УДК 519.8

Агрегирование предпочтений при переменной важности критериев

Редько А.О.*, Смерчинская С.О., Яшина Н.П.*****

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

**e-mail: dep805@mai.ru*

***e-mail: dep805@mai.ru*

****e-mail: dep805@mai.ru*

Аннотация

Предлагается методика агрегирования многокритериальных предпочтений для случая, когда важность критериев не является постоянной, а зависит от оценок альтернатив. Разработан алгоритм нахождения весовых коэффициентов переменной важности критериев. Решена задача оптимального выбора моделей самолетов средней дальности для закупки авиационно-транспортной компанией.

Ключевые слова: принятие решений, многокритериальный выбор, отношение предпочтения, ранжирование, агрегированное предпочтение, мажоритарный граф, коэффициенты важности критериев, точки равноценности-безразличия.

Введение

Рассматривается актуальная задача выбора оптимальных вариантов альтернатив. Выбор осуществляется на основе агрегирования критериальных предпочтений в случае, когда весовые коэффициенты важности критериев не являются постоянными величинами. Методика агрегирования предпочтений с учетом важности критериев была предложена в работах [1,2]. В данной статье методика дополнена алгоритмами вычисления весовых коэффициентов важности критериев в случае, когда важность критериев не является постоянной, а зависит от оценок альтернатив. Рассмотрен пример закупки пассажирских самолетов авиационно-транспортной компанией. Если компания выбирает самолет эконом класса, то логично предположить, что наибольшую важность имеют такие критерии, как цена, надежность эксплуатации, стоимость послепродажного обслуживания. При увеличении цены возрастают требования по таким критериям как дизайн, комфортабельность. Весовые коэффициенты важности критериев в этом случае не будут являться постоянными величинами: они будут меняться в зависимости от стоимости самолета.

Проблема оценки важности критериев в задачах многокритериального выбора является наиболее важной и сложной. В работе [3] предложена математически обоснованная методика сравнения альтернатив на основе информации об относительной важности критериев. Существенным недостатком этой методики является то, что она позволяет попарно сравнивать лишь небольшое число альтернатив и, следовательно, незначительно сужает исходное множество. Алгоритмы, позволяющие сравнить между собой, а затем ранжировать все альтернативы, основаны на построении аддитивной функции полезности [4, 5]. Для нахождения значений функции полезности требуется оценить важность критериев количественно, т.е. определить весовые коэффициенты важности критериев. Коэффициенты важности критериев – это численная оценка важности критериев.

Достоверно оценить, во сколько раз один критерий важнее другого практически невозможно. Для лица, принимающего решения (ЛПР), гораздо проще определить равноценность альтернатив с разными оценками по рассматриваемым критериям. В работе [5] предложена методика нахождения коэффициентов важности критериев на основе нахождения точек равноценности-безразличия альтернатив в диалоге с ЛПР. Коэффициенты важности вычисляются из системы уравнений, основанной на равенстве значений аддитивной функции полезности для равноценных альтернатив. В работе [2], используя идею аппроксимации точек равноценности-безразличия альтернатив кривой [5], был предложен алгоритм нахождения постоянных весовых коэффициентов важности критериев, не требующий трудоемкого решения систем уравнений. Методика основывается на аппроксимации точек равноценности-безразличия альтернатив прямой безразличия. В данной статье точки равноценности альтернатив аппроксимируются кривой, что позволяет максимально учесть предпочтения ЛПР. В этом случае коэффициенты важности критериев будут изменяться в зависимости от оценок альтернатив. Аппроксимация точек равноценности альтернатив позволяет не просто учесть мнение ЛПР, но и “сгладить” возможные погрешности в его ответах.

