

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ В СЛУЧАЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПРЕЦЕССИИ

Татьяна Евгеньевна ЧУРКИНА родилась в городе Москве. Старший преподаватель МАИ. Кандидат физико-математических наук. Основные научные интересы — в области задач динамики спутников, теории устойчивости движения. Автор 10 научных работ. E-mail: tatiana802@mail.ru

Tatyana E. CHURKINA, Ph.D., was born in Moscow. She is a Senior Assistant Professor at the MAI. Her research interests are in satellite dynamics, motion stability theory. She has published 10 technical papers. E-mail: tatiana802@mail.ru

*Исследуется устойчивость одного частного движения спутника относительно центра масс на эллиптической орбите в случае цилиндрической прецессии, для которого в абсолютном пространстве спутник, совершив оборот по орбите, возвращается в начальное положение в своем вращении относительно оси симметрии. В пространстве параметров задачи (инерционный параметр и эксцентриситет орбиты) построены области устойчивости в первом приближении, в которых проведен подробный нелинейный анализ устойчивости движения (как при наличии резонансов четвертого порядка, так и при их отсутствии), проверена устойчивость для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий, получены области значений параметров, для которых движение формально устойчиво.*

*Stability is analyzed for an angular satellite motion in elliptical orbit in case of cylindrical precession. The satellite comes in this case to its initial position revolving on its axis of symmetry within the time of one revolution in the orbit in absolute space. A first approximation of stability regions is obtained in the space of problem parameters including inertial parameter and orbit eccentricity. A detailed nonlinear motion stability analysis is carried out for these regions considering cases with and without 4th order resonances. The stability is inspected for a majority of initial conditions in terms of Lebesgue measure. Regions of parameters values are obtained to satisfy formal stability conditions.*

**Ключевые слова:** спутник, функция Гамильтона, устойчивость движения, резонанс.

**Key words:** satellite, Hamiltonian function, stability of motion, resonance.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим движение динамически симметричного спутника — твердого тела — относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле. Характерные размеры спутника предполагаем малыми по сравнению с размерами орбиты. Орбита центра масс спутника  $e$  может быть как эллиптической, так и круговой [2].

Пусть  $O$  — центр масс спутника,  $OXYZ$  — орбитальная система координат, при этом ось  $OZ$  направлена по прямой, соединяющей притягивающий центр и центр масс  $O$  спутника,  $OX$  — по трансверсали,  $OY$  — по бинормали к орбите. Введем жестко связанную со спутником систему координат  $Oxyz$ , оси которой направлены вдоль его главных центральных осей инерции. Будем задавать ориентацию спутника в орбитальной системе координат при помощи углов Эйлера  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ .

При сделанных предположениях движение спутника относительно центра масс может быть описано каноническими дифференциальными уравнениями с функцией Гамильтона [6]:

$$H = \frac{p_\psi^2}{2(1 + e \cos v)^2 \sin^2 \theta} + \frac{p_\theta^2}{2(1 + e \cos v)^2} - p_\psi \operatorname{ctg} \theta \cos \psi - \frac{\alpha \beta (1 - e^2)^{3/2}}{(1 + e \cos v)^2} p_\psi \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} - p_\theta \sin \psi + \alpha \beta (1 - e^2)^{3/2} \frac{\cos \psi}{\sin \theta} + \frac{\alpha^2 \beta^2 (1 - e^2)^3}{2(1 + e \cos v)^2} \operatorname{ctg}^2 \theta + \frac{3}{2} (\alpha - 1) (1 + e \cos v) \cos^2 \theta. \quad (1)$$

Здесь введены безразмерный инерционный параметр  $\alpha = C/A$  ( $0 < \alpha \leq 2$ ), равный отношению полярного момента инерции к экваториальному, и безразмерная угловая скорость  $\beta = r_0 / \omega_0$  (отношение проекции абсолютной угловой скорости спутника на ось симметрии к среднему движению его центра масс). За независимую переменную принята истинная аномалия  $v$ , а обобщенные импульсы  $p_\psi$ ,  $p_\theta$  приведены к безразмерной форме.

Уравнения движения, соответствующие гамильтониану (1), допускают следующее частное решение:

$\theta_0 = \pi/2, \psi_0 = \pi, p_{\psi_0} = 0, p_{\theta_0} = 0$ , отвечающее одному из трех известных стационарных режимов движения динамически симметричного спутника, называемому цилиндрической прецессией [3]. В этом случае ось симметрии спутника нормальна к плоскости орбиты и описывает в абсолютном пространстве цилиндрическую поверхность. Сам спутник во все время движения вращается относительно оси симметрии с постоянной угловой скоростью  $r_0$ .

Один из возможных типов вращений спутника на орбите — обратные вращения ( $\beta < 0$ ). В этом случае спутник вращается относительно оси симметрии в направлении, противоположном движению центра масс по орбите.

В работе рассматривается частный случай обратных вращений ( $\beta = -1$ ), для которого в абсолютном пространстве спутник, совершив оборот по орбите, возвращается в начальное положение в своем вращении. Ставится задача об устойчивости этих стационарных вращений.

Отметим, что случай  $\beta = 0$  подробно был исследован в статье [12], случай  $\alpha = 2$  — в статье [13].

