

На правах рукописи
УДК 531.011 : 532.3 : 519.6



Ветчанин Евгений Владимирович

**КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ХАРАКТЕРНЫХ
ОСОБЕННОСТЕЙ ПОВЕДЕНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ
И НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ
УПРАВЛЕНИЯМИ НА ОСНОВЕ КОНЕЧНОМЕРНЫХ
МОДЕЛЕЙ**

Специальность 01.02.01 — Теоретическая механика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Ижевск — 2022 год

Работа выполнена на кафедре теоретической физики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Удмуртский государственный университет».

Научный консультант

Мамаев Иван Сергеевич, доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник НУЛ «Мобильные системы» ФГБОУ ВО «Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова»

Официальные оппоненты:

Влахова Анастасия Владимировна, доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», профессор кафедры прикладной механики и управления

Цыганов Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет», профессор кафедры вычислительной физики

Соколовский Михаил Абрамович, доктор физико-математических наук, ФГБУН «Институт водных проблем Российской академии наук», главный научный сотрудник

Ведущая организация:

ФГБУН «Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук»

Защита диссертации состоится «20» мая 2022 г. в 12 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.125.14 на базе ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МАИ и на сайте МАИ https://mai.ru/events/defence/doctor/index.php?ELEMENT_ID=162617.

Автореферат разослан « » 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д. ф.-м. н.



Гидаспов Владимир Юрьевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

В настоящее время, благодаря развитию электроники и схемотехники, большое внимание уделяется разработке различных автономных и управляемых мобильных роботов, передвигающихся в водной (воздушной) среде или по твердым поверхностям.

Традиционным средством создания тяговой силы при перемещении в жидкости являются гребные винты, в применении которых были достигнуты существенные успехи, в основном благодаря потребностям оборонно-промышленного комплекса. Автономные необитаемые подводные аппараты, предназначенные для исследования океана, как правило, оснащаются гребными винтами¹.

В последние два десятилетия изучается идея самопродвижения в жидкости твердых тел за счет движения внутренних масс или вращения внутренних роторов. При таком способе передвижения предполагается, что система может вообще не иметь внешних подвижных элементов. Отметим, что данный способ передвижения восходит к работам советского инженера В. Н. Толчина². Современные теоретические исследования данного способа передвижения представлены, в частности, в работе академика РАН В. В. Козлова³, работе академика РАН Ф. Л. Черноушко⁴ и некоторых зарубежных работах^{5,6}. Результаты экспериментальных исследований таких систем представлены, например, в работах^{7,8}.

Для реализации передвижения механических систем по твердым поверхностям традиционно используются колесные и гусеничные приво-

¹Киселев Л. В., Медведев А. В. Сравнительный анализ и оптимизация динамических свойств автономных подводных роботов различных проектов и конфигураций // Подводные исследования и робототехника, 2012, т. 13, №1, с. 24–35.

²Толчин В. Н. Инерциод, Пермь: Пермское книжное издательство, 1977.

³Козлов В. В., Рамоданов С. М. О движении изменяемого тела в идеальной жидкости // ПММ, 2001, т. 65, вып. 4, с. 529–601.

⁴Черноушко Ф. Л. Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде // ПММ, 2008, т. 72, №2, с. 202–215.

⁵Childress S., Spagnolie S. E., Tokieda T. A bug on a raft: recoil locomotion in a viscous fluid // Journal of Fluid Mechanics, 2011, vol. 669, pp. 527–556.

⁶Tallapragada P., Kelly S. D. Self-propulsion of free solid bodies with internal rotors via localized singular vortex shedding in planar ideal fluids // The European Physical Journal Special Topics, 2015, vol. 224, no. 17, pp. 3185–3197.

⁷Klenov A. I., Kilin A. A. Influence of Vortex Structures on the Controlled Motion of an Above-water Screwless Robot, Regular and Chaotic Dynamics, 2016, vol. 21, no. 7–8, pp. 927–938.

⁸Karavaev Y. L., Klekovkin A. V., Mamaev I. S., Tenenev V. A., Vetchanin E. V. A Simple Physical Model for Control of an Propellerless Aquatic Robot, Journal of Mechanisms and Robotics, 2022, vol. 14, no. 1, 011007, 11 pp.

ды. Однако, является интересной идея разработки сферических роботов, для управления движением которых также могут применяться внутренние роторы и подвижные внутренние массы. Теоретические и экспериментальные исследования таких систем описаны, например, в работах^{9,10,11,12,13}.

С математической точки зрения задача об управлении движением механической системы с помощью внутренних масс и роторов сводится к выбору законов изменения положения центра масс, моментов инерции и гиростатического момента системы. При этом законы управления, обеспечивающие движение в окрестности траекторий даже простой формы (прямая, дуга окружности), оказываются нетривиальными. С инженерной точки зрения наиболее простыми в реализации являются периодические законы управления. Отметим, что движение внутренних механизмов, в частности периодическое, может приводить к возникновению параметрического резонанса, различных асимптотически устойчивых или хаотических режимов движения. Таким образом, наряду с задачей построения явных управлений (программных или на основе обратных связей) также возникают задачи исследования устойчивости движения и стабилизации частных движений.

По указанным выше причинам актуальным является построение и анализ математических моделей, описывающих передвижение твердых тел за счет внутренних механизмов. Здесь предпочтительными являются конечномерные модели на основе обыкновенных дифференциальных уравнений как наиболее «легкие» модели с вычислительной точки зрения, что позволяет проводить вычисления в реальном времени. Кроме того, такие математические модели позволяют получить удовлетворительное ка-

⁹Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to Control Chaplygin's Sphere Using Rotors // *Regular and Chaotic Dynamics*, 2012, vol. 17, no. 3–4, pp. 258–272.

¹⁰Kilin A. A., Pivovarova E. N., Ivanova T. B. Spherical Robot of Combined Type: Dynamics and Control // *Regular and Chaotic Dynamics*, 2015, vol. 20, no. 6, pp. 716–728.

¹¹Putkaradze V., Rogers S. M. On the Normal Force and Static Friction Acting on a Rolling Ball Actuated by Internal Point Masses // *Regular and Chaotic Dynamics*, 2019, vol. 24, no. 2, pp. 145–170.

¹²Morinaga A., Svinin M., Yamamoto M. A Motion Planning Strategy for a Spherical Rolling Robot Driven by Two Internal Rotors // *IEEE Transactions on Robotics*, 2014, vol. 30, no. 4, pp. 993–1002.

¹³Караваев Ю. Л., Килин А. А. Неголономная динамика и управление сферороботом с внутренней омниколесной платформой: теория и эксперименты // *Труды Математического института имени В. А. Стеклова*, 2016, т. 295, с. 174–183.

качественное и количественное согласование с экспериментом^{14,15,16}. Также конечномерные модели позволяют выполнить сравнительно полный качественный анализ динамики с помощью широкого спектра аналитических методов теории обыкновенных дифференциальных уравнений и численных методов теории динамических систем.

Цели работы.

Целью работы является анализ поведения динамических систем с периодическими управлениями на основе конечномерных моделей обыкновенных дифференциальных уравнений; выявление особенностей, характеризующих плоскопараллельное движение в жидкости твердого тела с внутренним ротором и периодически изменяющейся циркуляцией, твердого тела с подвижной внутренней массой, совершающей периодическое движение относительно тела, твердого тела, на которое действуют периодические внешние сила и момент силы, вращения твердого тела с неподвижной точкой и периодически изменяющимися моментами инерции, качения по плоскости уравновешенного и неуравновешенного сферических тел с периодически изменяющимися моментами инерции и гиросtatическим моментом.

Научная новизна.

На основе аналитических и численных методов качественного анализа исследовано поведение конечномерных динамических систем с периодическими коэффициентами, описывающих:

- плоскопараллельное движение в жидкости твердого тела с внутренним ротором при наличии периодически изменяющейся циркуляции;
- плоскопараллельное движение в жидкости твердого тела с периодически движущейся внутренней массой при наличии постоянной циркуляции;
- плоскопараллельное движение в жидкости твердого тела под действием внешних периодических силы и момента сил при наличии постоянной циркуляции;
- вращение твердого тела с неподвижной точкой и периодически изменяющимися моментами инерции при постоянном гиросtatическом

¹⁴Rauch-Wojciechowski S., Skoeldstam M., Glad T. Mathematical analysis of the tippe top // Regular and Chaotic Dynamics, 2005, vol. 10, no. 4, pp. 333–362.

¹⁵Карапетян А. В. Глобальный качественный анализ динамики китайского волчка (тип-топ) // МТТ, 2008, вып. 3, с. 33–41.

¹⁶Karavaev Y. L., Klekovkin A. V., Mamaev I. S., Tenenev V. A., Vetchanin E. V. A Simple Physical Model for Control of an Propellerless Aquatic Robot, Journal of Mechanisms and Robotics, 2022, vol. 14, no. 1, 011007, 11 pp.

- моменте;
- качение уравновешенного и неуравновешенного сферического тела по плоскости без проскальзывания и верчения в случае периодически изменяющихся моментов инерции и гиостатического момента.

Систематически исследована задача о плоскопараллельном движении гладкого твердого тела с периодически движущимися внутренними механизмами. Показано, что в случае постоянной циркуляции движение тела в идеальной жидкости будет совершаться в ограниченной области, независимо от выбора управляющих воздействий. В случае периодических изменений кинетического момента ротора и циркуляции оказывается возможным в среднем прямолинейное движение тела в вязкой жидкости. Показано, что в среднем прямолинейное движение твердого тела в вязкой жидкости может быть создано также за счет колебаний внутренней массы.

Исследована задача о движении гладкого профиля в жидкости под действием внешних периодических силы и момента сил. Показано, что для случая профиля круговой формы, движущегося в идеальной жидкости, уравнения движения могут быть проинтегрированы в явном виде. Обнаружено, что в случае внешнего момента с ненулевым средним значением возникает асимптотическая устойчивость по части переменных. Установлено, что в случае профиля эллиптической формы, движущегося в идеальной жидкости, вдоль одной из главных осей которого действует внешняя сила, а внешний момент отсутствует, может возникать хаотическое поведение. Показано, что при добавлении в модель диссипации, движения системы могут терять устойчивость вследствие перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода.

С помощью численных и аналитических методов показано, что периодические изменения моментов инерции твердого тела с неподвижной точкой и уравновешенного сферического тела, движущегося по плоскости без проскальзывания и верчения, могут приводить к потере устойчивости некоторых частных решений вследствие параметрического резонанса. Кроме того, установлено, что стабилизация неустойчивых движений оказывается невозможной при изменении моментов инерции с малой амплитудой. Для уравновешенного сферического тела указаны иные механизмы потери устойчивости, в частности, возникновение неконсервативных хаотических режимов движения через каскад бифуркаций удвоения периода, либо через конечное число бифуркаций удвоения тора.

