Здесь и далее точкой обозначена производная функции по безразмерному времени τ , штрихом – по безразмерной координате r .

В области контакта Ω_c на мембрану действует контактное давление $p_c(r, \tau)$. Свойства p , содержащейся в выражениях (1) и (3), описываются следующим образом:

$$p(r, \tau) = p_c(r, \tau), r \in \Omega_c \quad (3)$$

На штамп действует сила со стороны мембраны, которую будем называть реакцией мембраны:

$$R_c(\tau) = -2\pi \int_{\Omega_c} p_c(r, \tau) r dr, \quad (4)$$

Уравнение движения штампа под действием $R_c(\tau)$:

$$m\ddot{h} = R_c(\tau) \quad (5)$$

где $h(\tau)$ – перемещение лобовой точки штампа.

Задача будет решаться из предположения, что в начальный момент времени мембрана находится в недеформируемом состоянии (6), а штамп обладает некоторой начальной скоростью $V_0 > 0$, при этом, также предполагается отсутствие начального зазора между штампом и мембраной (7):

$$w|_{\tau=0} = \frac{\partial w}{\partial \tau}|_{\tau=0} = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ \dot{h}(0) &= V_0 \end{aligned} \quad (7)$$

Предполагается, что на достаточном удалении от области контакта со штампом мембрана находится в состоянии покоя, что определяется следующими граничными условиями:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} w(r; \tau) = 0 \quad (8)$$

Далее сформулируем условие контакта, как равенство перемещений точек штампа и мембраны при наличие положительного контактного давления:

$$\begin{aligned}\Omega_c : w(r, \tau) = w_c(r, \tau), p_c(r, \tau) > 0, r \in \Omega_c, \\ w_c(r, \tau) = h(\tau) + f(r),\end{aligned}\tag{9}$$

где $w_c(r, \tau)$ – функция, описывающая распределение перемещений точек штампа по координате r в момент времени τ , $c(\tau)$ – граница области контакта в момент времени τ в области контакта, которая неявно определяется из уравнения:

$$c(\tau) : w(c, \tau) + h(\tau) + f(c) = 0, p_c(c, \tau) = 0\tag{10}$$

Также, предполагается отсутствие касательных напряжений в области контакта Ω_c :

$$\mathbf{p} = (0, p(r, \tau))^T\tag{11}$$

Таким образом, уравнения (1), (3)-(11) формируют постановку задачи и дают описание нестационарного контакта с мембраной в осесимметричной постановке.

Решение задачи

Область контакта мембраны и штампа в данной задаче предполагается как непрерывная:

$$\Omega_c : r \in [0, c(\tau)]\tag{12}$$

Граница области контакта при учете $h(0) = 0$ определяется согласно формуле (10). Таким образом, опираясь на предположение (12), прогиб мембраны $w(r, \tau)$ связан с погружением штампа $h(\tau)$ и его формой $f(r)$ в области контакта следующим образом:

$$w_c(r, \tau) = h(\tau) + f(r), r \in [0, c(\tau)] \quad (13)$$

Далее будем рассматривать случай дозвукового этапа контактного взаимодействия ($\dot{c}(\tau) < 1$). Для решения задачи, введем следующие гипотезы:

Гипотеза 1. На дозвуковом этапе взаимодействия за пределами зоны контакта перемещение точек мембраны принимает вид линейной функции, носитель которой определяется скоростью распространения волн в мембране.

Учитывая данную гипотезу, перемещение точек мембраны на дозвуковом этапе взаимодействия представляется возможным записать в следующем виде:

$$w(r, \tau) = w_c(r, \tau)H(c(\tau) - r) + w_M(r, \tau)\{H(\tau - r) - H(c(\tau) - r)\} \quad (14)$$

В формуле (14) второе слагаемое определяет прогибы мембраны за пределами зоны контакта мембраны со штампом. Также, опираясь на гипотезу 1, можно определить перемещение точек мембраны на всей области определения с точностью до неизвестной границы контакта.