## 2. Линейная задача

### 2.1. Нормализация функции Гамильтона

Сделаем в гамильтониане (1) каноническую замену переменных  $\theta, \psi, p_\theta, p_\psi \rightarrow q_1, q_2, p_1, p_2$  по формулам  $\theta = \pi/2 + q_1, \psi = \pi + q_2, p_\theta = p_1, p_\psi = p_2$  и разложим гамильтониан в ряд Тейлора по степеням  $q_1, q_2, p_1, p_2$ . В разложении гамильтониана возмущенного движения будут отсутствовать формы  $H_n$  нечетного порядка. Получим:

$$H = H_2 + H_4 + \dots;$$

$$H_2 = \frac{1}{2(1+e \cos v)^2} (p_1^2 + p_2^2) - \left[ \frac{\alpha(1-e^2)^{3/2}}{(1+e \cos v)^2} + 1 \right] p_2 q_1 + \left[ \frac{\alpha^2(1-e^2)^3}{(1+e \cos v)^2} + \alpha(1-e^2)^{3/2} - 3(1-\alpha)(1+e \cos v) \right] \frac{q_1^2}{2} + p_1 q_2 - \alpha(1-e^2)^{3/2} \frac{q_2^2}{2}; \quad (2)$$

$$H_4 = - \left[ \frac{5}{6} \alpha \frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e \cos v)^2} + \frac{1}{3} \right] p_2 q_1^3 + \frac{\alpha}{24} (1-e^2)^{3/2} q_2^4 -$$

$$- \frac{1}{6} p_1 q_2^3 + \frac{1}{2} p_2 q_1 q_2^2 - \frac{\alpha}{4} (1-e^2)^{3/2} q_1^2 q_2^2 + \frac{1}{2(1+e \cos v)^2} p_2^2 q_1^2 + \left[ \frac{1}{3} \alpha^2 \frac{(1-e^2)^3}{(1+e \cos v)^2} + \frac{5}{24} \alpha(1-e^2)^{3/2} - \frac{1}{2} (\alpha-1)(1+e \cos v) \right] q_1^4.$$

Многоточием обозначены члены выше четвертого порядка по  $q_1, q_2, p_1, p_2$ .

Рассмотрим сначала случай, когда эксцентриситет орбиты мал. В предельном случае ( $e = 0$ ), соответствующем круговой орбите центра масс спутника, характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет вид

$$\lambda^4 + (\alpha^2 + 5\alpha - 1)\lambda^2 - 2(\alpha + 1)(\alpha - 2) = 0. \quad (3)$$

Будем предполагать, что данное уравнение имеет только чисто мнимые корни вида  $\pm i\omega_k$  ( $k = 1, 2$ ). В противном случае невозмущенное движение неустойчиво [5]. Условие существования только чисто мнимых корней у уравнения (3) таково:  $0,8706225 < \alpha \leq 2$ .

При  $e = 0$  строится каноническая замена переменных  $q_i, p_i \rightarrow q'_i, p'_i$ , приводящая форму  $H_2$  к алгебраической сумме гамильтонианов двух линейных, не связанных между собой осцилляторов [7]. Эта замена имеет вид

$$(q_1, q_2, p_1, p_2)^T = \mathbf{A}(q'_1, q'_2, p'_1, p'_2)^T. \quad (4)$$

Элементы  $a_{ij}$  матрицы  $\mathbf{A}$  данного преобразования таковы:  $a_{2i} = C_i a_i, a_{3i} = C_i b_i$  ( $i = 1, 2$ );  $a_{1i} = C_{i-2}, a_{4i} = d_{i-2} C_{i-2}$  ( $i = 3, 4$ ), где

$$a_i = (-\omega_i^2 + 2\alpha - 4) / \gamma_i; \quad b_i = (-\omega_i^2(1 + \alpha) - 2\alpha + 4) / \gamma_i;$$

$$d_i = (-\omega_i^2 + \alpha^2 + 5\alpha - 2) \omega_i / \gamma_i, \quad \gamma_i = \omega_i(2 + \alpha).$$

Здесь  $\omega_i = \omega_i(\alpha)$  ( $i = 1, 2$ ) находятся из уравнения (3). Для определенности будем считать, что  $\omega_1 > \omega_2 > 0$ . Константы  $C_i$  можно выбрать следующим образом:

$$C_i = (2 + \alpha) \sqrt{\frac{\omega_i}{\omega_i^2 C_{11} + C_{22}}},$$

где  $i = 1, 2, C_{11} = (\alpha^2 + \alpha + 7),$

$$C_{22} = 2(\alpha - 2)(\alpha^2 + 7\alpha + 1).$$

В результате преобразования (4) форма  $H_2$  приводится к виду

$$H_2 = \frac{1}{2}\omega_1(q_1'^2 + p_1'^2) - \frac{1}{2}\omega_2(q_2'^2 + p_2'^2). \quad (5)$$

2.2. Случай параметрического резонанса

При малых значениях эксцентриситета представим преобразованную функцию Гамильтона  $H_2$  в виде ряда по степеням  $e$ :

$$H_2 = H_0^{(2)} + eH_1^{(2)} + e^2H_2^{(2)} + \dots, \quad (6)$$

где  $H_0^{(2)}, H_1^{(2)}, \dots$  — квадратичные формы переменных  $q'_1, q'_2, p'_1, p'_2$ , причем коэффициенты формы  $H_0^{(2)}$  постоянны, а коэффициенты форм  $H_1^{(2)}, H_2^{(2)}, \dots$  — непрерывные вещественные функ-

ции  $\nu$  с общим периодом  $2\pi$ . При этом  $H_0^{(2)}$  совпадает с (5).