Для неуравновешенного сферического тела, движущегося по плоскости без проскальзывания и верчения, показано, что неустойчивое верхнее

положение равновесия может быть стабилизировано за счет периодических изменений гиростатического момента, при этом движение тела становится близким к прецессионному. В то же время, неуравновешенного сферическое тело может быть выведено из устойчивого нижнего положения равновесия за счет периодического изменения моментов инерции.

Показано, что характерной особенностью голономных и неголономных систем с периодически изменяющимися моментами инерции является потеря устойчивости некоторых режимов движения вследствие параметрического резонанса. При это области неустойчивости в пространстве параметров имеют форму так называемых «языков Арнольда».

Положения и результаты, выносимые на защиту.

1. Исследовано плоскопараллельное движение эллиптического профиля за счет колебаний внутреннего ротора в среде с периодически изменяющейся циркуляцией и линейным по скоростям вязким трением. Показано, что в отсутствие вязкого трения и при постоянной циркуляции фазовые траектории системы и траектория движения тела являются компактными. Показано, что при наличии вязкого трения и периодически изменяющейся циркуляции возможно в среднем прямолинейное движение профиля за счет колебаний внутреннего ротора. Указаны условия, при выполнении которых данное движение реализуется для кругового профиля. Выполнен численный анализ возможности неограниченного перемещения эллиптического профиля. Показано, что в системе могут возникать странные аттракторы по сценарию Фейгенбаума.
2. Исследовано плоскопараллельное движение эллиптического профиля в сопротивляющейся среде за счет колебаний внутренней массы. Показано, что при наличии постоянной циркуляции и в отсутствие трения поступательная и угловая скорость профиля являются ограниченными функциями времени, а движение будет совершаться в ограниченной области. Проведен качественный анализ динамики при наличии вязкого трения линейного по скоростям. Показано, что в системе могут возникать странные аттракторы.
3. Исследовано плоскопараллельное движение эллиптического профиля в жидкости за счет внешнего периодического воздействия. Изучено движение кругового профиля в отсутствие вязкого трения. Показано, что в этом случае в системе могут возникать резонансы, приводящие к неограниченному росту поступательной скорости и неограниченному перемещению. Обнаружено, что в случае внешнего момента с ненулевым средним значением в системе возника-

ет асимптотическая устойчивость по части переменных. Выполнен анализ динамики эллиптического профиля в идеальной жидкости в случае, когда внешнее возмущение действует вдоль одной из главных осей тела. Показано, что при наличии вязкого трения в системе могут возникать аттракторы, как регулярные, так и хаотические.

4. Исследована устойчивость вращения твердого тела с неподвижной точкой и периодически изменяющимися моментами инерции. Показано, что анализ устойчивости перманентных вращений сводится к анализу устойчивости нулевого решения уравнения Хилла. Обнаружено, что перманентные вращения и периодические решения могут терять устойчивость вследствие параметрического резонанса. Границы областей неустойчивости на плоскости параметров построены аналитически с помощью метода гармонического баланса. Показано, что неустойчивые перманентные вращения могут быть стабилизированы при подходящем выборе амплитуды изменения моментов инерции. При наличии вязкого трения и постоянного внешнего момента, действующего вдоль одной из главных осей инерции, сохраняется только одно перманентное вращение. В данном случае форма областей неустойчивости существенно зависит от величин коэффициентов трения.
5. Исследована устойчивость плоскопараллельных движений уравновешенного сферического тела с периодически изменяющимися моментами инерции и гиросtatическим моментом. Показано, что в общем случае плоскопараллельные движения являются квазипериодическими, а их устойчивость может быть оценена численно. Показано, что система является неконсервативной. Неконсервативность проявляется в виде существования инвариантных множеств в фазовом пространстве: предельных циклов, притягивающих торов, странных аттракторов. Показано, что странные аттракторы могут возникать через каскад бифуркаций удвоения периода или после конечного числа бифуркаций удвоения тора.
6. Исследована устойчивость положений равновесия сферического тела со смещенным центром масс, периодически изменяющимися моментами инерции и гиросtatическим моментом. Показано, что с помощью периодических изменений гиросtatического момента можно стабилизировать сферическое тело в окрестности верхнего положения равновесия. При этом будет совершаться движение близкое к прецессионному. Кроме того, показано, что нижнее положение равновесия может становиться неустойчивым в случае периодически изменяющихся моментов инерции. Указаны условия, при выпол-

нении которых система допускает инвариантное подмногообразие, движение на котором является плоскопараллельным. Под действием периодических управлений движение на данном подмногообразии может становиться хаотическим вследствие расщепления сепаратрис.

Теоретическая и практическая значимость диссертационной работы.

Работа носит теоретический характер. Ее методы и результаты могут быть использованы в теории динамических систем, вычислительной механике и робототехнике.

Обнаруженные динамические эффекты могут представлять интерес при проектировании систем управления мобильных роботов. Полученные результаты также представляют интерес с точки зрения дальнейшего развития теории управления различными средствами передвижения.

Методология и методы исследования.

В работе использовались методы теории возмущения гамильтоновых систем, в частности КАМ-теорема, и аналитические методы теории дифференциальных уравнений. В работе применялись метод Пуанкаре разложения по малому параметру и метод гармонического баланса. Были применены численные методы качественного анализа систем обыкновенных дифференциальных уравнений и исследования их периодических решений: отображение Пуанкаре, метод продолжения по параметру, построение карт динамических режимов, построение диаграмм устойчивости на основе вычисления следа матрицы монодромии, метод Бенеттина для вычисления показателей Ляпунова и карт показателей Ляпунова. Для анализа бифуркаций, наблюдаемых в рассматриваемых системах, были построены бифуркационные диаграммы. Для численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений применялись явные и неявные методы Рунге-Кутты, в том числе методы коллокации, обеспечивающие сохранение квадратичных инвариантов.

Для проведения компьютерных расчетов применялись программный пакет «Компьютерная динамика: Хаос»

<http://lab.ics.org.ru/lab/page/kompyuternaya-dinamika/>,

собственные программные средства соискателя, написанные на C++ и реализующие параллельный параметрический анализ динамики, а также пакет `gnu octave`. Для проведения вычислений применялся кластер рабочих станций, состоящий из четырех узлов.

Степень достоверности и апробация результатов.

Достоверность и обоснованность результатов, полученных в диссертационной работе, обеспечивается использованием строго доказанных теорем и утверждений. Исследуемые математические модели имеют физическую трактовку и не противоречат известным результатам.

Основные результаты работы обсуждались на семинарах Института компьютерных исследований УдГУ, семинарах диссертационного совета Д 212.125.14, семинаре имени В. В. Румянцева по аналитической механике и теории устойчивости, докладывались на всероссийских и международных конференциях:

1. VIIth International Conference «Geometry, Dynamics, Integrable Systems — GDIS 2018», June 5–9, 2018, Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow (Dolgoprudny), Russia.
2. International Conference «Scientific Heritage of Sergey A. Chaplygin: nonholonomic mechanics, vortex structures and hydrodynamics», June 2–6, 2019, I. N. Ulianov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.
3. Всероссийская конференция с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященная памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова, 15–19 июня 2020 г., г. Ижевск, Россия
4. The First International Conference «Nonlinearity, Information and Robotics», 3–6 December 2020, Innopolis, Russia.
5. The Second International Conference «Nonlinearity, Information and Robotics», 26–29 August 2021, Innopolis, Russia.

Личный вклад автора.

В работе [1] автором выполнен качественный анализ движения эллиптического профиля в идеальной жидкости под действием периодических колебаний ротора в присутствии постоянной циркуляции. Построено приближенное решение уравнений, описывающих движение кругового профиля в вязкой жидкости под действием периодического управления и периодически изменяющейся циркуляции. Выполнен компьютерный анализ движения эллиптического профиля в вязкой жидкости под действием периодического изменения гиростатического момента и периодически изменяющейся циркуляции.

В работе [2] автором выполнен компьютерный анализ движения эллиптического профиля в вязкой жидкости при постоянной циркуляции и под действием колебаний внутренней материальной точки.

В работе [3] автором проведен качественный анализ движения уравновешенного кругового профиля в идеальной жидкости под действием внешних периодических силы и момента сил. В работе [4] автором проведено аналитическое и численное исследование движения эллиптического профиля в идеальной и вязкой жидкости под действием внешних периодических силы и момента сил, проанализированы интегрируемые случаи и их периодические возмущения. В работе [5] автором построены точные решения уравнений движения уравновешенного кругового профиля в жидкости под действием внешних периодических силы и момента сил в форме однократных и двукратных рядов. В работе [9] автором исследовано явление асимптотической устойчивости по части переменных в математической модели, описывающей движение уравновешенного кругового профиля в идеальной жидкости под действием периодического внешнего момента сил с ненулевой средней величиной.

В работе [6] автором исследована динамика тела с неподвижной точкой и периодически изменяющимися моментами инерции и гиростатическим моментом, найдены резонансные частоты и построены диаграммы устойчивости. В работе [13] автором исследовано влияние трения и постоянного внешнего момента сил на динамику тела с неподвижной точкой и периодически изменяющимися моментами инерции. В работе [14] автором на основе метода гармонического баланса аналитически построены границы областей неустойчивости для тела с неподвижной точкой и периодически изменяющимися моментами инерции.

В работах [7, 15] автором выполнена численная оценка устойчивости плоскопараллельных движений уравновешенного сферического тела с периодически изменяющимися моментами инерции и гиростатическим моментом, катящегося по плоскости без проскальзывания и верчения. В работе [15] совместно с соавтором выполнен компьютерный анализ движения уравновешенного сферического тела с периодически изменяющимися моментами инерции и гиростатическим моментом, показана неконсервативность динамики.

В работе [8] автором выполнен анализ устойчивости верхнего положения равновесия неуравновешенного сферического тела, движущегося по плоскости без проскальзывания и верчения, за счет периодически изменяющегося гиростатического момента. В работе [8] совместно с соавторами выполнен анализ устойчивости нижнего положения равновесия неуравновешенного сферического тела, движущегося по плоскости без проскальзы-

вания и вращения, в случае периодически изменяющихся моментов инерции. В работе [8] совместно с соавторами доказана неинтегрируемость уравнений движения неуравновешенного сферического тела.