1. Постановка задач

Рассматривается множество альтернатив $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ и множество критериев $K=\{K_1,K_2,...,K_m\}$, имеющих числовые шкалы $X=\{X_1,X_2,...,X_m\}$. Заданы векторные оценки альтернатив по критериям качества $f(a_i)=x_i=(x_i^1,x_i^2,\dots,x_i^m)$, $i=1,\dots,n$. Необходимо:

1) определить весовые коэффициенты важности критериев $k_1,k_2,\ldots,k_m$, наиболее полно отражающие предпочтения ЛПР;

2) ранжировать альтернативы по предпочтительности.

Весовые коэффициенты важности определяются на основе кривой безразличия, аппроксимирующей точки равноценности альтернатив. Каждая альтернатива характеризуется вектором её оценок по всем критериям качества. В процессе диалога с ЛПР определяются точки равноценности-безразличия альтернатив. Точки выявляются методом уступок [4]: меняя оценки альтернативы по одному из критериев, система просит ЛПР изменить оценки по другому критерию так, чтобы получить равноценную альтернативу.

Кривая безразличия – это кривая, аппроксимирующая точки равноценности-безразличия альтернатив, выявленные в процессе диалога с ЛПР. В частном случае может быть построена прямая безразличия. Отношение коэффициентов важности по двум критериям равно модулю тангенса угла наклона прямой безразличия. В случае аппроксимации точек кривой безразличия вычисление весовых коэффициентов важности критериев проводится для различных отрезков ломанной, соединяющей точки кривой. Каждому отрезку ломанной будут соответствовать свои весовые коэффициенты важности критериев. Фактически кривая безразличия заменяется ломанной линией. Число отрезков ломанной следует выбирать таким образом, чтобы максимальное расстояние между кривой и ломанной не превышало заданной ЛПР величины. Значение весовых коэффициентов важности критериев будет меняться с изменением векторных оценок альтернатив. Для определения коэффициентов важности критериев кривые безразличия необходимо строить, предварительно приведя шкалы критериев к однородным.

Предложенные в работах [1, 2] алгоритмы агрегирования предпочтений позволяют ранжировать альтернативы по предпочтительности с учетом изменяющейся важности критериев.

2. Алгоритм вычисления переменных весовых коэффициентов важности критериев

Для определения весовых коэффициентов важности критериев, наиболее полно учитывающих предпочтения ЛПР, необходимо аппроксимировать точки равноценности-безразличия альтернатив кривой, имеющей наименьшее суммарное отклонение от этих точек. Для нахождения коэффициентов важности с помощью кривых безразличий необходимо, чтобы кривая, аппроксимирующая точки, была:

– непрерывной;

– монотонно убывающей;

– со знакопостоянной второй производной.

Требования монотонности и знакопостоянства второй производной (кривая либо выпукла вверх, либо выпукла вниз) позволяют «сгладить» непроизвольные неточности возникающие в ответах при общении с ЛПР. На ответы ЛПР могут влиять такие субъективные факторы как настроение, усталость, внешние отвлекающие факторы и т.п. Так как график аппроксимирующей функции строится для однородных шкал критериев и, следовательно, для всех шкал оценки максимизируются либо минимизируются, то получим убывающую функцию.

Для того чтобы удовлетворить все требования к кривой, можно аппроксимировать точки безразличия на рассматриваемом интервале квадратичной функцией (рис. 1).

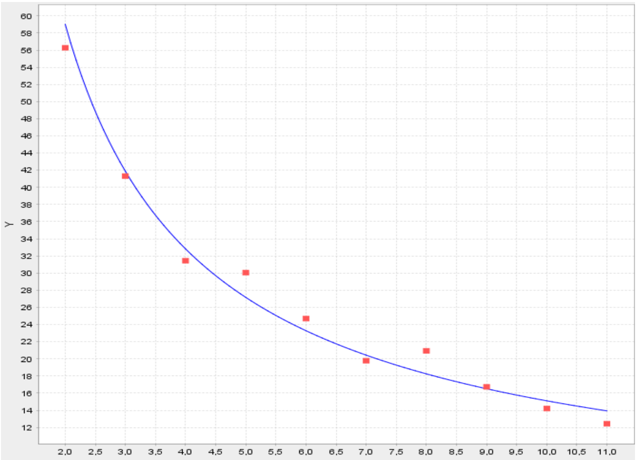

Рис. 1. Пример аппроксимирующей функции

Перечислим основные этапы нахождения весовых коэффициентов важности критериев на основе аппроксимации кривой точек, соответствующих векторным оценкам равноценных альтернатив. Перед применением алгоритма необходимо выделить в диалоге с ЛПР главный критерий или определить его произвольно. Затем для всех пар критериев, один из которых основной, находим отношение коэффициентов важности по следующему алгоритму.