По теореме Крейна—Гельфанда—Лидского [7, 14] при  $0 < e \ll 1$  в задаче неустойчивость возможна тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из трех соотношений

$$\omega_1 - \omega_2 = N_1, \quad 2\omega_1 = N_2, \quad 2\omega_2 = N_3,$$

$$N_i = 0, 1, 2, \dots \quad (i = 1, 2, 3).$$

Значения  $\alpha = \alpha_0$ , при которых выполняются эти соотношения в предельном случае  $e = 0$ , являются порождающими точками областей параметрического резонанса. Порождающие точки  $\alpha = \alpha_0$  оси  $e = 0$  выписаны в табл. 1 в порядке возрастания величины  $\alpha_0$ . Отметим, что точка  $\alpha_0 = 1$  является точкой кратного резонанса, поскольку в ней выполняются сразу несколько резонансных соотношений второго порядка.

Таблица 1

Резонансы второго порядка

| №  | Резонанс                  | $\alpha_0$                                      | Уравнения границ   |
|----|---------------------------|---|--|
| 1  | $\omega_1 - \omega_2 = 0$ | $\approx 0,8706225$                             | $\alpha_1 = 0,8706225 + 0,0647509e^2 + 0e^3 + \dots$   |
| 2  | $2\omega_1 = 3$           | $\frac{3\sqrt{494} - 37}{34} \approx 0,872892$  | $\alpha_2^+ = 0,872892 + 0,06143e^2 + 0,000756e^3 + \dots$<br>$\alpha_2^- = 0,872892 + 0,06143e^2 - 0,000756e^3 + \dots$         |
| 3  | $2\omega_1 = 4$           | 1   | $\alpha_{3,4,5} = 1$   |
| 4  | $2\omega_2 = 2$           |   |  |
| 5  | $\omega_1 - \omega_2 = 1$ |   |  |
| 6  | $2\omega_1 = 5$           | $\frac{\sqrt{4414} - 39}{22} \approx 1,247179$  | $\alpha_6 = 1,247179 - 0,085515e^2 + 0e^3 + \dots$   |
| 7  | $\omega_1 - \omega_2 = 2$ | $\approx 1,342021$                              | $\alpha_7^+ = 1,342021 + 0,063727e^2 + \dots$<br>$\alpha_7^- = 1,342021 - 0,406342e^2 + \dots$                                   |
| 8  | $2\omega_2 = 1$           | $\frac{\sqrt{70} + 1}{6} \approx 1,561100$      | $\alpha_8^+ = 1,561100 + 0,175856e + \dots$<br>$\alpha_8^- = 1,561100 - 0,175856e + \dots$                                       |
| 9  | $2\omega_1 = 6$           | $\frac{3\sqrt{665} - 43}{22} \approx 1,561944$  | $\alpha_9 = 1,561944 - 0,178069e^2 + 0e^3 + \dots$   |
| 10 | $\omega_1 - \omega_2 = 3$ | $\approx 1,790815$                              | $\alpha_{10}^+ = 1,790815 - 0,352016e^2 + 0,071064e^3 + \dots$<br>$\alpha_{10}^- = 1,790815 - 0,352016e^2 - 0,071064e^3 + \dots$ |
| 11 | $2\omega_1 = 7$           | $\frac{3\sqrt{2566} - 79}{38} \approx 1,920186$ | $\alpha_{11} = 1,920186 - 0,272971e^2 + 0e^3 + \dots$  |
| 12 | $2\omega_2 = 0$           | 2   | $\alpha_{12} = 2 - \frac{3}{4}e^2 + 0e^3 + \dots$  |

При малых  $e$  уравнения границ областей неустойчивости получены аналитически при помощи метода Дебри—Хори [7, 9, 10]. Уравнения соответствующих границ областей неустойчивости приведены в табл. 1. Обозначение  $\alpha_j^+$  соответствует «верхней» границе,  $\alpha_j^-$  — «нижней» границе. Если в таблице приводится только одно уравнение, то это означает, что либо различие в уравнениях границ проявляется в более высоком приближении по  $e$ , чем выписано в таблице (резонансные соотношения с номерами 6, 9, 11 из табл. 1), либо границы сливаются в одну (резонансные соотношения с номерами 3—5 из табл. 1), либо в допустимой области значений для параметров задачи находится лишь одна граница области неустойчивости в первом приближении (резонансные соотношения с номерами 1, 12 из табл. 1).

2.3. Численное построение областей устойчивости в первом приближении

При больших значениях эксцентриситета для исследования устойчивости требуются численные

расчеты на ЭВМ. Для этого при фиксированных параметрах  $e$  и  $\alpha$  следует построить фундаментальную систему решений линейной системы дифференциальных уравнений, соответствующих гамильтониану (2) в точке  $\nu = 2\pi$ , а затем подсчитать коэффициенты характеристического уравнения

$$\rho_4 - \alpha_1 \rho_3 + \alpha_2 \rho_2 - \alpha_1 \rho + 1 = 0.$$

Если при этом выполняются неравенства

$$-2 < a_2 < 6, \quad 4(a_2 - 2) < a_1^2 < (a_2 + 2)^2 / 4,$$

то рассматриваемые значения параметров  $e$  и  $\alpha$  лежат в области устойчивости в первом приближении [4]. Здесь коэффициент  $a_1$  равен следу фундаментальной матрицы линейной системы, вычисленной при  $\nu = 2\pi$ ,  $a_2$  — сумма всех ее главных миноров второго порядка.