Все результаты и положения, выносимые на защиту, принадлежат лично автору диссертации.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, двух частей основного текста, разбитых на шесть глав, заключения и списка литературы из 202 наименования. Работа содержит 145 рисунков. Общем объем диссертации 252 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В *первой* главе рассмотрена задача о плоскопараллельном движении в жидкости эллиптического профиля с внутренним ротором при наличии циркуляции, зависящей от времени.

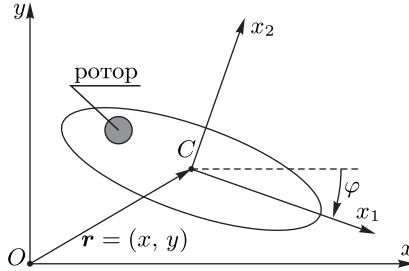


Рисунок 1 – Схематическое изображение эллиптического профиля с ротором, движущегося в жидкости. Oxy — неподвижная система координат, Cx_1x_2 — подвижная система координат, жестко связанная с профилем.

Построены уравнения движения рассматриваемой системы:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= p_2 \frac{\partial H}{\partial M} - \Gamma(t) \frac{\partial H}{\partial p_2} - \mu_1 \frac{\partial H}{\partial p_1}, \\ \dot{p}_2 &= -p_1 \frac{\partial H}{\partial M} + \Gamma(t) \frac{\partial H}{\partial p_1} - \mu_2 \frac{\partial H}{\partial p_2}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{M} &= p_1 \frac{\partial H}{\partial p_2} - p_2 \frac{\partial H}{\partial p_1} - \mu_3 \frac{\partial H}{\partial M}, \\ \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_1} \cos \varphi - \frac{\partial H}{\partial p_2} \sin \varphi, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_1} \sin \varphi + \frac{\partial H}{\partial p_2} \cos \varphi, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial M}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$H = \frac{1}{2\Delta} (\mathbf{P}, \mathbf{CP}), \quad \mathbf{P} = (p_1, p_2, M - k(t)), \quad (3)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} BI - c_1^2 & -c_1c_2 & Bc_2 \\ -c_1c_2 & AI - c_2^2 & -Ac_1 \\ Bc_2 & -Ac_1 & AB \end{pmatrix}, \quad \Delta = ABI - Ac_1^2 - Bc_2^2. \quad (4)$$

Здесь p_1, p_2 — проекции импульса системы на оси, жестко связанные с профилем (см. рис. 1), M — момент импульса системы, x, y — координаты геометрического центра профиля относительно неподвижной системы координат, φ — угол поворота профиля относительно неподвижной системы координат, c_1, c_2 — координаты центра масс системы, A, B — коэффициенты, учитывающие массу системы и присоединенные массы, I — коэффициент, учитывающий момент инерции системы и присоединенный момент инерции, вычисленные относительно геометрического центра профиля, $k(t)$ — кинетический момент ротора, $\Gamma(t)$ — циркуляция, μ_1, μ_2, μ_3 — коэффициенты сопротивления.

В отсутствие трения ($\mu_1 = \mu_2 = 0, \mu_3 = 0$) система уравнений (1), (2) является гамильтоновой, а функция (3) является ее гамильтонианом.

Указано, что в случае постоянной циркуляции $\Gamma(t) = \Gamma_0 = \text{const}$ и в отсутствие вязкого трения $\mu_1 = \mu_2 = 0, \mu_3 = 0$ полная система уравнений (1), (2) допускает следующие первые интегралы:

$$\begin{aligned} P_x &= p_1 \cos \varphi - p_2 \sin \varphi + \Gamma_0 y = \text{const}, \\ P_y &= p_1 \sin \varphi + p_2 \cos \varphi - \Gamma_0 x = \text{const}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$F = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + \Gamma_0 M = \text{const}. \quad (6)$$

С помощью КАМ-теоремы показано, что в отсутствие вязкого трения и при постоянной циркуляции фазовая траектория системы и траектория тела являются компактными. Компактность фазовых траекторий, в частности, обуславливает существование инвариантных кривых при больших значениях M на отображении Пуанкаре за период (см. рис. 2).

Рассмотрен случай движения неуравновешенного кругового профиля в вязкой жидкости в случае, когда кинетический момент внутреннего ротора и циркуляция изменяются периодически с одинаковой частотой:

$$k(t) = \varepsilon_k \sin wt, \quad \Gamma(t) = \Gamma_0 + \varepsilon_\Gamma \sin(wt + \delta).$$

Построено приближенное решение в виде разложения по малому параметру ε_1 , указаны соотношения параметров системы, при которых удается

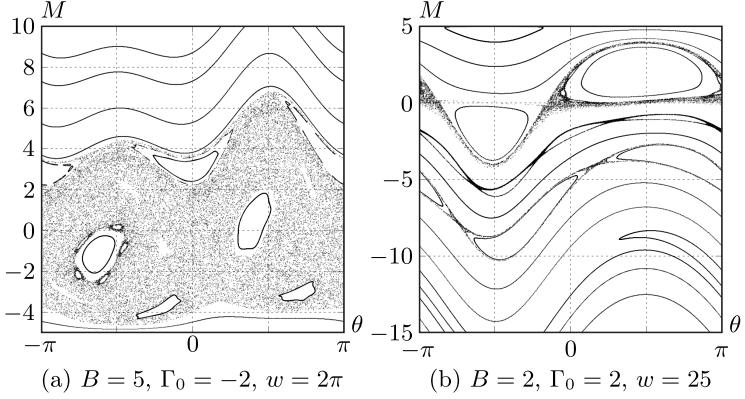


Рисунок 2 – Отображения Пуанкаре через период для системы (1) при $A = 1, I = 1, c_1 = 1, c_2 = 0, f = 10$. Гиросtatический момент изменяется по закону $k = \sin wt$. Угол θ параметризует фиксированный уровень f интеграла (6) следующим образом: $p_1 = \sqrt{2(f - \Gamma_0 M)} \cos \theta$, $p_2 = \sqrt{2(f - \Gamma_0 M)} \sin \theta$.

такое решение построить:

$$\begin{aligned}
 v_1(t) &= \frac{c_1 \varepsilon_k^2 w^2}{2(\mu_3^2 + I^2 w^2)} \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{\sin(2wt + 2\alpha + \beta)}{\sqrt{\mu_1^2 + 4A^2 w^2}} \right), \\
 v_2(t) &= \frac{c_1 \varepsilon_k w^2}{\sqrt{\mu_3^2 + I^2 w^2}} \frac{\sin(wt + \alpha + \gamma)}{\sqrt{\mu_1^2 + A^2 w^2}}, \\
 \omega(t) &= -\frac{\varepsilon_k w}{\sqrt{\mu_3^2 + I^2 w^2}} \sin(wt + \alpha), \\
 \alpha &= \operatorname{arctg} \frac{\mu_3}{Iw}, \quad \beta = \operatorname{arctg} \frac{\mu_1}{2Aw}, \quad \gamma = \operatorname{arctg} \frac{\mu_1}{Aw}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Показано, что данное решение уравнений движения соответствует в среднем прямолинейному движению неуровновешенного кругового профиля. Численно исследована возможность в среднем прямолинейного движения эллиптического профиля в вязкой жидкости при произвольных значениях параметров системы.

Показано, что в системе могут возникать как регулярные, так и хаотические аттракторы (см. рис. 3 и 4). Одним из механизмов возникновения хаотических аттракторов является сценарий Фейгенбаума.

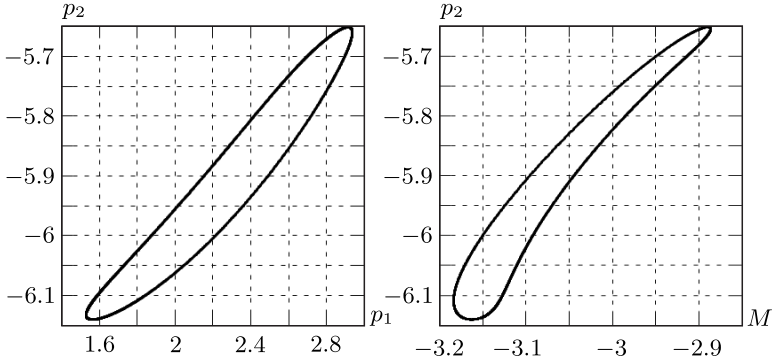


Рисунок 3 – Отображение Пуанкаре для значений параметров $A = 1$, $B = 2$, $I = 0.548$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0.01$, $w = 2\pi$, $\varepsilon_k = 1$, $\varepsilon_\Gamma = 1$, $\Gamma_0 = 0$, $\mu_1 = 0.01$, $\mu_2 = 0.01$, $\mu_3 = 0.01$, $\delta = \pi$. Показатели Ляпунова имеют следующие значения: $\lambda_1 = 0 \pm 0.0174$, $\lambda_2 = -0.0682 \pm 0.0187$, $\lambda_3 = -0.2108 \pm 0.0071$.

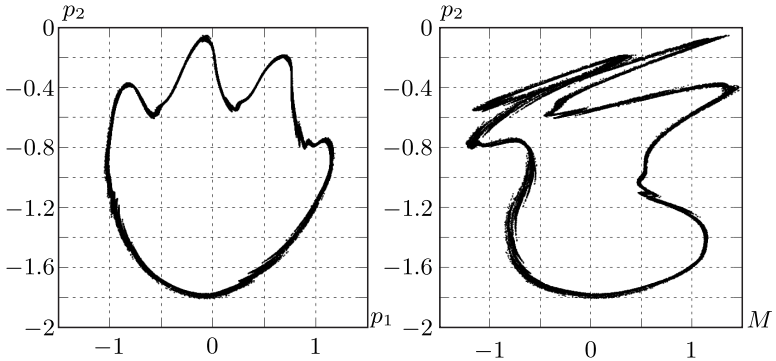


Рисунок 4 – Отображение Пуанкаре для значений параметров $A = 1$, $B = 2$, $I = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0.010064$, $w = 2\pi$, $\varepsilon_k = 1$, $\varepsilon_\Gamma = 1.8$, $\Gamma_0 = 0$, $\mu_1 = 0.01$, $\mu_2 = 0.01$, $\mu_3 = 0.01$, $\delta = \pi$. Показатели Ляпунова имеют следующие значения: $\lambda_1 = 0.024 \pm 0.015$, $\lambda_2 = -0.023 \pm 0.013$, $\lambda_3 = -0.041 \pm 0.010$. Ляпуновская размерность $D = 1.375$.

Во *второй* главе рассмотрена задача о плоскопараллельном движении в жидкости гладкого профиля с подвижной внутренней массой при наличии постоянной циркуляции.