Алгоритм нахождения переменных коэффициентов важности критериев

1. Выявление точек безразличия (равноценности) альтернатив в диалоге с ЛПР.
2. Нахождение значений точек безразличия в однородных шкалах.
3. Аппроксимация точек безразличия кривой.
4. Разбиение кривой на отрезки ломаной согласно делению шкалы главного критерия.

5. Расчет отношения коэффициентов важности для различных интервалов шкалы главного критерия.

Обобщая результаты, полученные для пар критериев, находим значения весовых коэффициентов всех критериев из решения системы линейных уравнений.

Аппроксимирующую функцию удобно находить методом наименьших квадратов (МНК). Приведем основные этапы построения аппроксимирующей квадратичной функции $F = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ методом наименьших квадратов.

Находим коэффициенты линейной комбинации, при которых функция $\Phi = \sum_{j=0}^{n} \left[(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) - y_j \right]^2$ с неизвестными коэффициентами a_i принимает наименьшее значение.

Необходимые условия минимума функции Φ имеют вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = 2 \sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{2} a_j x_i^j - y_i \right] \cdot x_i^k = 0, \quad k = \overline{0,2}.$$

Для удобства преобразуем эту систему к виду:

$$\sum_{j=0}^{2} a_j \sum_{i=0}^{n} x_i^{k+j} = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^k, \ \ k = \overline{0,2}.$$

Для МНК 2-ого порядка система имеет вид:

$$\begin{cases} a_0 (n+1) + a_1 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i + a_2 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i \\ a_0 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i + a_1 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 + a_2 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^3 = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i x_i \\ a_0 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 + a_1 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^3 + a_2 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^4 = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i x_i^2 \end{cases}$$

Это система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_i, которые можно найти с помощью метода Гаусса.

3. Агрегирование критериальных предпочтений

Алгоритм агрегирования предпочтений по критериям подробно описан в работе [1]. Приведем его основные этапы.

1. Построение матриц предпочтения по всем критериям $R^1, R^2, \ldots, R^m$.
2. Построение матрицы суммарных предпочтений с учетом весовых коэффициентов важности критериев.
3. Построение нагруженного мажоритарного графа.
4. Разрушение противоречивых контуров мажоритарного графа.

Матрица предпочтений R^t в случае, когда заданы оценки альтернатив по критерию K_t $(t \in \{1,\ldots,m\})$ вектором $x^t = (x_1^t, x_2^t, \ldots, x_n^t)$ с неотрицательными действительными компонентами, формируется следующим образом. $R^t = \left\| r_{ij}^t \right\|$ (t=1,…,m) – квадратная матрица порядка n (n – число альтернатив) с элементами $r_{ij}^t = \dfrac{x_j^t}{x_i^t + x_j^t}$, если значения оценок по шкале t-го критерия максимизируются, и $r_{ij}^t = \dfrac{x_i^t}{x_i^t + x_j^t}$, если значения оценок по шкале t-го критерия минимизируются. Причем, если $x_i^t = 0$ и $x_j^t = 0$, то $r_{ij}^t = r_{ji}^t = \dfrac{1}{2}$.