Для того чтобы определить границу области контакта введем следующую гипотезу:

Гипотеза 2: о производной на границе области контакта для гладких ударников. Производная функции нормальных перемещений мембраны на границе контакта совпадает с производной функции формы штампа в этой же точке:

$$\left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=c(\tau)} = \left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{r=c(\tau)} \quad (15)$$

Таким образом, введение гипотез 1 и 2 дает возможность определения положения границы $r = c(\tau)$ в любой момент времени при известном перемещении лобовой точки штампа $h(\tau)$.

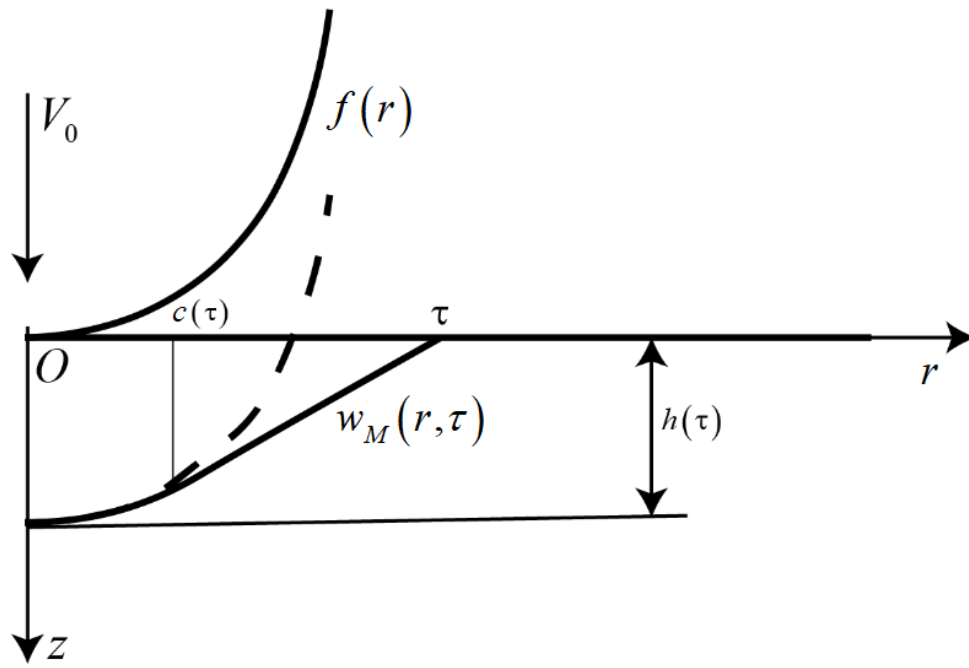


Рис. 2. Механический контакт штампа и мембраны.

Рассматривая случай только вертикального движения штампа, достаточно определить только $c(\tau)$ из уравнения, опирающегося на геометрические соотношения согласно рис. 2:

$$f'(c) = -\frac{h(\tau) + f(c)}{\tau - c} \quad (17)$$

Стоит отметить, что уравнение (17) может иметь несколько решений, в следствие чего следует учесть:

$$c(\tau) < \tau \quad (18)$$

Условие (18) соответствует дозвуковому этапу контактного взаимодействия штампа с мембраной.

Помимо этого, гипотезы 1 и 2 позволяет определить функцию $w_M(r, \tau)$:

$$w_M(r, \tau) = f'[c(\tau)][r - c(\tau)] + h(\tau) + f[c(\tau)] \quad (19)$$

Учитывая структуру функции, описывающей перемещение точек мембраны (14), (17)-(19), а также структуру контактного давления на мембрану согласно (3), выражение (3) сформулируем следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{L}w(r, \tau) &= p(r, \tau)H[c(\tau) - r] \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \tilde{L}w(r, \tau) = p(r, \tau), & r < c(\tau); \\ \tilde{L}w(r, \tau) = 0, & r > c(\tau). \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