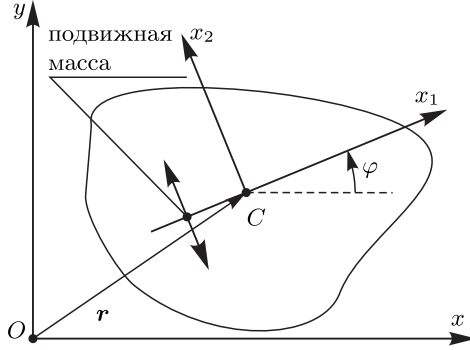


Рисунок 5 – Схематическое изображение гладкого профиля с подвижной внутренней массой, движущегося в жидкости. Oxy – неподвижная система координат, Cx_1x_2 – подвижная система координат, жестко связанная с профилем.

Построены уравнения движения

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_1 &= p_2 \frac{\partial H}{\partial M} - \Gamma \frac{\partial H}{\partial p_2} - \zeta \frac{\partial H}{\partial M} - \mu_1 \frac{\partial H}{\partial p_1}, \\
 \dot{p}_2 &= -p_1 \frac{\partial H}{\partial M} + \Gamma \frac{\partial H}{\partial p_1} + \chi \frac{\partial H}{\partial M} - \mu_2 \frac{\partial H}{\partial p_2}, \\
 \dot{M} &= p_1 \frac{\partial H}{\partial p_2} - p_2 \frac{\partial H}{\partial p_1} + \zeta \frac{\partial H}{\partial p_1} - \chi \frac{\partial H}{\partial p_2} - \mu_3 \frac{\partial H}{\partial M}, \\
 \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_1} \cos \varphi - \frac{\partial H}{\partial p_2} \sin \varphi, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_1} \sin \varphi + \frac{\partial H}{\partial p_2} \cos \varphi, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial M},
 \end{aligned} \tag{8}$$

где p_1, p_2 – проекции импульса системы на оси, жестко связанные с профилем (см. рис. 5), M – момент импульса системы, x, y – координаты геометрического центра профиля относительно неподвижной системы координат, φ – угол поворота профиля относительно неподвижной системы координат, Γ – циркуляция, ζ, χ – параметры, возникающие при $\Gamma \neq 0$ и наличии гидродинамической асимметрии профиля, μ_1, μ_2, μ_3 – коэф-

фициенты сопротивления. Функция H задает выражением

$$H = \frac{1}{2\Delta} (\mathbf{P}, \mathbf{CP}), \quad (9)$$

$$\mathbf{P} = (p_1 - \dot{c}_1(t), p_2 - \dot{c}_2(t), M - k(t)),$$

$$\Delta = ABI(t) - Ac_1^2(t) - Bc_2^2(t)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} BI(t) - c_1^2(t) & -c_1(t)c_2(t) & Bc_2(t) \\ -c_1(t)c_2(t) & AI(t) - c_2^2(t) & -Ac_1(t) \\ Bc_2(t) & -Ac_1(t) & AB \end{pmatrix},$$

где $c_1(t)$, $c_2(t)$ — координаты центра масс системы, являющиеся заданными функциями времени, A , B — коэффициенты, учитывающие массу системы и присоединенные массы, I — коэффициент, учитывающий момент инерции системы и присоединенный момент инерции, вычисленные относительно геометрического центра профиля.

В отсутствие трения ($\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\mu_3 = 0$) уравнения (8) являются гамитоновыми, а функция (9) является ее гамильтонианом.

Показано, что в отсутствие вязкого трения и при постоянной циркуляции фазовая траектория системы и траектория тела являются компактными. Численно исследован вопрос о возможности в среднем прямолинейного движения. Показано, что при наличии вязкого трения в системе могут возникать как регулярные, так и хаотические аттракторы.

В *третьей* главе рассмотрена задача о плоскопараллельном движении эллиптического профиля в жидкости под действием периодических внешних силы и момента сил. Построены уравнения движения

$$\dot{p}_1 = \omega p_2 - \Gamma v_2 - \mu_1 v_1 + f_1(t), \quad \dot{p}_2 = -\omega p_1 + \Gamma v_1 - \mu_2 v_2 + f_2(t), \quad (10)$$

$$\dot{M} = p_1 v_2 - p_2 v_1 - \mu_3 \omega + g(t),$$

$$\dot{x} = v_1 \cos \varphi - v_2 \sin \varphi, \quad \dot{y} = v_1 \sin \varphi + v_2 \cos \varphi, \quad \dot{\varphi} = \omega, \quad (11)$$

где v_1 , v_2 — проекции поступательной скорости геометрического центра профиля на оси, жестко связанные с профилем, ω — угловая скорость профиля, x , y — координаты геометрического центра профиля относительно неподвижной системы координат, φ — угол поворота профиля относительно неподвижной системы координат, $f_1(t)$, $f_2(t)$, $g(t)$ — τ -периодические функции времени, μ_1 , μ_2 , μ_3 — коэффициенты сопротивления, Γ — циркуляция. Компоненты импульса и момент импульса выражаются через скорости следующим образом:

$$p_1 = Av_1 - c_2\omega, \quad p_2 = Bv_2 + c_1\omega, \quad M = -c_2v_1 + c_1v_2 + I\omega, \quad (12)$$

где c_1, c_2 — координаты центра масс профиля, A, B — коэффициенты, учитывающие массу системы и присоединенные массы, I — коэффициент, учитывающий момент инерции системы и присоединенный момент инерции, вычисленные относительно геометрического центра профиля.

Аналитически исследован случай движения уравновешенного кругового профиля в идеальной жидкости. Показано, что в этом случае уравнения движения приводятся к виду

$$\ddot{Z} = i\Gamma\dot{Z} + F(t), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} Z &= x + iy, \quad \dot{Z} = \dot{x} + i\dot{y} = (v_1 + iv_2)e^{i\varphi(t)}, \\ F(t) &= F_x + iF_y = (f_1(t) + if_2(t))e^{i\varphi(t)}, \\ \omega = G(t) &= \omega_0 + \int_0^t g(t')dt', \quad \varphi = \varphi_0 + \int_0^t G(t')dt'. \end{aligned} \quad (14)$$

Указаны резонансы, возникающие в системе при условии, что среднее значение внешнего момента равно нулю $\langle g(t) \rangle = 0$.

Показано, что в случае ненулевого среднего значения внешнего момента $\langle g(t) \rangle \neq 0$ решение уравнений движения выражается через интегралы Френеля:

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= C_0 e^{i\Gamma t} + \sqrt{\frac{\pi}{\bar{g}}} e^{i(\varphi_0 + \Gamma t)} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\hat{f}_1^{(m)} + i\hat{f}_2^{(m)} \right) e^{-i\frac{\omega_m^2}{2\bar{g}}} \times \\ &\quad \times \left(C \left(\frac{\bar{g}t + \omega_m}{\sqrt{\pi\bar{g}}} \right) + iS \left(\frac{\bar{g}t + \omega_m}{\sqrt{\pi\bar{g}}} \right) \right), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\omega_m = m\Omega + \bar{\omega} - \Gamma$, C_0 — константа интегрирования (отличная от начальной скорости), $C(z)$ и $S(z)$ — интегралы Френеля. При этом в системе возникает асимптотическая устойчивость по части переменных. В частности, для таких режимов движения характерен в среднем линейный рост угловой скорости и притяжение проекции фазовой траектории на плоскость поступательных скоростей к некоторой окружности.

Показано, что при добавлении в систему вязкого трения линейного по скоростям и при нулевых средних значениях внешних силы и момента сил решение уравнений движения кругового профиля представляется в

виде кратного ряда.

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) = & \dot{Z}(0) \exp(-(\mu_1 - i\Gamma)t) - \frac{i\delta}{2} \exp(i\tilde{\varphi}) \times \\ & \times \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-i\alpha)^p \sigma_n \exp(-(p\mu_3 - i\Omega(n+1))t) - \exp(-(\mu_1 - i\Gamma)t)}{p! (\mu_1 - p\mu_3 + i(\Omega(n+1) - \Gamma))} - \right. \\ & \left. - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-i\alpha)^p \sigma_n \exp(-(p\mu_3 - i\Omega(n-1))t) - \exp(-(\mu_1 - i\Gamma)t)}{p! (\mu_1 - p\mu_3 + i(\Omega(n-1) - \Gamma))} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

где коэффициенты Фурье σ_n выражаются через функции Бесселя первого рода:

$$\sigma_n = \exp(in(\theta + \pi)) J_n \left(\sqrt{\beta^2 + \gamma^2} \right). \quad (17)$$

Численно исследовано движение эллиптического профиля в идеальной жидкости в случае, когда внешняя сила действует вдоль одной из его главных осей, а внешний момент отсутствует. Показано, что в этом случае уравнения движения допускают первый интеграл:

$$\begin{aligned} J = & \frac{1}{2} i_0 (\omega - \Gamma)^2 - \frac{1}{2} \eta (1 + \eta) v_2^2, \\ i_0 = & \frac{I}{A}, \quad \eta = \frac{B - A}{A}. \end{aligned} \quad (18)$$

В этом случае система обладает $\frac{3}{2}$ степенями свободы, и с помощью построения отображения Пуанкаре за период показано, что система является неинтегрируемой (см. рис. 6).

Показано, что в случае движения эллиптического профиля в вязкой жидкости под действием внешних периодических силы и момента сил в системе могут возникать как регулярные, так и хаотические аттракторы (см. рис. 7)

Показано, что одним из механизмов рождения странных аттракторов является сценарий Фейгенбаума.

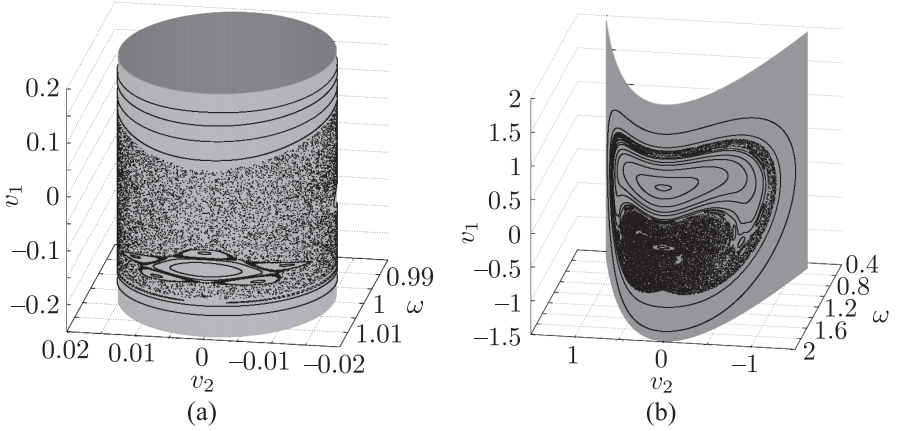


Рисунок 6 – Отображения Пуанкаре за период на поверхностях уровня интеграла $J = J_0$. Значения параметров (a) $\eta = -0.8$, $i_0 = 0.2$, $\Gamma = 1$, $f_1 = 0.02 \sin \Omega t$, $\Omega = 0.5$, $J_0 = 2 \cdot 10^{-5}$; (b) $\eta = 4$, $i_0 = 1$, $\Gamma = 10$, $f_1 = 0.2 \sin \Omega t$, $\Omega = 2$, $J_0 = 32$.