На рис. 1 области неустойчивости заштрихованы, а области устойчивости оставлены светлыми, ось  $Oe$  горизонтальна,  $O\alpha$  вертикальна.

Области устойчивости в первом приближении с номерами I и VI очень узки, поэтому для нагляд-

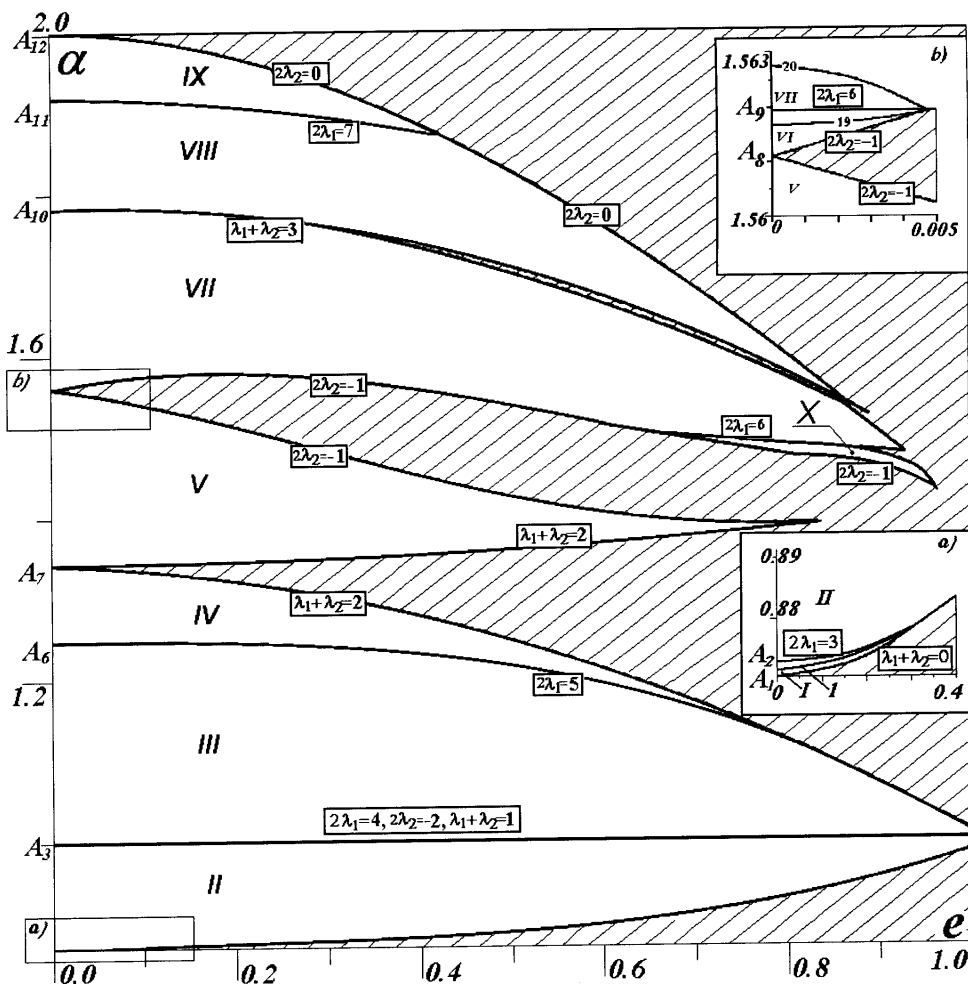


Рис. 1. Области устойчивости в первом приближении

ности вынесены отдельно на увеличенные фрагменты соответствующих рисунков. Порождающие точки областей неустойчивости, лежащие на оси  $O\alpha$ , обозначены на рисунке как  $A_i$ , номера точек  $i$  совпадают с номерами строк в табл. 1, где приведены соответствующие им значения параметра  $\alpha = \alpha_0$ .

В области устойчивости линейной системы дифференциальных уравнений, соответствующих функции Гамильтона  $H_2$  из (2), последнюю при помощи вещественной канонической  $2\pi$ -периодической по  $v$  замены переменных  $q_i, p_i \rightarrow q_i'', p_i''$  можно привести к виду

$$H_2 = \frac{1}{2}\lambda_1(q_1''^2 + p_1''^2) + \frac{1}{2}\lambda_2(q_2''^2 + p_2''^2).$$

Величины  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  определяются неоднозначно. Для их однозначного определения воспользуемся их непрерывностью по параметру  $e$ . Тогда из условия  $\lambda_1 = \omega_1$  и  $\lambda_2 = -\omega_2$  при  $e = 0$  величины  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  определяются численно по формулам в соответствии с табл. 2. Выбор формулы осуществляется в зависимости от принадлежности значений параметров  $e, \alpha$  той или иной области устойчивости. Для каждой из таких областей в табл. 2 в пер-

вой колонке приведен ее номер (в соответствии с рис. 1), во второй — значения  $\alpha$ , принадлежащих им при  $e = 0$ .

В табл. 2

$$z_1 = (a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 8})/4,$$

$$z_2 = (a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 8})/4.$$

Опишем более подробно рис. 1.