Затем определим производные функций $w_c(r, \tau)$, $w_M(r, \tau)$ входящие в (20):

$$\begin{aligned} w_M(c, \tau) &= w_c(c, \tau), \\ \dot{w}_c(c, \tau) &= \dot{w}_M(c, \tau) = \dot{h}(\tau) \\ w'_c(r, \tau) &= f'(r), \quad w''_c(r, \tau) = f''(r), \\ \dot{w}_c(r, \tau) &= \dot{h}(\tau), \quad \ddot{w}_c(r, \tau) = \ddot{h}(\tau), \\ f(r) &= f(-r), \quad f'(r) = -f'(-r), \quad f''(r) = f''(-r), \\ w_M(\tau, \tau) &= 0, \quad \dot{w}_M(\tau, \tau) = 0, \quad w''_M(r, \tau) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Исходя из уравнения движения мембраны получаем:

$$\begin{aligned} \ddot{w}_M(r, \tau) - \left(w''_M(r, \tau) + \frac{1}{r} w'_M(r, \tau) \right) &= 0 \\ \ddot{w}_M(r, \tau) &= \left(\frac{1}{r} w'_M(r, \tau) \right) \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, первая и вторая производные по координате описываются выражениями (23), а вторая производная по времени – выражением (24).

$$\begin{aligned} w'(r, \tau) &= w'_c(r, \tau)H(c-r) + w'_M(r, \tau)[H(\tau-r) - H(c-r)], \\ w''(r, \tau) &= w''_c(r, \tau)H(c-r) - w'_M(c, \tau)\delta(\tau-r) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\dot{w}(r, \tau) = \dot{w}_c(r, \tau)H(c-r) + \dot{w}_M(r, \tau)[H(\tau-r) - H(c-r)] \quad (24)$$

При учете выражения (22) получаем:

$$\ddot{w}(r, \tau) = \ddot{w}_c(r, \tau)H(c-r) + \left(\frac{1}{r}w'_M(r, \tau)\right)[H(\tau-r) - H(c-r)] \quad (25)$$

Тогда, подставив уравнение движения в (20), получим выражение для контактного давления:

$$p(r, \tau) = \left(\ddot{w}_c(r, \tau) - w''_c(r, \tau) - \frac{1}{r}w'_c(r, \tau)\right)H(c-r) + w'_M(c, \tau)\delta(\tau-r) \quad (26)$$

Как видно из (26), контактное давление может содержать как распределенную и сосредоточенную составляющие, которые в дальнейшем будем обозначать как $Q(r, \tau)$ и $P(r, \tau)$ соответственно.

Учитывая свойства функции $w_c(r, \tau)$, а также носитель контактного давления, запишем уравнение для контактного давления в следующем виде:

$$\begin{aligned} p(r, \tau) &= Q(r, \tau)H(c-r) \\ Q(r, \tau) &= \left(\ddot{h}(\tau) - f''(r) - \frac{f'(r)}{r}\right) \end{aligned} \quad (27)$$

Исходя из уравнения (26) стоит отметить, что на границах штампа будут возникать сосредоточенные силы в том случае, если скорость расширения области контакта будет совпадать со скоростью звука. Таким образом, учитывающее данную особенность слагаемое, будет выглядеть согласно выражению (28).

$$P(r, \tau) = f'(c) \delta(c(\tau) - r) \quad (28)$$

Говорить о возможном наличии таких сосредоточенных сил на границе штампа при сверхзвуковом этапе взаимодействия ($c(\tau) \geq 1$) представляется возможным благодаря характеру контактного взаимодействия. Скорость увеличения пятна контакта на сверхзвуковом этапе взаимодействия выше, чем скорость распределения возмущений в мембране. Опираясь на это, будем предполагать, что форма штампа будет полностью определять деформацию мембраны на сверхзвуковом этапе взаимодействия. При этом, носители контактного давления $p(r, \tau)$ и перемещений мембраны $w(r, \tau)$ будут равны.

Учитывая вышесказанное, рассмотрим задачу о взаимодействии штампа с мембраной на сверхзвуковом этапе взаимодействия, в которой необходимо определить контактное давление $p(r, \tau)$.