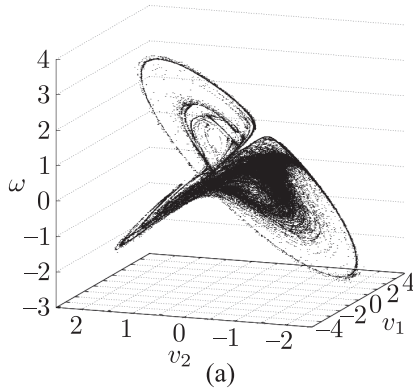


Рисунок 7 – Странный аттрактор, показатели Ляпунова $\lambda_1 = (7.25 \pm 0.27) \cdot 10^{-2}$, $\lambda_2 = (-4.99 \pm 0.23) \cdot 10^{-2}$, $\lambda_3 = (-21.04 \pm 0.29) \cdot 10^{-2}$. Значения параметров $\eta = 1$, $i_0 = 1$, $\Gamma = 1$, $\mu_1 = 0.01$, $\mu_2 = 0.02$, $\mu_3 = 0.01$, $f_1 = 0.1 \sin \Omega t$, $f_2 = 0.02 \sin \Omega t$, $g = 0.01 \sin \Omega t$, $\Omega = 1$.

В четвертой главе рассмотрена задача об устойчивости перманентных вращений и периодических движений твердого тела с неподвижной точкой, периодически изменяющимися моментами инерции и постоянным гиостатическим моментом. Уравнения движения в общем случае имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \boldsymbol{\alpha} \times \left(\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{k}) \right), & \dot{\boldsymbol{\beta}} &= \boldsymbol{\beta} \times \left(\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{k}) \right), \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \boldsymbol{\gamma} \times \left(\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{k}) \right),\end{aligned}\tag{19}$$

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \left(\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{k}) \right) - \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{I}^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{k}) + \mathbf{L},\tag{20}$$

где \mathbf{M} — момент импульса системы, \mathbf{k} — гиостатический момент ротора, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ — единичные векторы, направленные вдоль осей неподвижной системы координат, $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, μ_i , $i = 1, 2, 3$ — коэффициенты сопротивления, \mathbf{L} — внешний момент сил, а моменты инерции изменяются по закону

$$\mathbf{I}(t) = \text{diag}(J_1 + \varepsilon \sin^2 \Omega t, J_2, J_3 + \varepsilon \sin^2 \Omega t).\tag{21}$$

В уравнениях (19), (20) все векторы и тензоры записаны относительно подвижной системы координат, связанной с телом.

В зависимости от выбора значений параметров данную задачу можно рассматривать как периодическое возмущение случаев Эйлера–Пуансо, Жуковского–Вольтерра или Лагранжа. Показано, что при периодическом возмущении случая Эйлера–Пуансо в системе существуют три пары перманентных вращений, соответствующих вращениям тела вокруг главных осей инерции. Показано, что устойчивые вращения могут становиться неустойчивыми при периодическом изменении моментов инерции. При этом в системе возникает параметрический резонанс, указаны резонансные частоты в явном виде. С помощью численных расчетов показано, что области неустойчивости имеют форму «языков Арнольда» (см. рис. 8). Границы областей неустойчивости вычислены приближенно в виде разложений по параметру ε с помощью метода гармонического баланса. Обнаружено, что неустойчивое перманентное вращение не может быть стабилизировано при малых значениях амплитуды изменения моментов инерции. Показано, что при периодическом возмущении случая Жуковского–Вольтерра в окрестности перманентных вращений возникают периодические решения. Области устойчивости данных решений вычислены с помощью анализа мультипликаторов неподвижных точек отображения и метода продолжения по параметру.

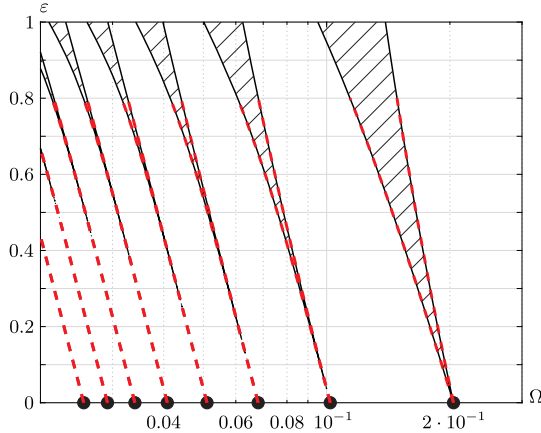


Рисунок 8 – Области неустойчивости перманентного вращения вокруг наибольшей оси инерции, построенные численно (черные линии) и аналитически (красные пунктирные линии). Значения параметров $J_1 = 2$, $J_2 = 3$, $J_3 = 4$, $g = 1$. Разрешение карты, построенной численно 2048×2048 .

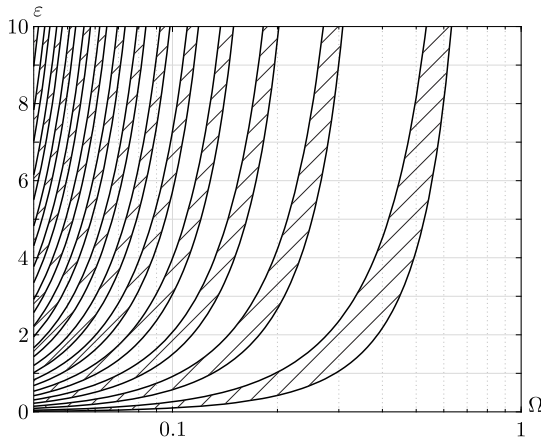


Рисунок 9 – Штриховкой обозначены области неустойчивости перманентного вращения (22). Значения параметров $J_1 = J_2 = 3$, $J_3 = 5$, $\mu_1 = \mu_3 = 0$, $\mathbf{L} = (0, c, 0)^T$.

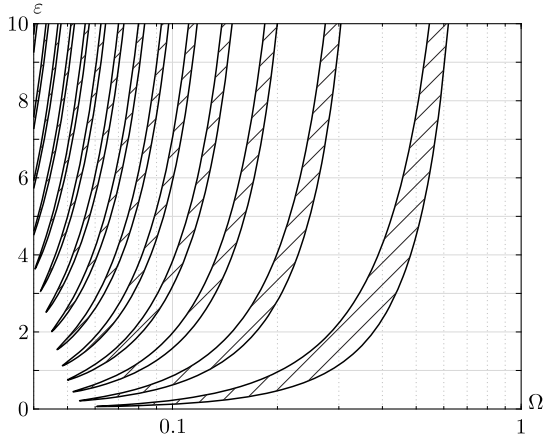


Рисунок 10 – Штриховкой обозначены области неустойчивости перманентного вращения (22). Значения параметров $J_1 = J_2 = 3$, $J_3 = 5$, $\mu_1 = \mu_3 = 0.02$, $\mathbf{L} = (0, c, 0)^T$.

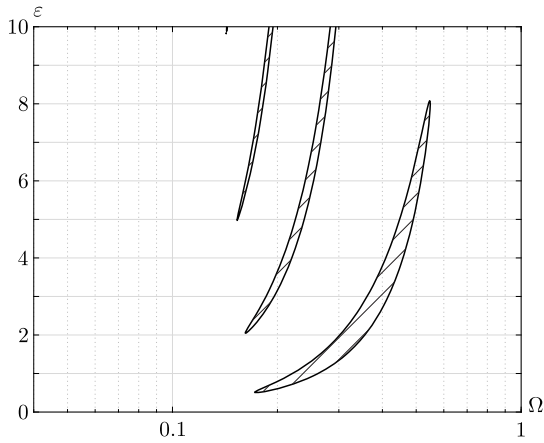


Рисунок 11 – Штриховкой обозначены области неустойчивости перманентного вращения (22). Значения параметров $J_1 = J_2 = 3$, $J_3 = 5$, $\mu_1 = \mu_3 = 0.05$, $\mathbf{L} = (0, c, 0)^T$.

Для случая Лагранжа с периодически изменяющимися моментами инерции рассмотрено влияние линейного по угловым скоростям трения и постоянного внешнего момента сил на устойчивость перманентного вра-

щения

$$M_2 = \frac{cI_2}{\mu_2}, \quad M_1 = M_3 = 0. \quad (22)$$

Численно построены диаграммы устойчивости (см. рис. 9 – 11).

В *пятой* главе рассмотрена задача о качении уравновешенного сферического тела по плоскости без проскальзывания и верчения, то есть на движение тела наложены следующие неголономные связи

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{v} - R\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad f_2 = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \quad (23)$$

где \mathbf{v} – поступательная скорость геометрического центра шара, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость тела, $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор вертикали, R – радиус сферы. Построены уравнения движения

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}(t))' &= (\tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}(t)) \times \boldsymbol{\omega} + \lambda\boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \lambda &= \frac{(\tilde{\mathbf{I}}^{-1}\boldsymbol{\gamma}, \dot{\mathbf{I}}(t)\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times (\tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}(t)) + \dot{\mathbf{k}}(t))}{(\tilde{\mathbf{I}}^{-1}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})}, \quad \tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{I}(t) + mR^2\mathbf{E}, \end{aligned} \quad (24)$$

где m – масса системы, $\mathbf{I}(t)$ – центральный тензор инерции системы, $\mathbf{k}(t)$ – вектор гиростатического момента, \mathbf{I} – главный центральный тензор инерции шара, $\tilde{\mathbf{I}}$ – тензор инерции, записанный, относительно точки контакта тела с плоскостью. В уравнениях (24) все векторы и тензоры записаны в проекциях на оси подвижной системы координат, жестко связанной с шаром (см. рис. 12).

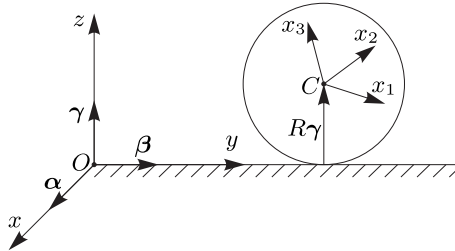


Рисунок 12 – Схематическое изображение уравновешенного сферического тела. $Oxyz$ – неподвижная система координат, $Cx_1x_2x_3$ – подвижная система координат, жестко связанная с шаром.