Если оценки по шкале критерия K_t ($t\in\{1,\ldots,m\}$) отрицательные, то элементы матрицы $R^t=\left\|r_{ij}^t\right\|$ вычисляются следующим образом: $r_{ij}^t=\frac{\left|x_i^t\right|}{\left|x_i^t\right|+\left|x_j^t\right|}$, если значения оценок по шкале t-го критерия максимизируются, и $r_{ij}^t=\frac{\left|x_j^t\right|}{\left|x_i^t\right|+\left|x_j^t\right|}$, если значения оценок по шкале t-го критерия минимизируются. В случае, когда оценки по шкале критерия могут быть любым действительным числом, по смыслу задачи один критерий рекомендуется заменить двумя (с отрицательными и неотрицательными шкалами), например, заменить рентабельность на прибыль и убыток. Сдвиг шкалы (например, с целью сделать все оценки неотрицательными) приведет к изменению информации о том, во сколько раз одна альтернатива предпочтительнее другой. Если для некоторой альтернативы по какому-либо критерию не задана оценка, то эта альтернатива не сравнима с другими по данному критерию и в матрице предпочтений все элементы соответствующих строки и столбца равны нулю.

При построении агрегированного отношения предпочтения возникают трудности в нахождении матрицы суммарных предпочтений $P=\left\|p_{ij}\right\|$: одновременно необходимо использовать весовые коэффициенты важности критериев, полученные для разных интервалов шкалы главного критерия. В матрице суммарных предпочтений, если оценки альтернатив a_i и a_j попадает в один интервал по шкале главного критерия, то элементы матриц предпочтений r_{ij} и r_{ji} умножаются на один и тот же весовой коэффициент. Если же альтернативы a_i и a_j

попадают в разные интервалы, то порядок умножения на весовые коэффициенты зависит от того минимизируются или максимизируются оценки по шкале критерия. Пусть для определенности a_i попадает в первый интервал, a_j – во второй. Если оценки по шкале критерия максимизируются, то элемент матрицы предпочтений r_{ij} умножается на коэффициент из первого ценового интервала, а r_{ji} умножаются на весовой коэффициент из второго интервала. Если оценки по шкале критерия минимизируются, то наоборот. И так для матриц предпочтений по всем критериям. Матрица суммарных предпочтений находится обычно: суммируются матрицы критериальных предпочтений с элементами, умноженными на соответствующие весовые коэффициенты.

Нагруженный мажоритарный граф $G = (A, \rho_{\Sigma})$ строится по матрице суммарных предпочтений. Элементы матрицы смежности мажоритарного графа R_{Σ}, соответствующего отношению ρ_{Σ}, находим по формуле

$$r_{ij}^{\Sigma} = \begin{cases} 1, \text{ если } p_{ij} - p_{ji} \geq 0, \\ 0, \qquad \text{иначе.} \end{cases}$$

Элементы соответствующей матрицы весов C равны

$$c_{ij} = \begin{cases} p_{ij} - p_{ji}, & \text{если } r_{ij}^{\Sigma} = 1, \\ \infty, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где p_{ij} – элементы матрицы суммарных предпочтений $P = \| p_{ij} \|$.

Разрушаем противоречивые контуры отношения ρ_{Σ}. К противоречивым относятся контуры, в которых не все альтернативы равноценны. Удаляем из противоречивых контуров дуги, имеющие наименьший вес и соединяющие не равноценные альтернативы. Получим отношение ρ без контуров. Строим агрегированное отношение предпочтения как транзитивное замыкание отношения ρ

$$\hat{\rho} = Tr\rho .$$

На основе построенного агрегированного отношения предпочтения, используя алгоритм Демукрона разбиения графа на уровни, проводится ранжирование альтернатив по предпочтительности. Заметим, что можно ранжировать только альтернативы с оценками по критериям из интервалов, соответствующих разбиению на шкалы главного критерия, а можно упорядочить все альтернативы. В первом случае ЛПР получит ранжирование альтернатив, например, в данной категории цен.

4. Пример закупки пассажирских самолетов

Рассмотрим задачу сравнения пассажирских самолетов средней дальности, оцениваемых ЛПР по трем критериям качества: K_1 – Цена, K_2 – Послепродажное обслуживание, K_3 – Летно-технические характеристики. Опишем процедуру нахождения весовых коэффициентов важности критериев, наиболее полно отражающих предпочтения ЛПР. Затем, на основе полученной информации и алгоритмов агрегирования предпочтений с использованием переменных коэффициентов важности критериев, ранжируем четыре модели самолетов a_1, a_2, a_3, a_4.