Количество областей устойчивости в первом приближении равно 10. Одна из них ( $X$ ), не имеющая общих точек с осью  $O\alpha$ , касается области с номером  $VII$ , формулы подсчета значений  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2$ ) для этих областей совпадают.

Для всех областей устойчивости в первом приближении (для достаточно малых значений  $e$ ) резонансные соотношения на границах остаются теми же, что при  $e = 0$  в соответствующих порождающих точках областей параметрического резонанса. Для некоторых из областей устойчивости в первом приближении (например, области  $VIII$  на рис. 1) границами служат не две кривые, на которых выполняются резонансные соотношения второго порядка, а более. При этом смена резонансного соотношения происходит в «угловых» точках, являющихся

Таблица 2

Формулы для вычисления  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$

|             | $\alpha$   | $\lambda_1$                      | $\lambda_2$                       |
|-------------|--|----------------------------------|-----------------------------------|
| <i>I</i>    | $(0,8706225; \frac{3\sqrt{494} - 37}{34})$               | $1 + \frac{1}{2\pi} \arccos z_2$ | $-1 - \frac{1}{2\pi} \arccos z_1$ |
| <i>II</i>   | $(\frac{3\sqrt{494} - 37}{34}; 1)$                       | $2 - \frac{1}{2\pi} \arccos z_2$ | $-1 - \frac{1}{2\pi} \arccos z_1$ |
| <i>III</i>  | $(1; \frac{\sqrt{4414} - 39}{22})$                       | $2 + \frac{1}{2\pi} \arccos z_2$ | $-1 + \frac{1}{2\pi} \arccos z_1$ |
| <i>IV</i>   | $(\frac{\sqrt{4414} - 39}{22}; 1,342021)$                | $3 - \frac{1}{2\pi} \arccos z_2$ | $-1 + \frac{1}{2\pi} \arccos z_1$ |
| <i>V</i>    | $(1,342021; \frac{\sqrt{70} + 1}{6})$                    | $3 - \frac{1}{2\pi} \arccos z_1$ | $-1 + \frac{1}{2\pi} \arccos z_2$ |
| <i>VI</i>   | $(\frac{\sqrt{70} + 1}{6}; \frac{3\sqrt{665} - 43}{22})$ | $3 - \frac{1}{2\pi} \arccos z_1$ | $-\frac{1}{2\pi} \arccos z_2$     |
| <i>VII</i>  | $(\frac{3\sqrt{665} - 43}{22}; 1,790815)$                | $3 + \frac{1}{2\pi} \arccos z_1$ | $-\frac{1}{2\pi} \arccos z_2$     |
| <i>VIII</i> | $(1,790815; \frac{3\sqrt{2566} - 79}{38})$               | $3 + \frac{1}{2\pi} \arccos z_2$ | $-\frac{1}{2\pi} \arccos z_1$     |
| <i>IX</i>   | $(\frac{3\sqrt{2566} - 79}{38}; 2)$                      | $4 - \frac{1}{2\pi} \arccos z_2$ | $-\frac{1}{2\pi} \arccos z_1$     |

ся точками кратного резонанса второго порядка, в которых также могут иметь место и резонансные соотношения более высоких порядков. На рис. 1 в рамках приведены резонансные соотношения, которые имеют место на соответствующих границах.

### 3. Нелинейный анализ

В областях устойчивости линейной системы дифференциальных уравнений, соответствующих гамильтониану (2), для полного исследования требуется проведение нелинейного анализа.

В общем случае в гамильтоновой системе в области ее устойчивости в первом приближении неустойчивость возможна для тех значений параметров  $e$  и  $\alpha$ , при которых имеет место резонанс третьего или четвертого порядков:

$$n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 = N, \quad (7)$$

где  $n_i$ ,  $N$  — целые числа,  $|n_1| + |n_2| = 3$  или  $|n_1| + |n_2| = 4$ . Резонансы третьего порядка к неустойчивости в данной задаче не приводят, так как в разложении гамильтониана возмущенного движения отсутствует форма третьей степени относительно  $q_i$ ,  $p_i$ . Будем рассматривать однократные резонансы четвертого порядка.

На рис. 2, а также на рис. 1 на увеличенных фрагментах в плоскости  $e, \alpha$  построены кривые резонансов четвертого порядка, пронумерованные в соответствии с табл. 3. В плоскости  $e, \alpha$  при  $e = 0$  резонансные кривые исходят из точек  $\alpha^{(0)}$  (см. табл. 3). Помимо резонансных кривых, имеющих порождающие точки при  $e = 0$  на оси  $O\alpha$ , существует резонансная кривая, идущая из части плоскости  $(e, \alpha)$ , лежащей вне исследуемой области значений параметра  $\alpha$ :  $2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 7$  (номер 30 на рис. 2).

Опишем подробнее характерное поведение кривых резонансов четвертого порядка при произвольных значениях эксцентриситета внутри областей устойчивости в первом приближении.