Показано, что уравнения движения могут быть записаны в форме:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \boldsymbol{\omega} &= \frac{\tilde{\mathbf{I}}^{-1} \left(\left(\tilde{\mathbf{I}}^{-1} \boldsymbol{\gamma} \right) \times \mathbf{M} + \boldsymbol{\gamma} \left(\tilde{\mathbf{I}}^{-1} \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{k} \right) - \mathbf{k} \left(\tilde{\mathbf{I}}^{-1} \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma} \right) \right)}{\left(\tilde{\mathbf{I}}^{-1} \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma} \right)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Указаны первые интегралы уравнений движения:

$$(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \quad (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \quad (\mathbf{M}, \mathbf{M}) = G^2 = \text{const}. \quad (26)$$

Для демонстрации динамических эффектов, наблюдаемых в системе, используются тензор инерции и гиростатический момент вида

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{I}}(t) &= \text{diag} \left(I_1^0 + (J_2 + \Delta J_2 \sin \Omega t)^2 + (J_3 + \Delta J_3 \sin \Omega t)^2, \right. \\ &\quad I_2^0 + (J_1 + \Delta J_1 \sin \Omega t)^2 + (J_3 + \Delta J_3 \sin \Omega t)^2, \\ &\quad \left. I_3^0 + (J_1 + \Delta J_1 \sin \Omega t)^2 + (J_2 + \Delta J_2 \sin \Omega t)^2 \right) \\ \mathbf{k} &= \mathbf{k}_0 \sin \Omega t, \quad \mathbf{k}_0 = \text{const}. \end{aligned} \quad (27)$$

Численно исследована устойчивость плоскопараллельных движений системы

$$\begin{aligned} \gamma_i &= 0, \quad \gamma_j(t) = \sin \varphi(t), \quad \gamma_k = \cos \varphi(t), \\ \omega_i(t) &= \frac{G}{\tilde{I}_{ii}(t)}, \quad \omega_j = \omega_k = 0, \quad G = \text{const}, \quad \dot{\varphi} = \omega_i(t), \end{aligned} \quad (28)$$

соответствующих качению вдоль главных плоскостей инерции. Показано, что данные движения являются квазипериодическими, и для их анализа оказывается неприменимой теория Флоке. Устойчивость решений (28) исследована численно с помощью построения карт старшего показателя Ляпунова (см. рис. 13 – 15)

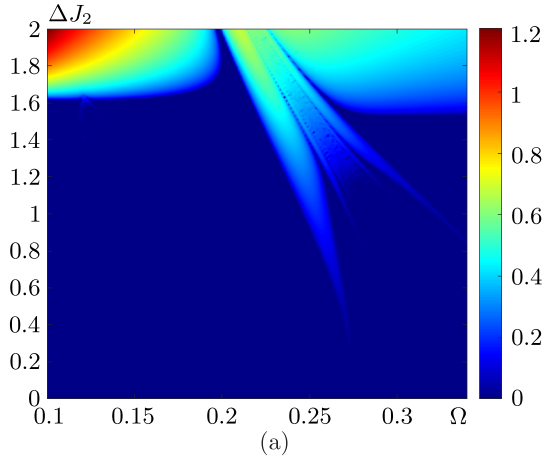


Рисунок 13 – Зависимость старшего показателя Ляпунова от частоты и амплитуды изменения моментов инерции для вращения вокруг наименьшей оси инерции.

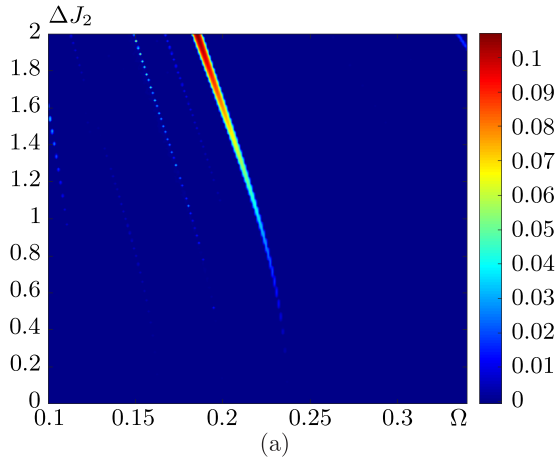


Рисунок 14 – Зависимость старшего показателя Ляпунова от частоты и амплитуды изменения моментов инерции для вращения вокруг наибольшей оси инерции.

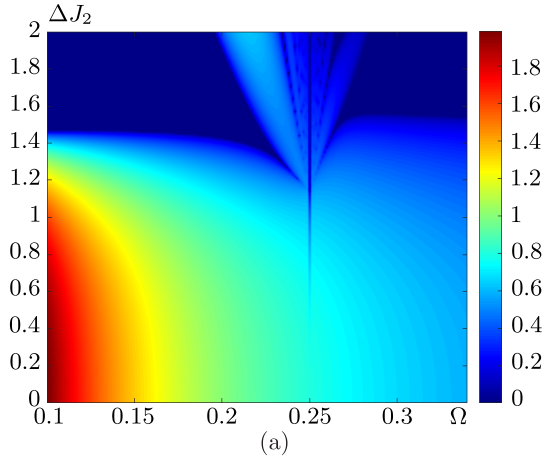
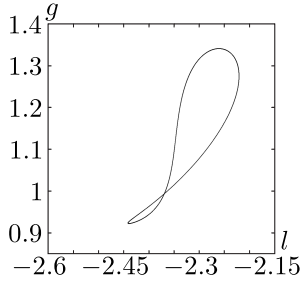


Рисунок 15 – Зависимость старшего показателя Ляпунова от частоты и амплитуды изменения моментов инерции для вращения вокруг средней оси инерции.

Продемонстрирована неконсервативность динамики рассматриваемой системы. Показано, что при движении из состояния покоя (на нулевом уровне интеграла момента, то есть при $G = 0$ в (26)) в системе могут возникать хаотические аттракторы по сценарию Фейгенбаума. В случае движения на ненулевом уровне интеграла момента обнаружено, что одним из сценариев возникновения хаотических аттракторов в система является конечное число бифуркаций удвоения тора (см. рис. 16, 17).

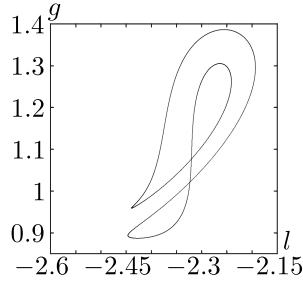


(a) $\Omega \approx 0.24237772$

$$\lambda_1 = (-0.623 \pm 3.841) \cdot 10^{-4}$$

$$\lambda_2 = (-0.412 \pm 0.058) \cdot 10^{-2}$$

$$\lambda_3 = (-0.180 \pm 0.001) \cdot 10^{-1}$$

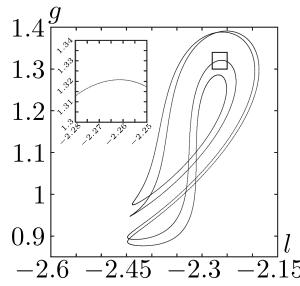


(b) $\Omega \approx 0.24243274$

$$\lambda_1 = (-0.819 \pm 5.001) \cdot 10^{-4}$$

$$\lambda_2 = (-0.968 \pm 0.124) \cdot 10^{-2}$$

$$\lambda_3 = (-0.176 \pm 0.001) \cdot 10^{-1}$$

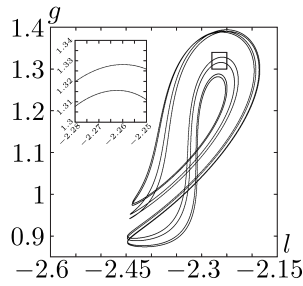


(c) $\Omega \approx 0.24244894$

$$\lambda_1 = (1.837 \pm 6.278) \cdot 10^{-4}$$

$$\lambda_2 = (-0.557 \pm 0.138) \cdot 10^{-2}$$

$$\lambda_3 = (-0.181 \pm 0.001) \cdot 10^{-1}$$



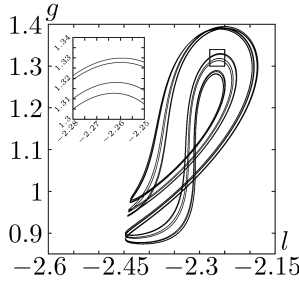
(d) $\Omega \approx 0.24245240$

$$\lambda_1 = (1.418 \pm 8.684) \cdot 10^{-4}$$

$$\lambda_2 = (-0.193 \pm 0.134) \cdot 10^{-2}$$

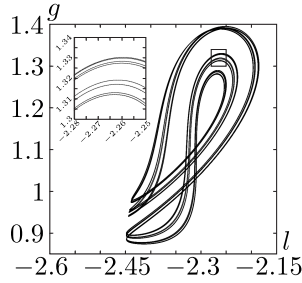
$$\lambda_3 = (-0.184 \pm 0.001) \cdot 10^{-1}$$

Рисунок 16 – Удвоение инвариантных кривых трехмерного отображения Пуанкаре при изменении параметра Ω



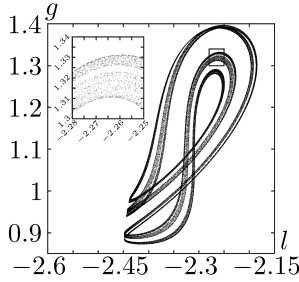
(e) $\Omega \approx 0.24245315$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= (2.530 \pm 5.657) \cdot 10^{-4} \\ \lambda_2 &= (-0.187 \pm 0.125) \cdot 10^{-2} \\ \lambda_3 &= (-0.185 \pm 0.001) \cdot 10^{-1}\end{aligned}$$



(f) $\Omega \approx 0.24245330$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= (2.660 \pm 6.040) \cdot 10^{-4} \\ \lambda_2 &= (-0.171 \pm 1.750) \cdot 10^{-3} \\ \lambda_3 &= (-0.186 \pm 0.002) \cdot 10^{-1}\end{aligned}$$



(g) $\Omega \approx 0.24245373$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= (4.096 \pm 1.491) \cdot 10^{-3} \\ \lambda_2 &= (-0.285 \pm 1.403) \cdot 10^{-3} \\ \lambda_3 &= (-0.191 \pm 0.002) \cdot 10^{-1}\end{aligned}$$

Рисунок 17 – Дальнейшее удвоение инвариантных кривых трехмерного отображения Пуанкаре и переход к аттрактору при изменении параметра Ω .