Предварительно зададим шкалы критериев. Шкалы могут быть неоднородными, но для корректного построение аппроксимирующих кривых после задания оценок альтернатив по критериям их необходимо будет привести к однородным.

Название критерия	Шкала	Единица измерения
Цена	[0.5, 2]	млрд. руб.
Послепродажное обслуживание	[0, 10]	баллы
Летно-технические характеристики	[0, 10]	баллы

Вычислим весовых коэффициентов важности критериев согласно предложенному ранее алгоритму.

1. <u>Выявление точек безразличия (равноценности) альтернатив.</u>

Пусть ЛПР выбрал в качестве главного критерия – K_1 (цена).

В ходе диалога с ЛПР находим точки безразличия альтернатив по парам критериев: цена и послепродажное обслуживание (табл.1), цена и летно-технические характеристики (табл.2).

Таблица 1

Цена	2	1.6	1.2	1	0.8	0.5	млрд.руб.
Послепродажное обслуживание	10	8	7	6	5	3	Балл

Таблица 2

Цена	2	1.6	1.2	1	0.8	0.5	млрд.руб.
Л-Т характеристики	10	9	8	7	6	5	балл

2. Нахождение точек безразличия в однородных шкалах.

Выберем в качестве однородной шкалы отрезок [a; b], и пусть значение оценок по данной шкале максимизируется. Неоднородная шкала – отрезок [c; d]. Если значения оценок по неоднородной шкале максимизируются, то формула перевода имеет вид:

$$x_i^{одн.} = \frac{b-a}{d-c}(x_i^{неодн.} - c) + a\,.$$

Если значения оценок по неоднородной шкале минимизируются, тогда

$$x_i^{одн.} = \frac{b-a}{d-c}(d - x_i^{неодн.}) + a\,.$$

Пусть [a; b]= [0; 1]. Тогда для шкал, по которым оценки соответственно максимизируются и минимизируются, формулы примут вид:

$$x_i^{одн.} = \frac{1}{d-c}(x_i^{неодн.} - c) \quad \text{и} \quad x_i^{одн.} = \frac{1}{d-c}(d - x_i^{неодн.})\,.$$

По критерию Цена отрезок [c; d]= [0.5; 2], оценки минимизируются, следовательно,

$$x_i^{одн.} = \frac{1}{1.5}(2 - x_i^{неодн.})\,.$$

По критериям Послепродажное обслуживание и Летно-технические характеристики отрезок [c; d]= [0; 10], оценки максимизируются, следовательно,

$$x_i^{одн.} = \frac{1}{10}x_i^{неодн.}\,.$$

В табл.3 и табл.4 представлены оценки по соответствующим критериям в однородных шкалах.

Таблица 3

Цена	0	0.267	0.533	0.667	0.8	1	млрд.руб.
Послепродажное обслуживание	1	0.8	0.7	0.6	0.5	0.3	балл

Таблица 4

Цена	0	0.267	0.533	0.667	0.8	1	млрд.руб.
Л-Т характеристики	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	балл

3. Аппроксимация точек безразличия кривой.

Для аппроксимации полученных точек (x_i, y_i), $i = \overline{1,n}$ кривой безразличия воспользуемся методом наименьших квадратов 2-го порядка, т.е. найдем аппроксимирующую функцию вида: $F = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

Для критериев Цена и Послепродажное обслуживание аппроксимирующая функция принимает вид: $F = 1.256 - 0.607x - 0.672x^2$ (рис.2).

Для критериев Цена и Летно-технические характеристики аппроксимирующая функция принимает вид: $F = 1.162 + 0.398x - 1.548x^2$ (рис.3).