Постановка такой задачи описывается аналогично соотношениям для дозвукового этапа контактного взаимодействия: (1), (3)-(11). При этом, вместо введенных гипотез о поведении мембраны на дозвуковом этапе взаимодействия, на сверхзвуковом этапе контактного взаимодействия полагаем, что прогибы мембраны полностью определяются формой штампа и глубиной его внедрения. Данные

рассуждения приводят к следующим выражениям для границы контакта (29) и перемещениям в области контакта (30).

$$\begin{aligned} h(\tau) + f(c(\tau)) &= 0 \\ c(\tau) &= -f^{-1}(h) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} w(r, \tau) &= h(\tau) + f(r), r \in [0, c(\tau)] \\ w(r, \tau) &= w_c(r, \tau)H(c(\tau) - r) \end{aligned} \quad (30)$$

Далее, опираясь на то, что прогиб мембраны и контактное давление $p(r, \tau)H(c(\tau) - r)$ имеют одинаковый носитель, определим из (20) $p(r, \tau)$:

$$\begin{aligned} p(r, \tau) &= Q(r, \tau)H(c - r) + P(r, \tau)\delta(c - r), \\ Q(r, \tau) &= \ddot{h}(\tau) - f''(r) - \frac{f'(r)}{r}, \\ P(r, \tau) &= \dot{h}(\tau)\dot{c}(\tau) + f'(c). \end{aligned} \quad (31)$$

Стоит обратить внимание, что структура нагрузки $Q(\zeta, \tau)$ совпадает с нагрузкой, полученной для дозвукового этапа контактного взаимодействия.

Если пренебречь ускорением ($\dot{c}(\tau) = 0$) в выражении (31), то получится слагаемое аналогичное выражению (28).

Таким образом, можно сделать вывод, что структура распределенного давления на сверхзвуковом и дозвуковом этапах взаимодействия остается неизменной. При этом, на границе области контакта при сверхзвуковом этапе взаимодействия контактное давление содержит сосредоточенные нагрузки.

Сверхзвуковой этап контактного взаимодействия

В качестве примера, рассмотрим задачу внедрения штампа параболической формы, описываемой функцией $f(r) = -r^2$.

Будем решать задачу (5), (7). Для этого определим реакцию мембраны на штамп $R_c(\tau)$ согласно (4):

$$\begin{aligned} R_c(\tau) &= R_Q + R_P, \\ R_Q &= -2\pi \int_0^{c(\tau)} Q(r, \tau) r dr = -2\pi \left(\frac{\ddot{h}(\tau)c(\tau)}{2} - f'(c(\tau)) \right) c(\tau) \\ R_P &= -2\pi \int_0^{\infty} P(r, \tau) \delta(c(\tau) - r) r dr = -2\pi (\dot{h}(\tau)\dot{c}(\tau) + f'(c(\tau))) c(\tau) \end{aligned} \quad (32)$$

Это приводит (5), (7) к следующей задаче Коши для сверхзвукового этапа взаимодействия:

$$\begin{aligned} \ddot{h}(\tau) &= -2\pi \frac{\dot{h}(\tau)\dot{c}(\tau)c(\tau)}{(m + \pi c^2(\tau))} \\ \dot{h}(0) &= V_0, h(0) = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Где $c(\tau)$ определяется согласно (29):

$$c(\tau) = \sqrt{h(\tau)} \quad (34)$$

После решения (33) с учетом (34) построим распределение контактного давления $Q(r, \tau)$ и $P(r, \tau)$ по времени на сверхзвуковом этапе взаимодействия – рисунки 3 и 4 соответственно