В *шестой* главе рассмотрена задача о качении неуровненного сферического тела по плоскости без проскальзывания и верчения при периодических изменениях моментов инерции и гиростатического момента.

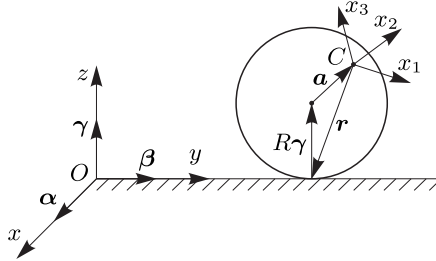


Рисунок 18 – Схематическое изображение неуровненного сферического тела. $Oxyz$ – неподвижная система координат, $Cx_1x_2x_3$ – подвижная система координат, жестко связанная с шаром.

Построены уравнения движения:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{I}}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{I}}(t)\boldsymbol{\omega} + \dot{\mathbf{k}}(t) + \boldsymbol{\omega} \times (\tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}(t)) &= \\ &= \mu(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{a}) - m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) + \lambda\boldsymbol{\gamma}, \quad (29) \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \lambda &= \frac{(\tilde{\mathbf{I}}^{-1}\boldsymbol{\gamma}, \dot{\mathbf{I}}(t)\boldsymbol{\omega} + \dot{\mathbf{k}}(t) + \boldsymbol{\omega} \times (\tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}(t)) - \mu\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{a} + m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}))}{(\tilde{\mathbf{I}}^{-1}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})}, \\ \tilde{\mathbf{I}} &= \mathbf{I}(t) + m((\mathbf{r}, \mathbf{r})\mathbf{E} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(t) &= \text{diag}\left(I_{11}^0 + (J_2 + \Delta J_2 \sin \Omega t)^2 + (J_3 + \Delta J_3 \sin \Omega t)^2, \right. \\ &I_{22}^0 + (J_1 + \Delta J_1 \sin \Omega t)^2 + (J_3 + \Delta J_3 \sin \Omega t)^2, \\ &I_{33}^0 + (J_1 + \Delta J_1 \sin \Omega t)^2 + (J_2 + \Delta J_2 \sin \Omega t)^2 \left. \right) \quad (30) \\ \mathbf{k} &= \mathbf{k}_0 \sin \Omega t, \quad \mathbf{k}_0 = \text{const}, \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость тела, $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор вертикали, m – масса системы, R – радиус шара, \mathbf{a} – вектор смещения центра масс шара относительно его геометрического центра, $\mathbf{I}(t)$ – центральный тензор инерции системы, $\mathbf{k}(t)$ – вектор гиростатического момента, \mathbf{I} – главный центральный тензор инерции шара, $\tilde{\mathbf{I}}$ – тензор инерции, записанный, относительно точки контакта шара с плоскостью, μ – вес системы,

$\mathbf{r} = -\mathbf{a} - R\boldsymbol{\gamma}$. В уравнениях (29) все векторы и тензоры записаны в проекциях на оси подвижной системы координат, жестко связанной с шаром (см. рис. 18).

Указаны первые интегралы уравнений движения:

$$(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \quad (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1. \quad (31)$$

Показано, что при выполнении условий

$$\mathbf{k} = (k_1(t), 0, 0), \quad \mathbf{a} = (0, a_2, a_3), \quad (32)$$

уравнения (29) допускают инвариантное подмногообразие

$$\mathcal{N}_1 = \{\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma} \mid \omega_2 = \omega_3 = 0, \gamma_1 = 0\}. \quad (33)$$

Движение на подмногообразии (33) может быть описано с помощью следующей гамильтоновой системы

$$\begin{aligned} \dot{M} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = |a| \left(\mu - \frac{mR(M - k_1(t))^2}{(I_{11}(t) + mR^2 + m|a|^2 + 2m|a|R \cos \varphi)^2} \right) \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial M} = \frac{M - k_1(t)}{I_{11}(t) + mR^2 + m|a|^2 + 2m|a|R \cos \varphi}, \quad \varphi \in [-\pi, \pi]. \end{aligned} \quad (34)$$

с гамильтонианом явно зависящим от времени

$$H = \frac{1}{2} \frac{(M - k_1(t))^2}{I_{11}(t) + mR^2 + m|a|^2 + 2m|a|R \cos \varphi} + |a|\mu \cos \varphi, \quad (35)$$

где момент импульса системы относительно точки контакта M и угол φ задаются следующими выражениями

$$\begin{aligned} M &= (I_{11}(t) + mR^2 + m|a|^2 + 2m|a|R \cos \varphi)\omega_1 + k_1(t), \\ \varphi &= \arg(\gamma_3 + i\gamma_2) - \arg(a_3 + ia_2). \end{aligned} \quad (36)$$

Уравнения (34) интегрируемы в случае постоянных момента инерции I_{11} и гиростатического момента k_1 , фазовый портрет системы приведен на рис. 19.

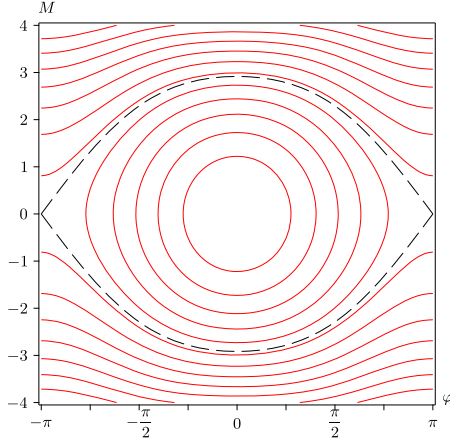


Рисунок 19 – Фазовый портрет невозмущенной системы (34) при $m = 1$, $R = 1$, $\mu = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = -0.5$, $I_{11} = 4$, $k_1 = 0$.

Методом Мельникова показано, что при наличии периодического изменения моментов инерции динамика на указанном инвариантном подмногообразии становится неинтегрируемой, при этом хаос возникает вследствие расщепления сепаратрис (см. рис. 20).

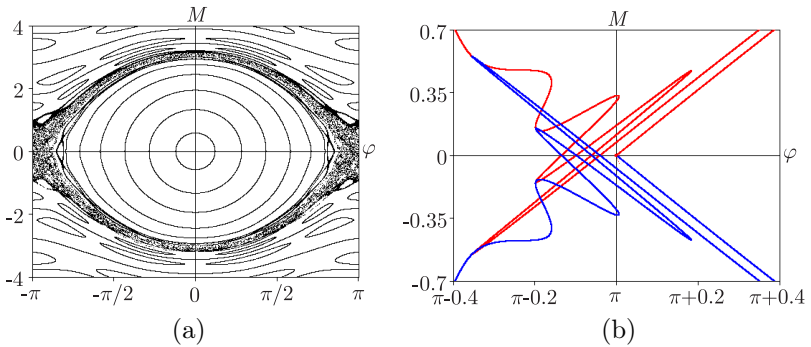


Рисунок 20 – (а) Пример отображения за период $\tau = 2\pi/\Omega$ и (б) расщепление сепаратрис при $m = 1$, $R = 1$, $\mu = 1$, $a_3 = -0.5$, $I_{11} = 4 + \sin^2 \Omega t$, $k_1 = 0$, $\Omega = 1$

Исследована устойчивость верхнего и нижнего положений равновесия

системы. Показано, что верхнее положение равновесия

$$\omega = 0, \quad \gamma = (0, 0, 1), \quad (37)$$

существующее при $\mathbf{a} = (0, 0, a_3)$, $a_3 > 0$, может быть стабилизировано с помощью постоянного гиростата

$$\mathbf{k} = (0, 0, k_3), \quad k_3 = \text{const}. \quad (38)$$

Характерный вид диаграммы устойчивости решения (37) приведен на рис. 21.

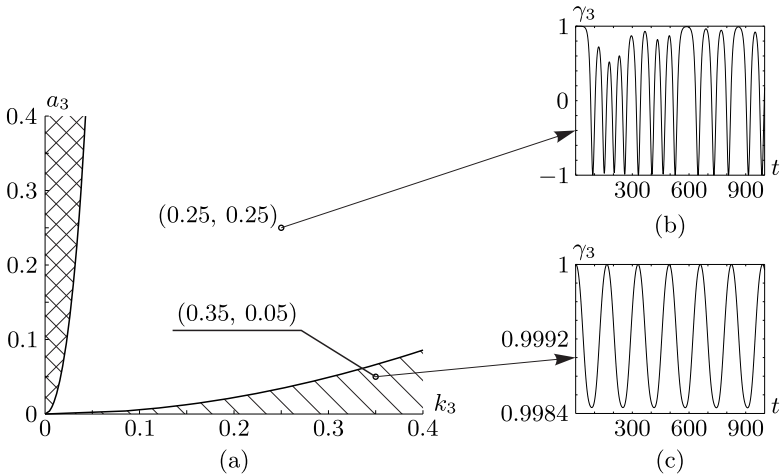


Рисунок 21 – а) Диаграмма устойчивости верхнего положения равновесия на плоскости параметров (k_3, a_3) . Одинарной штриховкой отмечена область устойчивости, собственные числа линеаризованной системы здесь чисто мнимые. В незаштрихованной области собственные числа линеаризованной системы имеют вид $\lambda_{1,2,3,4} = \pm a \pm ib$. В области с двойной штриховкой собственные числа линеаризованной системы имеют вид $\lambda_{1,2} = \pm a$, $\lambda_{3,4} = \pm b$. б) Неустойчивое поведение переменной γ_3 при $k_3 = 0.25$, $a_3 = 0.25$. Собственные числа $\lambda_{1,2,3,4} \approx \pm 0.066 \pm 0.025i$. в) Устойчивое поведение переменной γ_3 при $k_3 = 0.35$, $a_3 = 0.05$. Собственные числа $\lambda_{1,2} \approx \pm 0.019i$, $\lambda_{3,4} \approx \pm 0.057i$.

Исследован вопрос устойчивости периодического решения системы (29), возникающего в окрестности верхнего положения равновесия в случае ги­ростатического момента вида

$$\mathbf{k} = (k_1^0 \sin \Omega t, k_1^0 \cos \Omega t, k_3). \quad (39)$$

Диаграммы устойчивости данного решения представлены на рис. 22.