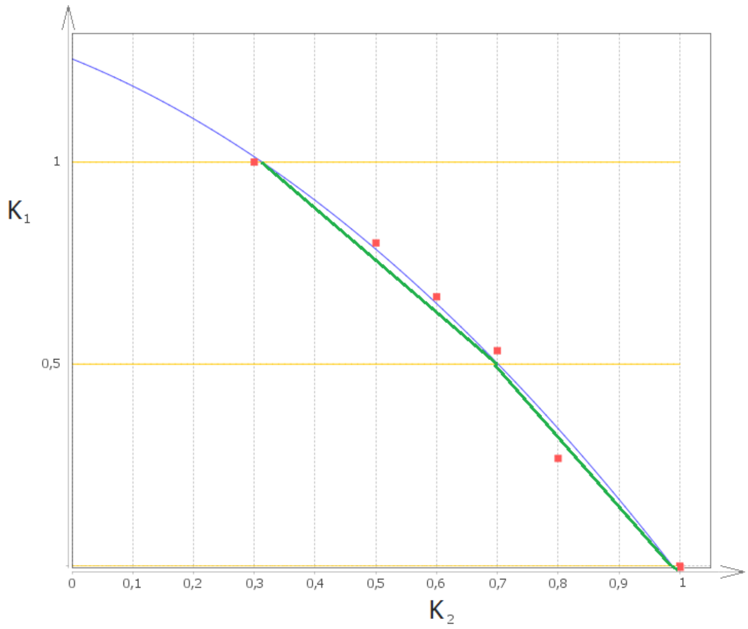

Рис.2. Построение кривой безразличия по критериям Цена и Послепродажное обслуживание.

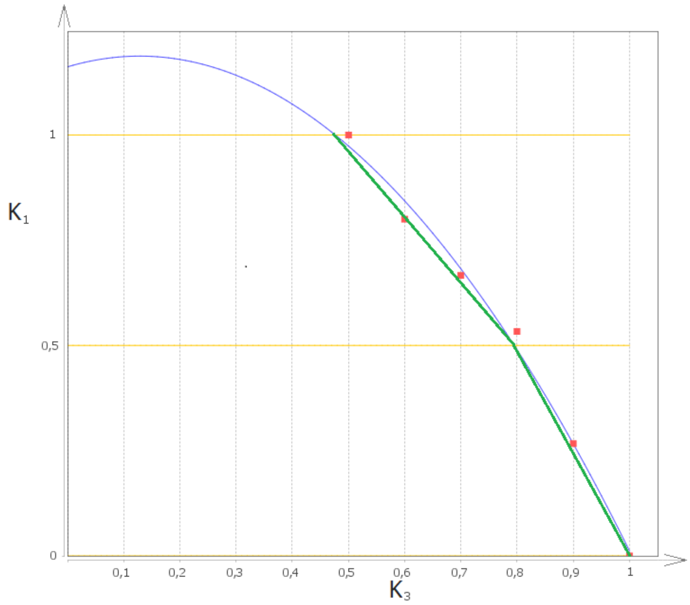

Рис.3. Построение кривой безразличия по критериям Цена и Летно-технические характеристики.

4. <u>Разбиение кривой на отрезки ломаной.</u>

Шкала главного критерия заключена в промежутке от 0.5 до 2 млрд. руб. Разобьем шкалу на N=2 отрезка и проведем прямые F_1=0, F_2=0.5, F_3=1 (в однородных шкалах). Найдем координаты точек пересечения этих прямых с графиками аппроксимирующих функций по формуле:

$$x_i = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_2(F_i - a_0)}}{2a_2}; \quad y_i = F_i.$$

Для пары критериев Цена и Послепродажное обслуживание получим точки пересечения (1; 0), (0.701; 0.5), (0.31; 1). Для пары критериев Цена и Летно-технические характеристики получим точки пересечения (1; 0), (0.794; 0.5), (0.47; 1).