Кривые с номерами 8–11, 13 (см. рис. 2) полностью лежат в области устойчивости в первом приближении с номером III, кривые с номерами 3–7 — в области II; каждая из этих двух групп кривых сходится в одну точку на границе  $e = 1$  (свою для каждой из областей). Кривая 14 на рис. 2 проходит через всю область IV, заканчиваясь в «угловой» точке области. Аналогично поведение кривых с номерами 16 (принадлежащей области V), 21 (из VII), 27 (VIII, IX) и 29 (IX). Из других точек, при-

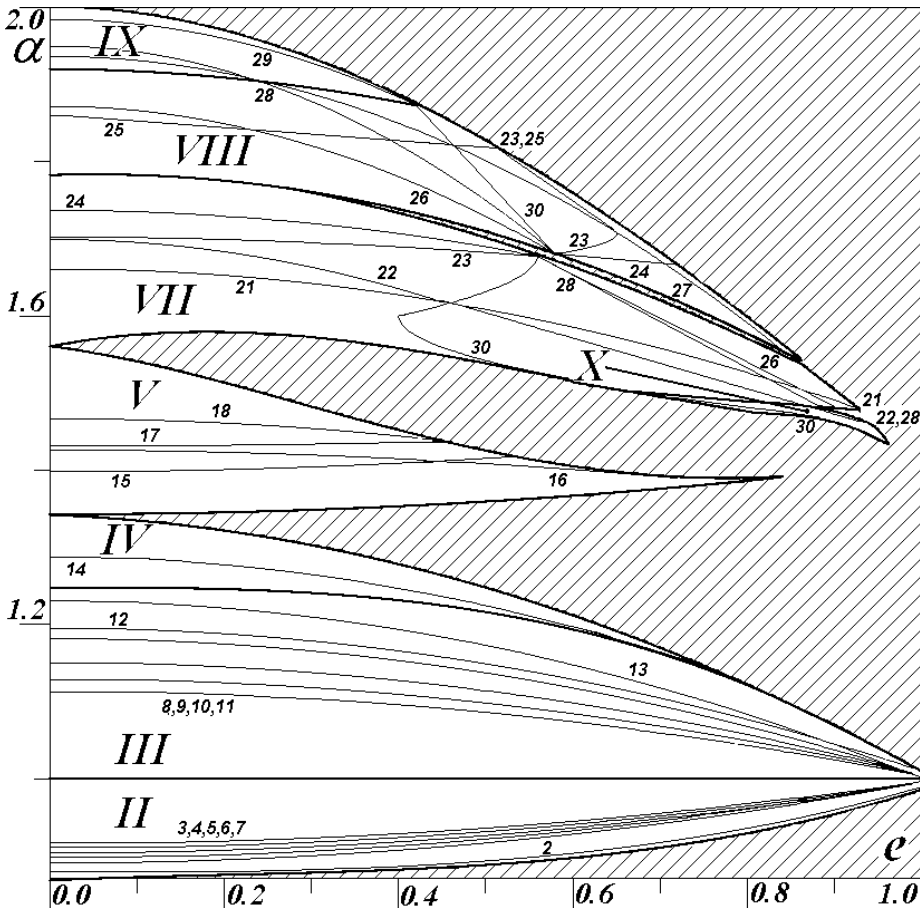


Рис. 2. Кривые резонансов четвертого порядка

Резонансы четвертого порядка

| №  | Резонанс                      | $\alpha^{(0)}$                                  | $\alpha^{(2)}$       |
|----|-------------------------------|---|----------------------|
| 1  | $3\lambda_1 + \lambda_2 = 3$  | $\approx 0,871206$                              | $\approx 0,063882$   |
| 2  | $3\lambda_1 - \lambda_2 = 6$  | $\approx 0,878839$                              | $\approx 0,053448$   |
| 3  | $4\lambda_2 = -5$             | $(3\sqrt{1869} - 62) / 76 \approx 0,890734$     | $\approx 0,06086$    |
| 4  | $\lambda_1 + 3\lambda_2 = -2$ | $\approx 0,89728$                               | $\approx 0,054451$   |
| 5  | $2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 1$ | $\approx 0,903822$                              | $\approx 0,047893$   |
| 6  | $3\lambda_1 + \lambda_2 = 4$  | $\approx 0,910103$                              | $\approx 0,041725$   |
| 7  | $4\lambda_1 = 7$              | $(\sqrt{58045} - 142) / 108 \approx 0,915975$   | $\approx 0,036215$   |
| 8  | $4\lambda_1 = 9$              | $(3\sqrt{173341} - 746) / 452 \approx 1,112892$ | $\approx -0,041378$  |
| 9  | $3\lambda_1 + \lambda_2 = 6$  | $\approx 1,128706$                              | $\approx -0,05373$   |
| 10 | $2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 3$ | $\approx 1,150128$                              | $\approx -0,0733296$ |
| 11 | $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$  | $\approx 1,181059$                              | $\approx 0,010792$   |
| 12 | $3\lambda_1 - \lambda_2 = 8$  | $\approx 1,194643$                              | $\approx -0,052969$  |
| 13 | $4\lambda_2 = -3$             | $(3\sqrt{5765} - 26) / 164 \approx 1,230383$    | $\approx -0,180541$  |
| 14 | $3\lambda_1 + \lambda_2 = 7$  | $\approx 1,28661$                               | $\approx -0,116361$  |
| 15 | $4\lambda_1 = 11$             | $(\sqrt{445141} - 382) / 204 \approx 1,397985$  | $\approx -0,13129$   |
| 16 | $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 1$  | $\approx 1,425415$                              | $\approx -0,293554$  |
| 17 | $3\lambda_1 - \lambda_2 = 9$  | $\approx 1,431207$                              | $\approx -0,090612$  |
| 18 | $3\lambda_1 + \lambda_2 = 8$  | $\approx 1,466094$                              | $\approx -0,196473$  |
| 19 | $2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 5$ | $\approx 1,561668$                              | $\approx 8,666139$   |
| 20 | $2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 7$ | $\approx 1,562747$                              | $\approx -8,888501$  |
| 21 | $3\lambda_1 + \lambda_2 = 9$  | $\approx 1,660386$                              | $\approx -0,223782$  |
| 22 | $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 2$  | $\approx 1,698657$                              | $\approx -0,334593$  |
| 23 | $3\lambda_1 - \lambda_2 = 10$ | $\approx 1,701734$                              | $\approx -0,172509$  |
| 24 | $4\lambda_1 = 13$             | $(3\sqrt{112765} - 542) / 268 \approx 1,736623$ | $\approx -0,225413$  |
| 25 | $3\lambda_1 + \lambda_2 = 10$ | $\approx 1,8608$                                | $\approx -0,327226$  |
| 26 | $4\lambda_2 = -1$             | $(\sqrt{4141} + 18) / 44 \approx 1,871605$      | $\approx -0,621367$  |
| 27 | $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 3$  | $\approx 1,936229$                              | $\approx -0,588486$  |
| 28 | $\lambda_1 - 3\lambda_2 = 4$  | $\approx 1,949989$                              | $\approx -0,865985$  |
| 29 | $2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 7$ | $\approx 1,984416$                              | $\approx -0,590403$  |