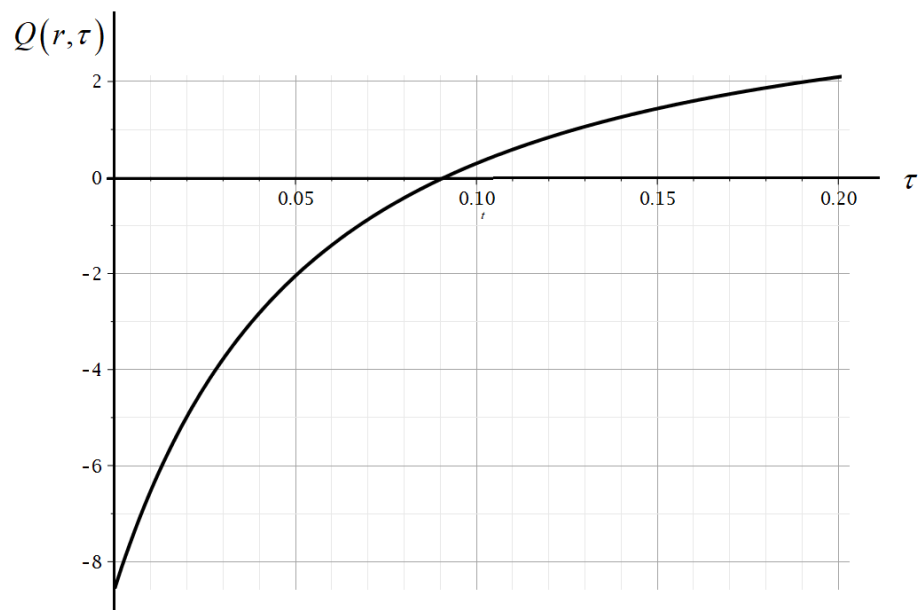


Рис. 3. Распределенная нагрузка

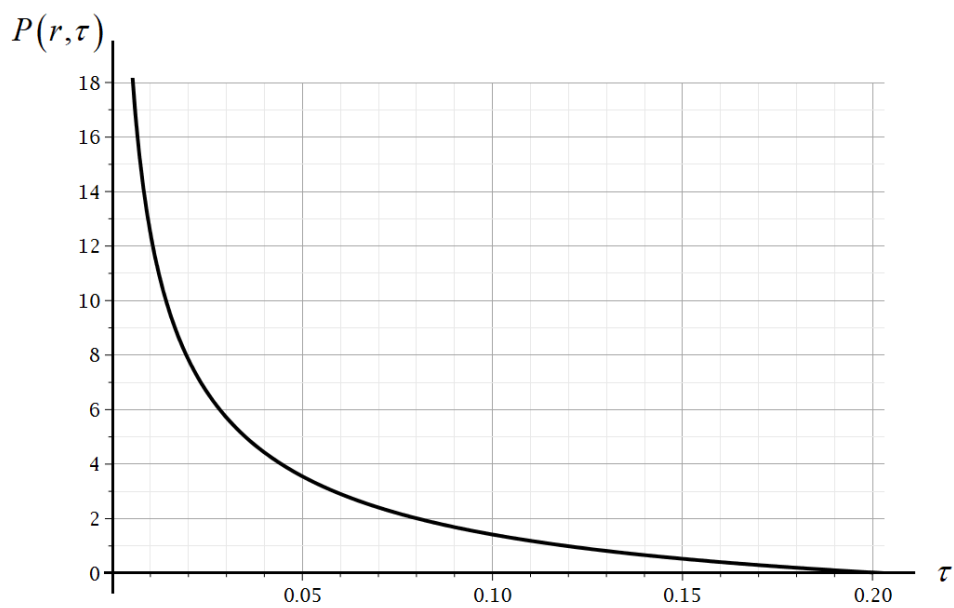


Рис. 4. Сосредоточенная нагрузка.

В рассматриваемом случае интенсивность $Q(r, \tau)$ не зависит от пространственной координаты. При этом, стоит отметить, что график $P(r, \tau)$ имеет

естественную асимптоту в начальный момент времени. Иными словами, при $\tau = 0$ значение $P(r, \tau)$ стремится к бесконечности.

Изменение реакции мембраны $R_c(\tau)$ во времени представлено на графике ниже (рис. 5).