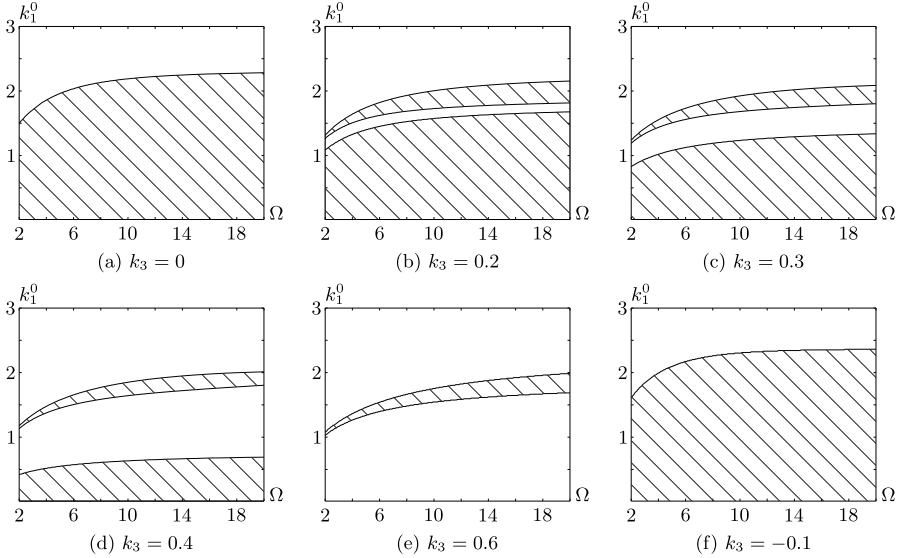


Рисунок 22 – Области устойчивости (без штриховки) и неустойчивости (заштрихованные) периодического решения, возникающего в окрестности верхнего положения равновесия под действием управления (39).

Показано, что нижнее положение равновесия системы может становиться неустойчивым в случае периодических изменений моментов инерции. При этом анализ устойчивости сводится к исследованию устойчивости нулевого решения двух уравнений Хилла

$$\frac{d^2 p_k}{d\tau^2} + G_k(\tau) p_k = 0, \quad (40)$$

$$G_k(\tau) = \frac{-a_3 \mu}{4\Omega^2 \left(I_{kk}^0 + \varepsilon \sin^2 \frac{\tau}{2} + m(a_3 + R)^2 \right)}, \quad k = 1, 2.$$

Найдены резонансные частоты:

$$\Omega_n^{(k)} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{|a_3| \mu}{I_{kk}^0 + m(a_3 + R)^2}}, \quad k = 1, 2, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (41)$$

Области неустойчивости нижнего положения равновесия имеют форму языков Арнольда (см. рис. 23).

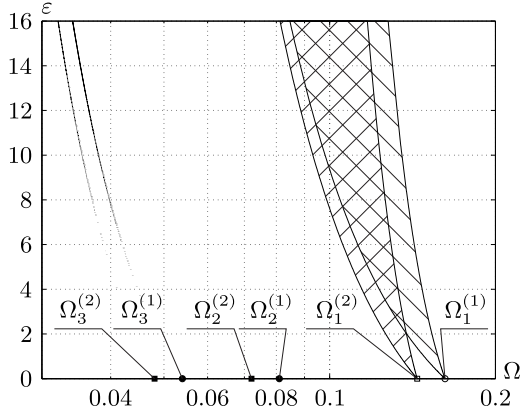


Рисунок 23 – Области неустойчивости и соответствующие им резонансные точки обозначены различной штриховкой и различными маркерами. Значения параметров: $I_{11} = 3 + \varepsilon \sin^2 \Omega t$, $I_{22} = 4 + \varepsilon \sin^2 \Omega t$, $m = 1$, $R = 1$, $\mu = 1$, $a_3 = -0.1$. Разрешение карты 2001×2001 узлов.

Публикации автора

А) Список работ автора по теме диссертации в изданиях ВАК или индексируемых в Web of Science и Scopus

1. Borisov A. V., Mamaev I. S., Vetchanin E. V. Self-propulsion of a Smooth Body in a Viscous Fluid Under Periodic Oscillations of a Rotor and Circulation // *Regular and Chaotic Dynamics*, 2018, vol. 23, no. 7–8, pp. 850–874
2. Borisov A. V., Mamaev I. S., Vetchanin E. V. Dynamics of a Smooth Profile in a Medium with Friction in the Presence of Parametric Excitation // *Regular and Chaotic Dynamics*, 2018, vol. 23, no. 4, pp. 480–502
3. Borisov A. V., Vetchanin E. V., Mamaev I. S. Motion of a Smooth Foil in a Fluid under the Action of External Periodic Forces. I // *Russian Journal of Mathematical Physics*, 2019, vol. 26, no. 4, pp. 412–428
4. Borisov A. V., Vetchanin E. V., Mamaev I. S. Motion of a Smooth Foil in a Fluid under the Action of External Periodic Forces. II // *Russian Journal of Mathematical Physics*, 2020, vol. 27, no. 1, pp. 1–17
5. Vetchanin E. V. The Motion of a Balanced Circular Cylinder in an Ideal Fluid Under the Action of External Periodic Force and Torque // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 15, no. 1, pp. 41–57
6. Vetchanin E. V., Mikishanina E. A. Vibrational Stability of Periodic Solutions of the Liouville Equations // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 15, no. 3, pp. 351–363
7. Mamaev I. S., Vetchanin E. V. Dynamics of Rubber Chaplygin Sphere under Periodic Control // *Regular and Chaotic Dynamics*, 2020, vol. 25, no. 2, pp. 215–236
8. Artemova E. M., Karavaev Y. L., Mamaev I. S., Vetchanin E. V. Dynamics of a Spherical Robot with Variable Moments of Inertia and a Displaced Center of Mass // *Regular and Chaotic Dynamics*, 2020, vol. 25, no. 6, pp. 689–706
9. Vetchanin E. V., Mamaev I. S. Asymptotic behavior in the dynamics of a smooth body in an ideal fluid // *Acta Mechanica*, 2020, vol. 231, pp. 4529–4535
10. Vetchanin E. V., Kilin A. A. Control of Body Motion in an Ideal Fluid Using the Internal Mass and the Rotor in the Presence of Circulation Around the Body // *Journal of Dynamical and Control Systems*, 2017, vol. 23, pp. 435–458
11. Mamaev I. S., Vetchanin E. V. The Self-propulsion of a Foil with a Sharp Edge in a Viscous Fluid Under the Action of a Periodically Oscillating Rotor // *Regular and Chaotic Dynamics*, 2018, vol. 23, no. 7–8, pp. 875–886
12. Vetchanin E. V., Mamaev I. S. Dynamics of Two Point Vortices in an External Compressible Shear Flow // *Regular and Chaotic Dynamics*, 2017, vol. 22, no. 8, pp. 893–908

13. Vetchanin E. V. Stabilization of rotations of a rigid body with a fixed point by periodic perturbations // 2020 International Conference Nonlinearity, Information and Robotics – IEEE, 2020, pp. 1–5

14. Vetchanin E. V. Calculation of instability regions of the Liouville problem based on the harmonic balance method // 2021 International Conference Nonlinearity, Information and Robotics – IEEE, 2021, pp. 1–5

15. Mamaev I. S., Vetchanin E. V. Dynamics of a spherical robot with periodically changing moments of inertia // 2020 International Conference Nonlinearity, Information and Robotics – IEEE, 2020, pp. 1–5

В) Другие публикации в изданиях ВАК или индексируемых в Web of Science и Scopus

16. Karavaev Y. L., Klekovkin A. V., Mamaev I. S., Tenenev V. A., Vetchanin E. V. A Simple Physical Model for Control of an Propellerless Aquatic Robot // Journal of Mechanisms and Robotics, 2022, vol. 14, no. 1, 011007, 11 pp.

17. Artemova E. M., Vetchanin E. V. Control of the motion of a circular cylinder in an ideal fluid using a source // Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science, 2020, vol. 30, no. 4, pp. 604–617

18. Klekovkin A. V., Mamaev I. S., Vetchanin E. V., Tenenev V. A., Karavaev Y. L. Propellerless aquatic robots // Robots in Human Life: Proceedings of the 23rd International Conference on Climbing and Walking Robots and the Support Technologies for Mobile Machines, CLAWAR 2020, 2020, pp. 404–411

19. Mamaev I. S., Tenenev V. A., Vetchanin E. V. Dynamics of a Body with a Sharp Edge in a Viscous Fluid // Russian Journal of Nonlinear Dynamics, 2018, vol. 14, no. 4, pp. 473–494

20. Ветчанин Е. В., Гладков Е. С. Идентификация параметров модели движения тороидального тела на основе экспериментальных данных // Нелинейная динамика, 2018, т. 14, №1, с. 99–121

21. Борисов А. В., Ветчанин Е. В., Килин А. А. Управление движением трехосного эллипсоида в жидкости с помощью роторов, Математические заметки, 2017, т. 102, №4, с. 503–513

22. Ветчанин Е. В., Кленов А. И. Экспериментальные исследования падения винтовых тел в жидкости // Нелинейная динамика, 2017, т. 13, №4, с. 585–598

23. Ветчанин Е. В., Тенев В. А., Килин А. А. Оптимальное управление движением в идеальной жидкости тела с винтовой симметрией с внутренними роторами // Компьютерные исследования и моделирование, 2017, т. 9, №5, с. 741–759

24. Vetchanin E. V., Mamaev I. S. Optimal control of the motion of a helical body in a liquid using rotors // Russian Journal of Mathematical Physics, 2017, vol. 24, no. 3, pp. 399–411
25. Ветчанин Е. В., Килин А. А. Управляемое движение твердого тела с внутренними механизмами в идеальной несжимаемой жидкости // Труды Математического института имени В. А. Стеклова, 2016, т. 295, с. 321–351
26. Vetchanin E. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Control of the Motion of a Helical Body in a Fluid Using Rotors, Regular and Chaotic Dynamics, 2016, vol. 21, no. 7–8, pp. 874–884
27. Ветчанин Е. В., Килин А. А. Управление движением неуравновешенного тяжелого эллипсоида в жидкости с помощью роторов // Нелинейная динамика, 2016, т. 12, №4, с. 663–674
28. Тененев В. А., Ветчанин Е. В., Илалетдинов Л. Ф. Хаотическая динамика в задаче о падении тела винтовой формы в жидкости // Нелинейная динамика, 2016, т. 12, №1, с. 99–120
29. Vetchanin E. V., Kazakov A. O. Bifurcations and chaos in the dynamics of two point vortices in an acoustic wave // International Journal of Bifurcation and Chaos, 2016, vol. 26, no. 4, 1650063, 13 pp.
30. Artemova E. M., Vetchanin E. V. The motion of an unbalanced circular foil in the field of a point source // Regular and Chaotic Dynamics, 2022, vol. 27, no. 1, pp. 24–42