5. <u>Расчет коэффициентов важности для разных отрезков ломаной.</u>

Отношение коэффициентов важности двух критериев считается как модуль тангенса угла наклона ломаной. Значения коэффициентов важности критериев для каждого из отрезков [0, 0.5] и [0.5, 1] по шкале главного критерия K_1 найдем из решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{k_1^1}{k_2^1} = |tg\alpha_1|; \\ \dfrac{k_1^1}{k_3^1} = |tg\alpha_2|; \\ k_1^1 + k_2^1 + k_3^1 = 1, \end{cases}$$

где α_1 – это угол наклона ломаной для критериев Цена – Послепродажное обслуживание; а α_2 – угол наклона ломаной для критериев Цена – Летно-технические характеристики.

На отрезке [0, 0.5] система принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{k_1^1}{k_2^1} = \left|\dfrac{F_2 - F_1}{x_2^1 - x_1^1}\right| = 1.743 \\ \dfrac{k_1^1}{k_3^1} = \left|\dfrac{F_2 - F_1}{x_2^1 - x_1^1}\right| = 2.39 \\ k_1^1 + k_2^1 + k_3^1 = 1 \end{cases}$$

Решая систему, получим: $k_1^1 = 0.502$, $k_2^1 = 0.288$, $k_3^1 = 0.210$.

На отрезке [0.5, 1] система принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{k_1^2}{k_2^2} = \left|\dfrac{F_3 - F_2}{x_3^2 - x_2^2}\right| = 1.31 \\ \dfrac{k_1^2}{k_3^2} = \left|\dfrac{F_3 - F_2}{x_3^2 - x_2^2}\right| = 1.62 \\ k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1 \end{cases}$$

Получим: $k_1^2 = 0.42$, $k_2^2 = 0.32$, $k_3^2 = 0.26$.

Агрегирование критериальных предпочтений проведем с учетом и без учета важности критериев. Для учета важности критериев вычислим постоянные и переменные весовые коэффициенты. Проведем ранжирование моделей пассажирских самолетов a_1, a_2, a_3, a_4 с учетом важности критериев. Оценки самолетов a_1, a_2, a_3, a_4 по шкалам трех критериев качества приведены в табл.5.

На основе значений оценок альтернатив по каждому критерию качества найдем соответственно матрицы предпочтений [5]:

Таблица 5

Критерий/ Самолет	Цена млрд. руб.	Обслуживание 1-10 баллов	ЛТХ 1-10 баллов
a_1	2	10	8
a_2	1,5	8	6
a_3	1	6	6
a_4	0,5	4	4

$$R^1=\begin{pmatrix}0&\frac{4}{7}&\frac{2}{3}&\frac{4}{5}\\\frac{3}{7}&0&\frac{3}{5}&\frac{3}{4}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{5}&0&\frac{2}{3}\\\frac{1}{5}&\frac{1}{4}&\frac{1}{3}&0\end{pmatrix};\ R^2=\begin{pmatrix}0&\frac{4}{9}&\frac{3}{8}&\frac{2}{7}\\\frac{5}{9}&0&\frac{3}{7}&\frac{1}{3}\\\frac{5}{8}&\frac{4}{7}&0&\frac{2}{5}\\\frac{5}{7}&\frac{2}{3}&\frac{3}{5}&0\end{pmatrix};\ R^3=\begin{pmatrix}0&\frac{3}{7}&\frac{3}{7}&\frac{1}{3}\\\frac{4}{7}&0&\frac{1}{2}&\frac{2}{5}\\\frac{4}{7}&\frac{1}{2}&0&\frac{2}{5}\\\frac{2}{3}&\frac{3}{5}&\frac{3}{5}&0\end{pmatrix}$$