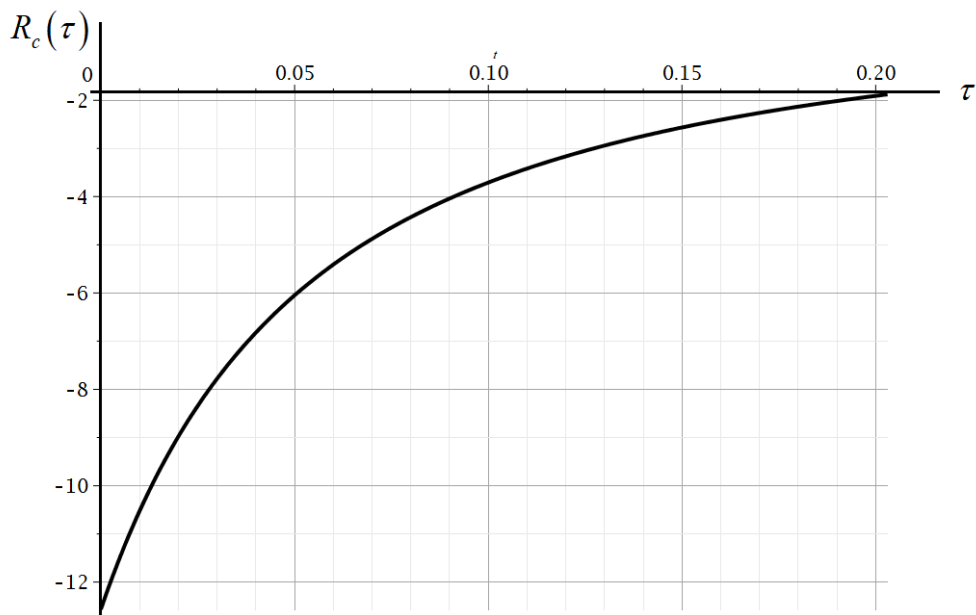


Рис. 5. Изменение реакции мембраны во времени.

Несмотря на то, что составляющие контактного давления $p(r, \tau)$ могут иметь различные знаки (Рис.3 и Рис.4.), реакция мембраны согласно Рис. 5 направлена навстречу штампу, что соответствует исследуемому процессу.

Список источников

1. Краснюк П.П. Плоская контактная задача взаимодействия наклоненного прямоугольного штампа и упругого слоя при стационарном фрикционном тепловыделении // Трение и износ. 2005. Т. 26. № 2. С. 117-127.
2. Немирович-Данченко М.М., Худорожко И.Н. Статическое смещение в контактных задачах для анизотропной среды как предельный случай решения

динамической задачи // Международная конференция «Физическая мезомеханика материалов. Физические принципы формирования многоуровневой структуры и механизмы нелинейного поведения» (Томск, 05–08 сентября 2022): тезисы докладов. – Новосибирск: Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, 2022. С. 328-329. DOI: [10.25205/978-5-4437-1353-3-197](https://doi.org/10.25205/978-5-4437-1353-3-197)

3. Пожарский Д.А. Контактная задача для трансверсально изотропного полупространства с неизвестной зоной контакта // Доклады академии наук. 2014. Т. 455. № 2. С. 158. DOI: [10.7868/S0869565214080118](https://doi.org/10.7868/S0869565214080118)

4. Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Воздействие нестационарного давления на цилиндрическую оболочку с упругим наполнителем // Ученые записки Казанского университета. Серия: физико-математические науки. 2016. Т. 158. № 1. С. 141-151.

5. Вестяк А.В., Игумнов Л.А., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Воздействие нестационарного давления на тонкую сферическую оболочку с упругим наполнителем // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т. 9. № 4. С. 443-452.

6. Арутюнян А.М., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Плоская нестационарная задача о распространении упругих волн в упругом полупространстве с полостью // Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (Самара, 18–22 сентября 2017): сборник трудов. – Самара: Самарский государственный технический университет, 2017. Т. 1. С. 50-53.

7. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.