надлежащих области допустимых значений параметров  $e, \alpha$ , отметим точки кратных резонансов: в области VII существует точка трехкратного резонанса четвертого порядка (выполнены соотношения 21, 22 из табл. 3 и одновременно  $2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 7$ ), на границе той же области существует точка пятикрат-

ного резонанса (в ней сходятся резонансные кривые с номерами 23, 24, 26, 28, 30), эти же кривые выходят из противоположной границы области неустойчивости в первом приближении в область VIII.

При малых  $e$  уравнения кривых резонансов четвертого порядка вида  $n_1\lambda_1 - n_2\lambda_2 = N$  ( $n_1, n_2, N$

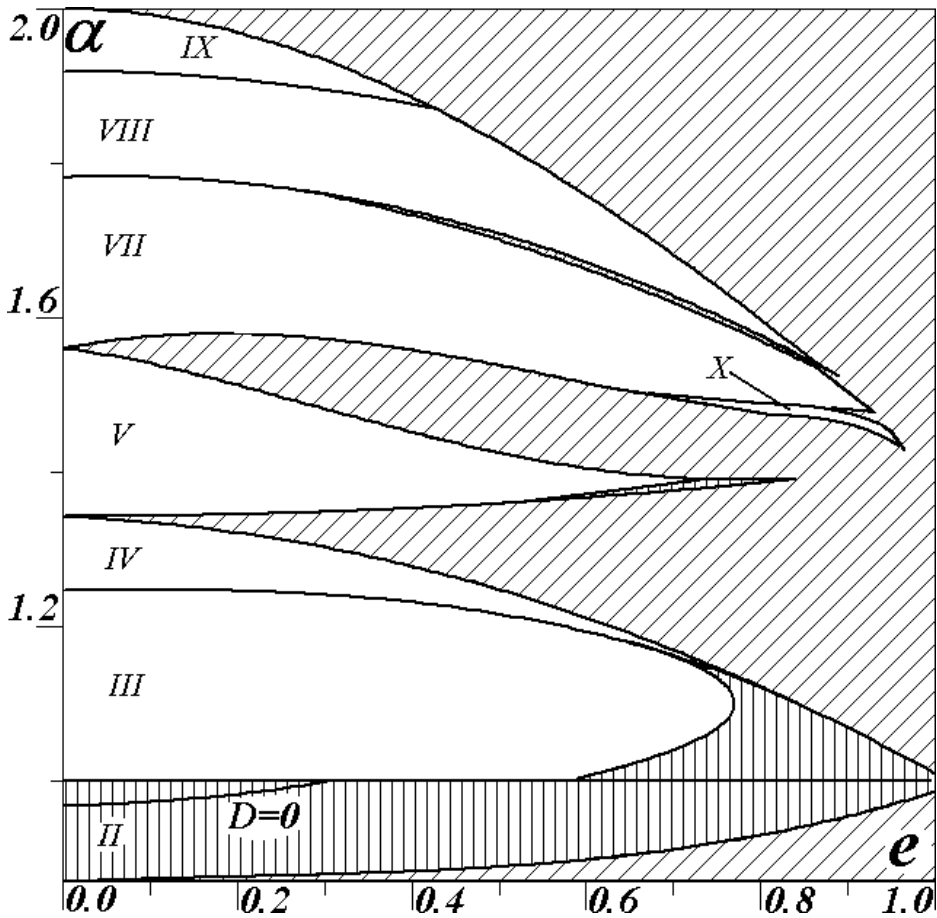


Рис. 3. Области формальной устойчивости, кривые  $D = 0$

— целые числа,  $|n_1| + |n_2| = 4$ ), найденные при помощи метода Депри—Хори [7], имеют вид  $\alpha = \alpha^{(0)} + e\alpha^{(1)} + e^2\alpha^{(2)} + \dots$ . При  $e = 0$  порождающими точками данных резонансов являются точки  $\alpha = \alpha^{(0)}$ , приведенные в табл. 3, все коэффициенты  $\alpha^{(1)}$  обращаются в нуль, значения  $\alpha^{(2)}$  приведены в табл. 3.