Умножим матрицы предпочтений по каждому из критериев на переменные весовые коэффициенты следующим образом:

$$R^1=\begin{pmatrix}0&\frac{4}{7}k_1^2&\frac{2}{3}k_1^2&\frac{4}{5}k_1^2\\\frac{3}{7}k_1^2&0&\frac{3}{5}k_1^2&\frac{3}{4}k_1^2\\\frac{1}{3}k_1^1&\frac{2}{5}k_1^1&0&\frac{2}{3}k_1^1\\\frac{1}{5}k_1^1&\frac{1}{4}k_1^1&\frac{1}{3}k_1^1&0\end{pmatrix};\quad R^2=\begin{pmatrix}0&\frac{4}{9}k_2^2&\frac{3}{8}k_2^1&\frac{2}{7}k_2^1\\\frac{5}{9}k_2^2&0&\frac{3}{7}k_2^1&\frac{1}{3}k_2^1\\\frac{5}{8}k_2^2&\frac{4}{7}k_2^2&0&\frac{2}{5}k_2^1\\\frac{5}{7}k_2^2&\frac{2}{3}k_2^2&\frac{3}{5}k_2^1&0\end{pmatrix};$$

$$R^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{7}k_3^2 & \frac{3}{7}k_3^1 & \frac{1}{3}k_3^1 \\ \frac{4}{7}k_3^2 & 0 & \frac{1}{2}k_3^1 & \frac{2}{5}k_3^1 \\ \frac{4}{7}k_3^2 & \frac{1}{2}k_3^2 & 0 & \frac{2}{5}k_3^1 \\ \frac{2}{3}k_3^2 & \frac{3}{5}k_3^2 & \frac{3}{5}k_3^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Построим агрегированное отношение предпочтения. Просуммировав эти матрицы, найдем матрицу суммарных предпочтений P_Σ, на основе которой получим матрицу смежности R_Σ мажоритарного графа:

$$P_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0.495 & 0.547 & 0.544 \\ 0.504 & 0 & 0.52 & 0.56 \\ 0.486 & 0.447 & 0 & 0.492 \\ 0.464 & 0.450 & 0.507 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мажоритарный граф представлен на рис.4. Он не содержит контуров, следовательно, можно ранжировать альтернативы по предпочтительности: $a_3 - a_4 - a_1 - a_2$. Лучший самолёт – a_3, худший – a_2.

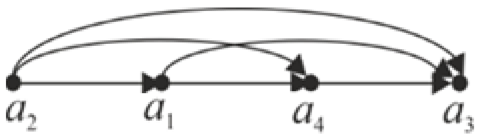

Рис. 4

В работе [5] проведено ранжирование пассажирских самолетов с постоянными весовыми коэффициентами важности критериев, полученными на основе аппроксимации точек безразличия прямой $a_1 - a_4 - a_3 - a_2$ (рис. 5).

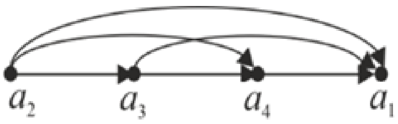

Рис. 5

Результаты ранжирования пассажирских самолетов без учета важности критериев и с учетом постоянных и переменных весовых коэффициентов важности критериев представлены в табл. 6.

Таблица 6

Агрегирование без учета весовых коэффициентов	Агрегирование с учетом постоянных весовых коэффициентов	Агрегирование с учетом переменных весовых коэффициентов
a_1	a_1	a_3
a_3	a_4	a_4
a_2	a_3 о	a_1
a_4	a_2	a_2

Сравнительный анализ ранжирования самолетов показывает, что результат существенным образом зависит от учета важности критериев. Также различаются результаты ранжирования, полученные с постоянными и переменными коэффициентами важности критериев.

Библиографический список.

1. Смерчинская С.О., Яшина Н.П. Агрегирование предпочтений в многокритериальных задачах // Вестник Московского авиационного института. 2013. № 2, г, том 20. С. 219-225.

2. Смерчинская С.О., Яшина Н.П. Агрегирование предпочтений с учетом важности критериев // Труды МАИ, 2015, № 84, URL:

http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=63146 (дата публикации 27.11.2015.)

3. Подиновский В.В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. - М.: Физматлит, 2007. – 64 с.

4. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений. - М.: Логос, 2002. - 392 с.

5. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. – М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.