8. Okonechnikov A.S., Tarlakovsky D.V., Fedotenkov G.V. Transient Interaction of Rigid Indenter with Elastic Half-plane with Adhesive Force // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2019, vol. 40, no. 4, 489-498. DOI: [10.1134/S1995080219030132](https://doi.org/10.1134/S1995080219030132)
9. Mikhailova E.Y., Fedotenkov G.V., Tarlakovskii D.V. Transient contact problem for spherical shell and elastic half-space // Shell Structures. Proceedings of the 11th International Conference on Shell Structures: Theory and Applications, 2017, pp. 301-304. DOI: [10.1201/9781315166605-67](https://doi.org/10.1201/9781315166605-67)
10. Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных осесимметричных возмущений от поверхности шара, заполненного псевдоупругой средой Коссера // Труды МАИ. 2012. № 53. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29267>
11. Davydov S.A., Akhmetova E.R., Zemskov A.V. Thermoelastic diffusion multicomponent half-space under the effect of surface and bulk unsteady perturbations // Mathematical and Computational Applications, 2019, vol. 24 (1), pp. 26. DOI: [10.3390/mca24010026](https://doi.org/10.3390/mca24010026)
12. Yulong L.I, Arutiunian A.M., Kuznetsova El.L., Fedotenkov G.V. Method for solving plane unsteady contact problems for rigid stamp and elastic half-space with a cavity of arbitrary geometry and location // INCAS BULLETIN, 2020, vol. 12, special issue, pp. 99-113. DOI: [10.13111/2066-8201.2020.12.S.9](https://doi.org/10.13111/2066-8201.2020.12.S.9)
13. Гольдштейн Р.В. Волны Рэлея и резонансные явления в упругих телах // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29. № 3. С. 516–525.

14. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2014, vol. 43, no. 2, pp. 145–152. DOI: [10.3103/S1052618814010178](https://doi.org/10.3103/S1052618814010178)
15. Солдатенков И.А. Задача о неравномерном скольжении штампа по вязкоупругому основанию с приложениями к расчету динамики подвижного контакта // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81. № 3. С. 257-277.
16. Аверьянов И.О. Зинин А.В. Математическая модель процесса приземления недеформируемого груза с амортизирующим устройством на жесткую площадку // Труды МАИ. 2022. № 124. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=167067>. DOI: [10.34759/trd-2022-124-12](https://doi.org/10.34759/trd-2022-124-12)
17. Локтева Н.А., Иванов С.И. Шумопоглощающие свойства однородной пластины с произвольными граничными условиями под воздействием плоской гармонической волны в акустической среде // Труды МАИ. 2021. № 117. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=122234>. DOI: [10.34759/trd-2021-117-05](https://doi.org/10.34759/trd-2021-117-05)
18. Мартиросов М.И., Хомченко А.В. Расчётно-экспериментальное исследование поведения плоской подкреплённой панели из углепластика при ударе // Труды МАИ. 2022. № 126. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=168990>. DOI: [10.34759/trd-2022-126-04](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-04)
19. Фирсанов В.В., Фам В.Т., Чан Н.Д. Анализ напряженно-деформированного состояния многослойных композитных сферических оболочек на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2021. № 114. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=118893>. DOI: [10.34759/trd-2020-114-07](https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-07)

20. Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Скопинцев П.Д., Федотенков Г.В. Нестационарное деформирование анизотропной круговой цилиндрической оболочки // Труды МАИ. 2021. № 120. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=161423>. DOI: [10.34759/trd-2021-120-09](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-09)

References

1. Krasnyuk P.P. *Trenie i iznos*, 2005, vol. 26, no. 2, pp. 117-127.
2. Nemirovich-Danchenko M.M., Khudorozhko I.N. *Mezhdunarodnaya konferentsiya «Fizicheskaya mezomekhanika materialov. Fizicheskie printsipy formirovaniya mnogourovnevoi struktury i mekhanizmy nelineinogo povedeniya»*: tezisы докладov. Novosibirsk, Novosibirskii natsional'nyi issledovatel'skii gosudarstvennyi universitet, 2022, pp. 328-329. DOI: [10.25205/978-5-4437-1353-3-197](https://doi.org/10.25205/978-5-4437-1353-3-197)
3. Pozharskii D.A. *Doklady akademii nauk*, 2014, vol. 455, no. 2, pp. 158. DOI: [10.7868/S0869565214080118](https://doi.org/10.7868/S0869565214080118)
4. Tarlakovskii D.V., Fedotenko G.V. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: fiziko-matematicheskie nauki*, 2016, vol. 158, no. 1, pp. 141-151.
5. Vestyak A.V., Igumnov L.A., Tarlakovskii D.V., Fedotenko G.V. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*, 2016, vol. 9, no. 4, pp. 443-452.
6. Arutyunyan A.M., Tarlakovskii D.V., Fedotenko G.V. *Materialy X Vserossiiskoi konferentsii po mekhanike deformiruемого tverdogo tela: sbornik trudov*. Samara, Samarskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet, 2017, vol. 1, pp. 50-53.