Если числа  $n_1$  и  $n_2$  разного знака, то, согласно [16], имеет место формальная устойчивость (или устойчивость в любом сколь угодно высоком конечном нелинейном приближении относительно  $q_i, p_i$ ).

Пусть теперь числа  $n_1, n_2$  имеют одинаковые знаки. При помощи алгоритма нормализации, изложенного в статье [11], для значений параметров, принадлежащих кривым резонансов четвертого порядка, гамильтониан системы приводится к виду

$$H = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + G(r_1, r_2) + r_1^{n_1/2} r_2^{n_2/2} (\beta_{n_1 n_2} \sin \Phi + \gamma_{n_1 n_2} \cos \Phi) + O((r_1 + r_2)^{3/2}), \quad (8)$$

где

$$\Phi = n_1 \varphi_1 + n_2 \varphi_2 - Nv;$$

$$G(r_1, r_2) = c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2,$$

$$q_i^* = \sqrt{2r_i} \sin \varphi_i, \quad p_i^* = \sqrt{2r_i} \cos \varphi_i.$$

Если выполняется неравенство

$$|G(n_1, n_2)| = n_1^{n_1/2} n_2^{n_2/2} \sqrt{\beta_{n_1 n_2}^2 + \gamma_{n_1 n_2}^2}$$

(при  $n_i = 0$  считаем, что  $n_i^{n_i/2} = 1$ ), то изучаемое движение неустойчиво по Ляпунову. Если же выполнено обратное неравенство, то имеет место устойчивость при учете в разложении гамильтониана форм по крайней мере до четвертого порядка включительно относительно  $q_i^*, p_i^*$  ( $i = 1, 2$ ).

Расчеты показывают, что на всех резонансных кривых четвертого порядка имеет место устойчивость при учете в гамильтониане членов по крайней мере до четвертого порядка включительно.



Отметим, однако, что устойчивость в точках пересечения резонансных кривых не исследовалась.

Если предположить, что резонансы до четвертого порядка включительно отсутствуют, то в (8)

$\beta_{n_1 n_2} \equiv 0, \gamma_{n_1 n_2} \equiv 0$ . Тогда при условии знакоопре-

деленности квадратичной формы  $G(r_1, r_2)$  в области  $r_i \geq 0$  движение формально устойчиво [15]. Если

выполняется неравенство

$$D = c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02} \neq 0, \quad (9)$$

то невозмущенное движение устойчиво для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий.

На рис. 3 вертикальной штриховкой обозначены области формальной устойчивости. Отметим, что в областях I, II рис. 3 достаточное условие формальной устойчивости выполнено для всех значений параметров, им принадлежащим.

Проверка условия (9) показала, что устойчивость для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий имеет место почти всюду в областях устойчивости в первом приближении (за исключением, возможно, кривой  $D = 0$ , изображенной и подписанной на рис. 3). Данная кривая лежит в областях значений параметров, которым соответствует формально устойчивое движение, и выходит из точки  $(0; 0,96121)$  плоскости  $(e, \alpha)$ .

Автор выражает глубокую благодарность профессорам А.П.Маркееву и О.В.Холостовой за внимание к данной работе.

#### Библиографический список

1. Белецкий В.В. О либрации спутника // Искусственные спутники Земли. М.: АН СССР, 1959. № 3. — С. 13-31.
2. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. — М.: Наука, 1965.
3. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. — М.: Изд-во Московского университета, 1975.
4. Ляпунов А.М. Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах // Собр. соч. Т. 1. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1954. С. 327-401.

5. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966.

6. Маркеев А.П. Исследования устойчивости движения в некоторых задачах небесной механики. — М.: Институт прикладной математики АН СССР, 1970.

7. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. — М.: Наука, 1978.

8. Маркеев А.П. Теоретическая механика. — М.: Редакция журнала «Регулярная и хаотическая динамика» ЧеРо, 1999.

9. Маркеев А.П. Об одном особом случае параметрического резонанса в задачах небесной механики // Письма в Астрон. журнал. 2005. Т. 31. № 5. С. 388-394.

10. Маркеев А.П. О кратном резонансе в линейных системах Гамильтона // Доклады АН. 2005. Т. 402. № 3. С. 339-343.

11. Маркеев А.П. Конструктивный алгоритм нормализации периодического гамильтониана // ПММ. 2005. Т. 69. Вып.3. С. 355-371.

12. Маркеев А.П., Чеховская Т.Н. Об устойчивости цилиндрической прецессии спутника на эллиптической орбите // ПММ. 1976. Т. 40. С. 1040-1047.

13. Холостова О.В. Об устойчивости цилиндрической прецессии спутника в одном частном случае // Космич. исследования. 2008. Т. 46. Вып.3. С. 270-278.

14. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972.

15. Glimm J. Formal stability of hamiltonian systems // Commun Pure and Appl. Math. 1964. Vol.17. No.4. P. 509-526.

16. Moser J. New aspects in the theory of stability of hamiltonian systems // Commun, Pure and Appl. Math. 1958. Vol.11. No.1. P. 81-114.

Московский авиационный институт  
Статья поступила в редакцию 14.12.2009