7. Gorshkov A.G., Medvedskii A.L., Rabinskii L.N., Tarlakovskii D.V. *Volny v sploshnykh sredakh* (Waves in continuous media), Moscow, Fizmatlit, 2004, 472 p.
8. Okonechnikov A.S., Tarlakovsky D.V., Fedotenkov G.V. Transient Interaction of Rigid Indenter with Elastic Half-plane with Adhesive Force, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2019, vol. 40, no. 4, 489-498. DOI: [10.1134/S1995080219030132](https://doi.org/10.1134/S1995080219030132)
9. Mikhailova E.Y., Fedotenkov G.V., Tarlakovskii D.V. Transient contact problem for spherical shell and elastic half-space, *Shell Structures. Proceedings of the 11th International Conference on Shell Structures: Theory and Applications*, 2017, pp. 301-304. DOI: [10.1201/9781315166605-67](https://doi.org/10.1201/9781315166605-67)
10. Lai Tkhan' Tuan, Tarlakovskii D.V. *Trudy MAI*, 2012, no. 53. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=29267>
11. Davydov S.A., Akhmetova E.R., Zemskov A.V. Thermoelastic diffusion multicomponent half-space under the effect of surface and bulk unsteady perturbations, *Mathematical and Computational Applications*, 2019, vol. 24 (1), pp. 26. DOI: [10.3390/mca24010026](https://doi.org/10.3390/mca24010026)
12. Yulong L.I., Arutiunian A.M., Kuznetsova El.L., Fedotenkov G.V. Method for solving plane unsteady contact problems for rigid stamp and elastic half-space with a cavity of arbitrary geometry and location, *INCAS BULLETIN*, 2020, vol. 12, special issue, pp. 99-113. DOI: [10.13111/2066-8201.2020.12.S.9](https://doi.org/10.13111/2066-8201.2020.12.S.9)
13. Gol'dshtein R.V. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1965, vol. 29, no. 3, pp. 516–525.

14. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells, *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, vol. 43, no. 2, pp. 145–152. DOI: [10.3103/S1052618814010178](https://doi.org/10.3103/S1052618814010178)
15. Soldatenkov I.A. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2017, vol. 81, no. 3, pp. 257-277.
16. Aver'yanov I.O. Zinin A.V. *Trudy MAI*, 2022, no. 124. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=167067>. DOI: [10.34759/trd-2022-124-12](https://doi.org/10.34759/trd-2022-124-12)
17. Lokteva N.A., Ivanov S.I. *Trudy MAI*, 2021, no. 117. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=122234>. DOI: [10.34759/trd-2021-117-05](https://doi.org/10.34759/trd-2021-117-05)
18. Martirosov M.I., Khomchenko A.V. *Trudy MAI*, 2022, no. 126. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=168990>. DOI: [10.34759/trd-2022-126-04](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-04)
19. Firsanov V.V., Fam V.T., Chan N.D. *Trudy MAI*, 2021, no. 114. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=118893>. DOI: [10.34759/trd-2020-114-07](https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-07)
20. Lokteva N.A., Serdyuk D.O., Skopintsev P.D., Fedotenkov G.V. *Trudy MAI*, 2021, no. 120. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=161423>. DOI: [10.34759/trd-2021-120-09](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-09)

Статья поступила в редакцию 23.09.2024

Одобрена после рецензирования 25.09.2024

Принята к публикации 25.10.2024

The article was submitted on 23.09.2024; approved after reviewing on 25.09.2024; accepted for publication on 25.10.2024